ALMA MATER STUDIORUM* - *UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Geometria per i piccoli. Un manuale per l'insegnamento della geometria elementare di G.C. Young e W.H. Young.

RELATORE
Maria Giulia Lugaresi

CANDIDATO
Irene Piacentino

I Appello

Sessione Anno Accademico 2023/24

Indice

Introduzione

In questo elaborato ci proponiamo di analizzare il libro di geometria elementare *Geometria per i piccoli*, scritto da Grace Chisholm Young e William Henry Young, pubblicato nel 1905 e tradotto in italiano nel 1907 da Luisa Virgilio. A tale scopo, ripercorriamo la situazione tra fine XIX e inizio XX secolo dei libri di testo di geometria sotto diversi punti di vista: politico, scientifico, culturale e sociale.
Nel primo capitolo presentiamo la condizione del sistema scolastico del 1867 post decreto Coppino, il cui obiettivo era riorganizzare la struttura scolastica, e quindi anche scegliere i libri di testo da adottare. Per la matematica viene interpellato Luigi Cremona: la sua idea consiste nell'utilizzare gli *Elementi* di Euclide come libro di testo. Per molti eminenti matematici dell'epoca però gli *Elementi* non si prestavano alla didattica. Queste critiche danno il via alla stesura di testi italiani che tentano di riformulare gli *Elementi* con la giusta mediazione didattica. Il primo libro che cerca di rispondere a questa richiesta è il manuale di Enrico Betti e Francesco Brioschi, pubblicato nel 1868, che tuttavia si rivela troppo aderente al testo euclideo.
Sorge l'esigenza di modificare e semplificare gli *Elementi*. Tra il 1868 e il 1869 entra in gioco l'opera di Enrico D'Ovidio e Achille Sannia: gli autori modificano la trattazione euclidea laddove riscontrano ostacoli didattici, ad esempio all'inizio del loro trattato postulano il movimento delle figure geometriche. Per il resto rimangono fedeli ad Euclide: separano l'algebra dalla geometria, separano geometria piana e solida, esplicitano tutti i postulati all'inizio.
Il dilagante dibattito sull'utilizzo a scuola del testo di Euclide genera in Italia un periodo di sviluppo sul piano della trattatistica italiana: fioccano libri di matematica di alto livello che prima erano del tutto assenti. Anche sul fronte socio-culturale si registrano progressi: nascono riviste scientifiche, cresce l'interesse per nuove metodologie di insegnamento, si creano associazioni matematiche. La geometria in sé diventa oggetto di riflessione e si comprende quanto sia importante sviscerarla nelle sue caratteristiche fondamentali per redigere un buon libro di testo. La legislazione scolastica nel 1870 stabilisce l'obbligo di usare gli *Elementi* di Euclide solo per l'insegnamento della geometria piana e lascia libertà di scelta per la modalità di insegnamento della geometria solida. Nel frattempo, nasce una nuova corrente di pensiero per l'insegnamento della geometria: il fusionismo, che consiste nel trattare simultaneamente le geometrie piana e solida. Il ministro Nicolò Gallo nel 1900 lascia piena libertà all'insegnante di scegliere tra il metodo euclideo e il fusionismo. Per quanto riguarda lo sviluppo della ricerca dei fondamenti della geometria si menzionano Felix Klein e il programma Erlangen, che trovano come seguace e sostenitore in Italia l'illustre Corrado Segre. Le idee matematiche e anche didattiche di Klein e di Segre saranno di notevole importanza per i coniugi Young.
Nel 1899 viene pubblicata l'opera matematica più importante di David Hilbert, egli riprende gli *Elementi* di Euclide risolvendone le problematiche. Anche questo libro non si considera adeguabile alle esigenze didattiche poiché troppo rigoroso. Si dibatte dunque anche sul ruolo dell'intuizione e del rigore nell'insegnamento e

apprendimento della geometria. Tra i manuali nati dalla ricerca sui fondamenti citiamo quello di Giuseppe Veronese e quello di Michele De Franchis. Nel 1903 Federigo Enriques e Ugo Amaldi fanno stampare il loro testo di geometria elementare risultando il testo con il miglior equilibrio tra intuizione e logica.

Nel secondo capitolo approfondiamo la vita insolita di due matematici che vissero nel contesto socio-culturale illustrato nel primo capitolo, i coniugi Young. Grace e William, entrambi inglesi, studiano matematica a Cambridge. I due si conoscono all'interno dell'ambiente universitario in quanto William sarà il tutor temporaneo al Girton College di Grace al terzo anno. Dopo la laurea, Grace decide di intraprendere il dottorato in Germania, sotto la guida del matematico tedesco Felix Klein. Diventa la prima donna in Germania a conseguire il titolo di dottorato in ricerca. Una volta tornata a Londra, riprende i contatti con William e, dopo un periodo di corteggiamento, i due decidono di sposarsi. Dalla loro unione discendono ben sei figli, uno dei quali rimane ucciso durante la prima guerra mondiale, mentre tutti gli altri riescono ad intraprendere brillanti carriere scientifiche. I coniugi pubblicano in totale circa 250 saggi e tre libri, tra cui *A first book of Geometry*, pubblicato nel 1905, per l'insegnamento elementare e prescolastico della geometria. I riconoscimenti ottenuti da William nel corso della sua vita sono molteplici, infatti è stato membro della Royal Society nel 1907, presidente della Società Matematica di Edimburgo nel 1911, presidente della London Mathematical Society dal 1922 al 1924, relatore al Congresso Internazionale nel 1924 e nel 1928 ed inoltre ha ricevuto le medaglie De Morgan nel 1917 e Sylvester della Royal Society nel 1928.

Nel terzo capitolo prendiamo in esame il contenuto dell'opera dei coniugi Young, *Geometria per i piccoli*. In particolare, ci soffermiamo sui capitoli più significativi dal punto di vista della didattica della geometria.

È di fondamentale importanza analizzare i primi capitoli poiché essi introducono per la prima volta il lettore alla geometria. Successivamente, riteniamo interessante mostrare come gli autori trattano i concetti di angolo, congruenza, perpendicolarità, parallelismo. Gli autori portano avanti simultaneamente geometria piana e geometria solida, proponendo al lettore costruzioni di modellini di solidi di carta di volta in volta.

Conclusa l'analisi dei contenuti, proponiamo una riflessione generale sull'opera, inserendola all'interno del dibattito nato dal decreto Coppino. Dunque, osserviamo come gli autori si schierano rispetto alla questione "Euclide a scuola": per loro, non è pensabile rinunciare ad Euclide nell'insegnamento-apprendimento della geometria, sebbene la trattazione euclidea debba essere opportunamente modificata in base all'età degli allievi. L'opera degli Young si rivolge ad allievi alle prime armi, bambini dell'età dai quattro agli otto anni, per cui il rigore e il formalismo euclidei devono essere ridimensionati per lasciare il giusto spazio all'intuizione.

Nel quarto ed ultimo capitolo ci soffermiamo sulla tecnica di piegatura della carta che gli Young stessi utilizzano per costruire i modellini di carta, ovvero ci occupiamo della geometria degli origami. In primo luogo cerchiamo di ricostruire la storia di questa nuova geometria, dall'origine agli sviluppi più recenti, e in secondo luogo valutiamo i vantaggi dell'uso degli origami nella didattica.

Capitolo 1

Panoramica sui libri di testo per l'insegnamento della geometria elementare tra fine XIX e inizio XX secolo in Italia

1.1 Dalla legge Casati alla legge Coppino

Tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento il sistema scolastico del Regno d'Italia venne investito da una serie di cambiamenti sotto diversi punti di vista: politico, culturale, scientifico. Dal 1859 la Legge Casati suddivideva la scuola elementare in due gradi, inferiore e superiore, ciascuno della durata di due anni, e rendeva obbligatoria la frequenza ai ragazzi dai 6 agli 8 anni quindi solo per il primo grado. Quest'ultima sanciva per la prima volta la gratuità e l'obbligatorietà della scuola, ma non era stata efficace nella lotta contro l'analfabetismo e l'evasione scolastica, come invece poi lo fu la legge che subentrò a questa, ovvero quella di Coppino. Nel 1877 fu pubblicata nella Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia la Legge sull'obbligo dell'istruzione elementare proposta dal ministro Michele Coppino: i bambini e le bambine di 6 anni erano obbligati a frequentare la scuola elementare del Comune o le scuole private. L'obbligo però era previsto fino ai 9 anni, un anno in più rispetto a quanto previsto dalla Legge Casati, inoltre se il bambino non superava con successo l'esame finale, era esteso fino ai 10 anni. Anche in questo caso l'obbligo era previsto solo per il primo grado e si poteva accedere al secondo grado attraverso il superamento di un esame. Secondo il ministro Coppino, era necessario istruire il futuro cittadino con *"le prime nozioni dei doveri dell'uomo e del cittadino, la lettura, la calligrafia, i rudimenti della lingua italiana, dell'aritmetica e del sistema metrico"*: grazie ad egli venne dato più spazio alle materie scientifiche. Inoltre, tale legge prevedeva delle ammonizioni e ammende per i genitori che non adempivano all'obbligo nei confronti dell'istruzione dei figli, in particolare si trattava di sanzioni che partivano da 50 centesimi fino ad un massimo di 10 lire: questa era un'altra novità rispetto alla legge precedente. Nel 3° supplemento al n°291 della Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia (24 ottobre 1867) erano state già esposte le istruzioni e i programmi da seguire per l'insegnamento elementare di scienze fisiche e naturali nelle scuole serali, magistrale e tecniche; ma anche per l'insegnamento della lingua italiana e dell'aritmetica nelle scuole elementari. Per la scuola primaria l'unico riferimento alla geometria riguardava la definizione delle figure geometriche e il loro disegno a mano libera, mentre per l'aritmetica si sottolineava l'importanza di proporre problemi semplici e soprattutto concreti. Dalle parole del ministro emergeva anche la volontà di allontanarsi dal dogmatismo che caratterizzava le scuole di allora.

Infatti, nelle considerazioni generali di queste Indicazioni si raccomandava al maestro di equilibrare il metodo pratico con quello teorico, anzi, data la tenera età degli studenti, di prediligere quello pratico. Secondo Coppino, lo scopo degli studi elementari non era solo quello di istruire il fanciullo ma anche di educarlo *"infondendo nei cuori dei giovanetti d'ogni bella virtù"*. Citando testualmente il decreto: *"all'istruzione vada sempre accompagnata l'educazione, senza la quale l'istruzione è cosa morta o dannosa. I giovinetti che escono dalla quarta classe elementare, devono essere istruiti e savi e piegati al bene"*. Nel Regno d'Italia si respirava dunque un clima di progresso: l'istruzione diventava fondamentale per il regno e i giovani dovevano diventare delle persone capaci di fare scelte sagge grazie alla formazione e all'educazione scolastiche.

1.2 Euclide a scuola: l'idea di Luigi Cremona

Il ministro Coppino non riorganizzò da solo il sistema scolastico, ma vennero costituite delle Commissioni Speciali per preparare nuovi programmi e dare nuove direttive per raggiungere, oltre all'unità politica, anche quella culturale. In particolare, per la matematica, il ministro venne affiancato da Luigi Cremona. Egli fu professore nei licei e nei ginnasi ed infine ebbe la cattedra di Geometria superiore nel 1860 presso l'università di Bologna. Il ministro Coppino individuò la sua figura per redigere nuovi programmi per l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria: grazie alla sua esperienza lavorativa, infatti, Cremona aveva potuto constatare il dislivello fra scuola secondaria e studi superiori, gli studenti presentavano profonde lacune al momento dell'accesso all'università. L'idea di Cremona era quella di una matematica come *"un mezzo di cultura generale, una ginnastica del pensiero diretta a svolgere la facoltà di raziocinio ed aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza"*. Questa visione è in realtà molto attuale in quanto lo stesso si può leggere nelle prime righe delle Indicazioni Nazionali per la scuola dell'infanzia e del primo ciclo del 2012: *"le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il pensare e il fare e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani"*. Nonostante quindi da sempre nella storia della matematica si pensi che la matematica contribuisca alla formazione completa della persona, spesso ancora oggi ci si imbatte, fuori dall'ambiente accademico, in una concezione della matematica come una scienza sterile e con il solo fine di saper contare.

Se per Cremona la matematica era un esercizio di pensiero allora il miglior modo per insegnarla era il metodo euclideo, modello eccellente di rigore e ragionamento matematico. Quindi, alla richiesta di Coppino di stabilire programmi e libro di testo, Cremona rispose che la geometria si sarebbe insegnata tramite gli *Elementi* di Euclide. Inoltre, egli inveiva contro la moda sempre più dilagante dell'applicare l'algebra alla geometria e raccomandava al docente di *"non intorpidire la purezza della geometria antica trasformando teoremi geometrici in formule algebriche"*. Infatti, sebbene siano tanti i vantaggi di un approccio algebrico, una formula poteva oscurare il vero significato geometrico. In quegli anni, nelle scuole italiane si usavano libri di testo stranieri, che sembravano seguire Euclide, ma che sostanzialmente lo tradivano nell'impostazione metodologica. Tra questi c'era *Éléments de Géométrie* di Adrien Marie Legendre: ciò che caratterizzava gli *Elementi* di Euclide era l'impostazione assiomatica, ovvero il concatenarsi dei risultati che discendono dagli assiomi e dai risultati precedenti, questa catena logica però si perdeva nel testo legendriano. Se Euclide presentava le proposizioni alternando teoremi e problemi, allora Legendre li separa: prima i teoremi e poi i problemi. Questo disaccoppiamento era dovuto al fatto che l'autore non riteneva essenziale la costruzione degli oggetti geometrici prima che questi venissero usati nelle dimostrazioni dei teoremi. Mentre per Euclide il fatto di poter costruire con riga e compasso un oggetto matematico ne dimostrava l'esistenza stessa. Quindi, nonostante si seguisse la tradizione euclidea, erano state fatte modifiche imperdonabili per studiosi come Cremona. Per quest'ultimo invece ci si doveva rifare fedelmente agli *Elementi* di Euclide: così prendevano il via la stesura e la pubblicazione negli anni successivi di vari testi di geometria, più o meno buoni, che riprenderanno e amplieranno con commenti ed esercizi gli *Elementi* di Euclide.

Esattamente un anno dopo l'entrata in vigore della riforma Coppino, nel 1868, venne pubblicato il libro *Gli elementi d'Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei* a cura dei professori Enrico Betti e Francesco Brioschi a cui collaborò anche Cremona stesso. Lo scopo degli autori Betti e Brioschi era quello di redigere un manuale elementare che si attenesse alle nuove riforme e che sostituisse i libri stranieri fino a quel momento usati nelle scuole, con l'intenzione di recuperare il rigore e il ragionamento che si erano persi con l'appiattimento della geometria all'aritmetica nei testi come quello di Legendre. Il Betti-Brioschi si rivelava però essere nulla di più che una traduzione del testo originale di Euclide: sicuramente rispondeva al bisogno di Cremona di tornare ad Euclide, ma non era possibile un'efficace mediazione didattica senza i dovuti aggiustamenti. Infatti, per quanto fosse vero che gli *Elementi* di Euclide rappresentavano al meglio la matematica con tutto il suo rigore era opportuno adattare questo testo al mondo attuale: sia per quanto riguardava il linguaggio sia il contenuto. Secondo J.M.Wilson in *Euclide come testo di geometria elementare,* pubblicato nel 1868, il libro di Euclide era troppo *"antiquato, artifizioso"*, ormai obsoleto come libro d'istruzione. Cremona, sostenitore e collaboratore di Betti e Brioschi, rispose subito alle critiche mosse ma senza riuscire ad essere davvero convincente. Le problematiche che aveva sollevato Wilson erano reali. Anche Cremona stesso si convincerà di questo e dirà lui stesso che scrivere un libro che si adatti alle scuole è un'opera assai complessa.

1.3 Euclide a scuola: vantaggi e svantaggi

Essere a favore o contro Euclide come libro di testo diventava così un dibattito sempre più acceso e su larga scala in quanto legava inevitabilmente mondo accademico e mondo scolastico: chi come Giuseppe Peano era a favore dell'utilizzo dell'opera di Euclide, ritenendola superiore a tutti e senza tempo, chi come Giusto Bellavitis ne riconosceva le qualità logico-matematiche ma non quelle didattiche. Insegnare non poteva voler dire far imparare a memoria quest'opera agli alunni: bisognava far ragionare le giovani menti ed educarle al vero far matematica così com'era necessario che in queste menti si infondessero spirito critico e immaginazione. Questo non era possibile se si seguiva troppo fedelmente l'opera euclidea che a causa dell'impostazione assiomatica non dava spazio alla scoperta. La questione Euclide a scuola portò alla nascita di un progressivo interessamento verso la formazione e verso l'educazione della futura classe dirigente.

Grazie a questo dibattito, come anticipato sopra, si cominciò a vantare in Italia una serie di testi di manuali di alto livello che prima erano del tutto assenti nella letteratura matematica italiana. Il dibattito aveva scatenato anche una profonda riflessione su altre questioni riguardanti l'insegnamento della geometria: era urgente analizzare la materia stessa nelle sue caratteristiche più profonde per poter capire come insegnarla e in che modo. Per questo all'interno della tematica dei manuali di geometria rientra anche la riflessione sui fondamenti della geometria: il movimento degli oggetti geometrici, il suo rapporto con la teoria dei numeri reali e il rapporto tra l'intuizione e l'impostazione ipotetico-deduttiva. Nascevano riviste specializzate dedicate all'insegnamento della matematica e vennero fondate nel 1875 le scuole di Magistero per la formazione dei docenti, la Mathesis a Torino tra 1895-96, la Commissione Internazionale per l'Insegnamento Matematico a Roma nel 1908. In particolare, la nascita delle scuole di Magistero mostrava il crescente interesse per la formazione degli insegnanti, molti dei quali poi scrissero i propri libri di testo. Un matematico che tenne per 19 anni lezioni presso questa scuola fu Corrado Segre, figura che diede un enorme contributo al rinnovamento dell'insegnamento e apprendimento della matematica.

1.4 Gli albori della trattatistica italiana

Cremona dopo essersi convinto della verità delle problematiche mosse al Betti-Brioschi, lanciava un nuovo appello alla comunità scientifica ovvero quello di scrivere un libro di testo che riprendesse in modo migliorato e semplificato gli *Elementi* di Euclide. Erano riusciti in questo obiettivo Enrico D'Ovidio e Achille Sannia con il loro *Elementi di Geometria*, prima edizione del 1868-69 e ristampato fino all'undicesima edizione. Questo libro trattava di geometria elementare: gli autori enunciavano esplicitamente tutti i postulati, separavano l'algebra e la geometria e distinguevano la geometria piana da quella solida, essenzialmente l'impostazione era la stessa di quella euclidea. Per quanto riguardava il movimento, però, risolvevano il problema riscontrato nel testo di Euclide postulando a priori il fatto che una figura si possa muovere nello spazio. Dopo di ché, le condizioni di uguaglianza tra queste due figure rimanevano le stesse di quelle euclidee, bastava cioè sovrapporle.

Un altro testo molto apprezzato fu quello di Aureliano Faifofer, *Elementi di Geometria ad uso dei licei*, pubblicato nel 1880. L'attenzione alla trasposizione didattica lo rese un caposaldo della tradizione manualistica scolastica, infatti nel 1909 venne stampata la diciassettesima edizione e venne tradotto in francese, spagnolo e giapponese.

1.5 L'influenza del dibattito sulla legislazione scolastica e l'avvento del fusionismo

A seguito del dibattito nato grazie al decreto Coppino, la legislazione scolastica nel 1870 rettificava i programmi di matematica da seguire nelle scuole secondarie: la geometria euclidea era obbligatoria solo per i libri di geometria piana, per quella solida gli insegnanti erano liberi di scegliere come proseguire.

Negli anni successivi il dibattito si spostò sul rapporto tra geometria intuitiva e geometria razionale, nel 1881 il ministro dell'istruzione Guido Baccelli inseriva nel ginnasio lo studio della geometria intuitiva in modo da porre le basi per quella razionale negli anni superiori. Dopo anni di pareri contrastanti, che escludevano l'uso della geometria intuitiva, nel 1900 si ritornava definitivamente alla proposta di Baccelli ma opportunamente modificata: il ministro Nicolò Gallo dichiarava il ripristino della geometria intuitiva nel ginnasio e quella razionale negli anni superiori, senza menzionare Euclide. Infatti, in quegli anni si stava sviluppando un'altra corrente di pensiero che prevedeva la fusione tra geometria piana e solida, il cosiddetto *fusionismo*. In questo senso il ministro Gallo lasciava libertà all'insegnante di seguire il metodo fusionista o quello euclideo.

È necessario soffermarsi a riflettere su quanto si sia evoluta l'idea dell'insegnamento della geometria dal decreto del ministro Coppino del 1867 al decreto del ministro Gallo del 1900: dall'obbligo di seguire fedelmente Euclide alla libertà dell'insegnante di scegliere quale testo usare e in che modo fare lezione nel rispetto dei programmi e degli obiettivi da raggiungere.

Quattro anni più tardi questa libertà di scelta veniva messa di nuovo in discussione, Rodolfo Bettazzi aveva condotto un'intervista agli insegnanti dei licei per capire quanti fossero favorevoli al fusionismo, la maggioranza era contraria al nuovo metodo. Il fusionismo, come anticipato sopra, consisteva nel condurre la teoria della geometria piana e solida parallelamente, intrecciandola quando conveniva, al fine di ottimizzare i tempi e promuovere riflessioni dovute al confronto tra esse. Secondo i sostenitori del metodo risultava conveniente ricorrere alla geometria solida per dimostrare teoremi della geometria piana, inoltre, queste due presentavano molte analogie, che se presentate separatamente richiedevano inutili ripetizioni. L'avvento del fusionismo in Italia per la geometria elementare si doveva a Riccardo De Paolis che nel 1884 pubblicava il suo *Elementi di Geometria*. Oltre all'impostazione fusionistica, vantava la presenza di accenni alle geometrie non euclidee: era un passo decisamente importante se si considerava che fino a poco tempo prima l'unica geometria reputata "vera" era quella euclidea. Nonostante la novità, non venne adottato dagli insegnanti: a causa della mancanza di esercizi, dell'uso di simboli diversi, della separazione dell'algebra dalla geometria non si prestava all'utilizzo in classe. Uno dei rischi dell'adottare il fusionismo risiedeva nel trovare analogie anche dove non sussistevano, anche per questo la fusione venne ribattezzata come la *"confusione della geometria"*.

1.6 La ricerca sui fondamenti della geometria

Tra gli altri meriti del dibattito acceso dal decreto Coppino c'era anche l'aver dato il via alla ricerca sui fondamenti della geometria. Non si può non menzionare in quest'occasione Felix Klein che nel 1872 pubblicò il programma di Erlangen che riuniva tutte le geometrie e le categorizzava in base alle loro proprietà invarianti, ad esempio la geometria elementare rappresentava per lui lo studio delle proprietà invarianti per isometrie. Klein nell'ambito della scuola si spese molto: non solo si dedicava alla ricerca ma anche alla riorganizzazione scolastica, in particolare i programmi di matematica per i licei. Nel frattempo nel 1889 in Italia Corrado Segre chiedeva a Gino Fano di tradurre in italiano il suddetto programma tedesco in quanto si trovava in pieno accordo con le idee del matematico Klein: avevano la stessa concezione di insegnamento della matematica. Segre, oltre ai corsi di geometria algebrica, insegnava presso la Scuola di Magistero dell'università di Torino, volta a formare i futuri insegnanti di matematica. L'idea di insegnamento di Segre si può brevemente descrivere con l'espressione *"educare alla scoperta"*: secondo lui, infatti, i giovanissimi iniziati alla matematica non necessitavano di tanto rigore quanto piuttosto di scoprire e risolvere i problemi da soli. Come si può leggere dai quaderni sulle lezioni da lui tenute presso la scuola di Magistero, ancora oggi conservati, il primo approccio alla materia doveva essere più sperimentale e intuitivo possibile; inoltre considerava di notevole importanza il collegamento della matematica alle altre discipline. Secondo Segre, l'interdisciplinarietà vantava la capacità di accendere la curiosità dei ragazzi, infatti per Segre era fondamentale mantenere vivo l'interesse degli studenti, raccomandava bene ai suoi alunni-docenti di non far annoiare. Oltre all'interdisciplinarietà, egli insegnava ai futuri docenti l'importanza di variare i metodi di insegnamento, in base all'argomento, alla classe e al tempo. Secondo il suo pensiero, un bravo insegnante doveva equilibrare rigore e intuizione: una definizione era necessaria solo se utile come chiarimento, una dimostrazione solo se non era troppo astrusa. Anche inserire la storia della matematica all'interno della didattica e risaltare le matematiche elementari da un punto di vista superiore facevano parte delle sue idee per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento della matematica.

La ricerca matematica a inizio Novecento verteva sulla riduzione al numero minimo di assiomi ed enti primitivi, sulla dipendenza degli assiomi e la non contraddittorietà. Nasceva in quegli anni l'opera *Grundlagen der Geometrie* (1899) di David Hilbert in cui l'autore riprendeva tutta la matematica presente negli *Elementi* di Euclide e ne risolveva le problematiche dal punto di vista del rigore. L'impostazione dell'opera era ipotetico-deduttiva, ovvero una struttura in cui i concetti primitivi acquistano significato solo grazie agli assiomi e ai teoremi dimostrati a partire dagli assiomi, al contrario di Euclide che era guidato dall'osservazione diretta del mondo esterno. Hilbert non definiva gli oggetti geometrici ma ne dimostrava le proprietà così che *gli oggetti avrebbero potuto essere sedie, tavoli e boccali di birra invece di punti, rette e piani*. Dunque, Hilbert viaggiava verso un'assiomatica moderna e decisamente più astratta: questo rendeva necessario dimostrare l'indipendenza e non la contraddittorietà degli assiomi. Secondo diversi matematici come Segre e Henri Poincaré, però, quest'opera non era adatta come libro di testo scolastico in quanto il giovane avrebbe percepito questo rigore come noioso e non sarebbe stato in grado di apprezzare il valore della dimostrazione poiché avrebbe letto nel testo dimostrazioni di cose evidenti. Il ruolo della logica nella matematica è di far comprendere all'alunno di non potersi fidare solamente dell'intuizione, ma secondo Segre questo non era un motivo sufficiente per mettere completamente da parte l'intuizione, d'altronde *"la matematica non sarebbe mai nata con la sola logica"*. Il decreto Coppino era stato capace di influenzare la ricerca e di mobilitare scienziati e docenti, adesso accadeva il contrario: i temi della ricerca si riversavano sulla didattica grazie all'interscambio tra mondo accademico e scolastico. Per le varie problematiche che potevano riscontrarsi nell'utilizzo del testo di Hilbert in classe, nel 1900 il ministro Gallo si guardava bene dall'introdurre i risultati della ricerca a scuola decidendo quindi di ritornare all'insegnamento della geometria intuitiva nel ginnasio inferiore e posticipando le riflessioni sui fondamenti all'ultimo anno.

1.7 I manuali di geometria di Giuseppe Veronese e Michele De Franchis

Tra i manuali nati dai nuovi risultati di ricerca sui fondamenti della geometria ci sono quello di Giuseppe Veronese e quello di Michele De Franchis. *Gli Elementi di Geometria* di Giuseppe Veronese nato da una collaborazione con Paolo Gazzaniga, professore di liceo a Padova, si caratterizzava per un'enunciazione degli assiomi come verità evidenti tramite l'osservazione empirica, questi erano presentati solo quando ne sorgeva la necessità, in modo da essere più facilmente accettati dagli studenti. La retta era un ente fondamentale per la costruzione degli altri oggetti geometrici; le rette parallele erano definite come rette simmetriche rispetto ad un punto; l'uguaglianza deriva dal postulare l'esistenza di segmenti uguali; non viene usato il movimento di figure geometriche perché trattasi secondo l'autore di un problema psicologico non riguardante questo manuale. Per quanto concerne la geometria piana e la geometria solida, secondo Veronese fonderle non era così utile come si pensava. Qualche anno più tardi il processo di miglioramento venne frenato da una nuova legge. Nell'articolo 3 della Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia del 1904 il ministro Vittorio Emanuele Orlando concedeva *"agli studenti promossi alla seconda classe del liceo facoltà di scelta tra l'insegnamento del greco e quello della matematica"* arrestando così un progresso scientifico che aveva visto nascere riviste scientifiche, associazioni, collaborazioni tra scuola e università. Questo provvedimento venne poi abrogato solo nel 1911, ben 7 anni dopo. Il testo di *Geometria elementare ad uso dei licei e dei ginnasi superiori* di Michele De Franchis pubblicato nel 1909, a differenza di quello di Veronese, postulava l'esistenza del movimento di figure geometriche e definiva l'uguaglianza tra figure grazie alla sovrapponibilità. Infatti, la novità di questo testo risiedeva proprio nella presenza di un trattato sul gruppo di movimenti. Gli unici enti primitivi per De Franchis erano il punto e il segmento, inoltre trattava insieme geometria solida e geometria piana e nella prefazione asseriva quanto fosse importante tralasciare il puro logicismo a favore di una logica derivante da basi sperimentali. Nonostante le buone intenzioni, anche questo testo secondo gli insegnanti non era in tutti i suoi passaggi trasponibile alla didattica.

1.8 Il successo dell'Enriques-Amaldi

Nel 1903 veniva pubblicato il manuale di geometria elementare Enriques-Amaldi, ancora oggi presente nelle scuole nelle edizioni più recenti. Questo libro rappresentava finalmente il giusto equilibrio tra intuizione e rigore. La concezione di Federigo Enriques, più che di Ugo Amaldi, della matematica consisteva nella seguente: essa è sia logica che intuizione, gli insegnanti degli scolari più giovani devono dare più importanza all'osservazione empirica. All'inizio bisognava far lavorare gli studenti, fargli conoscere il gusto della scoperta, sfruttando il *learning by doing*; usare come dimostrazioni delle semplici verifiche di casi particolari senza bisogno di rigore. Negli anni successi poi l'insegnante doveva guidare lo studente in maniera graduale verso una visione razionale e non solo intuitiva della disciplina. Il manuale seguiva il metodo razionale-induttivo: si partiva dall'osservazione, si generavano ipotesi e si dimostravano teoremi e così via da capo. L'intento non era di contrapporsi agli *Elementi* di Euclide ma di integrarlo allontanandosi però dalla natura troppo dogmatica del testo. Anche in questo testo le geometrie solida e piana venivano separate, si postulava inoltre la nozione di uguaglianza e si adoperava il movimento.

Nel 1911 la Commissione Internazionale per l'Insegnamento Matematico affidava a Guido Castelnuovo il compito di indagare il ruolo del rigore nella scuola secondaria. Nella sua ricerca egli individuava vari metodi: logico, empirico logico, fusione tra induttivo e deduttivo, intuitivo-sperimentale.

Dal dibattito nato tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento sicuramente non si è stabilito il metodo migliore di insegnare la geometria, ma grazie ad esso avviene un aumento di interesse verso la didattica della matematica; una migliore collaborazione tra politica, ricerca e istituzioni; manuali italiani di alto livello di geometria elementare, una maggiore attenzione sulla formazione degli insegnanti e la nascita di diverse correnti di pensiero sui metodi d'insegnamento e quindi anche sulla struttura di un buon libro di testo scolastico.

Capitolo 2

Biografia dei coniugi Young e riferimenti alle loro opere a stampa

Dopo aver fornito nel primo capitolo di questa tesi una panoramica dei principali libri di testo per l'insegnamento della geometria tra fine XIX e inizio XX secolo, vogliamo ora focalizzare l'attenzione su un testo specifico, intitolato *A First Book of Geometry*, apparso in traduzione italiana per la prima volta nel 1907 col titolo *Geometria per i piccoli.* Prima di approfondirne il contenuto vogliamo brevemente ripercorrere la biografia dei due autori, i coniugi Grace Emily Chisholm (1868-1944) e William Henry Young (1863-1942). Si tratta di due eminenti matematici del Novecento la cui unione è speciale sotto diversi aspetti. È possibile ricostruire la loro vita soprattutto grazie alle note autobiografiche di Grace.

2.1 La giovinezza di Grace

Figura 2.1.1 Grace Chisholm

Grace Chisholm nacque ad Haslemere, vicino Londra il 15 marzo del 1868 da genitori borghesi: il padre, Henry William, era un importante funzionario pubblico; il nonno era stato segretario del Primo Ministro, Lord Grenville; e la madre, Anna Louisa Bell, era un'eccellente pianista. Henry William sostituì all'età di quattordici anni il padre e si occupò di conti pubblici, nel 1866 gli venne affidato il Dipartimento di Pesi e Misure. Quando il padre andò in pensione, la famiglia si trasferì a Haslemere fuori dal caos londinese e la madre si occupò dell'istruzione di Grace e dei suoi altri due figli. La famiglia Chisholm conduceva una vita sociale molto attiva; erano soliti anche esibirsi nel teatro di Haslemere, essendo anche il padre un ottimo violinista. Molti personaggi eminenti dell'epoca decidevano di fermarsi a Haslemere, affascinati dai suoi luoghi e dai suoi cittadini: in queste occasioni la famiglia Chisholm conobbe diversi artisti e intellettuali. Grace venne istruita dalla madre, in particolare le insegnò la musica e le basi dell'aritmetica. In realtà, una volta pensionato, anche William Henry si occupò dell'istruzione dei suoi figli e questo fu fondamentale per la futura carriera matematica di Grace. Negli anni successivi Anna Louisa decise di ricorrere ad un'istitutrice per impartire a Grace un'istruzione più formale di quella che la famiglia avrebbe potuto darle. All'età di diciassette anni superò con successo il Senior Examination a Cambridge. Nonostante quel riconoscimento, l'unica prospettiva per le ragazze appartenenti allo stesso ambiente socio-culturale di Grace era quella di una vita spesa per il prossimo, ma grazie all'appoggio del padre prevalse per Grace la passione per lo studio, in particolare della matematica. Grace avrebbe desiderato studiare medicina, ma la madre si oppose fortemente, per questo alla fine optò per la matematica. Così nel 1889 Grace, vincitrice di una borsa di studio, entrò al Girton College di Cambridge. Girton fu la prima istituzione residenziale del Regno Unito a offrire un'istruzione di livello universitario alle donne. In realtà, nel 1869 il "College for Women" aprì presso la Benslow House a Hitchin, trenta miglia a sud rispetto Cambridge, e soltanto nel 1873 la sede venne trasferita a Girton, molto più vicino a Cambridge. Grazie a questo avvicinamento, nel 1880 le studentesse del Girton College ottennero il permesso speciale di sostenere gli esami presso l'università di Cambridge.

2.2 La giovinezza di Will


Figura 2.2.1 William Henry Young

William Henry Young nacque a Londra il 20 ottobre del 1863. Il padre di William, Henry, fu un commerciante, discendeva dalla famiglia Write, costruttori di carrozze a cui venne riconosciuto un'importante invenzione ferroviaria. Quest'ultimo studiò presso le scuole londinesi per poi prendere servizio militare all'estero, una volta tornato a Londra si sposò con Hepzibah Jeal nel 1860: William Henry, detto Will, fu il secondo di sei figli nati da questo matrimonio. Henry amava viaggiare e spesso portava con sé il secondogenito, ebbero in questo modo l'occasione di consolidare il loro rapporto e, infatti, per Will la figura del padre fu fondamentale così come lo fu per Grace. William frequentò la City of London School, il cui preside era Edwin Abbott, amico del padre e autore della famosa opera matematica *Flatlandia*. Le doti matematiche di William erano evidenti nonostante mostrasse problemi nel superare le prove d'esame. Vinse una borsa di studio per studiare matematica al Peterhouse College di Cambridge, ma a quei tempi non aveva ancora compiuto i diciassette anni così, sotto consiglio degli insegnanti, attese un altro anno prima di entrare. Durante quest'anno approfondì i suoi studi matematici e a diciotto anni partì per Cambridge, di nuovo vincitore di una borsa di studio. Nel primo periodo trascorso a Cambridge non superò brillantemente gli esami, infatti si dedicò più allo sport che agli studi, d'altronde aveva fin dai tempi della scuola dimostrato difficoltà a comprendere i meccanismi intrinseci di un esame. Nel 1884 nella prima parte del test accademico Tripos di matematica arrivò soltanto quarto, mentre nella seconda parte, tenutasi due anni più tardi, si guadagnò il primo posto vincendo un'altra borsa di studio. Il percorso di William non fu certo caratterizzato da una forte determinazione, infatti non aveva le idee chiare su quale sarebbe stata la sua strada dopo il conseguimento del titolo accademico. Aveva bisogno di una figura che lo guidasse nelle scelte: lo dimostra il fatto che, incapace di scegliere da solo l'argomento, non presentò nessun elaborato per il Premio Smith, premio assegnato ai due migliori studenti ricercatori di Matematica e Fisica presso l'Università di Cambridge. A proposito di questo, la figlia Rosalind Cecily dirà di lui: *mio padre aveva idee originali e una visione d'insieme, ma era per natura incapace di decidere: «la sua mente lavorava solo quando era stimolata dalle reazioni di un ascoltatore simpatetico».*[1] Laureatosi eccellentemente, ottenne la carica di Fellow del Peterhouse di Cambridge e nel 1888 divenne lettore di matematica al Girton College. Nonostante le cariche ricoperte, all'università svolse principalmente il ruolo di tutor degli studenti. In questa pratica si distinse: lavorò con passione e ottenne ottimi risultati, tutti i suoi studenti riuscivano a superare gli esami. Si diceva avesse il dono di *far emergere il talento latente nei suoi studenti*. Will passò sei anni della sua vita presso l'università e guadagnò abbastanza per mantenersi e per soddisfare il bisogno di viaggiare trasmessogli dal padre. Tra i vari studenti a cui fece da tutor ce ne fu una che cambiò la sua vita per sempre: Grace Emily Chisholm.

2.3 L'incontro tra Grace e Will

Negli anni in cui Grace frequentava il Girton College, Cambridge era la migliore università inglese nel settore della matematica. Questo prestigio creava però un ambiente particolarmente teso per i giovani matematici, come scriveva Grace nelle sue note autobiografiche. Dopo l'ammissione al college, Grace era alla ricerca di un tutor di matematica. In quel periodo, William Young era il miglior tutor che si potesse trovare a Cambridge al netto dei risultati, ma le sue maniere non lo erano altrettanto: questo fu il motivo che spinse Grace a scegliere come tutor un altro docente, Mr. Barry. Grace condusse il primo anno di college con successo: partecipò a conferenze, preparò elaborati per il Club di Matematica, superò la prima parte del Tripos, senza però eccellere. Nell'anno successivo, Grace trovò anche il tempo di coltivare interessi diversi dalla matematica, come l'astronomia e il teatro. Mr. Barry, durante il terzo anno di college di Grace, dovette lasciare il lavoro da tutor, Grace allora si rivolse a Mr. Young per farle da tutor temporaneo. Nel 1892 Grace riuscì finalmente ad ottenere un *first class* al Tripos, probabilmente anche grazie al nuovo tutor. Il fratello di Grace, Henry, colpito dai risultati ottenuti dalla sorella, la convinse a partecipare anche al Final Honours School in matematica ad Oxford: anche lì ottenne il first class.

[1] Citazione tratta dall'articolo di Sara Sesti al seguente link: http://www.universitadelledonne.it/Young.html

2.4 La prima donna dottore in Germania

Guadagnando sempre più successi e riconoscimenti, Grace cominciò a pensare ad un futuro fatto di studio e di ricerca. Non avendo possibilità di ottenere una borsa di studio a Cambridge, partì per la Germania, primo paese per la ricerca in matematica creativa. Grace si recò a Gottinga, uno dei migliori centri matematici tedeschi, che vantava la presenza di matematici del calibro di Felix Klein. Fu soprattutto grazie a Friedrich Althoff, responsabile dell'educazione superiore presso il Ministero della Cultura di Berlino, che Grace poté avviare la sua attività di dottorato. Infatti, tra gli obbiettivi di Althoff c'era quello di promuovere l'educazione femminile e incoraggiava Klein ad attirare studentesse straniere verso l'università tedesca. Durante il suo periodo a Gottinga, Grace condusse una vita simile a quella di Cambridge: studiò principalmente matematica ma non esclusivamente, infatti, si dedicò anche alla fisica e all'astronomia e partecipò attivamente alla vita sociale accademica. Infine, preparò la tesi di dottorato sulle applicazioni dei gruppi di Klein alla trigonometria sferica, supervisionata da Klein stesso. Come da consuetudine, una volta terminato il periodo di dottorato, viene conferito il titolo di dottore di ricerca, ma fino ad allora nessuna donna in Germania aveva conseguito ufficialmente un dottorato. La giovane Grace discusse di questo possibile problema con Klein, il quale le disse che non era una questione così semplice da poter essere risolta all'interno della Facoltà e che bisognava fare richiesta al Governo. A marzo del 1895 Grace si recò presso il Ministero della Cultura a Berlino per considerare la possibilità del conseguimento del dottorato e quindi di poter sostenere il *viva voce* davanti alla commissione di Gottinga. Tra i diversi funzionari che incontrò durante quella visita, fortunatamente c'era anche Althoff, colui che, sostenendo idee liberali e progressiste, le diede l'autorizzazione a discutere la propria tesi di dottorato.

Grace Chisholm fu la prima donna ad ottenere *magna cum laude* dottorato in Germania. Entusiasta ed orgogliosa di se stessa, Grace si affrettò ad inviare la sua tesi di dottorato ad amici, parenti e a coloro che aveva conosciuto durante la sua carriera matematica, tra cui anche il tutor temporaneo di Cambridge, Mr. Young.

2.5 Il matrimonio e la ricerca

Grazie a questo, Will e Grace si rimisero in contatto attraverso una fitta corrispondenza epistolare il cui contenuto riguardava argomenti matematici. Una volta rientrata a Londra da Gottinga, Grace incontrò Will presso la Fabian Society ad una conferenza di Bertrand Russell e in questa occasione Will le dichiarò il suo amore. Si sposarono l'11 giugno del 1896, dopo il viaggio di nozze si trasferirono a Cambridge: Will continuò la carriera didattica e Grace si dedicò alla ricerca. Poco dopo, questo equilibrio venne compromesso da una riforma che riduceva le ore di esercitazioni per gli studenti di Cambridge, facendo considerare a Will la possibilità di dedicarsi alla ricerca.

Nell'autunno del 1897, pochi mesi dopo la nascita del primogenito Frankie, gli Young si trasferirono a Gottinga. La scelta degli Young di lasciare Cambridge si deve al clima soffocante che si respirava: lo studio della matematica si riduceva al superamento degli esami. Nell'ambiente accademico tedesco presiedeva ancora Klein, che incoraggiò Will a scrivere il suo primo articolo di geometria. Grace più tardi scriverà che, dopo la visita di Klein, William le propose «*di rinunciare al denaro, andare all'estero e dedicarci alla ricerca*».[2] Così i coniugi scelsero di soggiornare a Torino dal marzo del 1898 al 1899 per seguire i corsi sui gruppi continui di trasformazioni e sulle curve algebriche dei vari spazi tenuti da Corrado Segre. Si conservano presso gli archivi dell'Università di Liverpool scambi epistolari tra Segre e la coppia e cinque quaderni di appunti scritti in italiano delle lezioni prese a Torino. Da un biglietto che ci è pervenuto si evince che Corrado Segre era solito tenere delle lezioni private agli Young, a testimonianza del buon rapporto che si instaurò tra loro. È doveroso aggiungere che i corsi tenuti dal professore Segre non riguardavano solo argomenti geometrici, ma anche temi pedagogici e metodologici. Dal soggiorno in Italia ebbe inizio una vera e propria collaborazione intellettuale tra i coniugi. Infatti, dopo aver assistito alle lezioni, si ritrovavano a casa a sistemare insieme gli appunti e discutevano degli argomenti svolti: grazie ai confronti con la moglie uscì fuori il genio di Will. Durante le discussioni matematiche tra i due, Grace annotava diligentemente tutte le straordinarie idee del marito, reputandole intrise di genialità. Si può dunque affermare che Grace svolse quel ruolo di guida che tanto cercava Will: con l'aiuto della moglie avvenne la sua ascesa da semplice docente a ricercatore. In merito a questo, la figlia Rosalind Cecily aggiungerà: «*[…] mia madre invece sapeva prendere decisioni e aveva la determinazione per portare a termine quello che aveva intrapreso. La sua capacità di comprendere e di reagire e la sua voglia di esercitare tale capacità l'hanno portata con naturalezza a svolgere un ruolo unico. Se non avesse avuto quella capacità, probabilmente mio padre sarebbe stato un genio mancato, e la fama dell'uno non avrebbe oscurato quella dell'altra.*»[3]

Esaurite le risorse finanziarie il soggiorno in Italia si concluse, i coniugi Young fecero ritorno a Gottinga nell'autunno del 1899 e, al fine di mantenere la famiglia nel migliore dei modi, Will riprese l'insegnamento a Cambridge presso il Peterhouse, mentre Grace continuò il lavoro di ricerca a Gottinga, si dedicò allo studio della medicina e, con l'aiuto della sorella di Will, Ethel, si occupò dell'educazione di Frankie e di Rosalind Cecily Hildegard, nata nel febbraio successivo. Il sodalizio matematico oltre che umano tra i due nacque dalla proposta di Klein di tradurre in inglese l'*Encyclopaedie der Mathematischen Wissenshafte*, curata da Klein e altri studiosi con lo scopo di delineare il percorso storico della

[2] Citazione tratta dal sito https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Young/

[3] Citazione tratta dall'articolo di Sara Sesti al seguente link http://www.universitadelledonne.it/Young.html

matematica. Grace e Will lavorarono a questa traduzione per anni, ma a causa dell'avversione dei matematici di Cambridge, questo progetto non venne portato a termine.

2.6 Nuovi campi di ricerca

Negli anni Ottanta dell'Ottocento vennero pubblicati nella rivista di cui Klein era direttore, *Mathematische Annalen,* i lavori di Georg Cantor sulla teoria degli insiemi. Questa teoria si sviluppò alla fine degli anni Sessanta dell'Ottocento da problemi relativi al calcolo, ma in seguito grazie a Cantor divenne una disciplina a sé stante. Tra le nuove idee di Cantor vi era la teoria dei numeri infinitamente grandi che fu aspramente criticata dalla maggior parte dei matematici, nonostante l'approvazione di Klein. Una volta ammalato, Cantor non fu più in grado di proseguire i suoi studi e Klein, intento a stilare l'enciclopedia, propose ad Arthur Schönflies di scrivere un articolo su questo tema. Schönflies accettò la richiesta e pubblicò sull'argomento la prima parte del suo resoconto *Mengenlehre,* 1898-1904, nell'*Encyclopaedie* e la seconda parte *Die Entwicklung der Lehre der Punkmannigfaltigkeiten*, 1900, in un giornale tedesco. Anche i coniugi Young furono coinvolti: dato che erano alla ricerca di un settore della matematica su cui concentrarsi, Klein gli suggerì di leggere i lavori di Schönflies e di considerare la teoria degli insiemi come possibile campo di ricerca.

Questo suggerimento fu prezioso per gli Young perché sarà proprio quello il settore in cui i coniugi daranno i maggiori contribuiti nei successivi venticinque anni. Nel corso della loro unione intellettuale pubblicarono tre libri e circa 250 saggi, la maggior parte di questi ultimi riguardava l'analisi matematica e la teoria degli insiemi. Will era pieno di idee e scriveva incessantemente, mentre Grace revisionava il lavoro e preparava il manoscritto finale: l'uno era la mente e l'altra il braccio. Per quanto riguarda la suddivisione del lavoro, Will scrisse a Grace una lettera da Cambridge in cui ammetteva l'enorme aiuto e contributo che la moglie gli stava fornendo. Inoltre, aggiungeva anche che sarebbe convenuto ad entrambi firmare gli articoli solo con il suo nome, almeno fin quando non avrebbero avuto più il disperato bisogno di guadagnare.

Nel 1903 Will ottenne il dottorato presso Cambridge e l'università si mostrò disponibile a pubblicare un libro scritto dalla coppia riguardante la teoria degli insiemi. Ciò che avrebbe dato maggiore stabilità economica alla famiglia era una cattedra per Will, ma che ancora faticava ad ottenere. Nel 1904 Will arrivò a formalizzare quello che oggi è conosciuto come "integrale di Lebesgue", indipendentemente da Lebesgue e due anni dopo. Non appena Will venne a conoscenza del lavoro di Lebesgue, dovette ritirare il suo lavoro per modificarlo opportunamente e poi ripubblicarlo. Il saggio in questione, *On the general theory of integration*, pubblicato nel 1905 vantava un approccio differente da quello di Lebesgue e numerose applicazioni della teoria a tutti i campi dell'analisi: queste caratteristiche lo resero, nonostante tutto, notevole e addirittura preferibile a quello di Lebesgue per alcuni eminenti matematici. Nel 1906 venne pubblicato dalla Cambridge University Press *The theory of sets of points*, il manuale riguardante la teoria degli insiemi, firmato da W.H. Young e G.E. Chisholm Young: nonostante avesse suscitato l'entusiasmo di Cantor, questo libro non riscosse molto interesse da parte della comunità scientifica e non poté quindi contribuire a migliorare la situazione economica della famiglia.

Nel frattempo, Grace lavorava instancabilmente: studiava medicina, rivedeva i saggi del marito, scriveva libri e si occupava con l'aiuto della cognata dei figli. La famiglia si allargò ulteriormente quando nel 1901, nel 1903 e nel 1904 nacquero rispettivamente Janet Dorothea Ernestine, Helen e Laurence Chisholm. Purtroppo la zia Ethel si ammalò gravemente e a sostituirla venne un'altra sorella di Will, Mary Ann. Sebbene Will avesse accettato diversi incarichi part-time presso i Consigli tra cui quello di Chief Examiner del Consiglio Centrale del Galles e svolgesse il ruolo di Special Lecturer presso l'Università di Liverpool e nonostante Grace avesse scritto qualche libro scientifico per bambini da sola tra cui *Bimbo. A little story for Jill and Molly by Auntie Will*, 1905, e *Bimbo and the frogs*, 1907, oltre ad un manuale di geometria elementare, *A first book of geometry*, 1905, insieme a Will, la situazione finanziaria era ancora problematica.

2.7 La separazione: tra Ginevra e Calcutta

Quando nacque il quinto figlio, Patrick Chisholm, nel 1908, la famiglia decise di lasciare Gottinga per un paese meno dispendioso, Ginevra, in cui rimasero fino al 1915. Il lavoro di Will come ricercatore continuava sempre più intensamente: tra il 1908 e il 1910 pubblicò quarantadue saggi e una monografia, *The fundamental theorems of the differential calculus* (1910). La suddetta monografia è uno dei lavori più importanti di Young, basti considerare che oggi i libri di calcolo avanzato utilizzano il suo approccio alle funzioni di diverse variabili complesse. Sono inoltre da menzionare due tra i saggi pubblicati: *On a new method in the theory of integration*, 1910, che fu rilevante poiché conteneva una nuova formulazione della teoria di integrazione e *On the analytical basis of non-Euclidean geometry*, 1910, nel quale formulava le geometrie euclidee e non-euclidee in termini di analisi contemporanea.

Finalmente, nel 1911 diventò professore associato presso l'università di Liverpool per poi ottenere nel 1913 la cattedra di filosofia e storia della matematica. Nel frattempo in quello stesso anno Corrado Segre, che continuò a seguire il lavoro dei coniugi, fece tradurre in italiano il libro di Grace e William Young *A First Book of Geometry* da Luisa Virgilio, collega degli Young durante i corsi torinesi, dando vita nel 1907 all'edizione italiana *Geometria per i piccoli*. La difficoltà di Will di ottenere una cattedra nonostante i successi nella ricerca matematica trovava spiegazione nel suo percorso di ricercatore caratterizzato da un tardivo inizio e dai tanti soggiorni all'estero. Nel 1913 Will accettò l'incarico di riordinare il dipartimento di matematica a Calcutta e data la complessità di questo compito mise da parte la ricerca.

Durante il periodo indiano di Will, Grace in Svizzera incrementò la sua attività di ricerca e pubblicò firmando solo con il suo nome una serie di articoli sui fondamenti del calcolo differenziale tra cui: *A note on derivates and differential coefficients*, 1914; *On infinite derivates*, 1913, che le fece ottenere il Gamble Prize di Cambridge nel 1915. Fino a qualche anno prima, Grace aveva pubblicato un unico saggio con solo il suo nome, *On the form of a certain Jordan curve*, 1905.

2.8 Lo scoppio della prima guerra mondiale

Per compiere al meglio il suo incarico, Will avrebbe dovuto visitare le istituzioni matematiche europee al fine di stilare un resoconto sull'organizzazione dei maggiori centri matematici e applicare quanto appreso all'istituzione indiana. Nell'autunno del 1914 scoppiò la prima guerra mondiale, che compromise inizialmente solo il viaggio europeo di Will e non l'equilibrio dell'intera famiglia Young che fortunatamente risiedeva in un paese neutrale. Mentre Will era in visita presso il Giappone per conoscere l'organizzazione dell'istituzione matematica, Grace con la famiglia si trasferì da Ginevra a Losanna e terminò i suoi studi medici senza però sostenere il tirocinio finale. Nel febbraio del 1917 la famiglia dovette affrontare un duro colpo: a soli diciannove anni il primogenito Frankie, pilota nel Royal Flying Corps britannico, rimase ucciso durante un combattimento aereo con i tedeschi.

Alla fine, il lavoro per l'università di Calcutta rimase incompiuto e Will riprese a scrivere pubblicando tra il 1916 e il 1917 una ventina di saggi, guadagnandosi la Morgan Medal della London Mathematical Society per essere uno dei migliori matematici degli ultimi tre anni. Poco dopo decise di rescindere i contratti di lavoro sia con l'università indiana che con quella britannica.

Nel frattempo la guerra proseguiva e la Germania prendeva sempre di più la direzione non desiderata dagli Young. La firma del loro maestro Klein, assieme a quella di altri novantatré scienziati, appariva nel manifesto che appoggiava la dichiarazione alla guerra. In merito alla questione, si conserva una corrispondenza epistolare in cui Grace cercava di persuadere Klein a rinnegare la guerra, ma senza ottenere alcun successo.

Nel 1919 Will, insieme alla figlia Cecily, si trasferì ad Aberystwyth per prendere l'incarico di professore di matematica pura presso l'Università del Galles. Fece del suo meglio per organizzare un degno corso di matematica cercando di rispettare le idee di Klein e Hilbert. Cecily venne poi sostituita dalla sorella Janet, che desiderava studiare medicina. Nonostante fosse arrivata l'occasione che aspettava da una vita, per divergenze intellettuali e problemi di salute, Will lasciò il posto.

Nello stesso anno Grace e il resto della famiglia andarono a vivere in una villa a Collonge-Bellerive, paese svizzero che si affaccia sul lago di Ginevra. Sebbene l'attività di ricerca avesse subito una battuta d'arresto, nel 1925 Grace pubblicò il saggio *On the solution of a pair of simultaneous Diophantine equations connected with the nuptial number of Plato* sul giornale della London Mathematical Society di cui Will era Presidente. I coniugi parteciparono in forma privata nel 1924 al Congresso Internazionale di Matematica a Toronto.

2.9 Il periodo di riposo

Ormai priva di energie sia per motivi familiari che di salute, Grace abbandonò la carriera matematica e Will, senza l'aiuto della moglie, fece lo stesso. Cominciò così un periodo di riposo per la coppia: Will dedicò le sue energie per ricostruire la storia della sua famiglia e Grace, risolti i problemi di salute, si occupò di giardinaggio e al contempo di scrivere un romanzo storico, *The Crown of England*, che le costò cinque anni di lavoro, ma che non venne pubblicato da nessun editore perché troppo specifico per il grande pubblico ma non abbastanza per gli storici.

Oltre ad approfondire la storia della sua famiglia, Will aveva a cuore il futuro dell'umanità, per questo si occupava di organizzare eventi scientifici internazionali. Nel 1928 gli venne conferita una laurea ad honorem all'Università di Strasburgo e ricevette la Sylvester Medal della Royal Society. Inoltre, nel 1929 venne eletto Presidente dell'Unione Matematica Internazionale e in onore di questo riconoscimento intraprese un lungo viaggio verso tutti i paesi non ancora affiliati all'Unione. Il suo progetto consisteva nel creare un consiglio internazionale matematico, inserendo anche la Germania, ma purtroppo questo sogno sfumò a causa delle scelte nazionalistiche di quest'ultima. Will allora coltivò altri interessi tra cui il diritto, le lingue straniere e la politica.

Nel 1939 ebbe inizio la seconda guerra mondiale: Grace e Will si trovavano in Svizzera con i nipoti, figli di Janet, e la governante. Quando anche la Svizzera diventò un paese non più al sicuro, temendo un possibile attacco da parte dell'Italia, Janet chiamò a sé, in Inghilterra, il resto della famiglia, ma solo Grace e i figli la raggiunsero, mentre Will rimase nella sua abitazione svizzera con la governante.

Will, già da qualche anno, soffriva di disturbi mentali: aveva perso memoria e lucidità. Quando divenne ingestibile anche per la governante, fu ricoverato in una casa di cura, dove pochi giorni dopo, il 7 luglio del 1942 morì. Grace si occupò del necrologio del marito e continuò la sua vita in Inghilterra occupandosi dei nipoti fino a quando, a causa di un attacco di cuore, il 29 marzo del 1944, morì anche lei. Lasciarono in eredità all'umanità, oltre ai loro lavori e alle loro idee, dei figli altrettanto straordinari: Cecily intraprese la carriera di matematica dopo aver studiato al Girton, Janet si laureò in medicina, Helen si laureò a Losanna in matematica e vinse una borsa di studio negli Stati Uniti, Laurence studiò matematica a Cambridge e insegnò per ventotto anni presso l'Università del

Wisconsin, Patrick ottenne un dottorato in chimica ad Oxford per poi occuparsi di finanza. La figlia di Laurence, Sylvia Wiegand, oggi quasi ottantenne, è stata presidente dell'Association for Women in Mathematics (AWM), inoltre è stata professoressa di Matematica all'Università del Nebraska in cui ha istituito una borsa di studio in ricerca in onore dei nonni per gli studenti laureati, il premio "Grace Chisholm Young e William Henry Young", ancora oggi attivo e del valore di mille dollari.

Capitolo 3

Analisi dell’opera *Geometria per i piccoli*

Nella prima parte di questo capitolo affronteremo un’analisi del testo a livello microscopico: analizzeremo in dettaglio i contenuti dei capitoli che riteniamo più interessanti. Infine, cercheremo di trarre delle conclusioni sul testo a livello macroscopico, soffermandoci sulla scelta degli argomenti, sulle metodologie usate e sulla posizione degli Young in merito alla questione “Euclide a scuola”, illustrata nel primo capitolo di questo elaborato.

3.1 Nota all’edizione italiana e prefazione all’edizione inglese

In questo capitolo si analizza il contenuto del libro di geometria elementare degli Young *A first book of Geometry*, pubblicato nel 1905. Dopo aver ripercorso la vita dei coniugi, si può ipotizzare che la maggior parte del lavoro nella stesura di questo libro è stato compiuto da Grace. Infatti, durante la stesura, Grace si trovava a casa con i figli e badava alla loro educazione, mentre William si occupava di ricerca e svolgeva incarichi part-time. Non stupisce il fatto che la coppia si occupasse di geometria elementare, i due, infatti, oltre ad avere figli piccoli da formare, lavoravano a stretto contatto con Felix Klein e Corrado Segre, entrambi coinvolti nella ricerca in didattica. Si ricorda inoltre che, secondo quanto illustrato nel primo capitolo, in quegli anni si rifletteva sui fondamenti della geometria e sulla rilevanza della geometria elementare da un punto di vista superiore.

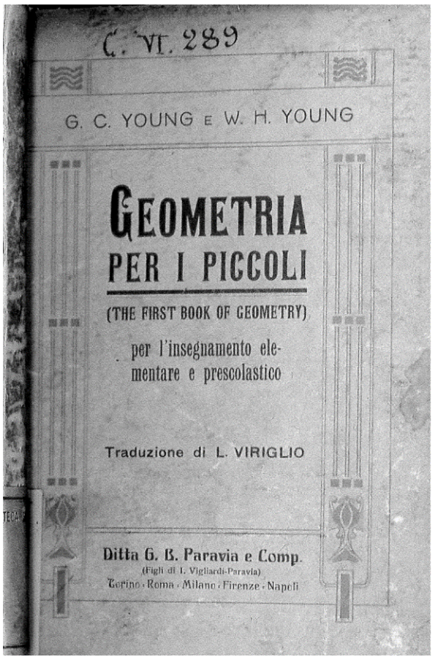


Figura 3.1.1 Copertina dell'edizione italiana di A first book of Geometry, intitolata Geometria per i piccoli

Nella nota alla traduzione italiana Luisa Virgilio chiarisce ciò che la spinge ad accettare la proposta, avanzatole da Segre, di curare l'edizione italiana di *A first book of Geometry*. Secondo Virgilio, in quel momento storico la scuola non era in grado di fornire agli studenti gli strumenti necessari per sviluppare un utile e sicuro senso geometrico. Ritrova invece nel testo degli Young un'ottima guida per chiunque volesse impartire ad un bambino le basi della geometria, che per l'autrice prevedevano, oltre le nozioni, anche l'abitudine all'osservazione e al pensiero scientifico. Inoltre, alla fine della nota, Virgilio si augura di riuscire a rendere piacevole e divertente l'insegnamento-apprendimento della geometria, poiché, frequentando le lezioni del professore Segre, aveva potuto comprendere l'importanza di infondere stupore e curiosità negli studenti.

Gli autori inglesi nella prefazione esordiscono spiegando che la causa della difficoltà degli studenti nello studio della geometria nelle scuole primarie e secondarie è la mancanza dell'osservazione geometrica nella prima età. Infatti, gli allievi vengono educati fin dall'inizio a ragionare secondo il punto di vista della Geometria Piana e questo impedisce loro di sviluppare un atteggiamento geometrico coerente con la vita che li circonda, cioè un ambiente a tre dimensioni. Il motivo per cui si antepone la geometria piana a quella solida risiede nella sua semplicità didattica per cui è possibile fare disegni di figure piane su un foglio o sulla lavagna. Invece, disegnare figure tridimensionali è complicato e lo è ancora di più costruirle, ciò richiederebbe continua sorveglianza, spazio e risorse. La geometria solida arriva per gli allievi all'età di dieci anni, fase in cui non è più entusiasmante giocare con un cubo per comprenderne le proprietà. In questo modo il ragazzo comincia la scuola senza conoscere le nozioni elementari di geometria, come ad esempio quelle di angolo e di grandezza relativa tra oggetti lontani. Questa scienza viene considerata astrusa e difficile, e posticipata agli studi superiori in cui viene affrontata soprattutto con metodi analitici: «*Noi abbiamo udito sentenziare che sarebbe dannoso per un bimbo "tormentarlo con la Geometria". La Geometria, così come noi l'abbiamo in mente, non è affatto un tormento*»[4]. Ciò che hanno in mente di fare gli Young non necessita di aule scolastiche né di strumenti o insegnamenti speciali e non richiede nemmeno un grande sforzo per l'allievo. I metodi illustrati nel libro richiedono soltanto carta, matita, spilli e di rado anche forbici: materiali facilmente reperibili e sicuri per un bambino. Attraverso questi strumenti e con la guida di una persona adulta, il bambino costruirà modelli presenti nel libro, acquisendo manualità e familiarizzando con le caratteristiche proprie di ogni modello. Secondo gli autori, infatti, *«appunto perché fa "da sé" egli non riceve idee da un altro, ma impara per conto proprio, e svolge ciò che si può chiamare il senso geometrico»*[5]. Dunque, il libro in questione non è da intendersi come un libro su cui studiare, ma come un aiuto per chi desidera educare il bambino attraverso un insegnamento non meccanico; il fine ultimo è quello di aiutare il bambino ad interiorizzare idee che negli studi superiori avranno un immenso valore.

Nella parte finale della prefazione ci si sofferma su due questioni fondamentali per gli autori: la nozione di angolo e le proposizioni di Euclide. Al fine di far sviluppare una corretta nozione di angolo, gli autori utilizzano molteplici attività: la costruzione di modelli di angolo e le misure accurate fatte con essi, le suddivisioni di angoli, le "dimostrazioni con piegature". Per gli autori è innanzitutto necessario fare operazioni di misura attraverso metodi più semplici per apprezzare in un secondo momento gli strumenti di misura. Studiare gli angoli deve rendere gli allievi in grado di comprendere la natura degli oggetti che ci circondano e di rispondere a domande su di essi, come ad esempio "Quanto vi sembra grande la luna?". Per quanto riguarda la questione su gli *Elementi* di Euclide, gli Young affermano con decisione: *«vi hanno proposizioni di Euclide che ognuno deve conoscere, sappia o no dimostrarle»*[6] e le enunciano di seguito.

La somma di due lati di un triangolo è maggiore del terzo lato.

In un triangolo al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore.

La somma di due angoli di un triangolo vale meno di due angoli retti.

Il teorema di Pitagora.[7]

Uno degli altri scopi del libro è far assimilare all'allievo queste proposizioni, per questo gli autori si distaccano dalle tipiche dimostrazioni euclidee e propongono dimostrazioni fatte con piegature di carta, che non necessitano di ragionamenti verbali e che sono facili da ricordare. Per concludere la prefazione, riassumono i punti fondamentali dell'opera:

[4] *Geometria per i piccoli*, p.VI.
[5] *Geometria per i piccoli*, p.VIII.
[6] *Geometria per i piccoli*, p.X.
[7] *Geometria per i piccoli*, p.X.

1. *Presentazione delle idee geometriche primitive.*
2. *Presentazione in forma grafica dei primi teoremi geometrici.*
3. *Esposizione di metodi pratici che – non richiedendo a) né strumenti speciali b) né grande sorveglianza c) né grave spesa o disturbo – conducano alla conoscenza degli oggetti piani e solidi e delle relazioni che ne determinano le posizioni e le forme.*[8]

3.2 Nozioni preliminari e linea retta

Nel 1° capitolo gli autori forniscono al lettore le lenti attraverso cui guardarsi intorno e costruiscono, guidati dall'osservazione, un vocabolario: gli oggetti che ci circondano sono *solidi*, di questi possiamo osservare e toccare la loro *superficie* e inoltre questi occupano un certo posto o *spazio*. Se inizialmente il testo ci proietta in una stanza fatta di sedie e tavoli, mediante altri esempi ci trasporta in un immaginario più ampio. Non solo un solido occupa una determinata posizione nello spazio, ma anche il lettore, e anche tra il solido e il lettore c'è dello spazio, occupato in parte da aria. Si considera poi lo spazio occupato dal terreno che sta sotto il lettore e dalle nuvole che invece gli stanno sopra, e ancora più lontano rispetto al lettore ci sono la luna, il sole e le stelle. In questo modo, viene introdotto il concetto di *spazio infinito: «per quanto grande voi immaginiate una parte di spazio c'è sempre ancora spazio intorno ad essa»*[9]. Dopo aver osservato la realtà che ci circonda, viene definito lo scopo della geometria come lo studio delle forme degli oggetti e della loro posizione relativa nello spazio. Si pone l'attenzione sull'uso comune della parola "solido" con cui si intende un pezzo di ferro o di legno ma non già l'acqua o le nuvole, infatti, solitamente la parola "solido" si riferisce allo stato fisico dell'oggetto. Dunque, gli autori puntualizzano che alla geometria non interessano né lo stato fisico né i possibili cambiamenti passati o futuri di forme o posizioni dell'oggetto. Oltre a fare chiarezza fin da subito con il concetto di infinito, gli Young mettono subito in guardia il lettore dalle semplificazioni di cui si servono le scienze: è sbagliato pensare che la geometria descriva il mondo che ci circonda, piuttosto essa ci fornisce gli strumenti per comprenderlo. Dato che nella realtà tutto cambia con lo scorrere del tempo, l'oggetto di studio della geometria è un solido fotografato in un determinato istante con una precisa forma e una determinata posizione nello spazio. Infine, si osserva che la superficie di un oggetto suddivide lo spazio in due parti: interna ed esterna alla superficie. Al fine di evitare incomprensioni, vengono proposti subito degli esempi: ogni individuo è all'esterno della superficie di un oggetto che sta guardando. Non si deve pensare di essere all'interno della superficie di una casa, in quanto l'interno della superficie della casa è all'interno dei mattoni che formano le pareti. Grazie a questo esempio, gli autori definiscono la porzione di spazio interno alla casa o a qualunque altra superficie

---

[8] *Geometria per i piccoli*, p.XI.
[9] *Geometria per i piccoli*, p.2.

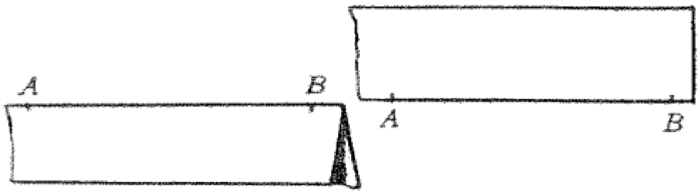
come *volume*, limitato dalla superficie. In questo primo capitolo si forniscono le nozioni geometriche base: le definizioni non sono formali e nascono dall'esigenza di descrivere la realtà che si sta osservando. Gli autori non spiegano soltanto cosa vuol dire un determinato concetto, ma anche cosa non vuol dire, al fine di evitare fraintendimenti e fornire nuove sfumature del concetto stesso.

Il 2° capitolo riguarda la linea retta: prima di definirla e di elencare le sue caratteristiche, gli autori danno le istruzioni necessarie per costruirla. Innanzitutto, prendendo un foglio e piegandolo diritto, si costruisce una riga di carta. Coerentemente con quanto dichiarato nella prefazione, non sarà necessaria nessun righello grazie alla riga di carta appena costruita. Successivamente bisogna sovrapporre la riga su un altro foglio e infine ricalcare con una matita il margine della riga di carta: si ottiene la linea retta. In realtà, subito dopo viene chiarito che quella non è una linea retta, ma il disegno di una linea retta: *«non costruiremo mai una linea retta vera […] ma costruiremo una immagine o un modello di linea retta atto ad aiutarci a pensare la linea retta stessa».*[10] Per far comprendere questo concetto al bambino basta fargli notare che il disegno di un albero aiuta a ricordare com'è fatto, ma non è esso stesso un albero, quindi quando l'insegnante chiede al bambino di disegnare una retta in verità gli sta chiedendo di rappresentare qualcosa che approssima il più possibile una retta. Nonostante il disegno possa non essere preciso, ci si deve immaginare la retta senza spessore né ineguaglianze ed inoltre infinita, a questo proposito gli autori affermano che bisogna imparare a pensare a qualcosa senza averla necessariamente davanti a sé. Il testo cerca di educare il bambino al pensiero matematico, caratterizzato dalle capacità di osservare e di immaginare, chiedendogli di chiudere gli occhi e pensare ad una retta. Successivamente si definiscono la *linea curva* come una linea non retta e di *spezzata* come una linea di tratti di retta con direzioni diverse. Si invita poi a replicare una "O" su un foglio e a ricalcare il bordo di una moneta: ciò che ne risulta è il disegno di una *circonferenza*. Sempre per agevolare la comprensione di un concetto vengono posti altri esempi di oggetti di vita quotidiana la cui base è una circonferenza, un candeliere, un calamaio. All'interno di questo contesto viene enunciato *il primo assioma di Euclide*: si considera un numero qualsiasi di punti (rappresentati con delle stelline), questi possono essere riuniti tramite linee curve o spezzate, ma se non sono posti "convenientemente" non tramite una linea retta, allora si afferma che *"si può condurre una linea retta per due punti e se ne può condurre una soltanto."*[11] Gli autori propongono la seguente verifica di questa affermazione:

> *Verifichiamo questo: segnate due punti e chiamateli A e B: vedrete che c'è una sola maniera di piegare la carta così che A e B stiano entrambi sulla piega. Si può fare un'altra verifica con la vostra riga: vi sono due modi di disporla così che il suo margine passi proprio sopra i punti A e B: in un caso la riga sta fra voi e i punti, nell'altro*

[10] *Geometria per i piccoli*, p.5.
[11] *Geometria per i piccoli*, p.7.

oltre questi: nei due casi il margine ha la stessa posizione, e la vostra matita segna tutte e due le volte l'identica linea.[12]



13

Figura 3.2.1 Verifica tramite foglio di carta che si può condurre un'unica linea retta per due punti.

Questa è la prima "dimostrazione con piegature" che propongono al bambino, accompagnata da una figura esplicativa. Come accade per gli esempi, anche in questo caso viene proposta più di una "dimostrazione", infatti più verifiche può svolgere l'alunno, più potrà essere convinto della verità di un fatto. Sorge l'esigenza di una nuova definizione che descriva quanto avvenuto, al vocabolario si aggiunge la parola "assioma". Un *assioma* è un'affermazione sempre vera verificata con l'esperienza. Successivamente si riprende il concetto di retta, in particolare si torna alla retta passante per A e B disegnata precedentemente e si ribadisce che la retta non termina in A o in B ma la si può prolungare in quanto è infinita. Una retta che invece termina in A e in B viene chiamato *segmento*, *porzione di retta* o *tratto*; mentre un segmento prolungato in direzione di A o in direzione di B è una *semiretta*. Per chiarire ulteriormente il concetto di retta infinita viene proposto un esempio di natura fisica-astronomica: passa un'unica retta per un punto del nostro occhio e un punto della luna. Sebbene non esista alcuna matita in grado di tracciare questa retta, la luce lunare rappresenta tale retta: la luce, infatti, si propaga in linea retta da qualunque punto. A questo punto si paragona una stella da cui partono dei raggi luminosi a un qualsiasi punto chiamato A su un foglio di carta da cui escono diverse semirette, quest'ultime si dice che formano una *stella*, richiamano infatti la sua forma. Quindi, viene definito come *punto di intersezione* il punto in cui una retta taglia l'altra se hanno un punto in comune e infine si conclude con una definizione rigorosa di punto: *"Come la vera linea retta non ha larghezza, ma solo lunghezza, così il vero punto non ha né larghezza né lunghezza."*[14]

Dopo aver proposto due esercizi, alla fine del capitolo viene spiegato a cosa possono servire le linee rette: se gli spigoli delle pareti di una casa dalla strada al tetto e dal pavimento al soffitto non fossero linee verticali allora le case "quasi certo" non starebbero in piedi. Anche in questo caso gli autori fanno attenzione a non dare verità assolute e pongono il caso della torre di Pisa. Essa sta in piedi nonostante non sia verticale, infatti, fa eccezione perché lo scarto dalla verticale è piccolo.

---

[12] *Geometria per i piccoli*, p.7.
[13] *Geometria per i piccoli*, p.7, fig.4.
[14] *Geometria per i piccoli*, p.11.

Il capitolo si conclude illustrando la tecnica del *filo a piombo*, il muratore si accerta di porre verticalmente i mattoni uno sull'altro usando uno spago con un peso attaccato:

> *Egli lo appende così che il peso stia proprio vicino alla parete, senza appoggiarvisi: se così lo spago sta tutto lungo la parete sempre alla distanza che rappresenta lo spessore del peso, i mattoni sono sovrapposti verticalmente; se no devono venir cambiati di posto così che le parti stiano certamente salde.*[15]

Per i coniugi Young è necessario far osservare al bambino il collegamento tra geometria e vita quotidiana, prima che il bambino perda interesse per le verità riguardanti lo spazio e gli oggetti solidi. In aggiunta, il continuo legame tra vita quotidiana e geometria dà l'opportunità al futuro ragazzo di crescere senza sviluppare il cosiddetto *justification problem*, infatti uno dei pregiudizi legati alla matematica è che "non serve a nulla nella vita reale".

3.3 Superfici piane e non piane

In questo paragrafo analizzeremo i capitoli 3° e 4° in cui vengono introdotte le superfici piane e non piane, cilindrica e conica.

Nel 3° capitolo viene presentato il *piano* o *superficie piana* come la superficie di foglio su cui finora si è disegnato. Anche in questo caso gli autori ritengono doveroso specificare quanto sia scorretto dire che "la superficie del foglio è un piano", il piano come la retta è un oggetto matematico infinito, quindi possiamo parlare solo di porzioni di piano. Se è possibile estendere la retta in due direzioni o in una sola nel caso di un raggio, il piano può essere ampliato nella direzione di ogni porzione di retta giacente in esso stesso. Affermano che *"è la proprietà caratteristica del piano che ogni retta avente due punti nel piano giace interamente nel piano"*[16].
Per fissare i concetti precedenti, gli autori invitano i bambini a prendere un foglio, che rappresenta la nostra porzione di piano, e a provare ad attaccargliene un secondo per ampliare il primo foglio. Successivamente, tenendo in mano questo foglio ampliato e ponendolo in svariate posizioni, si ottengono porzioni di piano differenti tra loro, ciascuno occupa una determinata posizione nello spazio.
Il testo adesso abbandona il registro linguistico formale utilizzato precedentemente e pone esempi di vita quotidiana: il pavimento della nostra stanza è una porzione di piano, le sue pareti sono altre porzioni di piano, il pavimento e le pareti dei nostri vicini di casa sono altre differenti porzioni di piano. Se per estendere il foglio è stato possibile allungarlo con un altro, nel caso delle pareti bisogna usare l'immaginazione: *"si può immaginare di continuarlo pensando prolungata in tutta*

[15] *Geometria per i piccoli*, p.13.
[16] *Geometria per i piccoli*, p. 14.

la sua lunghezza ognuna delle sue rette"[17]. Gli autori in seguito riprendono l'esempio del muratore che deve costruire una parete dritta: egli per porre i mattoni verticalmente usa il filo a piombo ma non è sufficiente per costruire una parete piana. Il muratore deve fissare uno spago per due punti nella direzione in cui vuole costruire le pareti e dispone i mattoni lungo lo spago. Per aiutare nella comprensione della tecnica di costruzione viene fornita la seguente immagine:

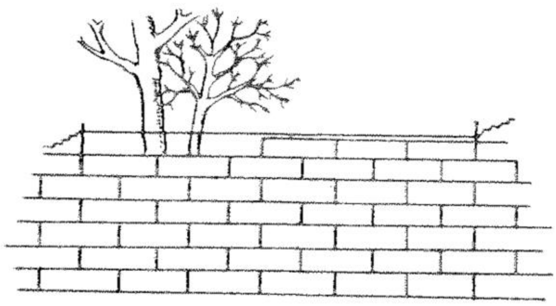


Figura 3.3.1 Tecnica usata dal muratore per assicurarsi di erigere pareti dritte. [18]

Se lo spago giace esattamente sulla parete allora la superficie è piana e un tal piano è detto verticale. Formalizzano quanto spiegato finora con la seguente:

> DEFINIZIONE. - *Dicesi piano verticale un piano contenente una retta verticale.*[19]

È fondamentale puntualizzare che in una definizione non bisogna dire mai più del necessario, per questo nella definizione precedente non è necessario dire che un piano contiene quante si vogliono rette verticali, in quanto è sufficiente che ne contenga solo una e di conseguenza contiene tutte le verticali che passano per ognuno dei suoi punti. Viceversa, per una retta verticale passano "quanti si vogliono" piani verticali.

La costruzione che viene proposta successivamente fornisce al bambino l'importante idea di corrispondenza biunivoca, anche se ne viene messo al corrente solo l'insegnante tramite una nota a piè di pagina:

> Segnato un punto A sopra un foglio di carta, e condotte sul foglio per quel punto delle rette, prendete un altro foglio, e tenetelo verticalmente in modo che passi per A: la superficie piana del foglio contiene allora la verticale passante per A, e lo si può far girare in modo che esso passi successivamente per ciascuna delle rette che avevate disegnato. *Così ad ogni retta passante per A nel primo foglio corrisponde uno ed un solo piano verticale passante per A e contenete le rette.*[20]

---

[17] *Geometria per i piccoli*, p.14.
[18] *Geometria per i piccoli*, p.15, fig. 9.
[19] *Geometria per i piccoli*, p.15.
[20] *Geometria per i piccoli*, p.16.

Gli autori considerano una bacinella piena d'acqua a riposo su cui fanno adagiare il primo foglio "sul pelo d'acqua": esso diventa un piano orizzontale e le rette disegnate su di esso rette orizzontali.
Formalizzano asserendo che *la superficie dell'acqua tranquilla è un piano orizzontale*[21] e aggiungono esempi di (porzioni di) piani orizzontali che ci circondano come la superficie del tavolo, il pavimento, il soffitto.
È interessante notare che gli autori, parlando di tavoli come piani orizzontali, utilizzano il condizionale perché in effetti potrebbe accadere che un tavolo abbia un piede più corto degli altri e dunque per assicurarsi che sia orizzontale consigliano di poggiarvi sopra un recipiente pieno d'acqua, se l'acqua ha la stessa profondità dappertutto allora esso è orizzontale.
Nonostante si utilizzino i liquidi per determinare piani orizzontali, la geometria non studia lo stato fisico degli oggetti. Tuttavia, vi sono concetti come verticale e orizzontale, destra e sinistra che, anche se non necessari in geometria, aiutano ad intendersi.

Successivamente, si mostrano esempi di superfici non piane e loro caratteristiche: come una palla, su cui non è possibile disegnare una linea retta oppure come un vaso di fiori in cui ci sono solo rette che vanno dall'alto al basso di esso.
Se si considerano due punti A e B sulla superficie di una palla di gomma e si traccia una retta per i due punti, questa passa dall'interno e taglia la palla in due parti, ognuna delle quali adesso ha sia una superficie *convessa*, già visibile prima del taglio, che *concava*, la quale si può vedere e toccare grazie al taglio. Se la palla fosse stata di sapone e non di gomma, allora le due parti tagliate non avrebbero avuto una superficie concava bensì piatta, una porzione di piano.

La superficie convessa di una palla ordinaria vien chiamata superficie sferica.[22]

Anche in questo caso gli autori stanno attenti a non creare ambiguità e specificano "palla ordinaria" in quanto né una palla da baseball né un'arancia sono una superficie sferica.
Se si considerano due punti sulla superficie di un vaso di fiori tali che non giacciono sulle rette che vanno dall'alto al basso, allora la retta congiungente i punti passerà all'interno del vaso.

La superficie di qualunque oggetto è quella parte di esso tale che ogni suo punto ha punti di qualche altro oggetto giacenti vicinissimi a sé, tanto vicini quanto noi vogliamo.[23]

Ad esempio, se si pensa ad un punto all'interno di un'arancia, tutti i punti attorno ad esso sono punti dell'arancia; ma se si prende un punto sulla buccia dell'arancia allora vicino ad esso ci sono punti che appartengono all'aria o al nostro dito se la

[21] *Geometria per i piccoli*, p.17.
[22] *Geometria per i piccoli*, p.19.
[23] *Geometria per i piccoli*, p.20.

stiamo toccando. Quindi, secondo la definizione data sopra, si può dire che la buccia è la superficie dell'arancia.
In realtà, la buccia è leggermente spessa, ma la superficie non ha spessore, dunque più precisamente la superficie dell'arancia è solo la parte esterna della buccia.
L'arancia così come un candeliere e qualsiasi oggetto che ci circonda oltre ad avere una superficie hanno anche un interno: *"tutti gli oggetti che ci attorniano sono corpi solidi, cioè non hanno superficie soltanto, ma anche interno"*[24]. A volte degli oggetti hanno superficie che non possiamo vedere per intero se non rompendo l'oggetto, questi vengono chiamati *corpi cavi*. La parola "cavo" si riferisce solo alla forma della superficie: *"tutti i corpi, cavi o no, che vediamo intorno a noi sono corpi solidi"*[25]. Nel primo capitolo "solido" era solo una parola che stava ad indicare gli oggetti che ci circondano, invece in questo capitolo si va definendo cos'è un solido grazie ai concetti di superficie e di interno.
In conclusione, viene presentato uno dei solidi più comuni, il *parallelepipedo rettangolare*. Un foglio di carta è un solido, la cui superficie è formata da due porzioni di piano, le due pagine su cui si disegna, e dalle piccolissime superfici che costituiscono i margini del foglio. Si può immaginare un foglio come un sottilissimo mattone, anche una lastra e un pezzo di sapone hanno la stessa forma. La suddetta forma è detta parallelepipedo rettangolare: la superficie è composta da un certo numero di porzioni di piano congiunte chiamate *facce* del parallelepipedo.

A questo punto gli autori forniscono un'immagine del solido:

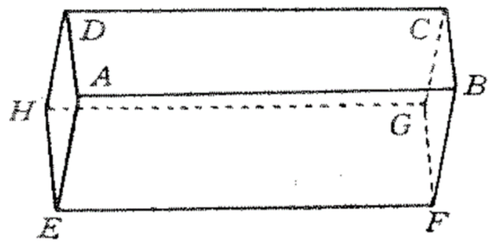


Figura 3.3.2 Parallelepipedo.[26]

I margini sono segmenti di retta, i cui estremi si chiamano *vertici*. A questi ultimi si possono apporre delle lettere, ad esempio A e B; il segmento che ha come estremi A e B si chiama *spigolo AB*. Gli autori trattano esaustivamente lo studio di questo solido ricavandone insieme al lettore tutti i vertici, gli spigoli e le facce. Dopo aver contato ben 8 vertici (*A, B, C, D, E, F, G, H*), 12 spigoli (*AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, BF, CG, DH*) e 6 facce, fanno notare al lettore che la somma dei numeri dei vertici e delle facce supera di 2 il numero degli spigoli: questa non è una coincidenza e verrà spiegato più avanti il perché.
Gli spigoli non sono le uniche "rette" che si possono tracciare congiungendo due vertici, ad esempio i segmenti AC e BD sono le *diagonali* della faccia superiore del solido; ci sono esattamente due diagonali per ogni sua faccia. Esistono altre rette

[24] *Geometria per i piccoli*, p.21.
[25] *Geometria per i piccoli*, p.21.
[26] *Geometria per i piccoli*, p.22, fig.11.

ancora, esse non giacciono sulla superficie del parallelepipedo, ma passano all'interno di esso e sono le *diagonali del parallelepipedo*: *AG, BH, DF, CE*.
È importante fare le seguenti osservazioni: due facce che si incontrano hanno in comune una retta e tre facce che s'incontrano hanno comune un punto. Queste affermazioni sono vere per qualunque coppia o terna di piani. Infatti:

> *Due piani che si incontrano hanno comune una retta, chiamata la loro retta di intersezione o d'incontro. Tre piani i quali s'incontrano a due a due hanno in comune un unico punto, detto il loro punto di intersezione.*[27]

Per indicare una faccia del parallelepipedo si potrebbero usare le quattro lettere che indicano i suoi vertici, ma in realtà sono sufficienti solo tre lettere. In generale, per indicare un piano qualsiasi bastano tre punti: *"data una retta AB, e un punto C non posto su di essa, esiste uno ed un solo piano che contenga la retta e il punto, cioè il piano ABC"*.[28]

Il 4° capitolo tratta del cilindro e del cono, dopo una breve introduzione con riferimenti a oggetti quotidiani, il tubo di una lampada come porzione di superficie cilindrica e un vaso di fiori come una porzione di superficie conica, vengono esposte le loro costruzioni. Il cilindro e il cono così come il piano sono superfici infinite. Per la costruzione di una superficie cilindrica sono sufficienti forbici e un foglio di carta. Seguendo le indicazioni fornite dagli autori, si ottiene qualcosa del genere:

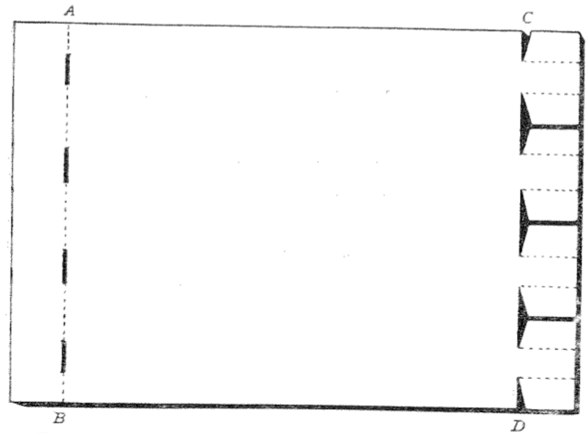


Figura 3.3.3 Disegno del taglio e pieghe per formare un cilindro.[29]

Tagliando lungo i tratti e introducendo le linguette sporgenti da CD nelle fessure lungo AB, risulta una superficie cilindrica ben salda, internamente si possono vedere le parti incastrate precedentemente:

[27] *Geometria per i piccoli*, p.25.
[28] *Geometria per i piccoli*, p.26.
[29] *Geometria per i piccoli*, p.27, fig.14.

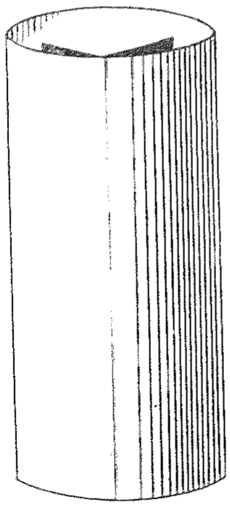


Figura 3.3.4 Modello di cilindro.[30]

Sulla superficie ottenuta è possibile disegnare una retta per ogni punto, ma non più di una, dall'alto verso il basso; diversamente dal piano su cui era possibile disegnare un qualsiasi numero di rette per un punto.

Allo stesso modo si può costruire una superficie conica con un foglio.

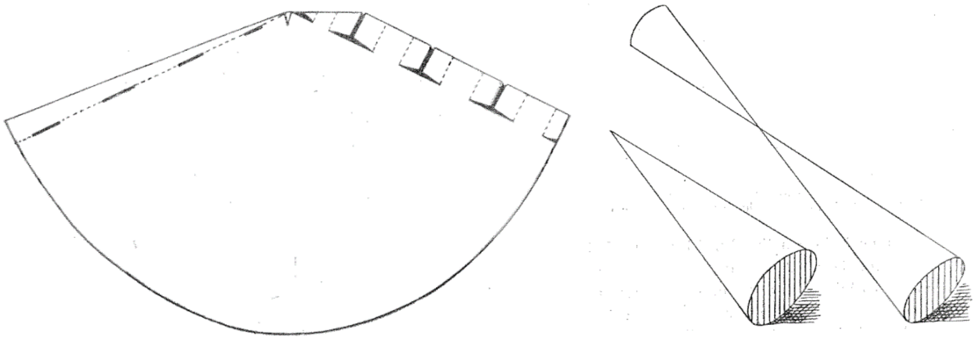


Figura 3.3.5 A sinistra disegno dei tagli e delle pieghe per formare un cono, al centro il modello costruito di cono, a destra il cono prolungando le rette della superfice conica oltre il vertice.[31]

Si può osservare che la superficie conica si distingue sia dal piano che dal cilindro in quanto su di essa sono presenti solo rette condotte dal vertice della superficie. Può sembrare che il cono non abbia nulla a che vedere con il vaso di fiori. Gli autori invitano i bambini ad immaginare di prolungare le rette del vaso, esse si incontrano nel vertice della superficie conica, che sta sotto il vaso.

[30] *Geometria per i piccoli*, p.28, fig.15.
[31] *Geometria per i piccoli*, p.p. 29-30, fig. 16, 17a,17b.

Si vede inoltre che prolungando le rette del cono oltre il vertice, la superficie conica consiste di due parti uguali come mostra la figura soprastante.

3.4 Il principio di sovrapposizione

Gli autori utilizzano il principio di sovrapposizione per la prima volta nel 7° capitolo: vogliono determinare una relazione di uguaglianza, maggioranza o minoranza tra due segmenti.

Il capitolo inizia ponendo a confronto dei segmenti: attraverso il principio di sovrapposizione sarà possibile determinare la loro uguaglianza o disuguaglianza. La tecnica spiegata è la seguente: disegnare un segmento qualsiasi PQ con la riga di carta, segnare sulla riga dei segni in corrispondenza sia di P che di Q, chiamare le intersezioni tra i tratti e i margini della riga con le lettere A e B. A questo punto basta fare le seguenti considerazioni.

> *Quando la riga è disposta in modo che A coincida con P e B con Q, si dice che la retta AB è sovrapposta alla retta PQ.*
>
> *Due segmenti quali siensi PQ e AB che possono venir sovrapposti si dicono della stessa lunghezza o eguali*, e noi indichiamo ciò brevemente scrivendo
>
> $$AB = PQ.$$
>
> Si dice questo *il principio di sovrapposizione.* [32]

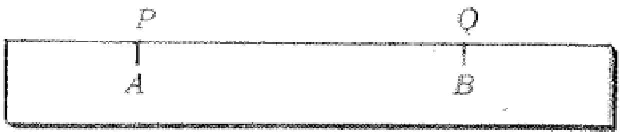


Figura 3.4.1 Riga su cui si segnano A e B.[33]

Dunque, con il termine "segmenti eguali" si intende segmenti che hanno la stessa lunghezza e per verificare la loro uguaglianza è sufficiente sovrapporli. Si dice che AB è "sovrapposta" a PQ perché tra essi c'è un po' di spazio in quanto le rette sono disegnate su fogli di carta diversi. Ciò nonostante, si può immaginare che non ci sia nessun foglio tra di esse quindi si può porre A non *su P*, ma *in P* e B non *su Q*, ma *in Q*, allora AB non è sovrapposta a PQ, ma *coincidente* con P. Se si sposta la riga di carta in un'altra parte del foglio e si fa scorrere la matita lungo il margine della riga da A a B, si ottiene un altro segmento, CD.

[32] *Geometria per i piccoli*, p.35.
[33] *Geometria per i piccoli*, p.35, fig.21 tagliata.

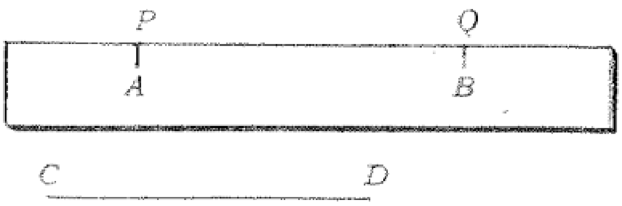


Figura 3.4.2 [34]

Poiché AB era sovrapposto a CD risulta: $AB = CD$.
Ora, separando la parte del foglio contenente CD da quella in cui vi è PQ e piegando la prima lungo CD, si osserva che CD è sovrapponibile a PQ e quindi risulta: $CD = PQ$.
Dunque, si trovano due segmenti, entrambi uguali ad AB, uguali tra loro.
Gli autori enunciano il seguente assioma: (*)*"cose eguali a una medesima sono uguali fra di loro"*.[35]
Questo assioma è necessario in quanto non è sempre possibile "rimuovere" un segmento e sovrapporlo all'altro segmento con cui lo si vuole confrontare. Per lo stesso motivo gli autori aggiungono anche altri due assiomi di cui forniscono gli equivalenti in linguaggio algebrico:

Se a cose eguali si aggiungono cose eguali, i risultati sono eguali. *Se*

$$AB = PQ \ e \ BC = QR, in \ conseguenza \ AC = PR.$$

Se parti eguali sono sottratte da cose eguali, le rimanenze sono eguali. *Se*

$$BC = QR, e \ B \ giace \ fra \ A \ e \ C, P \ fra \ Q \ ed \ R, dove$$

$$AC = PR, allora \ AB = PQ.$$ [36]

Gli assiomi sopraenunciati sono proprio quelli euclidei: concordemente a quanto dichiarato nella prefazione inglese, per gli autori non si può rinunciare alla conoscenza di alcuni di essi, che si sappiano o no dimostrare. In particolare, essi sono posti all'inizio del libro I degli *Elementi* di Euclide ed egli li enuncia in questo modo:

1. Gli uguali allo stesso sono uguali tra loro.
2. E qualora a uguali siano sommati uguali, i totali sono uguali.
3. E qualora da uguali siano sottratti uguali, i resti sono uguali. [37]

Specificano infine che gli assiomi sopra citati sono veri per cose uguali di qualunque specie, non solo per segmenti, e in qualunque modo se ne sia determinata l'uguaglianza, non solo con il principio di sovrapposizione.

[34] *Geometria per i piccoli*, p.35, fig.21.
[35] *Geometria per i piccoli*, p.36.
[36] *Geometria per i piccoli*, p.37.
[37] *Elementi* di Euclide, Nozioni Comuni, libro I.

Successivamente, viene fornita la figura di un nuovo segmento AB, questa linea o una qualunque linea uguale ad essa si dice lunga un *centimetro*. Quest'ultimo è unità di misura universale: per tutti un centimetro vale quella lunghezza. Quando un segmento non è molto lungo, allora la sua lunghezza si esprime in centimetri, altrimenti la si esprime in metri, unità di misura che equivale a 100 centimetri.
Grazie alla tecnica spiegata in questo capitolo, si è in grado di costruire, a partire da un segmento dato, un segmento lungo il doppio, triplo etc. infatti, dato AB, per disegnare un segmento lungo il doppio basta innanzitutto disegnare un segmento CD uguale ad AB e poi prolungare CD fino al punto E tale che DE è anch'esso uguale ad AB.
Nella prima parte del capitolo è stata trattata l'uguaglianza tra segmenti, nell'ultima parte invece viene esposto il caso in cui si deve stabilire una relazione di maggioranza o minoranza tra questi.
Procedono utilizzando nuovamente il principio di sovrapposizione: si considerano due segmenti qualsiasi, AB e CD; da C nella direzione CD si costruisce il segmento CE uguale ad AB.

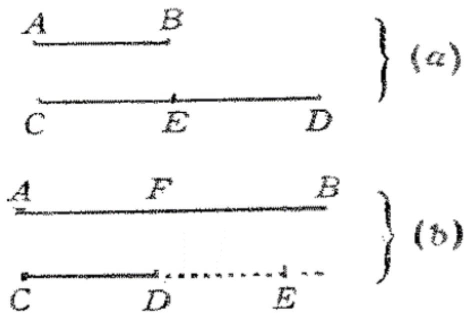


Figura 3.4.3 [38]

Si possono verificare i seguenti casi: se E coincide con D, allora i segmenti AB e CD sono uguali; se E giace tra C e D, allora CD è maggiore di AB; se D giace tra C ed E, allora CD è minore di AB. Se CD è minore di AB si può dire che "CD è una parte di AB": *in generale, una parte di una cosa qualunque è minore del tutto di cui essa fa parte.*[39]

Gli autori precisano che in questo libro si occuperanno solo di lunghezze di oggetti matematici finiti, che si possono costruire nel loro insieme e non in parte soltanto. Quindi non si tratterà della lunghezza di rette, piani, superfici coniche e cilindriche. Il capitolo termina con un altro assioma, ovvero il quinto assioma euclideo: *"Il tutto è più grande di una sua parte"*.[40]
Sebbene allo studente possa sembrare semplice, la relazione di maggioranza e minoranza in Geometria è di massima importanza. Quotidianamente vengono usate le espressioni "maggiore di" o "minore di", ma senza consapevolezza: la Geometria

[38] *Geometria per i piccoli*, p.39, fig.22.
[39] *Geometria per i piccoli*, p.40.
[40] *Geometria per i piccoli*, p.40.

permette di comprendere il vero significato di queste parole e fornisce dei metodi per stabilire la relazione di maggioranza o minoranza tra oggetti quando la nostra intuizione risulterà insufficiente.

3.5 Il circolo e la sfera

L'8° capitolo riguarda il "circolo": gli autori spiegano un modo di costruire la circonferenza con carta, matita e riga per poi definirla formalmente. Successivamente, definiscono il "circolo" come la parte di piano racchiusa dalla circonferenza. All'interno di questa sezione viene presentato anche l'importante concetto di simmetria.

La costruzione della *circonferenza* fornita dagli autori è abbastanza semplice: con uno spillo si fanno due fori, uno più largo dell'altro, sulla riga di carta. Bisogna inserire nel foro più piccolo lo spillo e fissarlo ad un foglio, nel foro più largo si inserisce la punta della matita e si disegna un punto sul foglio. Su quest'ultimo dunque si ottengono due punti: uno segnato con un foro, chiamato C, e uno con la matita, chiamato A. Girando la riga attorno allo spillo, si può disegnare un altro punto P allo stesso modo in cui si è ottenuto A. Se si ripete questo processo più e più volte, girando la riga, si trovano sempre degli altri punti: tutti questi punti hanno la stessa distanza dal foro più piccolo. Per ottenere tutti questi punti, o meglio, il luogo dei punti che hanno la stessa distanza da C, è possibile far scorrere la matita mentre si compie un giro completo della riga attorno a C.
In questo modo si ottiene la circonferenza, che si può appunto definire come "*il luogo di un punto mobile la cui distanza dal foro è sempre la stessa e il foro è detto centro della circonferenza*."[41]
A seguire vengono definiti raggio e diametro della circonferenza: ogni segmento congiungente centro e circonferenza è un raggio; il diametro non viene definito come il doppio del raggio, ma come una misura trasversale della circonferenza, si fa cenno all'etimologia della parola per spiegarne il significato, infatti deriva dal greco "dia" e "metron", cioè misura la larghezza della circonferenza nella sua parte più larga. Inoltre, se si piega una circonferenza lungo uno dei suoi diametri, allora il diametro la divide in due parti che si sovrappongono, due semicirconferenze. A questo punto, si fa notare che, come una retta divide il piano in due parti, lo stesso accade per la circonferenza:

[41] *Geometria per i piccoli*, p.42.

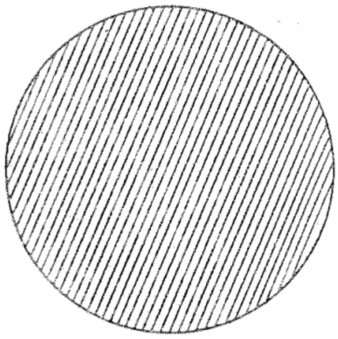


Figura 3.5.1 Circolo con parte interna tratteggiata. [42]

Una delle parti in cui la circonferenza divide il piano è quella tratteggiata in figura: il *circolo* è la parte racchiusa dalla circonferenza, inclusa la circonferenza. La parte interna alla circonferenza, esclusa la circonferenza, è invece l'area del circolo.
È all'interno di questo contesto che gli autori introducono il concetto di *simmetria*. Si considera il diametro di una circonferenza, esso si comporta come uno specchio, in quanto dividendo il cerchio in due parti uguali, riflette un semicerchio sull'altro. Si dice che il circolo è simmetrico rispetto ad uno dei suoi diametri.

Ogni oggetto suscettibile di esser diviso in due parti tali che siano come l'immagine riflessa l'una dell'altra, si dice simmetrico o avente simmetria.[43]

Gli autori, sempre attenti a non allontanarsi dalla realtà che ci circonda, invitano lo studente a guardarsi attorno e a cercare le simmetrie. Esempi concreti in cui sono presenti simmetrie si possono facilmente ritrovare nel corpo di una persona, in un orologio, un'arancia, una bottiglia, un libro, una margherita, un cane e così via. Per comprendere più intrinsecamente un concetto non è sufficiente darne una definizione e fare degli esempi, ma sono necessari anche dei controesempi: è il caso di un ciottolo di strada, esso non è quasi mai simmetrico, a meno che non sia stato lavorato dall'uomo. È doveroso specificare che gli oggetti menzionati sopra sono simmetrici rispetto ad un piano, nel caso del circolo si dovrebbe dire che è simmetrico rispetto al piano che contiene un diametro, ma dato che in generale il circolo preso in considerazione è quello disegnato su un foglio, cioè un piano, è sufficiente dire che il circolo è simmetrico rispetto a un diametro. In conclusione, gli autori, rivolgendosi direttamente allo studente, chiedono di trovare i piani rispetto cui gli oggetti menzionati prima sono simmetrici.

In questo capitolo viene esibito l'equivalente tridimensionale del cerchio, la *sfera*. Anche in questo caso si procede facendo costruire al bambino un modello di sfera: è necessario piegare un foglio, disegnare due cerchi uguali e tracciare i diametri di ognuno come mostrato nella figura sottostante.

[42] *Geometria per i piccoli*, p.44, fig.25.
[43] *Geometria per i piccoli*, p.45.

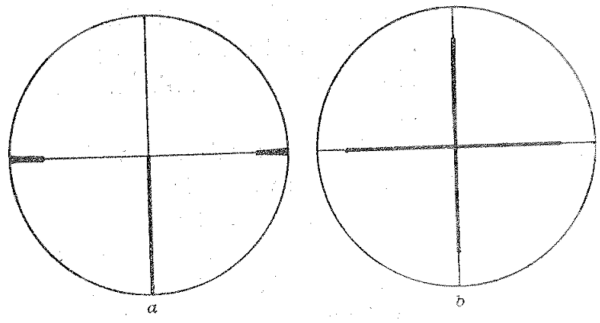


Figura 3.5.2 Disegno dei tagli per costruire il modello di sfera.[44]

Successivamente, si devono ritagliare i due doppi della carta lungo i tratti segnati del circolo a e poi infine ritagliare lungo l'altra circonferenza b solo una parte della carta, incidendo i diametri segnati. Le prime due circonferenze ritagliate si possono incastrare grazie al taglio lungo il raggio. A quest'ultimo bisogna introdurre la terza circonferenza: si ottiene il modello di sfera raffigurato nella seguente immagine.

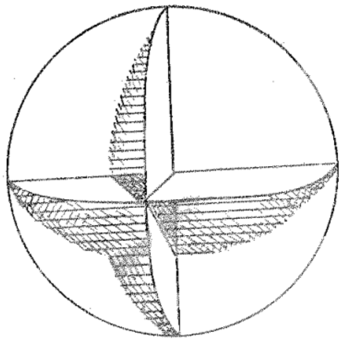


Figura 3.5.3 Modello di sfera di carta costruito.[45]

Agganciando un filo in uno dei raggi tagliati e facendo girare il modello di carta costruito è possibile vedere la sfera. Il diametro dei due circoli verticali, che giace in linea retta con il filo, è detto *asse di rotazione*. Grazie al modello, è possibile ragionare sulle intersezioni tra piani, infatti i tre circoli ritagliati e incastrati non sono altro che porzioni di piano: a due a due essi si incontrano in una retta, ovvero il diametro; tutti e tre si tagliano in un punto, il *centro della sfera*. Il presente modello è costituito da un equatore, il circolo che ruota attorno al suo centro e rimane sempre nello stesso piano, e due meridiani, i due circoli che passano per l'asse di rotazione.

Un esempio di sfera è il pianeta in cui viviamo, la Terra, senza tenere conto delle sue ineguaglianze, di esso possiamo spiegare al bambino in che posizione si trova l'Italia rispetto all'equatore o ai meridiani.

Nel paragrafo successivo è illustrata una costruzione della sfera con quattro meridiani, secondo gli autori questa è maggiormente apprezzata dai bambini rispetto a quella con due meridiani, infatti se si appende il modello della sfera con

[44] *Geometria per i piccoli*, p.48, fig.26

[45] *Geometria per i piccoli*, p.50, fig.27b.

quattro meridiani e lo si fa ruotare, è molto più semplice per gli allievi visualizzare la sfera. Di seguito mostriamo il modello di sfera in questione:

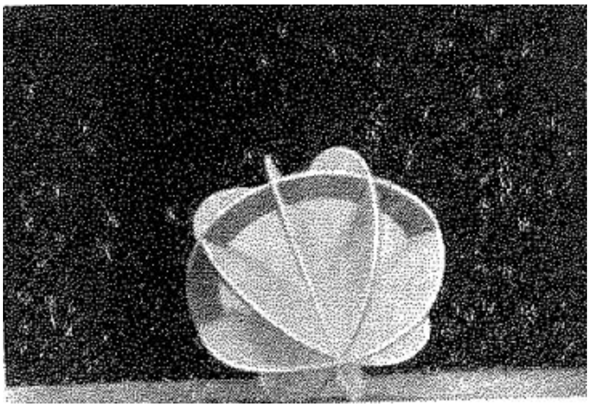


Figura 3.5.4 Modello di sfera di carta con quattro meridiani.[46]

Infine, si dà una definizione di superficie sferica che richiama quella di circonferenza. La superficie sferica infatti viene definita come il luogo di un punto dello spazio che si mantiene a distanza costante da un punto fisso. Questa superficie, come quella piana, non ha spessore alcuno: il miglior modello di superficie sferica è una bolla di sapone.

Il principio di sovrapposizione viene ripreso anche in questo capitolo per verificare l'uguaglianza tra due circoli. Se si disegnano due circoli con lo stesso raggio in un foglio e un terzo circolo con lo stesso raggio in un altro foglio, allora è possibile sovrapporre il terzo circolo su entrambi i circoli del primo foglio, per il principio di sovrapposizione i circoli e le circonferenze sono uguali.

In realtà, gli autori specificano che in questo caso è più corretto dire *"circoli congruenti*", introducendo in questo modo per la prima volta la nozione di congruenza e confrontandola con quella di uguaglianza:

> *"Congruenti" è più che "eguali". "Eguale" indica che c'è qualche cosa che è la stessa, ma "congruenti" significa che tutto è eguale eccetto il posto particolare in cui le cose si trovano in un dato momento.*[47]

Nel paragrafo 3.4 riguardante il principio di sovrapposizione, avevamo affermato che quando due segmenti sono sovrapponibili allora essi sono uguali.

Due segmenti uguali hanno la stessa lunghezza, unica proprietà che possiede un segmento, oltre alla posizione che esso occupa nello spazio.

Nel caso dei circoli invece essi sono caratterizzati da raggio, area e circonferenza e solo quando i circoli hanno tutte e tre queste proprietà uguali, e dunque sono sovrapponibili, allora essi sono *congruenti.* Per questo motivo gli autori aspettano questo capitolo per introdurre la relazione di congruenza.

Inoltre, possiamo osservare che la nozione di congruenza proposta dagli autori è proprio quella sottointesa da Euclide: egli non esplicita il significato preciso di

---

[46] *Geometria per i piccoli*, p.54, fig.28.

[47] *Geometria per i piccoli*, pag. 55.

congruenza, ma attraverso la dimostrazione della proposizione I.4 degli *Elementi*, il primo criterio di congruenza tra triangoli, è chiaro che è legato alla sovrapponibilità delle figure.
Ci sono dei circoli che hanno stesso centro, questi si chiamano *concentrici*. Come quelli nella seguente figura:

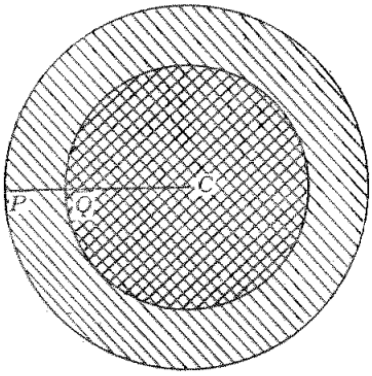


Figura 3.5.5 Circoli concentrici.[48]

Si può notare che l'area del cerchio con raggio CQ è parte dell'area del cerchio più grande con raggio CP. Dunque, semplicemente, ogni circolo che ha raggio minore di quello di un altro circolo, ha un'area minore di quella dell'altro circolo.
Non si deve pensare però che la circonferenza del circolo di raggio minore è parte di quella del circolo di raggio maggiore o che la circonferenza del circolo più piccolo è minore di quella del circolo più grande[49]: delle circonferenze non si può ancora dire nulla. Gli autori si soffermano lungamente sulla seguente questione, illustrandone un controesempio.

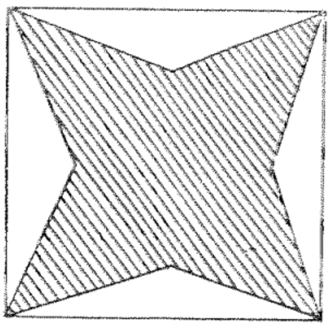


Figura 3.5.6 La lunghezza della figura inscritta è maggiore di quella del quadrato in cui giace.[50]

Nella figura vi sono un quadrato e all'interno una linea spezzata: usando la riga è possibile segnare la lunghezza di ognuno degli otto segmenti e constatare che la loro somma è maggiore dei quattro lati del quadrato. Quindi, non è corretto pensare che se una figura giace dentro un'altra allora essa ha perimetro minore di quello della figura in cui giace. Questo è un esempio lampante di come la nostra intuizione

[48] *Geometria per i piccoli*, p.56, fig.29.
[49] *Geometria per i piccoli*, p.56.
[50] *Geometria per i piccoli*, p.57, fig.30.

può fallire e di come la Geometria può fornirci gli strumenti per comprendere la realtà.

3.6 Bisezione di un segmento

Per trattare la bisezione, gli Young ricorrono in primo luogo all'etimologia della parola, che dal latino vuol dire "tagliare in due", gli autori però specificano che nel loro testo verrà intesa per "dividere in due parti uguali".
Il primo esempio proposto di bisezione è presente nel 9° capitolo, la *bisezione di un segmento*.
Si considera un segmento PR e, posizionando la riga su PR, su di essa in corrispondenza di P e di R si tracciano due segni, due punti, chiamati A e B. A questo punto, bisogna piegare per bene la riga in modo da far coincidere A con B. La piegatura appena ottenuta non è altro che una retta che incontra il margine della riga in un punto, chiamato M. Quest'ultimo è tale che MA=MB, dato che sono sovrapposti. Quindi, AB è bisecato da M. Riposizionando la riga sul segmento PR in modo da far coincidere A con P e B con R, ci sarà un punto di PR che si sovrappone ad M, chiamato O. Allora, sembra che PR sia bisecato da O.
Si può essere sicuri della verità di quest'ultima affermazione grazie ad uno degli assiomi precedentemente visto: *cose uguali ad una terza cosa sono uguali fra di loro*. Dunque, non è necessario sovrapporre ulteriormente PO ad OR per esserne sicuri, infatti si può "dimostrare" che:

Poiché AM era sovrapposto a PO, $AM = PO$;

Poiché MB era sovrapposto a OR, $MB = OR$;

Inoltre, per il principio di sovrapposizione, $AM = BM$;

Allora, per l'assioma, $PO = OR$.

Questa è la prima *dimostrazione* svolta nel libro, gli autori ne approfittano per spiegare cos'è una dimostrazione e a cosa essa serve.

> *Noi abbiamo dato qui di un fatto tutte le prove, senza nulla tralasciare; questo si chiama "dare una dimostrazione". Talvolta, quando ci sembra che una cosa sia in un certo modo, è solo perché non abbiamo disegnato o piegato bene, ed è perciò della massima necessità saper dare una dimostrazione. Il saper esporre le proprie ragioni, tutte quante, chiaramente e con ordine, è chiamato "Logica". Potete imparare a pensare logicamente, cioè a sapere perché ritenete qualche cosa per vero, e a parlare logicamente, cioè a non esprimere alcuna idea senza darne le ragioni. La geometria vi aiuterà a imparare la logica.*[51]

[51] *Geometria per i piccoli*, p.60.

Solo dopo la dimostrazione gli autori invitano lo studente a verificare, piegando il segmento, che PR è davvero bisecato da O.

3.7 L'angolo

Il 6° capitolo introduce il concetto di *angolo* e ne dà una rappresentazione grafica, la quale si distingue dalle raffigurazioni moderne[52].
Gli autori scelgono di iniziare il capitolo con la definizione dell'oggetto matematico che vogliono presentare.
Considerano due semirette condotte da A, AB e AC, e dicono che queste formano un angolo. Chiamano il punto A *vertice dell'angolo* e le semirette AB e AC *lati dell'angolo*. Indicano con BAC l'angolo in questione, è importante inserire al centro il nome del vertice.
Infatti, se P è un altro punto della semiretta AB e Q un altro punto della semiretta AC, allora con PAQ si intende lo stesso angolo di BAC.

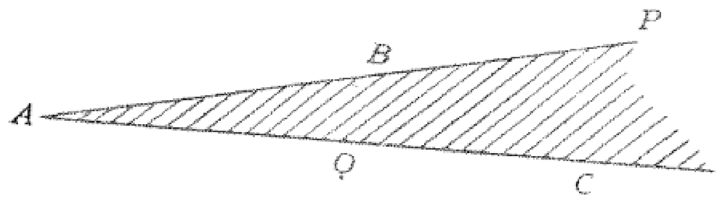


Figura 3.7.1 La rappresentazione di angolo.[53]

Un angolo ha una parte interna ed una esterna: se immaginiamo di tagliare il piano lungo i lati dell'angolo, otteniamo che esso si divide in due parti. Queste parti non sono uguali come potevano esserlo nel caso di piano tagliato da una retta, piuttosto c'è una parte più piccola dell'altra, questa si dice *l'interno dell'angolo* esclusi i lati, tratteggiata nella figura sopra, l'altra è *l'esterno dell'angolo* esclusi i lati. In generale quando si parla di angolo ci si riferisce alla parte interna.

È possibile far costruire agli studenti un *modello di angolo* ritagliando la carta lungo AB e AC, che presenta per l'appunto solo l'interno dell'angolo sopra.
Dello stesso angolo si possono creare vari modelli cambiando la lunghezza dei lati, quest'ultima non ha nulla a che vedere con l'angolo infatti, ma al fine di osservare bene l'inclinazione di una retta sull'altra, è conveniente non disegnare i lati troppo corti. Lo studente può notare che ogni volta che guarda il segmento AB sta determinando un angolo con vertice nel suo occhio, detto l'*angolo sotteso*, rispetto al suo occhio, da AB.

[52] Nei libri attuali l'angolo viene rappresentato da un archetto che congiunge internamente i due lati dell'angolo, gli studenti dunque spesso confondono il concetto di angolo con il simbolo dell'archetto.
[53] *Geometria per i piccoli*, p.33, fig.19.

Nel 10° capitolo gli autori forniscono un metodo per costruire un *angolo uguale ad uno dato* utilizzando il modello di carta di angolo.
Preso un angolo qualsiasi ACB, se ne costruisce un modello, quest'ultimo si pone sul foglio e si fa scorrere la matita lungo i lati del modello: in questo modo si ottiene un angolo PQR uguale ad ACB, per il principio di sovrapposizione e per l'assioma (*).
Si può anche disegnare un *angolo pari al doppio di un angolo dato*: con il modello dell'angolo dato ACB, si costruisce innanzitutto PRQ uguale ad ACB, si ripete lo stesso procedimento ponendo il modello in uno dei due lati di PRQ, ottenendo così l'angolo PRP', pari al doppio di ACB.
Se nella sezione di "segmenti uguali" gli autori introducevano il centimetro, in questa sezione essi trattano l'unità di misura degli angoli nel seguente modo:

> *Se fate aderire un soldo a un vetro della finestra e ve ne allontanate di un metro e mezzo circa, l'angolo che il diametro del soldo sottende al vostro occhio è press'a poco ciò che si chiama* un grado. [54]

Gli Young continuano spiegando che usualmente per indicare l'ampiezza di un angolo si dice quanti gradi esso contiene. Un *grado* è un angolo troppo piccolo, difficile da disegnare o piegare; gli angoli più comuni e semplici da disegnare sono ad esempio quelli di 60° e di 30°, ma il più semplice in assoluto è quello di 90°, chiamato *angolo retto*.

Nel 11° capitolo si passa alla *bisezione di un angolo*.
Innanzitutto, avendo un modello di angolo in mano, per bisecarlo è sufficiente far combaciare i margini rettilinei dell'angolo. Si osserva che ripiegando bene un margine lungo l'altro e viceversa, si ottiene una retta interna all'angolo, essa divide l'angolo in due parti uguali e si chiama *bisettrice di un angolo*.

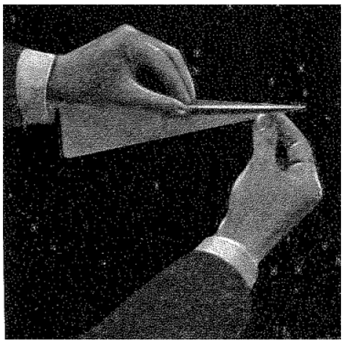


Figura 3.7.2 Bisezione di angolo mediante un modello.[55]

È esposto anche un modo di *bisecare un angolo senza far uso di un modello*.
Sia dato un angolo ACB, su uno dei lati dell'angolo si prenda un punto qualunque A, sull'altro lato si prenda un punto B tale che $CA = CB$. Si congiungano A e B, ottenuto il segmento AB bisogna bisecarlo con il punto medio, D. infine, è

[54] *Geometria per i piccoli*, p.63.
[55] *Geometria per i piccoli*, p.68, fig.36.

sufficiente unire D con il vertice dell'angolo, C, e la retta CD sarà la bisettrice. Questo è vero perché piegando il disegno lungo CD, gli angoli DCA e DCB si sovrappongono.

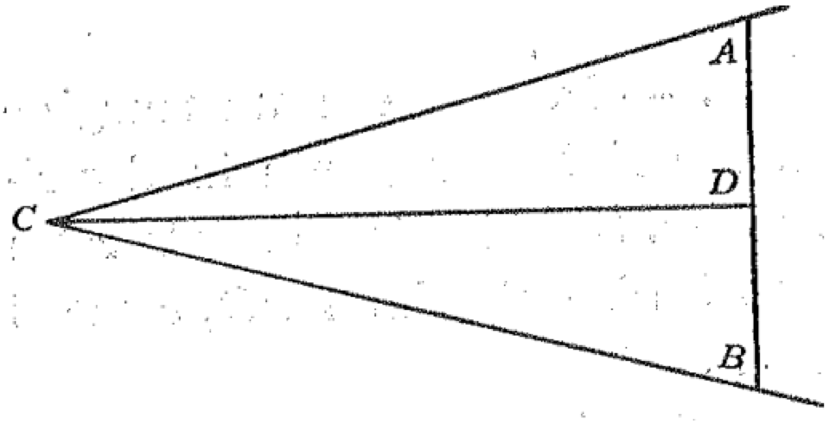


Figura 3.7.3 Bisezione di un angolo senza l'uso di un modello.[56]

Quest'ultimo metodo è molto più preciso del primo, ma gli autori scelgono di non dare direttamente il secondo perché tramite il primo lo studente alle prime armi può familiarizzare con il concetto di bisettrice di un angolo.

Nel 12° capitolo si prendono in considerazione angoli disuguali.
Nei capitoli precedenti è stato già esaminato il caso di due angoli uguali, bastava che essi si sovrapponessero. Per stabilire se un angolo è maggiore o minore di un altro non è così semplice, perché nonostante possa succedere che sovrapponendo due angoli disuguali uno di essi stia all'interno dell'altro, non si può dire che il primo sia uguale ad una parte del secondo. Infatti, gli autori ribadiscono che non hanno intenzione di paragonare oggetti infiniti:

> *Ricordate che vi avevo detto che non avremmo paragonato cose infinite, ed è un tutto infinito la parte interna di un angolo. Tale modo di considerare gli angoli non ci serve per confrontare angoli diseguali, ma vi ha un altro modo che ora spiegheremo.*[57]

Per confrontare due angoli si procede in questo modo: si considerano due angoli ACB e PRQ nella *figura 3.7.4*, si fissa con uno spillo il punto R con il punto C in modo da far ruotare l'angolo PRQ attorno a C. Mediante la rotazione del raggio RQ, osserviamo che quando RP coincide con CA, il raggio RQ giace dentro l'interno dell'angolo ACB, quindi *l'angolo PRQ, di cui RQ ha ruotato, è minore di ACB*. Analogamente, se RQ è fuori dall'angolo ACB, l'angolo PRQ è maggiore dell'angolo ACB.

[56] *Geometria per i piccoli*, p.70, fig.37.
[57] *Geometria per i piccoli*, p.71.

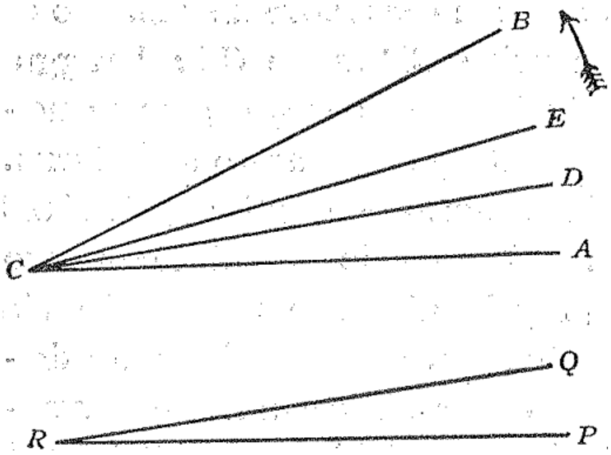


Figura 3.7.4 Paragone di angoli disuguali.[58]

È importante sottolineare che la relazione di maggioranza o minoranza tra questi angoli non dipende dal fatto che l'interno di uno faccia parte dell'interno dell'altro o meno. Piuttosto, si fanno dipendere gli angoli dalla rotazione di raggi.

Al fine di interiorizzare meglio questi concetti, per concludere il capitolo gli autori propongono di riflettere sugli angoli che formano le lancette di un orologio. Prendendo spunto dagli angoli formati dalle lancette si può anche far riferimento al loro senso della rotazione, che si dice *in senso orario*, nell'esempio precedente invece il senso era opposto, detto *antiorario*. Sempre grazie all'esempio dell'orologio è possibile osservare che l'angolo formato dalle lancette che segnano le dodici e mezza passate è concavo. Inoltre, l'angolo formato dalle lancette quando sono esattamente le dodici e mezza è un angolo piatto, o anche indicato con la lettera greca π. L'angolo piatto non è altro che l'unione di due angoli retti, dunque un angolo concavo è un angolo maggiore di due retti.

3.8 Perpendicolarità

Nel 13° capitolo viene affrontato il tema della perpendicolarità, dapprima usando la piegatura, poi un modello di angolo retto e infine senza l'uso di un modello.

Per piegare una perpendicolare è necessario in primo luogo prendere la riga di carta, che avevamo precedentemente costruito nel paragrafo 3.2 per disegnare linee rette, e piegarla in modo che un punto O del suo margine sia ripiegato su se stesso. Si considerano un punto qualsiasi P che stia sulla piegatura ottenuta e due punti qualsiasi A e B sovrapponibili con la piegatura tali che stiano sul margine della riga. Sia Q il punto sovrapposto a P.
Spiegando il foglio si ottiene il seguente risultato mostrato nella figura sottostante:

---

[58] *Geometria per i piccoli*, p.72, fig.38.

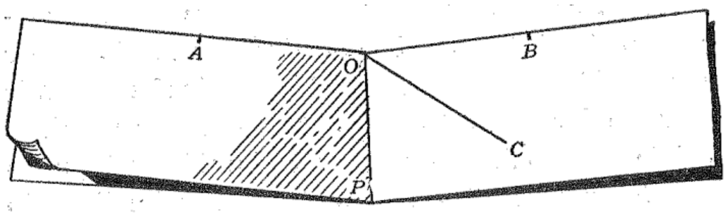


Figura 3.8.1 Foglio spiegato per la costruzione della retta perpendicolare alla retta AB.[59]

Gli autori definiscono in questo modo la *retta perpendicolare ad un'altra retta* in un dato punto:

> *La retta OP si dice perpendicolare ad AB. Si dice che un raggio è perpendicolare a una retta AB in un punto O quando fa angoli eguali coi due raggi OA e OB che compongono la retta AB.*[60]

Nella costruzione fatta infatti si ha che, piegando lungo OP, OA coincide con OB e quindi gli angoli POA e POB si sovrappongono. In realtà, tutti e quattro gli angoli POA, POB, QOA, QOB sono uguali perciò anche OQ è perpendicolare ad AB. Si osserva che OQ e OP fanno parte della stessa retta e questa è l'unica retta perpendicolare ad AB passante per O.
Concludono l'esempio osservando che, considerata una perpendicolare a una retta per un punto dato, quest'ultima è anch'essa perpendicolare alla prima.
A seguire vengono definiti gli angoli POA, POB, QOA, QOB come angoli retti, ovvero angoli che contengono esattamente 90 gradi, 90°. Grazie ad una verifica con piegatura si afferma che *tutti gli angoli retti sono uguali fra loro*.

> *Se in un punto O' di una retta A'B' conduciamo la perpendicolare P'O'Q', possiamo in seguito, su un altro foglio di carta, piegare una copia esatta delle due linee, così che le due figure si possano sovrapporre; e, adoperando allora per questa copia le stesse lettere, possiamo sovrapporre questo foglio al primo per modo che O' giaccia sopra O ed A'O'B' su AOB. Se ora pieghiamo con cura entrambi i fogli di carta lungo AB, e poi, tenendo fisso O, ripieghiamo il margine su se stesso, le pieghe debbono trovarsi lungo POQ in uno dei fogli e lungo P'O'Q' nell'altro, e i quattro angoli retti di un foglio coincidono coi quattro angoli retti dell'altro, e sono quindi rispettivamente eguali.*[61]

È possibile condurre una perpendicolare senza piegare, ma servendosi di un modello di angolo retto: bisogna posizionare un orlo del modello lungo la retta e farlo scivolare su di essa fino a quando non incontra il punto dato e infine passare la matita sopra l'orlo.
Il terzo metodo per costruire una perpendicolare ad una retta data per un dato punto non si serve di alcun modello, ma sfrutta l'intersezione tra due circonferenze la cui distanza dei centri è minore della somma dei loro raggi.

---

[59] *Geometria per i piccoli*, p.76, fig.39.
[60] *Geometria per i piccoli*, p.76.
[61] *Geometria per i piccoli*, pp.77-78.

Dobbiamo considerare due circonferenze di centro B e D passanti per uno stesso punto A, come in *figura 3.8.2*, e tali che la somma dei loro raggi è maggiore della distanza tra i centri, esse si intersecano anche in un altro punto, C. Pieghiamo la carta lungo BD e notiamo che C è sovrapposto ad A, e AC è bisecato ad angolo retto dalla piega. Infine, basta congiungere A con C per ottenere la perpendicolare a BD passante per A.

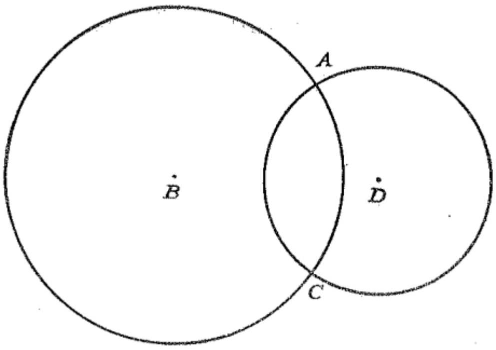


Figura 3.8.2 Due circonferenze passanti per uno stesso punto A.[62]

3.9 I quadrilateri

Il primo quadrilatero che gli autori presentano è il *rombo*, esso viene fuori dalla costruzione della perpendicolare ad una retta data da un punto dato su di essa sfruttando due circonferenze con raggi uguali, come mostra la seguente figura:

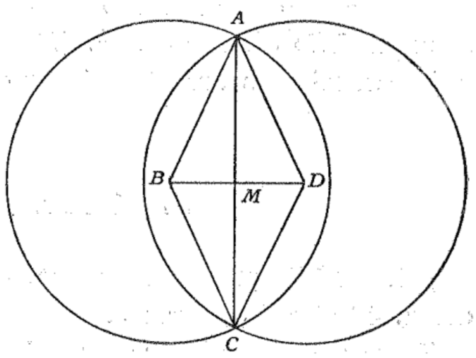


Figura 3.9.1 Metodo per disegnare una perpendicolare a una retta data da un punto M dato su di essa.[63]

Nel 14° capitolo, il successivo al capitolo della costruzione in *figura 3.9.1*, viene definito il rombo come la figura ABCD dell'immagine soprastante.

> *Un rombo è una figura quadrilatera giacente in un piano, i cui lati sono segmenti uguali.*[64]

[62] *Geometria per i piccoli*, p.85, fig.44.
[63] *Geometria per i piccoli*, p.87, fig.46.
[64] *Geometria per i piccoli*, p.88.

In generale, gli autori per trattare i quadrilateri proseguono nel seguente modo: definiscono la figura, osservano quali simmetrie ha, tratteggiano l'area, procedono nella costruzione e infine piegano la figura per studiarne le proprietà.
Piegando il rombo si può mostrare che per definirlo è sufficiente conoscere la lunghezza di un lato e un angolo.
Infatti, dato un angolo del rombo, si ha che l'angolo opposto è uguale e gli angoli adiacenti a quello dato sono uguali tra loro, in particolare, piegando, si vede che l'angolo dato e uno di quelli adiacenti sono supplementari, ovvero uguali a due angoli retti.
La figura ripiegata che si ottiene per la verifica precedente è un rettangolo, ovvero una figura quadrilatera con tutti gli angoli retti e i cui lati non sono tutti uguali. Un rettangolo che invece ha tutti i lati uguali è il *quadrato*.
Gli autori definiscono il quadrato in questo modo:

> *Il quadrato è un caso particolare del rombo. Se uno degli angoli del rombo è retto, il rombo è un quadrato.*[65]

Sottolineano che, nonostante il quadrato abbia tutti gli angoli retti, nella definizione non è necessario dirlo, sempre nello spirito per cui in una definizione non si deve dire più di quanto serva.
Per l'appunto si è detto che dato un rombo con un certo angolo e un certo lato, allora l'angolo opposto e quello dato sono uguali; gli angoli adiacenti a quello dato sono uguali tra loro; la somma tra l'angolo dato e uno di quelli adiacenti è uguale a due retti. Allora, considerando un rombo con un angolo α retto si ha che l'angolo opposto β sarà anch'esso retto, inoltre l'angolo dato più uno di quelli adiacenti, γ o δ, danno due retti, dunque:

$$\alpha = \beta,$$

$$\alpha + \gamma = 180° \; e \; \alpha + \delta = 180° \; ;$$

$$ma \; \alpha = 90° \; allora \; \beta = \gamma = \delta = 90°.$$

È utile mostrare in questo elaborato la piegatura del quadrato, più immediata rispetto a quella del rombo, per comprendere in cosa essa consiste e soprattutto perché gli autori la svolgono. Oltre ad ottenere un vero e proprio manufatto, un quadrato di carta, gli studenti possono comprendere le relazioni e le proprietà della figura costruendolo.
La seguente figura mostra come piegare un quadrato:

[65] *Geometria per i piccoli*, p.95.

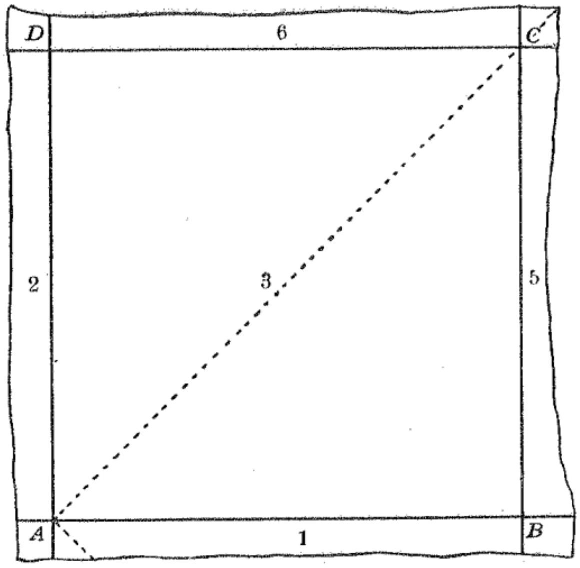


Figura 3.9.2 Piegare un quadrato.[66]

Piegate una retta (1). Piegate ora la (2) perpendicolare alla (1). Strappate la parte superflua del foglio lasciando un sottile orlo sotto le (1) e (2). Tenendo l'orlo ripiegato sotto (1), piegate (3) sovrapponendo (1) a (2). Non lasciate la carta piegata lungo la (3), ma sempre con l'orlo piegato sotto (1), segniamo su questa il punto B a una distanza arbitraria dal vertice A dell'angolo costruito. La retta (5) si può piegare perpendicolare alla (1) e passante per B, la (1) e la (3) si incontrano in un punto che possiamo chiamare C. La (6) si può piegare perpendicolare alla (5) e uscente da C. La (6) interseca la (2) in D.
Piegando opportunamente possiamo verificare che *le diagonali del quadrato sono uguali*.
Pieghiamo il quadrato in modo da sovrapporre A e D. AB e CD coincidono in quanto gli angoli in A e in D sono retti, e quindi B risulta sovrapposto a C. i lati AD e BC sono ripiegati su se stessi, dimezzati dalla piega. La parte di diagonale di AC che sta vicino ad A è sovrapposta alla parte di diagonale di BD che vicino a D. Se M è il punto di intersezione delle due diagonali, M sta sulla piega e MA è sovrapposto ad MD, così queste due metà di diagonali sono uguali e quindi anche le diagonali stesse.
Per quanto riguarda la *simmetria del quadrato*, essendo esso un rombo, sarà simmetrico rispetto alle sue diagonali. Il quadrato ha però altri due assi di simmetria: piegando lungo le congiungenti i punti medi di due lati opposti si osserva che il quadrato si ripiega su di sé.
Si possono poi confrontare le *aree di due quadrati con lati disuguali*: supponiamo un quadrato ABCD con lati più lunghi di quelli del quadrato PQRS. Consideriamo il quadrato AEFH uguale a PQRS tale che AE è una parte di AB. Otteniamo un quadrato uguale a PQRS inscritto in ABCD, allora questo avrà area minore di ABCD e quindi PQRS ha area minore di ABCD. In generale, *l'area del quadrato dipende dalla lunghezza del lato*.

[66] *Geometria per i piccoli*, p.96, fig.54.

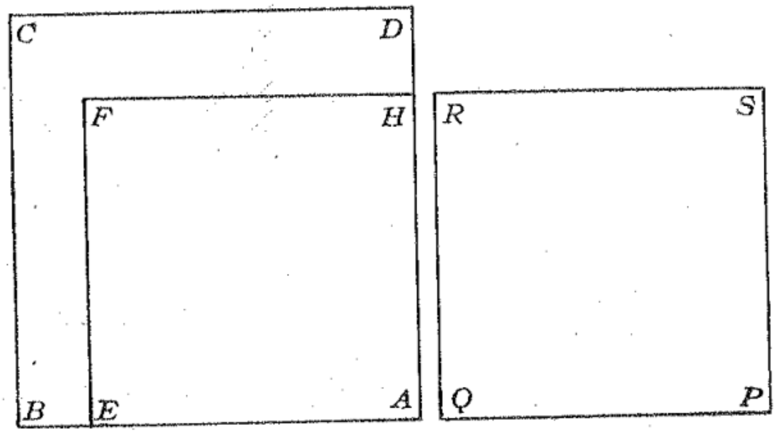


Figura 3.9.3 Confronto aree di quadrati con lati disuguali.[67]

Si può anche dire qualcosa riguardo al "circuito", il *perimetro*, dei due quadrati. Infatti, in figura 3.9.3 si vede bene che AE è una parte di AB, quindi il circuito di AEFH vale quattro volte AE che è minore di quattro volte AB. Dunque, *il perimetro del quadrato inscritto è minore di quello circoscritto*.
Come osservano gli autori, si deve fare attenzione a non confondere questo caso con quello dei circoli non congruenti: nel caso dei circoli non era possibile sovrapporre una parte di circonferenza e di conseguenza non si poteva trarre nessuna conclusione.
Alla fine del capitolo, viene spiegato come misurare l'area di un quadrato.

> *Un quadrato avete per lato un centimetro viene detto un centimetro quadrato.*[68]

Un quadrato con lato 2 cm avrà area 4 cm² in quanto dimezzando tutti i suoi lati si suddivide in quattro quadrati di lato 1 cm. Allo stesso modo quello di lato 3 cm avrà area 9 cm², quello di lato 4 cm avrà area di 16 cm² e così via. I numeri 4, 9, 16, 25, 36 etc., si chiamano *quadrati*. La regola per calcolare l'area di un quadrato fornita nel libro è la seguente:

> *Si misuri col centimetro il lato del quadrato e si moltiplichi il numero di centimetri ottenuto per il numero stesso, o come si suol dire, si faccia il quadrato di tal numero: il prodotto dà il numero di centimetri quadrati dell'area.*[69]

3.10 Il cubo

In seguito allo studio del quadrato, gli autori propongono la costruzione di un cubo. Per prima cosa essi ne danno una definizione: *"Dicesi cubo un parallelepipedo rettangolo avente gli spigoli eguali."*[70] Successivamente

[67] *Geometria per i piccoli*, p.100, fig.57.
[68] *Geometria per i piccoli*, p.101.
[69] *Geometria per i piccoli*, p.102.
[70] *Geometria per i piccoli*, p.102.

procedono con la costruzione di un campione di cubo, piegando, ritagliando e incastrando opportunamente ottengono un cubo.

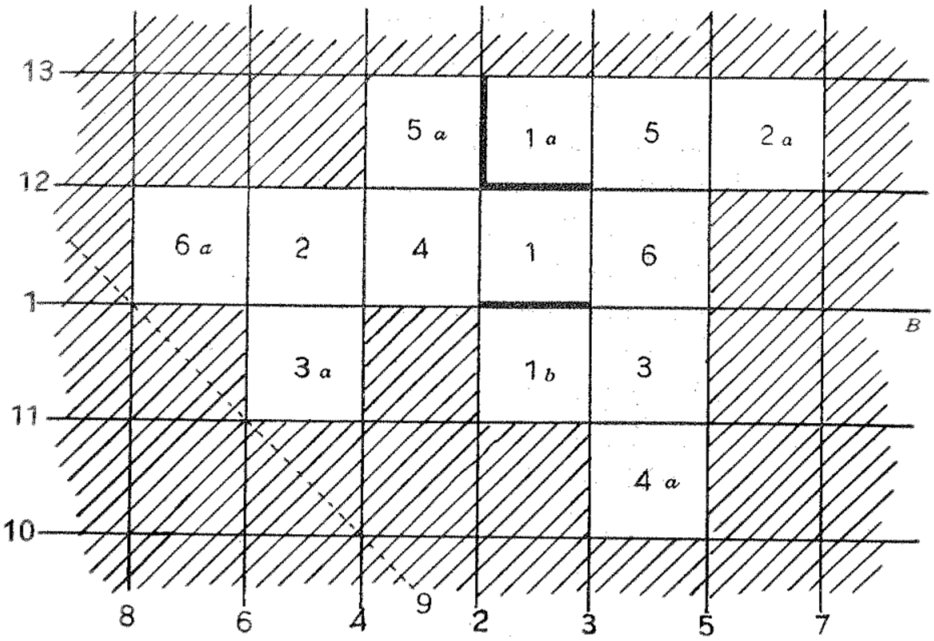


Figura 3.10.1 Modello piano di un cubo.[71]

Prima si piegano (1) e (2) ad angolo retto, poi si piega (3) perpendicolarmente ad (1), essendo la distanza fra (2) e (3) il lato dei quadrati che limitano il cubo. Le altre rette fino a (8) si piegano di seguito perpendicolarmente a (1) e ottenendole da una di quelle costruite prima: per esempio la (4) è ottenuta piegando il foglio lungo la (2), poi piegando a (3) dalla banda opposta in dentro e infine piegando all'indietro l'altra metà del foglio in modo che il margine che si ottiene coincida con (3). Per ottenere i rimanenti lati dei quadrati, prima pieghiamo la diagonale (9) facendo coincidere (1) con (8): è meglio usare questa diagonale affinché non resti piegata alcuna delle facce esteriori del cubo. Le rimanenti si ottengono in ordine, (12) e (13) vengono piegate mediante (11) e (10) essendo il foglio piegato lungo (1).[72]

Una volta eseguita la procedura descritta sopra, bisogna tagliare la parte tratteggiata, incidere lungo i tratti più spessi e collegare la figura piegando i quadrati aventi lo stesso numero l'uno sotto l'altro seguendo l'ordine delle lettere, ad esempio 1b va posto sotto 1a.

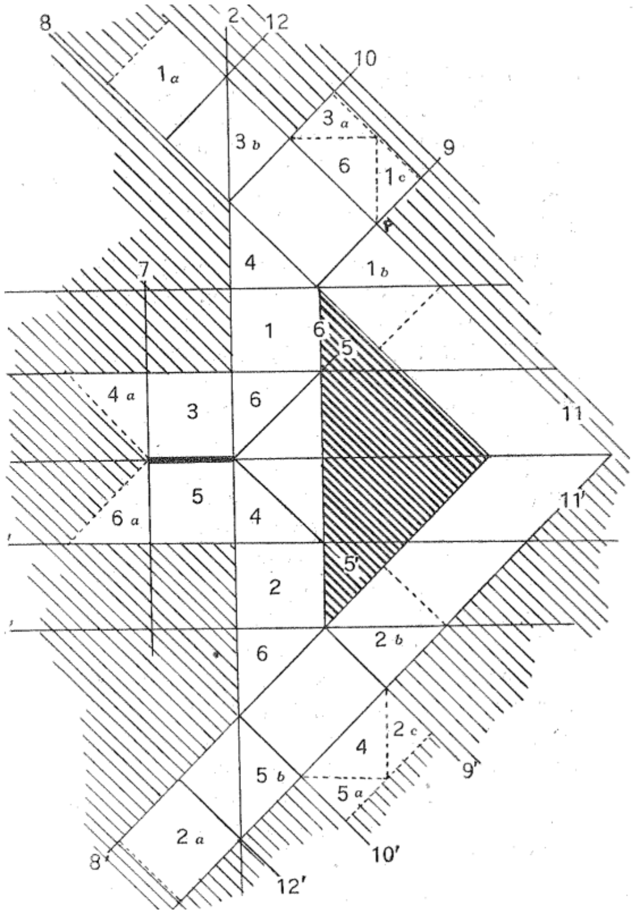
L'allievo adesso può contare il numero di facce, vertici e spigoli del cubo. Anche in questo caso, come in quello del parallelepipedo, la somma del numero dei vertici e del numero delle facce è uguale al numero degli spigoli aumentato di due. Ovvero:

$$F + V - S = 2,$$

[71] *Geometria per i piccoli*, p.103, fig.58b.
[72] *Geometria per i piccoli*, pp.104-105.

dove F è il numero delle facce, V il numero dei vertici ed S il numero degli spigoli.[73]
Gli studenti potranno verificare che l'equazione soprastante è vera per tutti i solidi limitati da porzioni di piano.
Sempre grazie al modello si può riflettere sulle diagonali delle facce del cubo, esse sono tante quante le facce.
Ci sono delle rette passanti per i vertici opposti delle facce del cubo che però non sono diagonali delle facce ma diagonali del cubo, esse non si possono vedere in quanto stanno all'interno del cubo, è necessario dunque ricorrere all'immaginazione. Come suggeriscono gli autori, per facilitare la creazione di questa immagine mentale, ci si può immaginare un cubo fatto di vetro al cui interno c'è un filo colorato che collega i due vertici opposti in questione.
In realtà, c'è un altro modo per vedere le diagonali interne, infatti si può tagliare il cubo lungo il piano che contiene due diagonali del cubo. Per questo motivo gli autori forniscono un altro modello per costruire le due parti di cubo tagliate da questo piano e tali che messe insieme restituiscono il cubo. Mostriamo di seguito nella figura *3.10.2* il modello proposto dagli autori e il risultato finale.

[73] Questa uguaglianza è nota come "formula di Eulero", secondo cui ogni poliedro *semplice* è tale che la somma del numero delle facce e del numero dei vertici supera il numero degli spigoli di 2. Un poliedro semplice è un poliedro che si può deformare con continuità ad una sfera. Un libro di geometria "per i piccoli" non è la sede giusta per affrontare temi più complessi come la topologia, per questo gli autori scelgono soltanto di far osservare questo fenomeno senza entrare nel dettaglio, rimandando così l'approfondimento dell'argomento agli studi superiori.



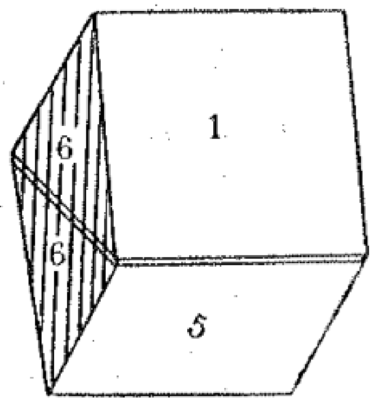


Figura 3.10.2 Modello piano di due cunei di cubo a sinistra e cubo tagliato in due a destra.[74]

Adoperando il modello dei due cunei di cubo è possibile osservare anche il centro del cubo, punto di intersezione delle diagonali del cubo.
I due cunei forniscono anche un'occasione per riflettere sulla simmetria del cubo: infatti, essi sono l'uno uguale all'altro e dunque il cubo è simmetrico rispetto al piano passante per due delle sue diagonali, in totale 6 piani rispetto al quale è simmetrico. Maneggiando il modello di cubo è possibile notare che il cubo è tagliato simmetricamente anche da un piano che biseca una coppia di lati opposti di qualunque facce, i piani in questione sono in totale 3.
Tali piani suddividono il cubo in parallelepipedi rettangoli, solidi già analizzati all'inizio della trattazione.
Anche di questi parallelepipedi gli autori forniscono un modello piano da concatenare opportunamente:

[74] *Geometria per i piccoli*, pp.110-111, fig.60-61.

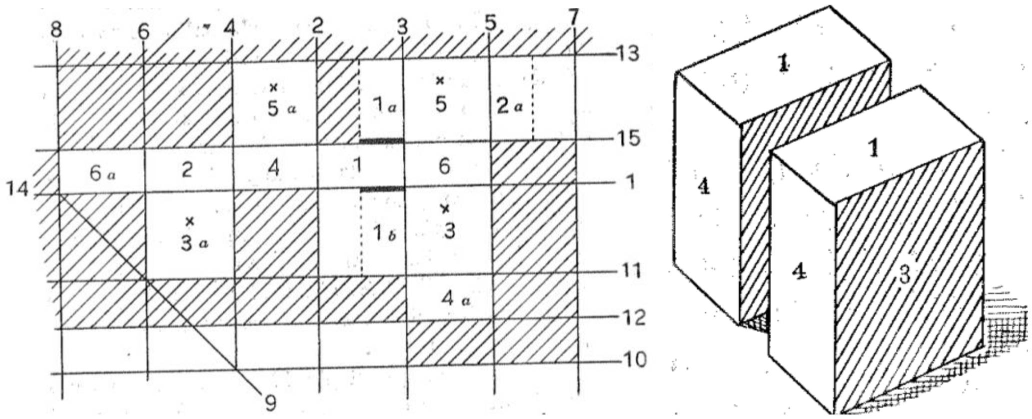


Figura 3.10.3 Modello piano di un parallelepipedo rettangolo a sinistra e cubo diviso in due parallelepipedi rettangoli.[75]

3.11 I triangoli

Nel 19° capitolo viene introdotto per la prima volta il triangolo, in particolare quello isoscele.
Si rimanda all'esempio del rombo rappresentato nella figura 3.9.1: ABD è un triangolo isoscele, esso ha due lati uguali tra loro, AD ed AB.
Dal greco *"isos"* che significa uguale, un triangolo isoscele ha due lati uguali. Il lato disuguale agli altri due viene chiamato base del triangolo.
Per la costruzione di tale figura dunque si può utilizzare nuovamente la costruzione del rombo con l'intersezione di due circoli. Dal rombo discendono le considerazioni sugli angoli del triangolo isoscele: gli angoli alla base del triangolo sono uguali tra loro in quanto sono entrambi metà degli angoli opposti del rombo.
Si può dire qualcosa in più sugli angoli, infatti, *i tre angoli di un triangolo isoscele valgono due angoli retti*[76].
Consideriamo un triangolo isoscele ABC come quello in figura 3.11.1, di base BC, bisechiamo BC e chiamiamo L il suo punto medio. Piegando in dentro in modo che A si sovrapponga ad L, chiamiamo NM il segmento all'interno del triangolo. Successivamente pieghiamo in modo che B si sovrapponga ad L, NB è uguale ad NL. Infine, pieghiamo in modo che C coincida con L.
Operando queste tre piegature abbiamo portato gli angoli in A, in B e in C tutti in L: quindi, tutti e tre sono uguali a due retti.

[75] *Geometria per i piccoli*, p.114, fig.62-63.
[76] *Geometria per i piccoli*, p.123.

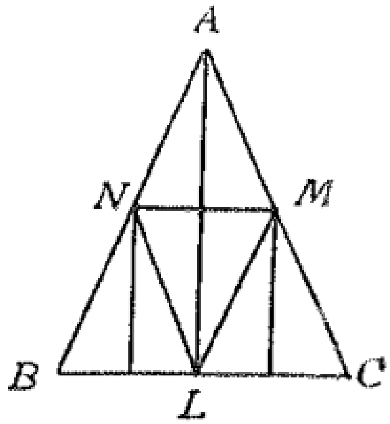


Figura 3.11.1 Piegature triangolo isoscele per verificare che la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°.[77]

Nel capitolo successivo gli autori presentano il triangolo equilatero ricorrendo ancora una volta alla costruzione del rombo della figura 3.9.1, ma nel caso specifico in cui il rombo sia un quadrato e dunque ABD è un triangolo avente tutti e tre i lati uguali tra loro.
Gli Young presentano due modi di piegare il triangolo equilatero: il primo è il più semplice e serve per familiarizzare con le sue proprietà, mentre il secondo è utile poiché iterando più volte la piegatura è possibile ricoprire interamente un foglio di carta di triangoli equilateri.
La prima piegatura è descritta nella seguente immagine:

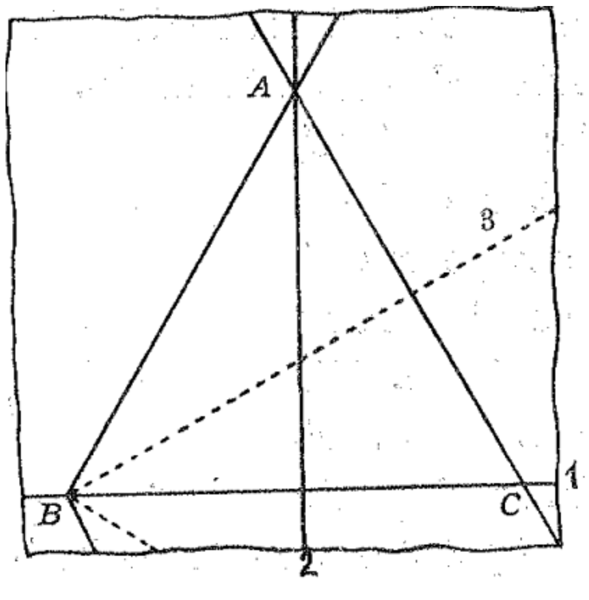


Figura 3.11.2 Primo modo di piegare un triangolo equilatero.[78]

Per ottenere un foglio piegato come in figura 3.11.2 è necessario innanzitutto piegare una linea retta (1) e prendere su di essa due punti B e C tali che BC sia una

[77] *Geometria per i piccoli*, p.123, fig.68.
[78] *Geometria per i piccoli*, p.124, fig.70.

lunghezza data, la base del triangolo. Bisecando il segmento BC, si ottiene la retta (2). Successivamente bisogna piegare la carta lungo BC e, tenendo fisso B, portiamo il margine in alto in modo che C stia sulla retta (2), chiamiamo A il punto della retta (2) in cui cade C: otteniamo la retta (3). Ripieghiamo in fuori lungo BA sul margine BC. Poi, aprendo il foglio, conduciamo la perpendicolare alla (3) per C, otteniamo AC. Attraverso queste piegature abbiamo ottenuto il triangolo equilatero ABC.
Il secondo modo di piegare un triangolo equilatero sfrutta l'uguaglianza degli angoli del triangolo equilatero e che tutti i triangoli equilateri hanno angoli uguali: ogni angolo di essi vale due terzi di un angolo retto. Inoltre, questa costruzione non comporta alcuna piega all'interno del triangolo stesso, contrariamente alla prima piegatura. Per questa costruzione è necessario piegare le linee nell'ordine indicato in figura 3.11.3: dopo aver piegato la (1), si ottiene la (2) come perpendicolare alla (1); le rette (3), (5), (7) e (9) sono a loro volta perpendicolari alla (2). La distanza tra (3) e (4) è arbitraria. Inoltre, la (4) è equidistante dalla (3) e dalla (5). Teniamo il foglio piegato lungo (2) e consideriamo l'intersezione tra (2) e (3), segnata con una croce in figura, tenendo fisso il punto d'intersezione tra (2) e (5), portiamo la croce sulla (4) e pieghiamo: otteniamo la linea (6). Pieghiamo verso fuori lungo la (5) e verso dentro la (1), la (7) è tale che la (1) sia la "piega mediana" tra (5) e (7). Dobbiamo poi congiungere l'intersezione tra (7) e (2) con l'intersezione tra (6) e (1), otteniamo così la piega (8). La figura delimitata dalle rette (6), (8) e (9) è un triangolo equilatero.

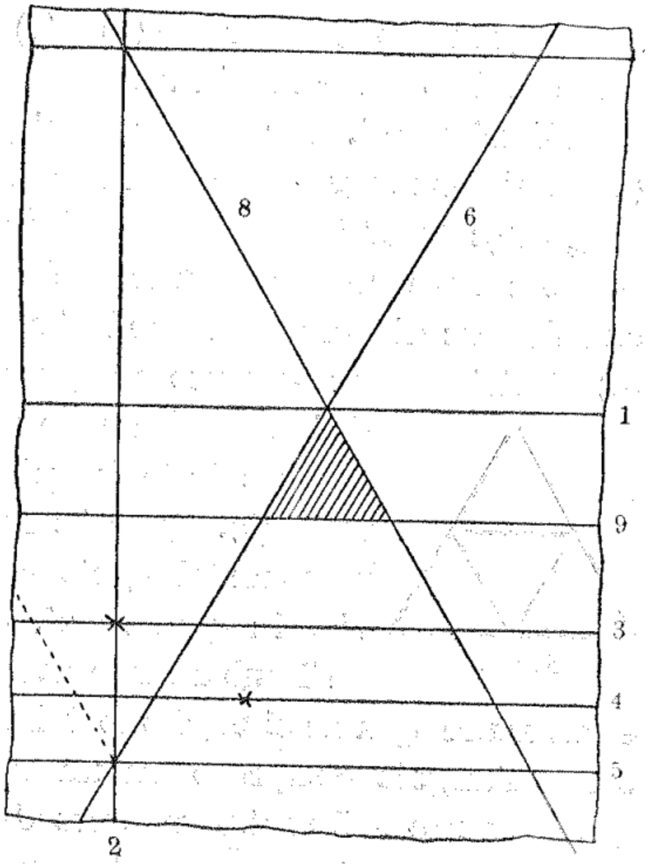


Figura 3.11.3 Costruzione di un triangolo equilatero senza pieghe interne al triangolo.[79]

Piegando lungo la (9) e disponendo il margine lungo la (6) si ottiene un altro triangolo equilatero alla destra del primo e con un lato in comune ad esso. Piegando nuovamente lungo la (9) e disponendo il margine lungo la (8) questa volta, si ottengono due triangoli equilateri, uno alla sinistra del primo e uno sotto al primo. Di seguito in figura mostriamo i quattro triangoli equilateri ottenuti:

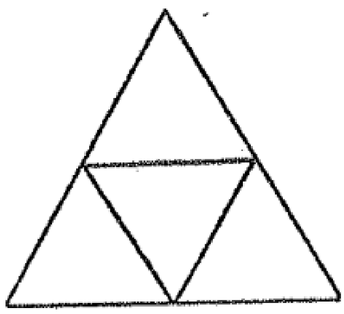


Figura 3.11.4 I tre triangoli equilateri costruiti con piegature a partire dal primo in alto.[80]

[79] *Geometria per i piccoli*, p.125, fig.71.
[80] *Geometria per i piccoli*, p.126, fig.72.

Bisecando l'angolo compreso fra un lato di un triangolo già costruito e il prolungamento di un altro lato[81], si possono costruire altri triangoli fino a ricoprire tutto il foglio. In generale, un reticolo di triangoli può ricoprire una porzione di piano senza lasciare spazi.[82]

Nel 24°capitolo gli autori continuano a trattare il triangolo, ma in questa sezione si dedicano alla dimostrazione di teoremi che lo riguardano. Finora, la maggior parte delle osservazioni fatte sui triangoli sono state *verificate* con le piegature e non *dimostrate*. Enunciamo di seguito i teoremi in questione e di alcuni ne riporteremo la dimostrazione con piegatura proposta dagli autori.

Teorema 1
La somma di due angoli di un triangolo è minore di due angoli retti.

Teorema 2
In ogni triangolo il maggior angolo è opposto al maggior lato.

Teorema 3
La somma di due lati di un triangolo è maggiore del terzo lato.

Prima di enunciare e dimostrare i teoremi, gli autori distinguono i triangoli in tre categorie: *rettangolo* se presenta un angolo retto, *acutangolo* se ha tutti gli angoli acuti e *ottusangolo* se possiede un angolo ottuso. Successivamente dimostrano operando opportune piegature che "ogni triangolo ha almeno due angoli acuti".
È naturale a questo punto riflettere sulla somma di due angoli di un triangolo, che, per il teorema 1, è minore di due retti: nel caso di un triangolo rettangolo o di un triangolo acutangolo è facile convincersi della verità di questo fatto, ma nel caso di un ottusangolo non è così intuitivo e per questo è necessario dimostrarlo.

Dimostrazione Teorema 1
Pieghiamo un triangolo qualunque, anzi, per ciò che si è detto prima, sarà meglio farlo ottusangolo (fig.90).

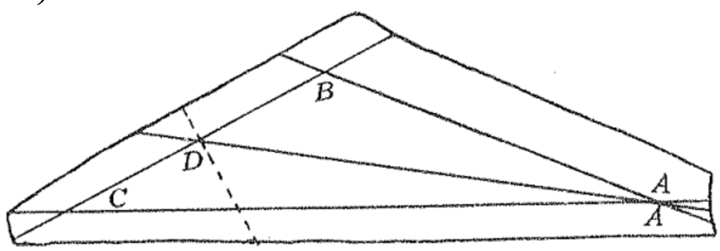


Figura 3.11.5 Triangolo ottusangolo.[83]

[81] *Geometria per i piccoli*, p.126.
[82] Gli autori introducono in questo modo gli studenti ad una prima nozione di *tassellazione* di un piano, senza mai chiamarla così, posponendo uno studio più approfondito di essa agli studi superiori.
[83] *Geometria per i piccoli*, p.144, fig.90.

Presi due quali che siano dei suoi angoli, proveremo che sommano, presi insieme, a meno di due retti: si può scegliere l'angolo ottuso e quello di due acuti che appare più ampio. Ripiegato in sotto l'orlo lungo il lato congiungente i vertici B e C dei due angoli che abbiamo scelto, bisechiamo il lato stesso ad angolo retto. Sia D il punto di bisezione: facciamo una piega passante per esso e per il vertice rimanente A del triangolo. Quest'ultima retta forma angoli supplementari col lato bisecato, così che solo uno di questi angoli può essere maggiore di un retto: sia ADB non maggiore di un angolo retto: sarà ADC non minore di un angolo retto: ADB e ADC formano insieme due retti. Tagliamo ora accuratamente il foglio lungo AD. Tenendo l'orlo piegato lungo BC, giriamo in sotto il triangolo ADB, così che esso giaccia a faccia in giù dall'altra parte di DB (fig.91).

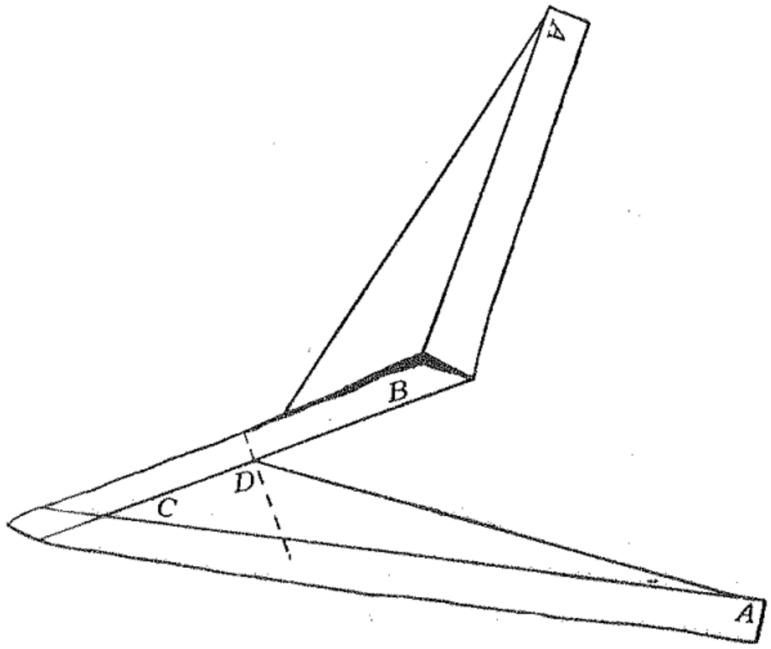


Figura 3.11.6 Triangolo ottusangolo tagliato lungo AD.[84]

Allora esso giace tutto dalla stessa banda della perpendicolare che bisecava BC, cioè dalla banda opposta a C. Se dunque ora noi pieghiamo la parte di foglio che sta sotto lungo questa secante, così che la faccia di prima torni a voltarsi in su, DB giacerà proprio lungo DC, C sovrapposto a B, e l'angolo BDA sarà posto dalla banda di DC da cui non sta l'angolo CDA; ed essendo di questo il supplemento, il suo lato DA sarà in linea retta col lato DA dell'angolo CDA. Perciò AC, BA e ADA [sarebbe il lato AA della fig.92] formano ora un triangolo (fig.92);

[84] *Geometria per i piccoli*, p.145, fig.91.

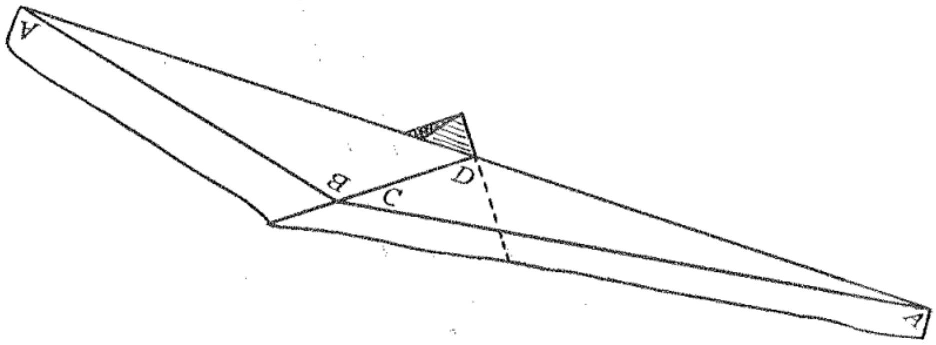


Figura 3.11.7 Triangolo formato da AC, BA e ADA.[85]

Così che gli angoli ADB e ACD non dànno un angolo concavo, ma costituiscono insieme uno degli angoli di questo triangolo: la loro somma è perciò minore di due angoli retti. Il che dimostra il nostro teorema che due angoli di un triangolo dànno insieme meno di due angoli retti.[86]

Il teorema 1 non è altro che la proposizione I.17 degli *Elementi* di Euclide, il che dimostra ancora una volta che gli autori non rinunciano ai risultati euclidei, sebbene ne rivisitino le dimostrazioni. Essi adoperano tagli, piegature e incollamenti per dimostrare il teorema, secondo loro, il metodo più adatto per un insegnamento elementare.

Nel 25° capitolo si passa ai teoremi di congruenza per i triangoli, anche questi di tradizione euclidea. Così come due circoli o due segmenti, due triangoli, per il principio di sovrapposizione, sono congruenti se si possono sovrapporre. Gli autori però spiegano che non è sempre possibile piegare la carta convenientemente in modo da sovrapporre due triangoli, e dunque per stabilire la loro congruenza è necessario conoscere le relazioni che intercorrono tra lati e angoli di essi. Si dimostrano i seguenti teoremi:

Teorema 1
Due triangoli sono congruenti se due lati dell'uno sono eguali a due lati dell'altro e se gli angoli compresi sono eguali.

Teorema 2
Due triangoli sono congruenti se due angoli dell'uno sono eguali a due angoli dell'altro e se questi comprendono lati pure eguali.

Teorema 3
Due triangoli sono congruenti se i tre lati dell'uno sono eguali ai tre lati dell'altro.

---

[85] *Geometria per i piccoli*, p.146, fig.92.
[86] *Geometria per i piccoli*, pp.144-146.

Il primo teorema di congruenza è la proposizione I.4 degli *Elementi*, conosciuta anche come Lato-Angolo-Lato. Euclide dimostra questa proposizione trasportando angoli e segmenti[87]. Vediamo invece come lo dimostrano i coniugi Young.
Proviamo il primo teorema. Consideriamo due triangoli ABC e DEF disegnati su un foglio in modo tale da non poterli sovrapporre, come in figura 3.11.8.

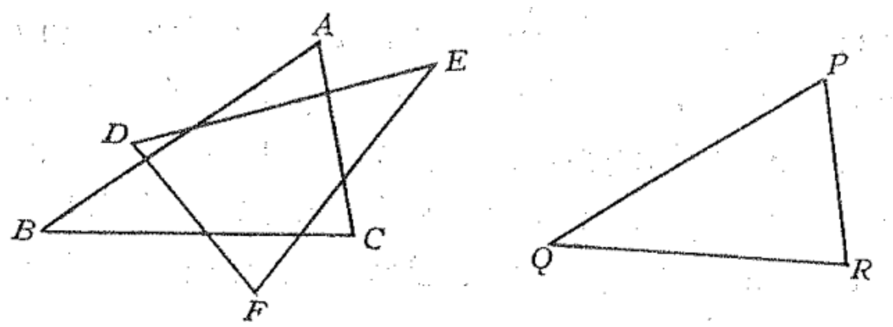


Figura 3.11.8 I triangoli ABC e DEF sono disegnati in modo tale da non poterli sovrapporre. Il triangolo PQR serve per dimostrare la congruenza tra ABC e DEF.[88]

Mettiamoci nelle ipotesi del teorema e dunque i triangoli sono tali che AB=DE, AC=DF e BAC=EDF. Dobbiamo mostrare che i triangoli ABC e DEF sono congruenti.
Prendiamo un altro foglio sul quale pieghiamo una retta e su di essa segniamo il segmento PQ tale che sia uguale al segmento AB. Di conseguenza, per le ipotesi, PQ è uguale anche a DE.
Con i metodi studiati in precedenza, possiamo costruire in P un angolo uguale a BAC, esso, per ipotesi, sarà anche uguale ad EDF.
Sul lato opposto a PQ dell'angolo appena costruito prendiamo il punto R in modo tale che PR sia uguale ad AC. Allora per ipotesi PR è uguale anche a DF.
A questo punto, pieghiamo la retta QR e ritagliamo il triangolo PQR.
Prendiamo il triangolo PQR e adagiamo P su A e PQ su AB, quindi Q giace in B. Se R e C stanno in parti opposte rispetto ad AB, allora, tenendo fisso PQ, ruotiamo il triangolo in modo che R e C stiano dalla stessa parte. Poiché QPR è uguale all'angolo BAC, PQ ed AB sono sovrapposti, PR ed AC stanno dalla stessa parte rispetto ad AB, PR ed AC sono sovrapposti, allora R giace in C.
Dunque, Q ed R sono sovrapposti a B e C e QR è sovrapposto a BC. I triangoli PQR e ABC sono sovrapposti e quindi sono congruenti.
Allo stesso modo si vede che PQR si sovrappone a DEF e sono congruenti, allora ABC e DEF sono congruenti perché entrambi congruenti a PQR.[89]
Le dimostrazioni dei teoremi di congruenza 2 e 3 si conducono in modo molto simile a quella del teorema 1.

[87] La dimostrazione fornita da Euclide della proposizione I.4 non è considerata valida poiché egli non aveva postulato il movimento delle figure.
[88] *Geometria per i piccoli*, p.151, fig.95.
[89] *Geometria per i piccoli*, pp.151-152.

3.12 Rette parallele

Nel 26° capitolo gli autori presentano il concetto di parallelismo. Considerando, per esempio, un rettangolo o un rombo si può dire che i lati opposti di essi sono paralleli. Se si prolungano i lati opposti di un rombo per tutto il foglio su cui esso è disegnato, si può notare che questi non si incontrano. Viene spontaneo immaginare che i lati opposti del rombo non si incontrano neanche fuori dal foglio, ma per esserne certi bisogna dimostrarlo.
Dopo queste osservazioni, gli autori passano a dimostrare la seguente proposizione:

I lati opposti di un rombo non s'incontrano per quanto lontano vengano prolungati.[90]

Supponiamo che due rette AB e CD si incontrino, sia O il loro punto di intersezione, tale che i punti in ordine sulle rette siano ABO nella prima e DCO nella seconda, come in figura 3.12.1.

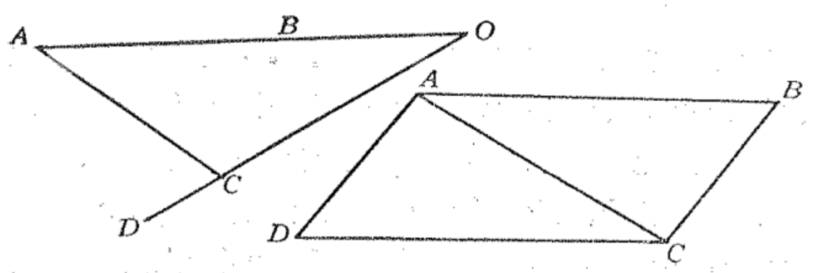


Figura 3.12.1 Lati del rombo ABCD che si incontrano in O.[91]

Se congiungiamo A con C, ACD è un angolo esterno del triangolo ACO, perciò è maggiore dell'angolo interno opposto, CAO. Allora ABCD non può essere un rombo perché dovrebbe avere gli angoli ACD e CAB uguali, in quanto metà degli angoli opposti. Ne segue la tesi.
A questo punto, si formalizza quanto osservato in precedenza con la definizione di rette parallele:

DEFINIZIONE. - Sono parallele delle linee rette giacenti in un medesimo piano e che non s'incontrano per quanto lontano si prolunghino in entrambi i sensi.[92]

È facile immaginare che per qualsiasi punto passa una parallela ad una retta data, ciò che non è altrettanto semplice stabilire è se questa retta sia unica o meno. I coniugi Young spiegano che per quanto possiamo provare, ne troviamo sempre e solo una, purtroppo però non è possibile dimostrarlo ed è per questo necessario il seguente assioma (**).

[90] *Geometria per i piccoli*, p.155.
[91] *Geometria per i piccoli*, p.155, fig.97-98.
[92] *Geometria per i piccoli*, p. 156.

(**) ASSIOMA. - Per un punto passa una sola retta parallela a una retta data.[93]

Per convincere l'allievo della verità evidente di questa proposizione, gli autori lo invitano a rappresentare su un foglio di carta una retta passante per due punti A e B e un punto O qualsiasi non appartenente alla retta.

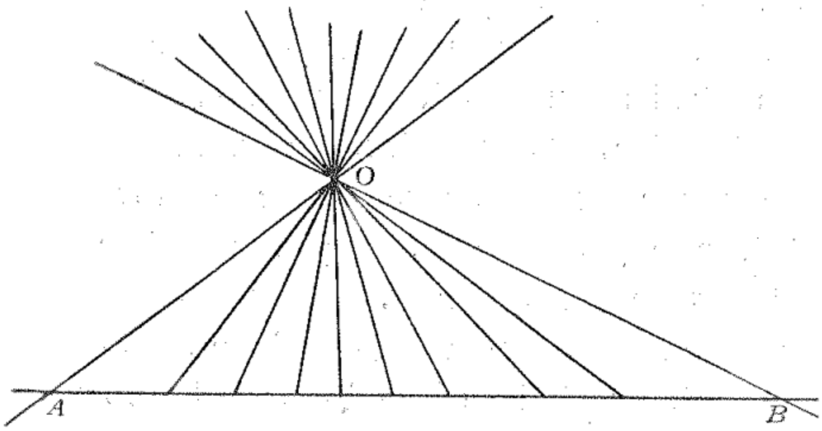


Figura 3.12.2 Rette per O che incontrano la retta AB.[94]

Come in figura 3.12.2, l'allievo deve disegnare le rette OA e OB, andando quindi oltre O. Continuando a disegnare rette passanti per O e per punti della retta AB, si ottiene un fascio di rette con centro in O. A e B diventano sempre più distanti e ad un certo punto si raggiungerà l'orlo del foglio di carta, ma immaginando di poter proseguire oltre, ad un certo punto le rette OA e OB formano un angolo che si avvicina sempre di più a due retti e dunque esse tendono a diventare un'unica retta. Quest'ultima sarà l'unica parallela ad AB passante per O.

Più avanti, nel 29° capitolo, gli autori enunciano il V postulato di Euclide come "proprietà di una coppia di parallele", per cui prolungando due segmenti che non hanno nessun punto in comune, AB e CD, e congiungendo un punto P di AB con un punto Q di CD, si ha che la somma dei due angoli interni che si sono formati dalla stessa parte di PQ può essere minore, uguale o maggiore di due angoli retti. Se è uguale a due angoli retti allora AB e CD sono parallele. Altrimenti, *le rette, prolungate, s'incontrano dalla parte dove la somma degli angoli interni è inferiore a due retti*[95].
L'assioma (**) è anche necessario per dimostrare un'osservazione fatta nel caso specifico dei triangoli isosceli nel paragrafo 3.11 e che, dopo la dimostrazione, possiamo chiamare teorema. Il teorema che illustreremo ripropone la proposizione

---

[93] *Geometria per i piccoli*, p.159.
È doveroso osservare che gli autori non utilizzano la formulazione euclidea del V postulato, ma lo sostituiscono con una formulazione equivalente, conosciuta come "assioma di Playfair", pubblicata nel libro *Elementi di Geometria* (1795) di John Playfair.
[94] *Geometria per i piccoli*, p.159, fig.101.
[95] *Geometria per i piccoli*, pp.173-174.

I.32 degli *Elementi*: per dimostrarla Euclide ricorre alla I.29, per la quale era stato costretto ad usare il V postulato per la prima volta.[96]

Teorema
La somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti, (180°).

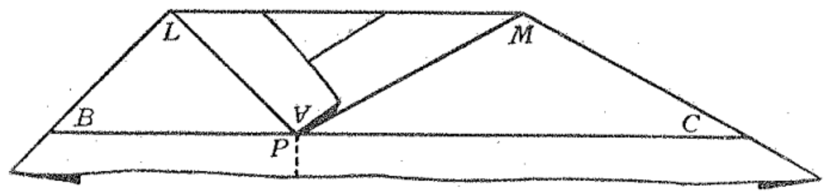


Figura 3.12.3 Triangolo ABC in cui A è sovrapposto a P.[97]

Per dimostrarlo, è necessario costruire un triangolo qualsiasi, sia esso ABC, come quello in figura 3.12.3. Siano B e C i suoi vertici acuti e A il terzo vertice. Pieghiamo la perpendicolare a BC passante per A, sia P il punto di incontro tra BC e la perpendicolare. PA e PB si intersecano in P e dunque formano due angoli interni dalla stessa parte di A rispetto a BP che sono meno di due angoli retti: quello in P è retto e quello in B dovrà essere acuto, quindi P cade tra B e C.
Ripieghiamo A su P, allora la piega divide a metà AP, quindi essa è parallela a BC, inoltre interseca AB in L e AC in M tali che AL=LB e AM=MC[98].
Si può portare LB lungo LP e MC lungo MP, in modo che B e C giacciano in P. Allora, abbiamo portato A, B e C in P e abbiamo ottenuto un angolo piatto, questo dimostra il teorema.

3.13 Il teorema di Pitagora

Gli autori continuano la trattazione sui triangoli definendo il triangolo rettangolo e analizzando la sua area, per poi concludere l'argomento con il teorema di Pitagora. Il 32° capitolo è interamente dedicato al teorema di Pitagora, vediamo come si può mostrare questo risultato piegando un foglio di carta.

Innanzitutto si può osservare che il lato più lungo del triangolo rettangolo è l'ipotenusa, lato opposto all'angolo maggiore. Inoltre, sappiamo che l'ipotenusa è minore della somma dei cateti, quindi anche il quadrato costruito sull'ipotenusa sarà

---

[96] Attorno al V postulato di Euclide vi è una questione che fece discutere matematici di tutto il mondo per secoli. Esso non si presenta come gli altri quattro postulati, semplici e intuitivi, piuttosto somiglia ad un teorema. Euclide stesso negli *Elementi* non lo utilizza fino alla proposizione I.29. Egli non fu il solo ad avere dei dubbi sul V postulato, molti matematici provarono a dimostrarlo a partire dagli altri quattro, ma senza successo. Nel corso dei secoli i matematici hanno dato formulazioni equivalenti del V postulato, da questi tentativi nasce l'assioma di Playfair, scelto dagli autori al posto di quello euclideo.
[97] *Geometria per i piccoli*, p.175, fig.112.
[98] Gli autori sfruttano il risultato dell'esercizio 2 di pagina 173: «*ABC è un triangolo e D è il punto medio di AB: fa vedere che la parallela a BC per D biseca AC.*»

minore del quadrato costruito sulla somma dei cateti, come graficamente ci mostra la seguente figura:

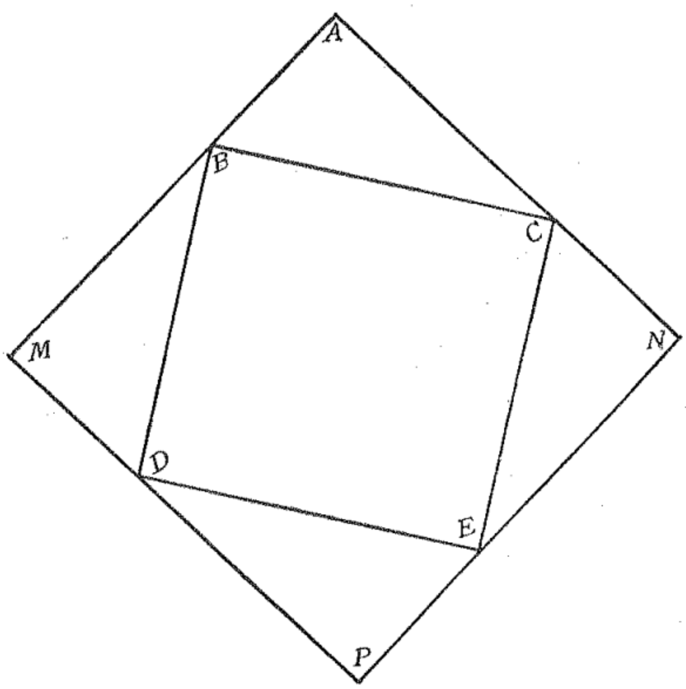


Figura 3.13.1 Il quadrato BCDE ha per lato l'ipotenusa del triangolo ABC. Il quadrato AMPN ha per lato la somma dei cateti del triangolo ABC.[99]

Anche la somma dei quadrati costruiti sui cateti è minore del grande quadrato che ha per lato la somma dei cateti, come mostra la seguente figura:

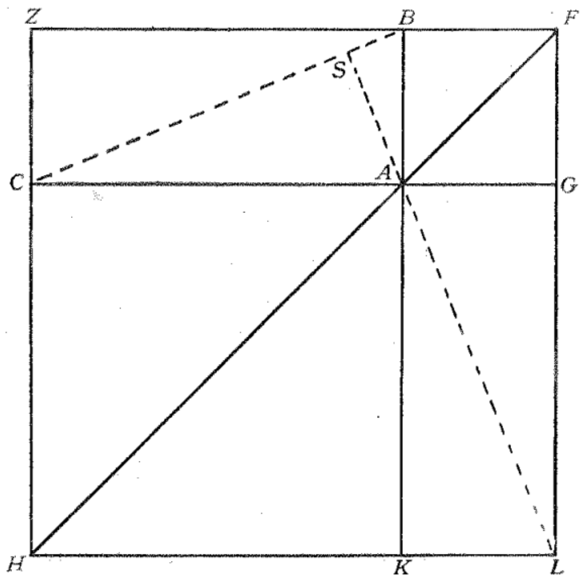


Figura 3.13.2 La somma dei quadrati BAGF e CHKA è minore del quadrato grande ZHLF.[100]

[99] *Geometria per i piccoli*, p.183, fig.116.
[100] *Geometria per i piccoli*, p.180, fig.115.

In realtà, le due aree entrambe minori dell'area del quadrato grande sono uguali tra loro, per il teorema di Pitagora.
Seguendo le istruzioni fornite dagli autori, è possibile mostrare questo risultato attraverso la sovrapposizione:

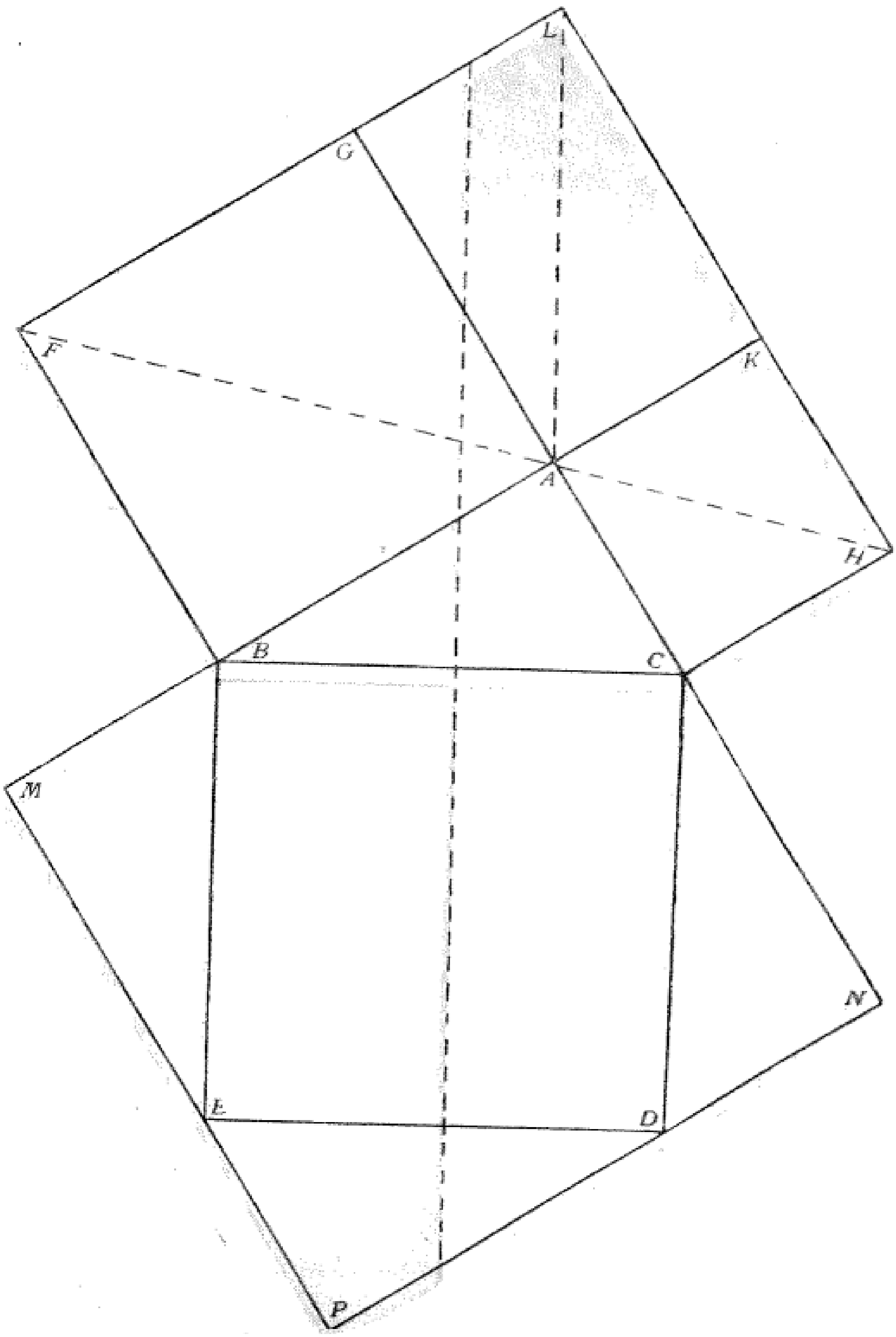


Figura 3.13.3 Teorema di Pitagora.[101]

[101] *Geometria per i piccoli*, fig. 117.

Nella figura 3.13.3 sono riunite le due figure precedenti: in basso ci sono il quadrato costruito sull'ipotenusa e tre triangoli congruenti ad ABC e in alto ci sono i quadrati costruiti sui cateti e tre triangoli congruenti ad ABC.
Piegando prima lungo BC e poi lungo la linea tratteggiata che biseca BC, si osserva che la figura sotto BC si sovrappone alla figura sopra BC.

- Piegando lungo AB e lungo la sua bisettrice, BME è sovrapposto ad ALK.
- Piegando lungo AC e lungo la sua bisettrice, CND è sovrapposto ad AGL.
- Piegando lungo le diagonali CE e BD del quadrato BCED, PDE è sovrapposto ad ABC.

Dunque, per le sovrapposizioni, si ha che il quadrato BCDE deve essere uguale alla somma dei quadrati AGFB e AKHC.

3.14 Conclusioni sull'opera

Dopo aver analizzato in dettaglio il contenuto del testo *Geometria per i piccoli*, riteniamo necessario fare un passo indietro per avere una visione d'insieme delle scelte compiute dagli autori nella stesura del libro.
L'approccio iniziale del testo nei confronti della geometria è molto concreto: essa fa parte della nostra quotidianità, conoscerla è fondamentale. Grazie alla conoscenza della geometria è possibile costruire linee rette e superfici piane, e ciò ci rende in grado di costruire delle case che non crollano, in cui possiamo ripararci. Gli autori formalizzano con rigore matematico ogni concetto che hanno precedentemente riferito ad esempi di vita quotidiana, cercando sempre di bilanciare intuizione e rigore. In particolare, mettono anche in guardia gli studenti sul ruolo dell'*intuizione*: i nostri sensi possono ingannarci, per questo abbiamo bisogno di controbilanciare la nostra percezione con la logica.
Lo scopo degli Young non è solamente impartire delle nozioni geometriche, infatti, in diversi passi dell'opera si fermano a riflettere sulla geometria come oggetto in sé. Essi spiegano l'oggetto di studio di questa scienza e gli strumenti che essa utilizza: ad esempio, gli autori spiegano qual è la differenza tra *verificare* e *dimostrare* oppure ancora dicono cos'è un assioma e per quale motivo serve postularlo. Precisano che lo scopo della geometria non è descrivere il mondo, ma fornirci delle chiavi di lettura per comprenderlo.
L'uso delle parole è ponderato: ad esempio, gli autori puntualizzano che con la parola *solido* in geometria non si vuole alludere allo stato fisico di un oggetto, contrariamente a quanto si fa nel linguaggio comune.
Come i coniugi Young spiegano nella prefazione, il libro è improntato sul *learning by doing*: secondo loro è di fondamentale importanza che l'allievo faccia da sé le scoperte del mondo della geometria e che esse non gli vengano imposte dall'alto. Questo concorda perfettamente con la scelta degli autori di non fornire all'inizio del libro tutti gli assiomi che serviranno per ottenere i risultati successivi, come fa Euclide negli *Elementi*, ma gli Young scelgono di enunciarli volta per volta quando ne sorge la necessità.

Il metodo del *learning by doing* nell'opera si concretizza nel progettare e costruire dei *modellini di carta*, diventa quindi una didattica laboratoriale. Attraverso la costruzione degli oggetti matematici è più facile familiarizzare con l'oggetto stesso: costruendo un cubo ci si accorge che tutti gli angoli tra i lati del cubo sono retti e maneggiando un cubo di carta si possono intuire le sue simmetrie.
Alla didattica laboratoriale viene simultaneamente affiancata una tradizionale didattica frontale in cui gli autori formalizzano i risultati ottenuti dall'esperienza, postulando quindi assiomi, formulando e verificando proposizioni, oppure ancora dimostrando teoremi.
Per quanto riguarda la questione sull'utilizzo degli *Elementi* di Euclide per l'insegnamento della geometria si può evincere che gli autori sono sicuramente d'accordo sull'importanza della tradizione euclidea per l'apprendimento della geometria, infatti possiamo affermare che la loro opera riprende i risultati del I libro degli *Elementi*. Altrettanto sicuramente però essi non erano tra quelli che sostenevano che il rigore e la logica euclidei fossero i migliori metodi per introdurre la matematica agli studenti più piccoli, infatti non forniscono mai le "dimostrazioni verbali" di Euclide, ma utilizzano solo *dimostrazioni con piegature*, intuitive e grafiche, ritenendo che all'inizio dello studio di questa scienza bisogna dare più spazio all'intuizione che al rigore. A migliorare la trasposizione didattica vi è anche la presenza degli esercizi, sia alla fine di ogni capitolo per permettere all'allievo di consolidare immediatamente le conoscenze apprese, sia alla fine del testo con una sezione di ben 122 esercizi, intitolata "applicazioni".
Un'altra questione che abbiamo affrontato nel capitolo 1 di questo elaborato era quella del *fusionismo*, in *Geometria per i piccoli* possiamo riscontrare l'influenza di questa corrente: infatti, le geometrie piana e solida vengono trattate simultaneamente. Ad esempio, alla trattazione sul cerchio segue quella sulla sfera e dopo il quadrato gli autori presentano il cubo e così via. In generale, essi sfruttano le somiglianze tra la geometria piana e quella solida quando è conveniente: è più facile trovare le simmetrie del cubo dopo aver studiato quelle del quadrato.
È presente nel testo l'intenzione di instillare nello studente sempre "qualcosa in più", fornendo spunti a cui egli si potrà agganciare negli studi superiori: ad esempio, i concetti di corrispondenza biunivoca, tassellazione e formula di Eulero non sono mai spiegati esplicitamente sebbene essi si possano ritrovare nel testo.
Nel testo più volte gli autori ritornano su uno stesso concetto, un caso emblematico è quello della proposizione sulla somma degli angoli interni di un triangolo: prima si verifica la verità dell'osservazione nel caso particolare di un triangolo isoscele e più avanti lo si dimostra in generale per tutti i triangoli. Dunque, gli Young propongono anche un *insegnamento a spirale*, ovvero tornano più volte sullo stesso concetto ma affrontandolo con competenze e conoscenze via via superiori, il ché comprova che lo scopo ultimo dell'opera è far sviluppare un *sicuro senso geometrico* allo studente di tenera età.

Capitolo 4

Dalla geometria per i piccoli alla geometria degli origami

4.1 Storia della geometria degli origami

I coniugi Young non furono i primi a teorizzare una geometria basata sulla piegatura di un foglio di carta: infatti, nel 1893 a Madras, in India, il matematico indiano Tandalam Sundara Row (1853-?) aveva già pubblicato un'opera sulla geometria degli origami, intitolata *Geometric Exercises in Paper Folding.*[102]
L'opera di Sundara Row si basa sulla tecnica della piegatura della carta, in inglese *paper folding*, considerata dall'autore "attractive and cheap"[103] per l'esplorazione della geometria. Egli riteneva che attraverso questo metodo gli allievi, oltre a divertirsi, possono maggiormente comprendere i risultati geometrici grazie al ruolo attivo che svolgono nel processo di costruzione di modellini di carta.
Nell'introduzione dell'opera l'autore spiega che occorrono solo dei fogli di carta e che non è necessario conoscere alcun risultato matematico per svolgere gli esercizi proposti, inoltre sottolinea la superiorità del paper folding rispetto al metodo della riga e del compasso usato da Euclide negli *Elementi*. Non solo riprende tutta la geometria euclidea, ma negli ultimi capitoli passa alla costruzione di sezioni coniche, curve trascendenti e curve algebriche di grado superiore.
Grazie a soltanto cinque operazioni di piegatura, l'autore riesce a riprodurre tutte le costruzioni con riga e compasso. Mostriamo nella seguente immagine le piegature fondamentali:

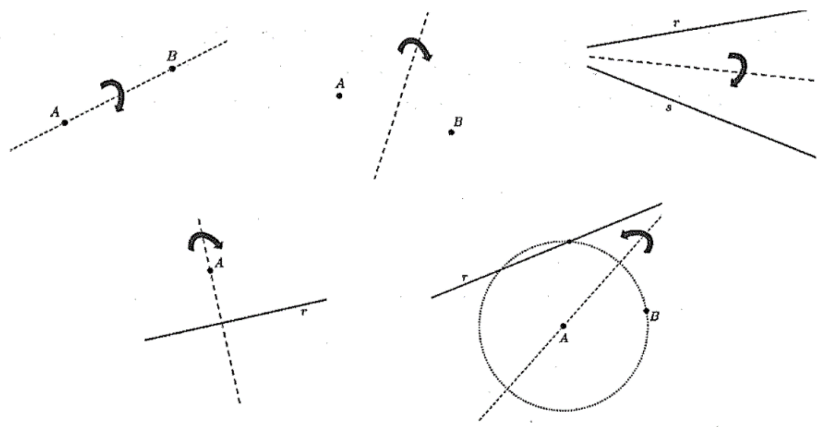


Figura 4.1.1 Le cinque piegature fondamentali di Sundara Row. [104]

[102] In realtà, l'origine dell'arte della piegatura dalla carta risiede in Cina, dove la carta veniva usata come sostituto più economico della seta già fin dal 200. Successivamente nel VI secolo quest'arte venne esportata in Giappone da monaci buddisti cinesi. La piegatura della carta si diffuse tra i bambini giapponesi, per i quali era solo un passatempo, sotto il nome di origami, dal giapponese "ori", che significa piegare, e "kami", che significa carta.
[103] *Geometric Exercises in Paper Folding*, p.xiv.
[104] *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, p.59, fig.1.

La prima piegatura è quella per cui è possibile tracciare una retta per due punti *A* e *B*, la seconda rappresenta la costruzione dell'asse del segmento *AB*, la terza riguarda la possibilità di tracciare la bisettrice di un angolo, la quarta equivale alla costruzione di una perpendicolare ad una retta per un punto dato ed infine la quinta consiste in una piega per cui è possibile trovare eventuali intersezioni tra una retta e una circonferenza.
Un ammiratore del lavoro di Sundara Row fu proprio il matematico contemporaneo Felix Klein, colui che, qualche anno dopo, svolse un ruolo di guida per i coniugi Young: l'illustre maestro fu il principale portavoce del paper folding tra i matematici del mondo occidentale.
Sebbene nei primi anni del XX secolo, il libro di Sundara Row contasse diverse ristampe e articoli divulgativi ad esso dedicati, nessuno di questi aggiunse qualcosa in più al contenuto dell'opera.
Per fare un passo avanti nella geometria degli origami si dovrà aspettare il 1934, anno in cui la matematica Margherita Beloch (1879-1976) pubblicò *Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara-Row* in una nota pubblicata sugli Atti dell'Accademia delle Scienze Mediche, Naturali e Fisico-Matematiche di Ferrara, in cui presenta: «*il seguente problema, da me proposto come applicazione del metodo di ripiegamento della carta di Sundara-Row, e che consente una semplice risoluzione mediante il detto metodo del problema classico della duplicazione del cubo, risoluzione che a quando io sappia non è stata finora notata*[105]».
Nonostante Sundara Row fosse riuscito a costruire per piegatura una progressione geometrica, non fu capace di costruire la spezzata soluzione del problema della duplicazione del cubo.
Nel suo lavoro, Beloch aggiunse una sesta piegatura alle cinque fondamentali di Sundara Row: essa consiste nel portare due punti dati su due rette date attraverso un'unica piegatura, come nella figura seguente.

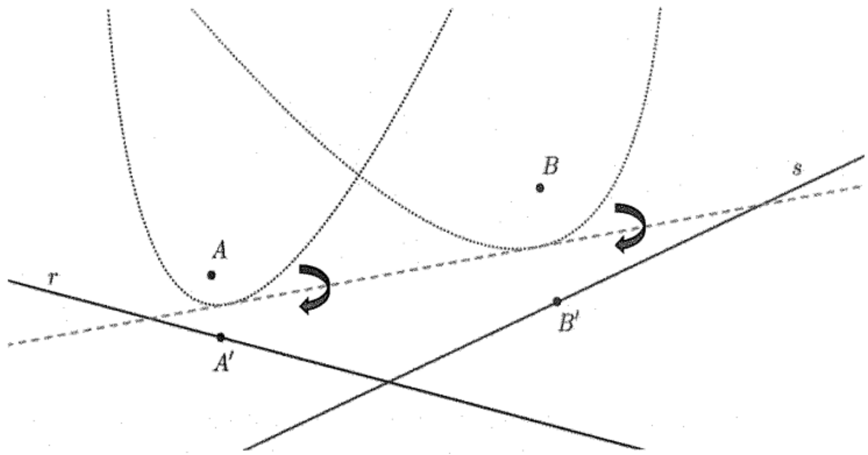


Figura 4.1.2 Sesta piegatura introdotta dalla Beloch per trasportare due punti dati su due rette date.[106]

[105] *Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara-Row*, p.186.
[106] *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, p.63, fig.5.

Essa è l'unica tra le piegature fondamentali a non poter essere riprodotta attraverso il solo uso di riga e compasso poiché si tratta di trovare una retta tangente comune alle due parabole che hanno per fuochi i punti dati, *A* e *B*, e per direttrici le rette date, *r* ed *s*.[107]
Questa piegatura permise alla Beloch di risolvere il seguente problema, che sarà la chiave della soluzione del problema della duplicazione del cubo:

Sono dati nel piano due rette r e s e due punti A e B. Si vuole trovare un quadrato che abbia i vertici X e Y sulle rette date e i lati XW e YZ passanti per i punti assegnati.[108]

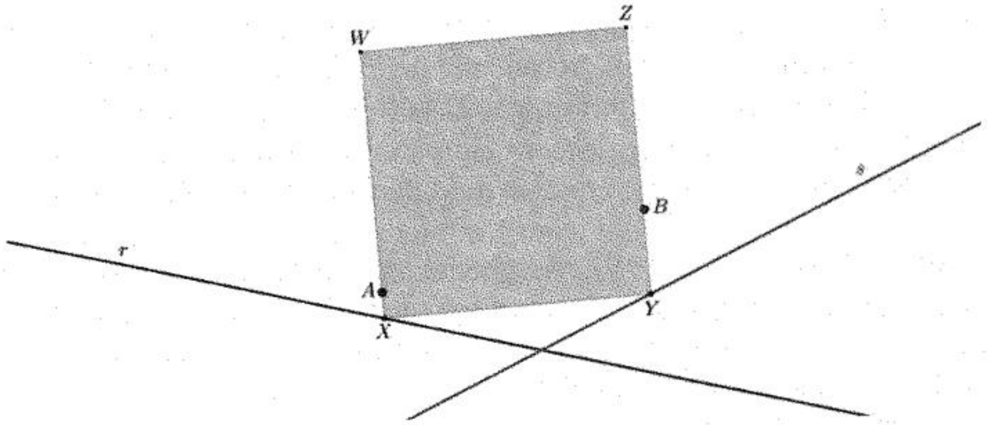


Figura 4.1.3 Il quadrato di Beloch.[109]

Per risolvere questo problema innanzitutto bisogna tracciare le rette *r'* ed *s'* in modo tale che *r* sia equidistante da *r'* ed *A* e, analogamente, *s* equidistante da *s'* e *B*. Successivamente, è necessario applicare la sesta piegatura di Beloch così da portare *A* e *B* rispettivamente su *r'* ed *s'*, ottenendo quindi i punti *A'* e *B'*. La piega, la linea tratteggiata in figura 4.4, è asse comune dei segmenti *AA'* e *BB'*, le intersezioni della piega con le rette *r* ed *s* sono proprio i vertici *X* e *Y* del quadrato cercato.

[107] *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, p.63.
[108] *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, p.63.
[109] *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, p.64, fig.6.

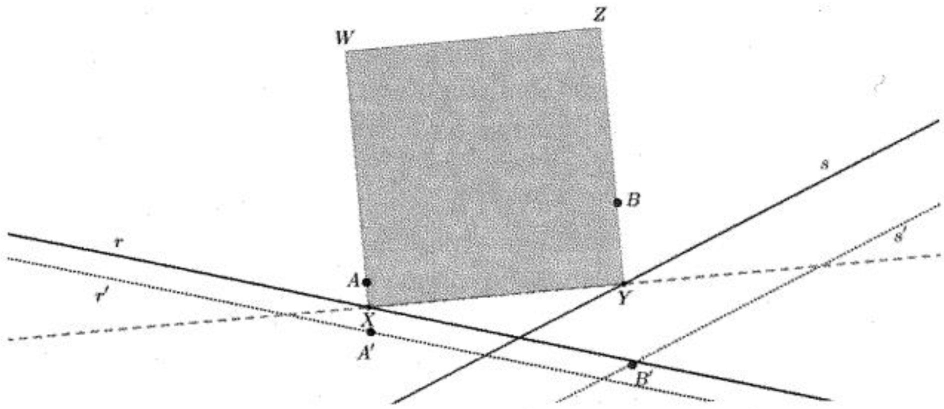


Figura 4.1.4[110]

Successivamente, Beloch si accorse che poteva sfruttare la costruzione di questo quadrato per la risoluzione di un'equazione cubica, e per farlo riprese il metodo grafico di Lill per la risoluzione di un'equazione algebrica di qualsiasi grado: considerato un polinomio di grado n, ad esso si associa una spezzata rettangolare i cui segmenti dipendono dai coefficienti del polinomio[111]. Per risolvere una cubica è necessario trovare un quadrato di Beloch tale che i vertici X e Y stiano sulle rette r ed s e i lati XW e YZ, eventualmente prolungati, passino rispettivamente per i punti iniziale A e finale B della spezzata di Lill, come mostrato nella seguente figura.

[110] *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, p.64, fig.7.

[111] Questo metodo è stato inventato dall'ingegnere austriaco Eduard Lill e pubblicato in una nota sui Nouvelles Annales de mathèmatiques nel 1867. Nella spezzata che si associa al polinomio di grado n, la lunghezza dei segmenti è uguale al modulo dei coefficienti e l'orientazione dei segmenti cambia quando c'è un cambio di segno da un coefficiente all'altro.

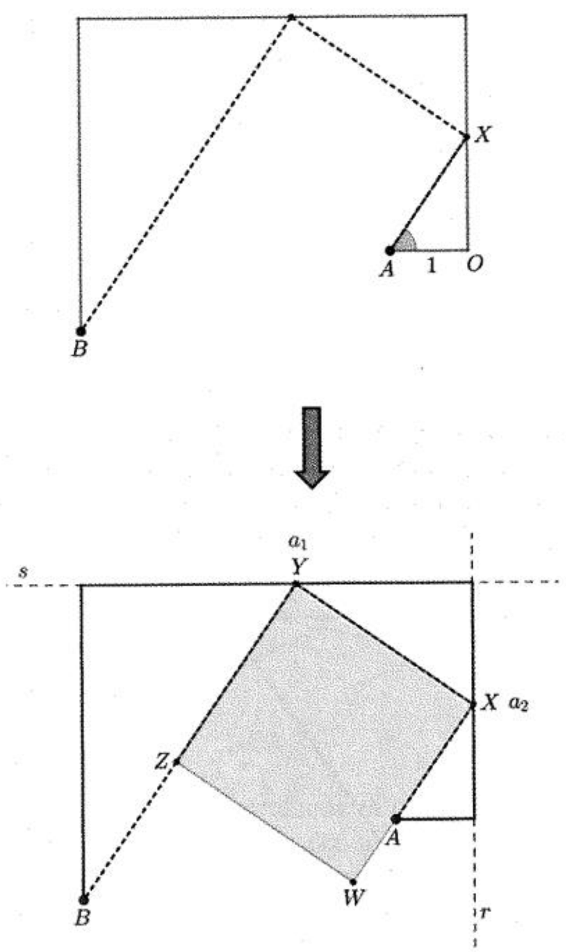


Figura 4.1.5[112]

Dopo aver costruito la spezzata associata alla cubica, bisogna tracciare le rette ausiliarie *r'* ed *s'*, con *r'* tale che *r* sia equidistante da *r'* ed *A* ed *s'* tale che *s* sia equidistante da *s'* e *B*, poi applicando la piega Beloch, i punti *A* e *B* vengono trasportati su *r'* ed *s'* rispettivamente. L'intersezione tra la retta *r* (a_2) e la piega individua il segmento *OX*, la cui lunghezza è radice della cubica. La seguente figura mostra quanto osservato sopra:

[112] *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, p.66, fig.10.

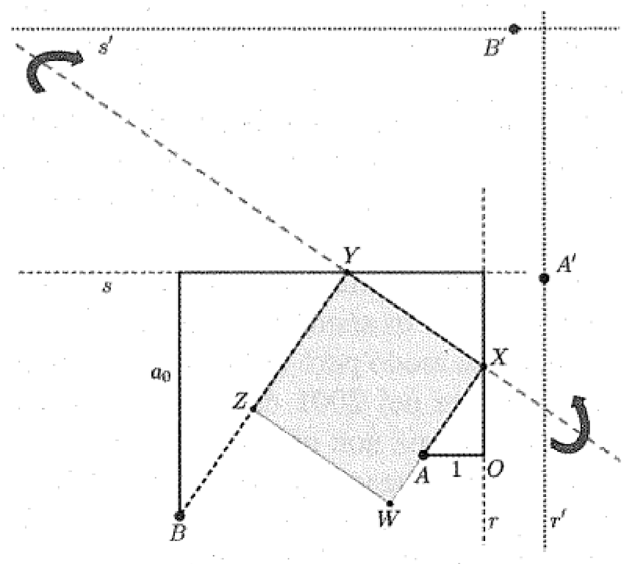


Figura 4.1.6[113]

Quindi, Beloch dimostrò che tutti i problemi di terzo e quarto grado potevano essere ricondotti alla costruzione del quadrato di Beloch per piegatura.
Applicando il metodo del quadrato di Beloch alla cubica $x^3 - 2$ si può risolvere il problema della duplicazione del cubo, che si riduce algebricamente alla costruzione del numero $\sqrt[3]{2}$. In questo modo, Margherita Beloch afferma la superiorità del paper folding rispetto al metodo della riga e del compasso, attraverso cui è impossibile duplicare un cubo.[114]
Dopo questi sviluppi, si riflette sui fondamenti della geometria degli origami, e quindi si comincia a ricercare un sistema di assiomi soddisfacente per questa nuova geometria. Nei loro testi, Beloch e Sundara Row, non si soffermano a riflettere sui fondamenti, ma nel 1989 il matematico giapponese Humiaki Huzita (1924-2005) fornisce una sistemazione assiomatica di questa nuova geometria, in particolare enuncia sei assiomi, di cui il sesto rappresenta proprio la piegatura di Beloch. Nello stesso anno anche un altro matematico francese, Jacques Justin, presenta una lista di assiomi per la geometria degli origami, ma con un assioma in più rispetto ad Huzita. Nel 2001 Koshiro Hatori, indipendentemente dalla lista di Justin, riscopre gli stessi sette assiomi del matematico francese. Nonostante il settimo assioma non ampli il campo dei numeri costruibili tramite origami, esso si rivela indipendente dagli altri sei. A questo punto la riflessione si sposta sulla completezza del sistema assiomatico Huzita-Hatori. Il matematico Robert Lang nel 2006 riformula la teoria degli origami in termini di *allineamento*, individuando cinque tipi di allineamento: punto-punto, retta-retta, punto-retta e due allineamenti che lasciano invariati per piegatura la retta o il punto. Combinando tutti gli allineamenti possibili, Lang ritrova i sette assiomi di Huzita-Hatori e conclude che sono gli unici assiomi possibili per la geometria degli origami.[115]

[113] *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, p.67, fig.11.
[114] Oltre alla duplicazione del cubo, la geometria degli origami consente di risolvere anche un altro problema classico, la trisezione di un angolo, irrisolvibile con riga e compasso.
[115] *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, p.70.

4.2 Geometria degli origami per la didattica

Per la maggior parte degli allievi studiare e comprendere la matematica si rivela un'attività di insormontabile difficoltà. Utilizzare gli origami fin dalla scuola dell'infanzia e in seguito nella scuola del primo ciclo, può ovviare a questa problematica e non solo: la matematica potrebbe rivestire un abito più attraente per i bambini meno propensi ad essa e d'altro canto soddisfare l'esigenza di ragionare di chi presenta una maggiore attitudine logico-matematica.
L'arte della piegatura della carta non consiste semplicemente in un'attività manuale: dietro ogni piegatura vi è un preciso significato geometrico. Anche nei più semplici origami tradizionali, figurativi e non geometrici, sono implicitamente richieste costruzioni di assi di simmetria, bisettrici, perpendicolari.
Uno dei vantaggi degli origami è quello di consentire la manipolazione degli oggetti geometrici: attraverso la manipolazione lo studente può osservare l'oggetto più attentamente e, grazie a questo, formulare delle ipotesi sulle sue proprietà. In questo modo, lo studente svolge un ruolo attivo nel processo di apprendimento.
Un altro aspetto importante della didattica laboratoriale degli origami consiste nell'importanza del ruolo dell'errore: infatti, gli studenti devono seguire delle istruzioni impartite dall'insegnante e, cercando di decodificare queste indicazioni, proseguono per tentativi ed errori. Per loro non è affatto semplice questo processo, spesso fanno fatica a svolgere correttamente il compito, ma questa fatica rende l'apprendimento molto più significativo. Uno studente che ha costruito, osservato e manipolato un cubo ricorderà più facilmente le sue simmetrie rispetto ad un altro che le ha ricevute verbalmente tramite una lezione frontale.
Da un errore può anche nascere un dibattito, elemento fondamentale per raggiungere una comprensione più profonda: ad esempio, poniamo il caso in cui venga chiesto agli studenti di piegare un foglio di carta, ad essi verrà naturale ripiegare il foglio a metà, sovrapponendo i margini, ma se gli si chiede di rifarlo senza sovrapporre i margini allora si sentiranno smarriti perché la piega risultante per loro sarà una linea storta, questo fornisce un ottimo spunto per riflettere sui concetti di "dritto" e "storto".
Un'attività di origami dunque consente di agire su diversi punti fondamentali che riguardano la matematica: la precisione, la decodifica di un messaggio, l'utilizzo di un lessico specifico, la coordinazione oculo-manuale, la comprensione del testo.
Per questi motivi consigliamo lezioni basate sugli origami quando conveniente e quando possibile, al fine di consentire all'alunno di esplorare, sbagliare, formulare ed entrare nel meccanismo del *fare matematica*, sotto la guida esperta dell'insegnante.

Bibliografia e sitografia

Beloch M., *Alcune applicazioni del metodo di ripiegamento della carta di Sundara-Row*, Atti dell'Accademia delle Scienze Mediche, Naturali e Fisico-Matematiche di Ferrara, Serie Seconda, Volume XI, pp. 186-189, Ferrara, (1934)

Borgato M.T. e Salmi R., *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, Periodico di matematiche, n.3, pp.57-71, (2018)

Giacardi L., *Educare alla scoperta. Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol.6-A, La Matematica nella Società e nella Cultura, n.1, pp. 141-164, Unione Matematica Italiana, (2003)

Giacardi L., *I manuali per l'insegnamento della geometria elementare in Italia fra Otto e Novecento*, in "TESEO, Tipografi e editori scolastico-educativi dell'Ottocento", a cura di Giorgio Chiosso, pp. XCVII-CXXIII, MilanoEditrice Bibliografica, (2004)

Grattan-Guinness I., *Un'unione matematica. William Henry and Grace Chisholm Young*, in "Raffaella Simili (a cura di), Scienza a due voci", Olschki, Firenze, (2006)

Roero C.S. e Luciano E. (a cura di), *Numeri Atomi e Alambicchi*, *Donne e Scienza in Piemonte dal 1840 al 1960*, in "Donne del Piemonte", Torino, (2008)

Sundara Row T., *Geometric Exercises in Paper Folding*, a cura di Beman W.W. e Smith D.E., Open Court Publishing Company, pp.vii-xiv, Chicago, (1917)

Young G.C. e Young W.H., *Geometria per i piccoli (The first book of Geometry) per l'insegnamento elementare e prescolastico*, Virgilio L. (traduzione di), Torino, (1907)

Coppino M., *Leggi e Decreti*, in "Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia", num.177, Roma, (1877), in www.gazzettaufficiale.it, fonte ufficiale delle norme in vigore in Italia

Coppino M., *3° Supplemento al n°291 della Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia*, Roma, (1867), in www.normattiva.it, portale della legge vigente

Euclide, *Gli Elementi*, in www.scienzaatscuola.it, strumento per la consultazione della traduzione italiana degli *Elementi* di Acerbi F.

Giacardi L, *Le "orge geometriche torinesi" di fine secolo*, (2019), in www.corradosegre.unito.it, sito dedicato a Corrado Segre e alla scuola geometrica italiana

Maroni S., *Istituto di istruzione primaria 1859-*, (2005) in https://siusa.archivi.beniculturali.it/, Sistema Informativo Unificato per le Soprintendenze Archivistiche, ricerca sull'obbligo scolastico della Legge Casati

Newton L., *La geometria degli origami*, *La forza degli origami*, traduzione a cura di Crespi M, (2009), in www.matematica.unibocconi.eu, sito del centro di ricerca PRISTEM dell'Università Bocconi di Milano per la divulgazione della cultura matematica

O'Connor J.J. e Robertson E.F., *William Henry Young*, Mactutor, (2003), in https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/, raccolta online di oltre 3000 biografie di matematici

Scaccianoce A., *Esplorare la geometria piegando la carta*, (2022), in www.prismamagazine.it, rivista scientifica con l'obiettivo di raccontare la matematica

Sylvia Wiegand in www.unl.edu, sito ufficiale dell'University of Nebraska-Lincoln