ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

RAPPRESENTAZIONI DI QUIVER SU CAMPI FINITI

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ROBERTO PAGARIA

Presentata da:
MARCELLO LAMBERTINI

Anno Accademico 2023-2024

Introduzione

Dallo studio dell'algebra lineare sorgono in maniera naturale problemi di classificazione di applicazioni lineari: quando due matrici descrivono la stessa applicazione lineare tra due spazi vettoriali a meno di cambi di basi? Quando hanno lo stesso rango. Quali sono le classi di coniugio degli endomorfismi di uno spazio vettoriale? Le possibili forme canoniche di Jordan. Domande come queste, e anche più complesse, come la diagonalizzazione simultanea di matrici, trovano una formalizzazione generale nella teoria delle rappresentazioni di quiver.
Un quiver è un grafo orientato, una rappresentazione di un quiver è l'assegnazione di uno spazio vettoriale di dimensione finita su un fissato campo $\mathbb{K}$ a ogni vertice del grafo e di un'applicazione lineare a ogni freccia, e la dimensione della rappresentazione è il vettore che ha come entrate le dimensioni dei singoli spazi. Lo studio delle rappresentazioni di quiver permette quindi di studiare qualsiasi configurazione di applicazioni lineari: un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali può essere vista come una rappresentazione del quiver A_2:

$$1 \bullet \xrightarrow{a} \bullet\ 2\ ,$$

mentre un endomorfismo di uno spazio vettoriale può essere visto come una rappresentazione del quiver $\hat{A}_0$:

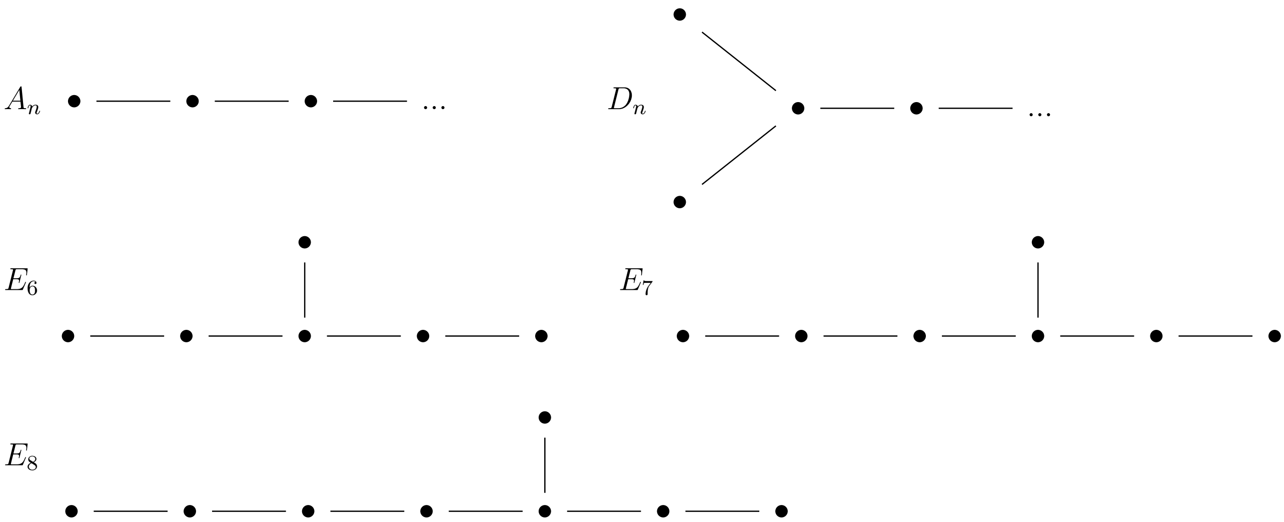
$$\begin{tikzcd} 1 \bullet \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd} \ .$$

Un isomorfismo tra due rappresentazioni di quiver è una collezione di isomorfismi tra gli spazi vettoriali assegnati a vertici corrispondenti tali che per ogni freccia il diagramma

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "V_a"] \arrow[d, "\cong"'] & V_2 \arrow[d, "\cong"] \\ W_1 \arrow[r, "W_a"'] & W_2 \end{tikzcd}$$

sia commutativo: le classi di isomorfismo di rappresentazioni dei due quiver A_2 e $\hat{A}_0$ classificano quindi le applicazioni lineari tra due spazi vettoriali a meno di cambi di base

e le classi di coniugio di endomorfismi di uno spazio vettoriale.
Gli approcci alla teoria delle rappresentazioni di quiver sono di diverso tipo: algebrico, geometrico e combinatorico, e un primo teorema fondamentale è il Teorema di Krull-Remak-Schmidt (cfr. [13], §1.7), che assicura che ogni rappresentazione si decomponga in modo unico come somma diretta di oggetti indecomponibili, e pertanto studiare le rappresentazioni di un quiver equivale a studiare le sue rappresentazioni indecomponibili.
Un primo risultato importante dovuto a Gabriel ([15]), notevole anche perché, come vari altri risultati relativi alle rappresentazioni di quiver tra cui quelli esposti in questa tesi, non dipende dall'orientazione del grafo, caratterizza i quiver che hanno un numero finito di rappresentazioni indecomponibili (e quindi di rappresentazioni in generale) con un fissato vettore dimensione. Tali quiver, detti di tipo finito, sono quelli il cui grafo sottostante è un diagramma di Dynkin tra i seguenti:



Per ottenere questa distinzione vengono definite due forme bilineari dette forma di Eulero e forma di Cartan a partire dalla struttura del grafo, e tramite esse viene definito un sistema di radici associato al grafo, i cui elementi sono particolari vettori dimensione. Le radici associate a un grafo giocano un ruolo centrale nel Teorema di Kac 1.2.1, che individua per quali vettori dimensione esistono rappresentazioni indecomponibili di un dato quiver: le radici positive.

In questa tesi, invece che concentrarsi sulle rappresentazioni di un quiver fissato il campo su cui costruire gli spazi vettoriali, si indaga il comportamento delle rappresentazioni al variare del campo, concentrandosi nello specifico sui campi finiti.
In questo ambito sono di particolare interesse le rappresentazioni assolutamente indecomponibili, ovvero quelle rappresentazioni indecomponibili che rimangono indecomponibili quando vengono considerate su un'estensione finita del campo su cui sono state definite.
A tal proposito ricordiamo che i campi finiti sono tutti e soli del tipo $\mathbb{F}_q$ con q potenza

di un primo, e che, fissato p primo, i campi del tipo $\mathbb{F}_{p^t}$ sono parzialmente ordinati per inclusione secondo l'ordine dato dalla divisibilità degli esponenti t di p.
Lavorando su campi finiti il problema più naturale da porsi è quello del conteggio: l'obiettivo dei lavori di Victor G. Kac ([2],[3],[4]) e Jiuzhao Hua (*Counting Representations of Quivers over Finite Fields*, [1]) su cui si fonda questa tesi è proprio esprimere il numero di rappresentazioni assolutamente indecomponibili di un quiver Q di dimensione fissata α sul campo $\mathbb{F}_q$ in funzione di q: tale quantità sarà indicata con $A_Q(\alpha, q)$. Sfruttando risultati di algebra lineare, di combinatoria e di teoria di Galois si ricaveranno diverse identità formali e si troverà che il numero di rappresentazioni assolutamente indecomponibili è un polinomio in q a coefficienti interi che non dipende dall'orientazione del quiver studiato.
In particolare, chiamato t_j^α il coefficiente j-esimo di tale polinomio per il vettore dimensione α e chiamato u_α il grado di tale polinomio, si otterrà l'identità 2.10

$$\sum_{\pi_1,\ldots,\pi_n\in\mathcal{P}} \frac{\prod_{1\le i\le j\le n} q^{a_{ij}<\pi_i,\pi_j>}}{\prod_{1\le i\le n} q^{<\pi_i,\pi_i>} b_{\pi_i}(q^{-1})} X_1^{|\pi_1|} \ldots X_n^{|\pi_n|} = \prod_{\alpha\in\Delta^+}\prod_{i=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{u_\alpha}(1-q^{i+1}X^\alpha)^{t_j^\alpha},$$

che lega i coefficienti a quantità combinatoriche, e che ha portato alla dimostrazione di due importanti congetture formulate da Kac nell'articolo *Root systems, representations of quivers and invariant theory* ([4]):

Congettura 1. *Il termine noto di $A_Q(\alpha, q)$ è pari alla molteplicità della radice α come peso nell'algebra di Kac-Moody associata al quiver Q.*

Congettura 2. *I coefficienti del polinomio $A_Q(\alpha, q)$ sono non negativi.*

Queste due congetture, che non sono discusse in questa tesi, sono state dimostrate da Tamás Hausel (la prima) e da Tamás Hausel, Emmanuel Letellier e Ferndando Rodriguez-Villegas (la seconda), negli articoli *Kac's conjecture from Nakajima quiver varieties* ([5]) del 2010 e *Positivity of Kac polynomials and DT-invariants for quivers* ([16]) del 2012, sfruttando proprio la formula ottenuta da Hua insieme a metodi algebrici e geometrici, come la varietà quiver di Nakajima (1.3.1), un oggetto geometrico ottenuto tramite la teoria GIT a partire dalle rappresentazioni del quiver studiato deformato aggiungendo un vertice e una freccia a ogni vertice del grafo, descritta da Nakajima nell'articolo *Quiver varieties and Kac-Moody algebras* ([6]).

Nel primo capitolo di questa tesi introduciamo la teoria delle rappresentazioni di quiver con alcuni risultati generali, come l'identificazione delle rappresentazioni con i moduli su un algebra di cammini introdotta nella sezione 1.1.2, una caratterizzazione delle rappresentazioni indecomponibili tramite l'anello degli endomorfismi e il Teorema di Krull-Remak-Schmidt nella sezione 1.1.3, e la descrizione geometrica delle classi di

isomorfismo di rappresentazioni come orbite per l'azione del gruppo $GL(\alpha, q)$ (pensando alle rappresentazioni come collezioni di matrici fissata una scelta di coordinate) nella sezione 1.1.4. Nella sezione 1.2 introduciamo il sistema di radici associato al quiver e enunciamo il Teorema di Kac, mentre nella sezione 1.3 definiamo le varietà quiver descrivendone alcune proprietà e calcoliamo il numero di preimmagini della mappa momento, risultati che sono stati sfruttati nella dimostrazione della Congettura 1.
Nel secondo capitolo consideriamo il caso dei campi finiti $\mathbb{F}_q$: nella sezione 2.1 introduciamo alcuni concetti legati alle partizioni, che sfruttiamo nella sezione 2.2 per esprimere in funzione di q le quantità che appaiono nella formula di Burnside applicata al caso dell'azione di $GL(\alpha, q)$; a partire da queste quantità nella sezione 2.3.1 ricaviamo alcune identità formali e nella sezione 2.3.2 concentrandosi sulle rappresentazioni assolutamente indecomponibili otteniamo le principali identità che coinvolgono $A_Q(\alpha, q)$ e dimostriamo che è un polinomio a coefficienti interi.

Indice

Capitolo 1

Teoria delle rappresentazioni di quiver

In questo primo capitolo vengono fornite le definizioni di base della teoria delle rappresentazioni di quiver, insieme ad alcuni risultati fondamentali della teoria, e vengono introdotti alcuni concetti che saranno centrali nei capitoli successivi: in particolare quelli di rappresentazione indecomponibile e assolutamente indecomponibile, che saranno l'oggetto di studio del Capitolo 2, di sistema di radici associato a un quiver e di varietà quiver di Nakajima.

1.1 Rappresentazioni di quiver

1.1.1 Definizioni iniziali

Definizione 1.1.1 (Quiver)**.** Un *quiver* è un grafo orientato, ovvero il dato di $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$, dove Q_0 e Q_1 sono gli insiemi finiti dei vertici e dei lati e $h, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ sono le mappe che assegnano a un lato del grafo $a \in Q_1$ la sua punta (head) $h(a) \in Q_0$ e la sua coda (tail) $t(a) \in Q_0$. Per brevità scriveremo $Q = (Q_0, Q_1)$.
Se $|Q_0| = n$ assumiamo $Q_0 = \{1, ..., n\}$, e siano $b_{ij} = |\{a \in Q_1 \mid t(a) = i, h(a) = j\}|$ e $a_{ij} = b_{ij} + b_{ji}$ per $i, j \in Q_0$.

Esempio 1.1.1. Esempio di un quiver Q:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet\ 4 \arrow[d, "d"] & \\
 & \bullet\ 3 \arrow[dr, "c"] & \\
1\ \bullet \arrow[ur, "b"] \arrow[rr, "a"'] & & \bullet\ 2
\end{tikzcd}$$

Molti risultati riguardanti le rappresentazioni di quiver assumono come ipotesi l'assenza di loop, ovvero di lati con punta e coda coincidenti. Nel corso di questa tesi si assumerà che i quiver siano senza loop.

Definizione 1.1.2 (Rappresentazione di quiver)**.** Dato un quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ una *rappresentazione* di Q su un campo $\mathbb{K}$ è un funtore da Q alla categoria $FinVect_{\mathbb{K}}$ degli spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$, ovvero il dato di uno spazio vettoriale di dimensione finita V_i per ogni $i \in Q_0$ e di un'applicazione lineare $V_a : V_{t(a)} \longrightarrow V_{h(a)}$ per ogni $a \in Q_1$.
Chiamando $\alpha_i = dim(V_i)$ il vettore $\alpha = (\alpha_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ si chiama vettore dimensione della rappresentazione.

Esempio 1.1.2. Esempio di rappresentazione del quiver Q dell'Esempio 1.1.1 sul campo $\mathbb{C}$, di dimensione $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}^3 \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 2i & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}"] & \\
 & \mathbb{C}^2 \arrow[dr, "0"] & \\
\mathbb{C} \arrow[ur, "\begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}"] \arrow[rr, "0"] & & 0
\end{tikzcd}$$

Definizione 1.1.3 (Morfismo di rappresentazioni di quiver)**.** Siano V, W due rappresentazioni di Q su $\mathbb{K}$. Un *morfismo di rappresentazioni* $\Phi : V \longrightarrow W$ è una trasformazione naturale da V a W, ovvero il dato per ogni $i \in Q_0$ di un'applicazione lineare

$\Phi_i : V_i \longrightarrow W_i$ tale che per ogni $a \in Q_1$ valga:

$$\Phi_{h(a)} \circ V_a = W_a \circ \Phi_{t(a)}.$$

Indichiamo la categoria delle rappresentazioni di Q su $\mathbb{K}$ con $Rep_Q(\mathbb{K})$. Fissato un vettore dimensione $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ indichiamo l'insieme delle rappresentazioni di Q di dimensione α con $Rep_Q(\alpha, \mathbb{K})$.

Definizione 1.1.4 (Nucleo e conucleo di un morfismo di rappresentazioni di quiver)**.** Siano $Q = (Q_0, Q_1)$, $V, W \in Rep_Q(\mathbb{K})$ e $\Phi : V \longrightarrow W$ un morfismo di rappresentazioni di quiver. Il *nucleo* e il *conucleo* di Φ sono le rappresentazioni di Q date da

$$Ker\ \Phi = ((Ker\ \Phi_i)_{i \in Q_0}, (V_a|_{Ker\ \Phi_{t(a)}})_{a \in Q_1}),$$

$$coKer\ \Phi = ((coKer\ \Phi_i)_{i \in Q_0}, (\overline{W}_a)_{a \in Q_1}),$$

dove $\overline{W}_a : coKer\Phi_{t(a)} \longrightarrow coKer\Phi_{h(a)}$ è la mappa indotta data da $[w] \mapsto [W_a(w)]$ per ogni $w \in W_{t(a)}$.
Si osservi che tali rappresentazioni sono ben definite dato che, essendo Φ un morfismo di rappresentazioni di quiver, si ha che se $v \in Ker\Phi_{t(a)}$ allora $V_a(v) \in Ker\Phi_{h(a)}$ e se $w \in Im\Phi_{t(a)}$ allora $W_a(w) \in Im\Phi_{h(a)}$.

Definizione 1.1.5 (Somma diretta di rappresentazioni)**.** Sia $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver. Se $V, W \in Rep_Q(\mathbb{K})$, la loro *somma diretta* è la rappresentazione di Q

$$V \oplus W := ((V_i \oplus W_i)_{i \in Q_0}, (V_a \oplus W_a)_{a \in Q_1})$$

1.1.2 KQ-algebra

In questa sezione definiamo l'algebra dei cammini KQ e mostriamo l'equivalenza tra la categoria delle rappresentazioni di quiver e la categoria dei KQ-moduli.

Definizione 1.1.6 (Cammino)**.** Sia Q un quiver. Se $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ un *cammino* di lunghezza l è una parola $p = a_l a_{l-1} ... a_1$ con $a_i \in Q_1$ per ogni $i = 1, ..., l$ e tali che $h(a_i) = t(a_{i+1})$. Un cammino di lunghezza 0 è un cammino "costante" su un vertice $i \in Q_0$, indicato con e_i. Chiamiamo $h(p) = h(a_l) \in Q_0$ e $t(p) = t(a_1) \in Q_0$ la coda e la punta del cammino p; se $p = e_i$ allora $t(e_i) = h(e_i) = i$.

Definizione 1.1.7 (Algebra dei cammini)**.** Siano Q un quiver e $\mathbb{K}$ un campo. L'*algebra dei cammini* è il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale KQ generato dai cammini di Q, con moltiplicazione data da:

$$p \cdot q = \begin{cases} pq \text{ se } h(q) = t(p), \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Indichiamo con KQ-Mod la categoria dei KQ-moduli sinistri.

Esempio 1.1.3. La KQ-algebra associata al quiver Q dell'Esempio 1.1.1 è generata come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale dai cammini $e_1, e_2, e_3, e_4, a, b, c, d, cb, cd$.

Teorema 1.1.1. *Siano Q un quiver e $\mathbb{K}$ un campo fissati. La categoria $Rep_{\mathbb{K}}(Q)$ delle rappresentazioni di Q su $\mathbb{K}$ è equivalente alla categoria KQ-Mod.*

Dimostrazione. Per $V \in Rep_{\mathbb{K}}(Q)$ definiamo il KQ-modulo

$$\mathcal{F}(V) = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$$

con moltiplicazione per $p = a_k ... a_1 \in KQ$ data da:

$$p.v = V_{a_k} \circ ... \circ V_{a_1}(v_{t(p)})$$

per ogni $v = (v_i)_{i \in Q_0}$.
Inoltre per ogni morfismo $\Phi : V \longrightarrow W$ di rappresentazioni di Q definiamo $\mathcal{F}(\Phi) : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(W)$ data da:

$$\mathcal{F}(\Phi)(\sum_{i \in Q_0} v_i) = \sum_{i \in Q_0} \Phi(v_i)$$

per ogni $v = (v_i)_{i \in Q_0}$. Si osservi che, siccome Φ è un morfismo di rappresentazioni, per ogni $p = a_k ... a_1 \in KQ$ si ha

$$\mathcal{F}(\Phi)(p.v) = \Phi(V_{a_k} \circ ... \circ V_{a_1}(v_{t(p)})) = W_{a_k} \circ ... \circ W_{a_1}(\Phi(v_{t(p)})) = p.(\mathcal{F}(\Phi)(v))$$

e pertanto $\mathcal{F}(\Phi)$ è un morfismo di KQ-moduli.
Viceversa per $M \in KQ - Mod$ si definisce la rappresentazione $\mathcal{G}(M)$ con $\mathcal{G}(M)_i = e_i M$ e $\mathcal{G}(M)_a : e_{t(a)} M \longrightarrow e_{h(a)} M$ data da

$$\mathcal{G}(M)_a(e_{t(a)} m) = am.$$

Inoltre per ogni morfismo $\Psi : M \longrightarrow N$ di KQ-moduli definiamo il morfismo di rappresentazioni $\mathcal{G}(\Psi) : \mathcal{G}(M) \longrightarrow \mathcal{G}(N)$ dato da:

$$\mathcal{G}(\Psi)_i(e_i m) = \Psi(e_i m) = e_i \Psi(m) \in e_i N$$

per ogni $i \in Q_0$. Questo è un morfismo di rappresentazioni di Q perché per ogni $a \in Q_1$ si ha

$$\mathcal{G}(\Psi) \circ \mathcal{G}(M)_a(e_{t(a)}m) = \mathcal{G}(\Psi)_{h(a)}(e_{h(a)}am) = e_{h(a)}\Psi(am) = a\Psi e_{t(a)}m = \mathcal{G}(N)_a \circ \mathcal{G}(\Psi)(e_{t(a)}m).$$

È abbastanza immediato verificare che $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono funtori, e che $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sono naturalmente isomorfi a $\mathrm{Id}_{Rep_{\mathbb{K}}(Q)}$ e a Id_{KQ-Mod} rispettivamente.

□

1.1.3 Rappresentazioni indecomponibili e assolutamente indecomponibili

In questa sezione si introducono alcuni concetti centrali in questa tesi: quelli di rappresentazioni indecomponibili e assolutamente indecomponibili. In particolare si dimostra un risultato essenziale riguardante le rappresentazioni indecomponibili, il Teorema di Krull-Remak-Schmidt (1.1.3), assumendo alcune conoscenze di algebra come il Lemma di Fitting e il concetto di radicale di Jacobson.

Definizione 1.1.8 (Rappresentazione indecomponibile)**.** Una rappresentazione V di un quiver Q su un campo $\mathbb{K}$ si dice *indecomponibile* se per ogni coppia di rappresentazioni W, Z di Q su $\mathbb{K}$ tali che $V \cong W \bigoplus Z$ si ha $W = 0$ o $Z = 0$.

Definizione 1.1.9 (Rappresentazione assolutamente indecomponibile)**.** Una rappresentazione V di un quiver Q su un campo $\mathbb{K}$ si dice *assolutamente indecomponibile* se per ogni estensione finita di campi $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{K}$ si ha che $V \bigotimes_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$ è indecomponibile.

Data una rappresentazione V di un quiver Q, indichiamo con $End(V)$ l'anello dei morfismi di KQ-moduli da V a V.

Teorema 1.1.2. *Sia V una rappresentazione di un quiver Q su un campo $\mathbb{K}$. La rappresentazione V è indecomponibile se e solo se $End_Q(V)$ è un anello locale.*

Dimostrazione. Si supponga V indecomponibile, e sia $\Phi \in End_Q(V)$. Se esiste $\Psi \in End_Q(V)$ tale che $(1+\Psi\Phi)$ è nilpotente allora per qualche $N \in \mathbb{N}$ si ha $0 = (1+\Psi\Phi)^N = 1 + \xi\Phi$ con $\xi \in End_Q(V)$, pertanto Φ è invertibile. Se non esiste tale Ψ per il Lemma di Fitting allora per ogni $\Psi \in End_Q(V)$ l'elemento $(1 + \Psi\Phi)$ è invertibile, e quindi Φ appariene al radicale di Jacobson di $End(V)$, che quindi è un anello locale siccome ogni elemento non invertibile sta nel suo radicale.

Viceversa sia $End_Q(V)$ locale: se $V = V_1 \oplus V_2$ è una decomposizione non banale allora se esistono $f_1, f_2 : V \longrightarrow V$ non invertibili tali che $f_1 + f_2 = \mathrm{Id}_V$ (in particolare $f_i = \iota_i \circ \pi_i$, dove π_i è la proiezione su V_i e ι_i è l'inclusione di V_i in V), il che è assurdo poiché l'ideale massimale di $End_Q(V)$ dovrebbe contenere sia f_1 che f_2 e quindi anche Id_V. □

Lemma 1.1.1. *Sia $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix} : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow W_1 \oplus W_2$ un isomorfismo di moduli, con $\Phi_{11} : V_1 \longrightarrow W_1$ isomorfismo. Allora $V_2 = W_2$.*

Dimostrazione. Sia $\Psi = \begin{pmatrix} Id_{W_1} & 0 \\ -\Phi_{21}\Phi_{11}^{-1} & Id_{W_2} \end{pmatrix} : W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_1 \oplus W_2$. Siccome Ψ è un isomorfismo, anche

$$\Psi\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ 0 & \Phi_{22} - \Phi_{21}\Phi_{11}^{-1}\Phi_{12} \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo, pertanto $V_2 \cong W_2$. □

Teorema 1.1.3 (Krull-Remak-Schmidt)**.** *Siano Q un quiver e $\mathbb{K}$ un campo. Ogni rappresentazione V di Q su $\mathbb{K}$ si decompone in modo unico a meno di isomorfismo e riordinamento come somma diretta di rappresentazioni indecomponibili, ovvero.*

Dimostrazione. L'esistenza si mostra per induzione su $|\alpha| = \sum_{i \in Q_0} \alpha_i$:

- se $|\alpha| = 1$ allora $V = \mathbb{K}e_i$ per qualche $i \in Q_0$ ed è indecomponibile;

- se una decomposizione esiste per ogni $\beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$ con $|\beta| < |\alpha|$ allora si hanno due possibilità: o V è indecomponibile e quindi la decomposizione esiste banalmente, oppure si scrive $V = W \oplus Z$ dove W e Z sono rappresentazioni di dimensioni rispettivamente β_W e β_Z con $|\beta_W|, |\beta_Z| < |\alpha|$, e quindi per ipotesi induttiva si ottiene una decomposizione in indecomponibili di V come somma diretta delle due decomposizioni di W e di Z.

Si supponga che esistano due decomposizioni in indecomponibili $V = V_1 \oplus ... \oplus V_p = W_1 \oplus ... \oplus W_r$.
Per induzione su p:

- se $p = 1$ allora $V_1 \cong W_1 \oplus ... \oplus W_r$ che implica $r = 1$ e $W_1 \cong V_1$ per indecomponibilità di V_1;

- se $p > 1$ sia $\Phi = (\Phi_{ij}) : V_1 \oplus ... \oplus V_p \longrightarrow W_1 \oplus ... \oplus W_r$ un isomorfismo e sia $\Psi = (\Psi_{ij}) = \Phi^{-1}$. Allora

$$\sum_{j=1}^{r} \Psi_{1j}\Phi_{j1} = \mathrm{Id}_{V_1} \in End(V_1)$$

  ma siccome $End(V_1)$ è un anello locale per il Teorema 1.1.2 allora esiste $\overline{j}$, che possiamo assumere senza perdita di generalità pari a 1, tale che $\Psi_{1\overline{j}}\Phi_{\overline{j}1}$ è invertibile (altrimenti si avrebbe che Id_{V_1} sta nell'ideale massimale, che è assurdo). Quindi si può assumere $\Phi_{11}\Psi_{11}$ invertibile, che implica Ψ_{11} iniettivo. Sia Γ l'inverso di $\Phi_{11}\Psi_{11}$, mostriamo che $V_1 = Ker(\Gamma\Phi_{11}) \oplus Im(\Psi_{11})$: ogni $v \in V_1$ si può scrivere come $v = \Psi_{11}\Gamma\Phi_{11}(v) + (v - \Psi_{11}\Gamma\Phi_{11}(v) \in Im(\Psi_{11}) + Ker(\Gamma\Phi_{11})$ e d'altra parte $Ker(\Gamma\Phi_{11}) \cap Im(\Psi_{11}) = \varnothing$, infatti se $\Psi_{11}(w) \in Ker(\Gamma\Phi_{11})$ per qualche $w \in W_1$ allora $0 = \Gamma\Phi_{11}\Psi_{11}(w) = w$. Quindi, siccome Ψ_{11} è iniettivo, W_1 è un addendo diretto di V_1, ma dall'indecomponibilità di V_1 segue che $V_1 \cong W_1$ e Φ_{11} è un isomorfismo. Siccome Φ_{11} e Φ sono isomorfismi, per il Lemma 1.1.1 si ha anche $V_2 \oplus ... \oplus V_p \cong W_2 \oplus ... \oplus W_r$, da cui segue la tesi per ipotesi induttiva.

□

1.1.4 Azione di $GL(\alpha, \mathbb{K})$

In questa sezione si descrivono le classi di isomorfismo di rappresentazioni di quiver dal punto di vista geometrico: le rappresentazioni vengono viste come collezioni di matrici e le classi di isomorfismo come orbite rispetto all'azione di un gruppo su uno spazio di matrici. Per fare ciò servono due osservazioni fondamentali.

- La prima osservazione è che, fissato un vettore dimensione $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ scelta per ogni $i \in Q_0$ una base di V_i, una rappresentazione equivale a una scelta per ogni $a \in Q_1$ di una matrice $A_a \in Mat_{\alpha_{h(a)} \times \alpha_{t(a)}}(\mathbb{K})$.
  Pertanto ogni rappresentazione di $Rep_Q(\alpha, \mathbb{K})$ si può associare un elemento dello spazio di matrici
  $$\prod_{a \in Q_1} Mat_{\alpha_{h(a)} \times \alpha_{t(a)}}(\mathbb{K}) \ .$$

- La seconda osservazione è che due rappresentazioni $V, W \in Rep_Q(\alpha, \mathbb{K})$ sono isomorfe se e solo se esistono $(\Phi_i)_{i \in Q_0}$ con $\Phi_i \in GL_{\alpha_i}(\mathbb{K})$ tali che, scelte basi di V_i e W_i per ogni $i \in Q_0$ e identificate le mappe V_a e W_a con le rispettive matrici associate, per ogni $a \in Q_1$ valga:
  $$\Phi_{h(a)} V_a = W_a \Phi_{t(a)}$$
  ovvero se e solo se, per ogni $a \in Q_1$, vale:
  $$W_a = \Phi_{h(a)} V_a \Phi_{t(a)}^{-1} \ .$$

Si consideri il gruppo
$$GL(\alpha, \mathbb{K}) = \prod_{i \in Q_0} GL_{\alpha_i}(\mathbb{K})$$
Tale gruppo agisce su $\prod_{a \in Q_1} Mat_{\alpha_{h(a)} \times \alpha_{t(a)}}(\mathbb{K})$ per coniugio, ovvero tramite la mappa
$$GL(\alpha, \mathbb{K}) \times \prod_{a \in Q_1} Mat_{\alpha_{h(a)} \times \alpha_{t(a)}}(\mathbb{K}) \longrightarrow \prod_{a \in Q_1} Mat_{\alpha_{h(a)} \times \alpha_{t(a)}}(\mathbb{K})$$
data da
$$(\Phi, V) \mapsto (\Phi_{h(a)} V_a \Phi_{t(a)}^{-1})_{a \in Q_0} \ .$$

Grazie alla seconda osservazione si possono quindi identificare le classi di isomorfismo di rappresentazioni di dimensione α di Q su $\mathbb{K}$ con le $G(\alpha, \mathbb{K})$-orbite in $\prod_{a \in Q_1} Mat_{\alpha_{h(a)} \times \alpha_{t(a)}}(\mathbb{K})$. Questo fatto ci permetterà, nel Capitolo 2, di contare le classi di isomorfismo di rappresentazioni studiando proprio tali orbite.

1.2 Sistemi di radici

In questa sezione vengono introdotti alcuni concetti legati alla teoria delle rappresentazioni, che permettono di associare a un quiver un sistema di radici. In particolare il Teorema di Kac (1.2.1) caratterizza i vettori dimensione per cui esistono rappresentazioni indecomponibili.

Definizione 1.2.1 (Forma di Ringel)**.** Dato un quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ definiamo su $\mathbb{Z}^{Q_0}$ la forma bilineare

$$< \alpha, \beta > := \sum_{i \in Q_0} \alpha_i \beta_i - \sum_{a \in Q_1} \alpha_{t(a)} \beta_{h(a)} \ .$$

La sua simmetrizzata, ovvero la forma

$$(\alpha, \beta) = < \alpha, \beta > + < \beta, \alpha >$$

è data dalla matrice

$$C_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} \text{ se } i \neq j, \\ 2 \text{ se } i = j \end{cases}$$

dove ricordiamo che a_{ij} è il numero di archi tra i e j.

Esempio 1.2.1. La matrice associata al quiver Q dell'Esempio 1.1.1 è

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.2.2 (Radici semplici)**.** Le *radici semplici* sono gli elementi della base canonica di $\mathbb{Z}^{Q_0}$, ovvero gli ϵ_i con 1 in posizione i e 0 nelle altre entrate, per $i \in Q_0$.

Definizione 1.2.3 (Riflessioni semplici)**.** Per ogni $\epsilon_i \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ radice semplice, definiamo la *riflessione semplice* $s_{\epsilon_i} : \mathbb{Z}^{Q_0} \longrightarrow \mathbb{Z}^{Q_0}$ data da

$$s_{\epsilon_i}(\beta) = \beta - 2\frac{(\epsilon_i, \beta)}{(\epsilon_i, \epsilon_i)}\epsilon_i \ .$$

Definizione 1.2.4 (Gruppo di Weyl)**.** Il *gruppo di Weyl* è il gruppo W degli automorfismi di $\mathbb{Z}^{Q_0}$ generato dalle riflessioni rispetto alle radici semplici ϵ_i.
Siccome le riflessioni sono isometrie, W è un gruppo di isometrie.

Definizione 1.2.5 (Radici reali)**.** Gli elementi dell'insieme Δ_{Re} delle immagini tramite il gruppo di Weyl delle radici semplici si dicono *radici reali.*
Si dimostra che $\Delta_{Re} = \Delta^{+}_{Re} \sqcup \Delta^{-}_{Re} = (\Delta_{Re} \cap \mathbb{N}^{Q_0}) \sqcup (\Delta_{Re} \cap -\mathbb{N}^{Q_0})$ è formato da radici positive e radici negative.

Definizione 1.2.6 (Radici immaginarie)**.** Sia

$$K = \{\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0} \setminus \{0\} \mid supp(\alpha) \text{ è connesso }, (\alpha, \epsilon_i) \leq 0 \ \forall i \in Q_0\},$$

dove $supp(\alpha)$ è il sottografo di Q con solo i vertici i tali che $\alpha_i \neq 0$.
Gli elementi dell'insieme Δ^{+}_{Im} delle immagini tramite il gruppo di Weyl degli elementi di K si dicono *radici immaginarie positive*, mentre gli elementi di $\Delta^{-}_{Im} = -\Delta^{+}_{Im}$ si dicono *radici immaginarie negative.*

L'insieme delle radici positive $\Delta^{+}_{Re} \cup \Delta^{+}_{Im}$ si indica con Δ^{+}.

Esempio 1.2.2. Sia Q il quiver

$$\begin{tikzcd} 1 \bullet \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & \bullet \ 2 \ . \end{tikzcd}$$

La matrice associata a Q è $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, le riflessioni semplici sono date da

$$s_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b - a \\ b \end{pmatrix} \text{ e } s_2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - b \end{pmatrix}$$

e il gruppo di Weyl è isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Le radici reali sono $\Delta_{Re} = \{(i, i+1) \in \mathbb{Z}^2\} \cup \{(i, i-1) \in \mathbb{Z}^2\}$, mentre le radici immaginarie sono $\Delta_{Im} = \{(i, i) \in \mathbb{Z}^2 \mid i \neq 0\}$.

Si enuncia ora un risultato classico della teoria delle rappresentazioni di quiver dovuto a Kac, una cui dimostrazione si può trovare in [13].

Teorema 1.2.1 (Kac)**.** *Esiste una rappresentazione indecomponibile di Q di dimensione α se e solo se $\alpha \in \Delta^{+}$.*

1.3 Varietà di Nakajima

In questa sezione introduciamo le varietà di Nakajima, strutture geometriche ottenute a partire da spazi di rappresentazioni di quiver, e dimostriamo un risultato che viene sfruttato nell'articolo *Kac's conjecture from Nakajima quiver varieties* ([5]) di Tamás Hausel per calcolare il numero di punti delle varietà di Nakajima e dimostrare la prima congettura di Kac (1).

1.3.1 Struttura simplettica e proprietà della mappa momento

Dato un quiver Q e una coppia di vettori dimensione $v, w \in \mathbb{N}^{Q_0}$ si associ ad ogni vertice $i \in Q_0$ una coppia di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V_i e W_i di dimensioni v_i e w_i rispettivamente, e si consideri lo spazio vettoriale

$$\mathbb{V}_{v,w} = \bigoplus_{a \in Q_1} Hom(V_{t(a)}, V_{h(a)}) \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} Hom(W_i, V_i).$$

Esempio 1.3.1. Se Q è il quiver

$$\begin{tikzcd} 1 \bullet \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & \bullet 2 \end{tikzcd}$$

lo spazio $\mathbb{V}_{v,w}$ corrisponde allo spazio delle rappresentazioni del quiver Q'

$$\begin{tikzcd} 3 \bullet \arrow[d, "c"'] & \bullet 4 \arrow[d, "d"] \\ 1 \bullet \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & \bullet 2 \end{tikzcd}$$

con vettore dimensione (v_1, v_2, w_1, w_2).

Il gruppo $G_v = \prod_{i \in Q_0} GL(V_i)$ ha una rappresentazione naturale $\rho_{v,w} : G_v \longrightarrow GL(\mathbb{V}_{v,w})$ data da

$$\rho_{v,w}(g)(x) = (g_{h(a)} A_a g_{t(a)}^{-1}, g_i I_i)_{a \in Q_1, i \in Q_0}$$

per $g = (g_i)_{i \in Q_0} \in G_v$ e $x = (A_a, I_i)_{a \in Q_1, i \in Q_0} \in \mathbb{V}_{v,w}$.

Dualmente si ha la rappresentazione $\rho_{v,w}^* : G_v \longrightarrow GL(\mathbb{V}_{v,w}^*)$ data da

$$\rho_{v,w}^*(g)(y) = (g_{t(a)} B_a g_{h(a)}^{-1}, J_i g_i^{-1})_{a \in Q_1, i \in Q_0}$$

per $g = (g_i)_{i \in Q_0} \in G_v$ e $y = (B_a, J_i)_{a \in Q_1, i \in Q_0} \in \mathbb{V}^*_{v,w}$.

Chiamata $\mathfrak{g}_v = \oplus_{i \in Q_0} \mathfrak{gl}(V_i)$ l'algebra di Lie associata a G_v sia $\varrho_{v,w} : \mathfrak{g}_v \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{V}_{v,w})$ la derivata di $\rho_{v,w}$, e chiamato $\mathbb{M}_{v,w} = \mathbb{V}_{v,w} \times \mathbb{V}^*_{v,w}$ si considerino la rappresentazione $\overline{\rho}_{v,w} = \rho_{v,w} \times \rho^*_{v,w} : G_v \longrightarrow GL(\mathbb{M}_{v,w})$ e la sua derivata $\overline{\varrho}_{v,w} : \mathfrak{g}_v \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{M}_{v,w})$ data da

$$\overline{\varrho}_{v,w}(c)(x,y) = (c_{h(a)}A_a - A_a c_{t(a)}, c_i I_i, c_{h(b)}B_b - B_b c_{t(b)}, -J_j c_j)_{a,b \in Q_1, i,j \in Q_0}$$

per $c = (c_i)_{i \in Q_0} \in \mathfrak{g}_v$, $x = (A_a, I_i)_{a \in Q_1, i \in Q_0} \in \mathbb{V}_{v,w}$ e $y = (B_a, J_i)_{a \in Q_1, i \in Q_0} \in \mathbb{V}^*_{v,w}$.

Lo spazio vettoriale $\mathbb{M}_{v,w}$ ha una naturale struttura simplettica data dalla forma $\omega : \mathbb{M}_{v,w} \times \mathbb{M}_{v,w} \longrightarrow \mathbb{K}$ definita come

$$\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = y_2(x_1) - y_1(x_2).$$

L'azione di G_v su $\mathbb{M}_{v,w}$ è simplettica e ha una mappa momento $\mu_{v,w} : \mathbb{M}_{v,w} \longrightarrow \mathfrak{g}^*_v$ data da

$$\mu_{v,w}(x,y) = \left(I_i J_i + \sum_{t(a)=i} B_a A_a - \sum_{h(a)=i} A_a B_a \right)^*_{i \in Q_0} \in \mathfrak{g}^*_v$$

identificando $\mathfrak{g}_v$ con $\mathfrak{g}^*_v$ tramite la traccia, infatti per $c \in \mathfrak{g}_v$ si ha che $\mu_{v,w}(x,y)(c) = y(\varrho_{v,w}(c)x)$ e se per $g \in \mathfrak{g}$ si indica con $f^g : \mathbb{M}_{v,w} \longrightarrow \mathbb{K}$ la funzione data da $f^g(v_1, w_1) = \mu(v_1, w_1)(g)$ si ha che per ogni $(v_2, w_2) \in \mathbb{M}_{v,w}$ fissato vale

$$df^g_{v_1,w_2}(v_2, w_2) = w_1(\varrho(g)v_2) + w_2(\varrho(g)v_1) = \omega(\overline{\varrho}(x)(v_1, w_1), (v_2, w_2)).$$

Lemma 1.3.1. *Siano $v \in \mathbb{N}^{Q_0} \setminus \{0\}$ tale che $char(\mathbb{K}) \nmid \sum_{i \in Q_0} v_i$ e $\lambda 1_v = (\lambda Id_{V_i})_{i \in Q_0} \in \mathfrak{g}_v$ per $\lambda \in \mathbb{K}^\times$.*
L'equazione $\mu_{v,0}(x,y) = \lambda 1^*_v$ non ha soluzione.

Dimostrazione. Se (x,y) è una soluzione (con $x = (A_a, 0_i)_{a \in Q_1, i \in Q_0}$ e $y = (B_a, 0_i)_{a \in Q_1, i \in Q_0}$) allora

$$\lambda \sum_{i \in Q_0} v_i = \mu_{v,0}(x,y)(1_v) = y(\varrho_{v,0}(1_v)x) = \sum_{i \in Q_0} Tr \left(\sum_{t(a)=i} B_a A_a - \sum_{h(a)=i} A_a B_a \right) = 0$$

pertanto $char(\mathbb{K}) | \sum_{i \in Q_0} v_i$, che è assurdo. □

Esempio 1.3.2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ ($char(\mathbb{K}) = 2$), e siano Q il quiver $\begin{tikzcd} 1 \bullet \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$ e $v = 2$, consideriamo le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La coppia $(x, y) = (A, B)$ è una soluzione di $\mu_{v,0}(x, y) = 1_v^*$.

Lemma 1.3.2. *Dati $v, w \in \mathbb{N}^{Q_0}$ tali che $char(\mathbb{K}) = 0$ o $char(\mathbb{K}) > \sum_{i \in Q_0} v_i$, siano $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ e $(x, y) \in \mathbb{M}_{v,w}$ una soluzione di $\mu_{v,w}(x, y) = \lambda 1_v^*$ tale che esiste $h \in \mathfrak{g}_v$ tale che $\overline{\varrho}_{v,w}(h)(x, y) = 0$. Allora $h = 0$.*

Dimostrazione. Sia $V_i' = Im(h_i) \subseteq V_i$ e sia v_i' la sua dimensione.
Siccome $\overline{\varrho}_{v,w}(h)(x, y) = 0$ necessariamente $J_i h_i = 0$ per ogni $i \in Q_0$ (ovvero J_i è identicamente nulla su V_i').
D'altra parte $h_{h(a)} A_a - A_a h_{t(a)} = 0$ per ogni $a \in Q_1$, quindi l'immagine tramite A_a di $V'_{t(a)}$ è contenuta in $V'_{h(a)}$, e analogamente l'immagine tramite B_a di $V'_{h(a)}$ è contenuta in $V'_{t(a)}$.
Pertanto una soluzione di $\mu_{v,w}(x, y) = \lambda 1_v^*$ si restringe a una soluzione di $\mu_{v',0}(x', y') = (\lambda Id_{V_i'})_{i \in Q_0}$.
Per il Lemma 1.3.1 (che vale date le ipotesi su $char(\mathbb{K})$) si ha che $\sum_{i \in Q_0} v_i = 0$, e quindi $h = 0$. $\square$

Lemma 1.3.3. *Dati $v, w \in \mathbb{N}^{Q_0}$ tali che $char(\mathbb{K}) = 0$ o $char(\mathbb{K}) > \sum_{i \in Q_0} v_i$ e $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, sia (x, y) una soluzione di $\mu_{v,w}(x, y) = \lambda 1_v^*$ invariante per l'azione di $g \in G_v$. Allora $g = 1_v$.*

Dimostrazione. Siccome $\overline{\rho}(g)(x, y) = (x, y)$ si ha che $\overline{\varrho}(g - 1_v)(x, y) = 0$, da cui segue che $g = 1_v$ per il Lemma 1.3.2. $\square$

Lemma 1.3.4. *Siano $v, w \in \mathbb{N}^{Q_0}$ tali che $char(\mathbb{K}) = 0$ o $char(\mathbb{K}) > \sum_{i \in Q_0} v_i$.
La derivata $d_{(x,y)}\mu_{v,w} : T_{(x,y)}\mathbb{M}_{v_w} \longrightarrow T_{\mu_{v,w}(x,y)}\mathfrak{g}_v^*$ è suriettiva se e solo se non esiste $h \in \mathfrak{g}_v \setminus \{0\}$ tale che $\overline{\varrho}_{v,w}(h)(x, y) = 0$.
In particolare se (x, y) è soluzione di $\mu_{v,w}(x, y) = \lambda 1_v^*$ con $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ allora la derivata è suriettiva.*

Dimostrazione. La derivata $d_{(x,y)}\mu_{v,w}$ non è suriettiva se e solo se esiste $h \neq 0 \in \mathfrak{g}_v$ tale che per ogni $Y \in T_{(x,y)}\mathbb{M}_{v,w}$ si ha

$$0 = d_{(x,y)}\mu_{v,w}(Y)f^h = Y(\mu_{v,w} \circ f^h) = df^h(Y) = \omega(\overline{\varrho}(h)(x,y), Y)$$

che è vero se e solo se $\overline{\varrho}(h)(x,y) = 0$ dato che ω è non degenere.
In particolare se (x,y) è soluzione di $\mu_{v,w}(x,y) = \lambda 1_v^*$ allora per il Lemma 1.3.2 se $\overline{\varrho}_{v,w}(h)(x,y) = 0$ allora $h = 0$, quindi $d_{(x,y)}\mu_{v,w}$ è suriettiva. □

1.3.2 Definizione e proprietà

Si assuma in seguito che $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e che $v, w \in \mathbb{N}^{Q_0}$ tali che $char(\mathbb{K}) | \sum_{i \in Q_0} v_i$.

Definizione 1.3.1 (Varietà quiver di Nakajima)**.** Per $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ si consideri $\mathcal{V}_\lambda(v,w) = \mu_{v,w}^{-1}(\lambda 1_v^*)$.
Per $m \in \mathbb{Z}$ sia $\chi^m : G_v \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ il carattere dato da $\chi^m(g) = \prod_{i \in Q_0} det(g_i)^m$, e sia

$$\mathbb{K}[\mathcal{V}_\lambda(v,w)]^{G_v,\chi^m} = \{f \in \mathbb{K}[\mathcal{V}_\lambda(v,w)] \mid f(g(x)) = \chi^m(g)f(x) \text{ per ogni } x \in \mathcal{V}_\lambda(v,w)\}$$

Si ha la $\mathbb{K}$-algebra $\mathbb{N}$-graduata $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}[\mathcal{V}_\lambda(v,w)]^{G_v,\chi^{mn}}$ dei semi-invarianti, e si definisce quindi la *varietà di Nakajima*

$$\mathcal{M}_{m,\lambda}(v,w) := Proj\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}[\mathcal{V}_\lambda(v,w)]^{g_v,\chi^{mn}}\right)$$

Si osservi che per $m = 0$ si ha $\mathcal{M}_{0,\lambda}(v,w) = Spec\left(\mathbb{K}[\mathcal{V}_\lambda(v,w)]^{G_v}\right) = \mathcal{V}_\lambda(v,w) /\!\!/ G_v$, dove $/\!\!/$ indica il quoziente GIT.

Lemma 1.3.5. *Per $\lambda \neq 0$ la varietà $\mathcal{M}_{0,\lambda}(v,w)$ è non singolare di dimensione*

$$2d_{v,w} = 2\left(\sum_{a \in Q_1} v_{t(a)}v_{h(a)} + \sum_{i \in Q_0} v_i(w_i - v_i)\right)$$

Dimostrazione. Siccome per il Lemma 1.3.4 la derivata $T_{(x,y)}\mu_{v,w}$ è suriettiva quando $\mu_{v,w}(x,y) = \lambda 1_v^*$, si ha che $\mu_{v,w}^{-1}(\lambda 1_v^*) = \mathcal{V}_\lambda(v,w)$ è non singolare di dimensione $dim(\mathbb{M}_{v,w}) - dim(\mathfrak{g}_v^*)$.

D'altra parte per il Lemma 1.3.3 l'azione di G_v su $\mathcal{V}_\lambda(v,w)$ è libera, pertanto $\mathcal{M}_{0,\lambda}(v,w)$ ha dimensione

$$dim(\mathcal{V}_\lambda(v,w)) - dim(G_v) = dim(\mathbb{M}_{v,w}) - dim(\mathfrak{g}_v^*) - dim(G_v) =$$

$$= 2\sum_{a\in Q_1} v_{t(a)}v_{h(a)} + 2\sum_{i\in Q_0} v_i w_i - \sum_{i\in Q_0} v_i^2 - \sum_{i\in Q_0} v_i^2 = 2d_{v,w}$$

□

Consideriamo ora il caso $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, e introduciamo un risultato che è stato sfruttato in [5] per studiare il numero di elementi delle varietà quiver calcolando la quantità $\#_\mu(\xi) = \mu^{-1}(\xi)$, ovvero il numero di preimmagini tramite la mappa momento di un elemento $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Teorema 1.3.1. *Per ogni $\xi \in \mathfrak{g}^*$ si ha*

$$\#_\mu(\xi) = |\mathfrak{g}|^{-1}|V| \sum_{x\in\mathfrak{g}} |Ker\ \varrho(x)|\Psi(\xi(x)). \tag{1.1}$$

dove $\Psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ è un carattere additivo non banale fissato, come nell'appendice C.

Dimostrazione. Sia $a_\varrho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{C}$ la funzione data da

$$a_\varrho(x) = |Ker\ \varrho(x)| = \sum_{v\in V} \delta_0(\varrho(x)v),$$

dove $\delta_a(b) = \begin{cases} 1 \text{ se } a = b, \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$

Applicando la trasformata di Fourier aritmetica alla definizione

$$\#_\mu(\xi) = \sum_{(v,w)\in M} \delta_{\mu(v,w)}(\xi)$$

si ottiene, per $x \in \mathfrak{g}$

$$\hat{\#}_\mu(x) = \sum_{(v,w)\in M} \hat{\delta}_{\mu(v,w)}(x).$$

Per il Lemma C.0.3 e siccome $\chi_{\mu(v,w)}(-x) = \hat{\hat{\chi}}_{\mu(v,w)}(x) = |\mathfrak{g}|^{\frac{1}{2}}\hat{\delta}_{\mu(v,w)}(x)$ si ha che

$$\hat{\#}_\mu(x) = |\mathfrak{g}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{(v,w)\in M} \chi_{\mu(v,w)}(-x) = |\mathfrak{g}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{(v,w)\in M} \Psi(\mu(v,w)(-x)) = |\mathfrak{g}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{(v,w)\in M} \Psi(w(\varrho(-x)v)) =$$

$$= |\mathfrak{g}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{v \in V} \sum_{w \in V^*} \chi_w(\varrho(-x)v) = |\mathfrak{g}|^{-\frac{1}{2}} |V| \sum_{v \in V} \delta_0(\varrho(-x)v) = |\mathfrak{g}|^{-\frac{1}{2}} |V| a_\varrho(-x).$$

Applicando la trasformata di Fourier a entrambi i membri si ottiene:

$$\#_\mu(\xi) = |\mathfrak{g}|^{-1} |V| \sum_{x \in \mathfrak{g}} a_\varrho(x) \chi_\xi(x) = |\mathfrak{g}|^{-1} |V| \sum_{x \in \mathfrak{g}} a_\varrho(x) \Psi(\xi(x)).$$

$\square$

Capitolo 2

Rappresentazioni assolutamente indecomponibili: formula di Hua

Siano $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver, $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ un vettore dimensione e $\mathbb{F}_q$ un campo finito. Le quantità che saranno oggetto di studio dei prossimi paragrafi sono le seguenti:

- $M_Q(\alpha, q)$: il numero di classi di isomorfismo di rappresentazioni di Q di dimensione α su $\mathbb{F}_q$;

- $I_Q(\alpha, q)$: il numero di classi di isomorfismo di rappresentazioni indecomponibili di Q di dimensione α su $\mathbb{F}_q$;

- $A_Q(\alpha, q)$: il numero di classi di isomorfismo di rappresentazioni assolutamente indecomponibili di Q di dimensione α su $\mathbb{F}_q$.

Il punto di partenza per trattare queste quantità è la formula di Burnside per il conteggio delle orbite: applicandola all'azione del gruppo $GL(\alpha, \mathbb{F}_q)$ su $\prod_{a \in Q_1} Mat_{\alpha_{h(a)} \times \alpha_{t(a)}}(\mathbb{K})$ descritta nella sezione 1.1.4 si ottiene una formula per $M_Q(\alpha, q)$ (che è proprio il numero di orbite di tale azione), poi sfruttando alcune identità formali ricaviamo un'espressione per $I_Q(\alpha, q)$, che viene a sua volta utilizzata per esprimere $A_Q(\alpha, q)$.
Infine dimostreremo che $A_Q(\alpha, q)$ è un polinomio in q, e otterremo alcune identità che implicheranno che i coefficienti di tale polinomio sono interi.

2.1 Partizioni

2.1.1 Partizioni e classi di coniugio

La formula di Burnside A.0.1, applicata al caso dell'azione di $GL(\alpha, \mathbb{F}_q)$ su $\prod_{a \in Q_1} Mat_{\alpha_{h(a)} \times \alpha_{t(a)}}(\mathbb{K})$, si esprime nel seguente modo:

$$M_Q(\alpha, q) = \frac{1}{|GL(\alpha, \mathbb{F}_q)|} \sum_{g \in GL(\alpha, \mathbb{F}_q)} |X_g| = \sum_{g \in Cl(\alpha, \mathbb{F}_q)} \frac{|X_g|}{|Z_g|},$$

dove $Cl(\alpha, \mathbb{F}_q)$ è un insieme completo di rappresentanti delle classi di coniugio di $GL(\alpha, \mathbb{F}_q)$. In questa sezione verranno calcolate le quantità $|X_g|$ e $|Z_g|$ utilizzando alcune proprietà delle partizioni e il loro legame con le classi di coniugio di $GL(\alpha, \mathbb{F}_q)$, che discende da considerazioni di algebra lineare.

Definizione 2.1.1 (Partizione)**.** Una partizione è una sequenza finita debolmente decrescente di interi positivi $\pi = (r_1, ..., r_k)$. Il peso di π è $|\pi| = \sum_{i=1}^k r_i$. Denotiamo con $\mathcal{P}$ l'insieme di tutte le partizioni.

Per ogni f polinomio monico irriducibile di grado d e per ogni r intero definiamo

$$J_r(f) = \begin{pmatrix} J(f) & I_d & 0 & ... & 0 \\ 0 & J(f) & I_d & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & I_d \\ 0 & 0 & 0 & ... & J(f) \end{pmatrix}$$

dove $J(f)$ indica la matrice compagna del polinomio f.
Se $\pi = (r_1, r_2, ..., r_k) \in \mathcal{P}$ sia $J(f, \pi) = J_{r_1}(f) \oplus J_{r_2}(f) \oplus ... \oplus J_{r_k}(f)$.
Ogni classe di coniugio di $GL(n, \mathbb{F}_q)$ è determinata da una forma canonica di Jordan data da $J(f_1, \pi_1) \oplus J(f_2, \pi_2) \oplus ... \oplus J(f_s, \pi_s)$ per qualche $s \in \mathbb{Z}^+$, con f_i polinomi monici irriducibili distinti e $\pi_i \in \mathcal{P}$ tali che $\sum_{i=1}^s |\pi_i| deg(f_i) = n$.

2.1.2 Prodotto sulle partizioni

Definizione 2.1.2 (Partizione coniugata)**.** Data $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k) \in \mathcal{P}$ sia π' la *partizione coniugata*, ovvero quella data da $\pi'_i = |\{\pi_j \in \{1, 2, ..., k\} \mid \pi_j \geq i\}|$.
Si osservi che utilizzando per π la notazione esponenziale $\pi = (1^{n_1} 2^{n_2} ...)$ dove

$n_i = |\{j \in \{1, ..., k\} \mid \pi_j = i\}|$ si ha che

$$\pi'_i = \sum_{j \geq i} n_j.$$

Si osservi inoltre che $|\pi| = |\pi'|$.

Definizione 2.1.3. Per $\pi, \mu \in \mathcal{P}$ definiamo l'accoppiamento $< \pi, \mu >= \sum_{i \geq 1} \pi'_i \mu'_i$.

Esempio 2.1.1. Consideriamo la partizione $\pi = (4, 2, 2, 1) = (1^1 2^2 3^0 4^1)$ di peso $|\pi| = 9$: la sua coniugata è $\pi' = (4, 3, 1, 1) = (1^2 2^0 3^1 4^1)$. Se $\mu = (6, 3, 3, 3, 2, 1, 1) = (1^2 2^1 3^3 4^0 5^0 6^1)$ si ha che $\mu' = (7, 5, 4, 1, 1, 1) = (1^3 2^0 3^0 4^1 5^1 6^0 7^1)$ e

$$< \pi, \mu >= 4 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 48.$$

Lemma 2.1.1. *Siano $\pi = (1^{n_1} 2^{n_2} ...)$ e $\mu = (1^{m_1} 2^{m_2} ...)$ partizioni. Allora:*

$$< \mu, \pi >= \sum_{i \geq 1, j \geq 1} \min(i, j) m_i n_j.$$

Dimostrazione. Si ha l'identità

$$< \mu, \pi >= \sum_{k \geq 1} \mu'_k \pi'_k = \sum_{k \geq 1} \left((\sum_{i \geq k} m_i)(\sum_{j \geq k} n_j) \right) = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \left(\sum_{k \leq \min(i,j)} m_i n_j \right) =$$

$$= \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \min(i, j) m_i n_j.$$

□

Definizione 2.1.4. Per $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k) \in \mathcal{P}$ sia $z(\pi) = \sum_{i \geq 1} (i - 1) \pi_i$.

Lemma 2.1.2. *Per ogni $\pi \in \mathcal{P}$ si ha l'identità $< \pi, \pi >= |\pi| + 2z(\pi)$.*

Dimostrazione. Associando a $\pi = (1^{n_1} 2^{n_2} ... k^{n_k})$ la tabella di Young corrispondente, il numero $z(\pi)$ equivale ad sommare uno 0 per ogni quadrato nella prima riga, un 1 per ogni quadrato nella seconda, un 2 per ogni quadrato nella terza...; la i-esima colonna (che ha π'_i quadrati) darà un contributo pari alla somma dei numeri da 0 a $\pi'_i - 1$, ovvero $\frac{(\pi'_i)(\pi'_i - 1)}{2} = \binom{\pi'_i}{2}$ alla somma, pertanto $z(\pi) = \sum_{i \geq 1} \binom{\pi'_i}{2}$. Quindi

$$2z(\pi) = 2 \sum_{i \geq 1} \binom{\pi'_i}{2} = \sum_{i \geq 1} \pi'_i (\pi'_i - 1) = \sum_{i \geq 1} (\pi'_i)^2 - \sum_{i \geq 1} \pi'_i =< \pi, \pi > -|\pi'| =< \pi, \pi > -|\pi|.$$

□

2.2 Formule per le cardinalità di X_g e Z_g

Siano f, g polinomi monici irriducibili e siano $\pi, \mu \in \mathcal{P}$. Si consideri la classe di coniugio di $(J(f,\pi), J(g,\mu))$ in $GL(m, \mathbb{F}_q) \times GL(m', \mathbb{F}_q)$ dove $m = deg(f)|\pi|$ e $m' = deg(g)|\mu|$. Sia $X_{(J(f,\pi),J(g,\mu))} = \{M \in Mat_{m\times m'}(\mathbb{F}_q) \mid J(f,\pi)M = MJ(g,\mu)\}$.

Lemma 2.2.1. *Siano f, g polinomi monici irriducibili e siano $\pi = (1^{m_1}2^{m_2}...)$ e $\mu = (1^{n_1}2^{n_2}...)$. Si ha che $|X_{(J(f,\pi),J(g,\mu))}| = q^{deg(f)<\pi,\mu>}$ se $f = g$, mentre $|X_{(J(f,\pi),J(g,\mu))}| = 1$ altrimenti.*

Dimostrazione. Siano $A = \mathbb{F}_q[X]$, $\tilde{A} = A \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \cong \overline{\mathbb{F}_q}[X]$ e $\alpha \in Mat_{m\times m}(\mathbb{F}_q)$, e si consideri la struttura di A-modulo su $\mathbb{F}_q^m$ data da $X.v = \alpha v$. Chiamato V_α tale A-modulo, sia $\tilde{V_\alpha} = V_\alpha \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ con la corrispondente struttura di $\tilde{A}$-modulo.
Una matrice M in $Mat_{m\times m'}(\mathbb{F}_q)$ rappresenta un omomorfismo di A moduli da $V_{J(g,\mu)}$ a $V_{J(f,\pi)}$ se e solo se $MX.v = X.Mv$ per ogni $v \in \mathbb{F}_q^{m'}$, ovvero se e solo se $MJ(g,\mu) = J(f,\pi)M$. Pertanto $X_{(J(f,\pi),J(g,\mu))} = Hom_A(V_{J(g,\mu)}, V_{J(f,\pi)})$, che è un $\mathbb{F}_q$ spazio vettoriale di dimensione finita e pari alla dimensione di $Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J(g,\mu)}, \tilde{V}_{J(f,\pi)})$ come $\overline{\mathbb{F}_q}$-spazio vettoriale.
Siccome $J(f,\pi) = J_1(f)^{m_1} \oplus J_2(f)^{m_2} \oplus ...$ si ha che $\tilde{V}_{J(f,\pi)} \cong V_{J_1(f)}^{m_1} \oplus V_{J_2(f)}^{m_2} \oplus ...$, pertanto

$$Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J(g,\mu)}, \tilde{V}_{J(f,\pi)}) \cong \bigoplus_{i=1}^{deg(f)} \bigoplus_{j=1}^{deg(g)} Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J_j(g)}^{n_j}, \tilde{V}_{J_i(f)}^{m_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^{deg(f)} \bigoplus_{j=1}^{deg(g)} Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J_j(g)}, \tilde{V}_{J_i(f)})^{n_j m_i}$$

Siccome ogni estensione algebrica di un campo finito è separabile, per ogni polinomio monico irriducibile $f \in \mathbb{F}_q[t]$ di grado d, la matrice $J(f)$ è diagonalizzabile su $\overline{\mathbb{F}}_q$ con autovslori distinti $\xi_1, ..., \xi_d$.
Quindi $J_r(f)$ è simile, per come è stata definita, alla matrice $J(\xi_1, r) \oplus J(\xi_2, r) \oplus ... \oplus J(\xi_d, r)$ dove $J(\xi_i, r)$ è il blocco di Jordan relativo all'autovalore ξ_i di ordine r, ovvero, indicando con S_r la matrice shift che ha 1 sopra la diagonale e le altre entrate nulle, $J(\xi_i, r) = \xi_i \operatorname{Id}_r + S_r$.
Siano $deg(f) = d$, $deg(g) = e$, $\xi_1, ..., \xi_d$ le radici distinte di f in $\overline{\mathbb{F}}_q$ e $\eta_1, ..., \eta_e$ quelle di g: si ha

$$Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J_j(g)}, \tilde{V}_{J_i(f)}) \cong \bigoplus_{s=1}^{d} \bigoplus_{t=1}^{e} Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J(\eta_t,j)}, \tilde{V}_{J(\xi_s,i)}).$$

Si osservi che, per ogni ξ e i, l'$\tilde{A}$-modulo $\tilde{V}_{J(\xi,i)}$ è indecomponibile con unico fattore di composizione isomorfo a $\tilde{V}_{J(\xi,1)}$, quindi $Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J(\eta_t,j)}, \tilde{V}_{J(\xi_s,i)}) \neq 0$ se e solo se $\eta_t = \xi_s$. Pertanto $Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J(g,\mu)}, \tilde{V}_{J(f,\pi)}) \neq 0$ se e solo se f e g hanno una radice in comune, ma questo è equivalente a dire che $f = g$ siccome f e g sono irriducibili. Se $f \neq g$ allora $|X_{(J(f,\pi),J(g,\mu))}| = 1$, altrimenti si ha

$$Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J_j(g)}, \tilde{V}_{J_i(f)}) \cong \bigoplus_{s=1}^{d} Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J(\xi_s,j)}, \tilde{V}_{J(\xi_s,i)}).$$

Mostriamo che la dimensione di $Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J(\xi,j)}, \tilde{V}_{J(\xi,i)}) = \{C \in Mat_{j\times i}(\overline{\mathbb{F}}_q) \mid CJ(\xi,i) = J(\xi,j)C)\}$ come $\overline{\mathbb{F}}_q$-spazio vettoriale è $min(i,j)$: la condizione $(\xi\,\mathrm{Id}_j + S_j)C = C(\xi\,\mathrm{Id}_i + S_i)$ è equivalente a $S_jC = CS_i$, pertanto basta mostrarlo per $\xi = 0$. Chiamate $\{e_1, ..., e_i\}$ la base canonica di $\overline{\mathbb{F}}_q^i$ e $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_j\}$ la base canonica di $\overline{\mathbb{F}}_q^j$, siccome per $k = 1, ..., i$ vale $S_jCe_k = CS_ie_k = Ce_{k-1}$ (e quindi fissato Ce_i sono determinate le immagini di $e_1, ..., e_{i-1}$) si ottiene che se $i \geq j$ allora $Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J(\xi,j)}, \tilde{V}_{J(\xi,i)})$ è lo spazio delle matrici $\begin{pmatrix} 0 & B \end{pmatrix} \in Mat_{j\times i}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ tali che B è triangolare superiore e $B_{m,n} = B_{m+1,n+1}$, che ha dimensione j, mentre se $i \leq j$ allora $Ce_1 \in < \epsilon_1 >$, $Ce_k \in Ce_{k-1} + < \epsilon_1 >$, quindi $Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J(\xi,j)}, \tilde{V}_{J(\xi,i)})$ è lo spazio delle matrici $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \in Mat_{j\times i}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ tali che B è triangolare superiore e $B_{m,n} = B_{m+1,n+1}$, che ha dimensione i.

Quindi, usando il Lemma 2.1.1:

$$dim_{\overline{\mathbb{F}}_q}(Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J(f,\mu)}, \tilde{V}_{J(f,\pi)})) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} n_j m_i \cdot dim_{\overline{\mathbb{F}}_q}(Hom_{\tilde{A}}(\tilde{V}_{J_j(f)}, \tilde{V}_{J_i(f)})) =$$

$$= \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} min(i,j) n_j m_i d = < \pi, \mu > d.$$

Ma tale dimensione è anche la dimensione di $Hom_A(V_{J(f,\mu)}, V_{J(f,\pi)})$ come $\mathbb{F}_q$-spazio vettoriale, quindi $Hom_A(V_{J(f,\mu)}, V_{J(f,\pi)})$ ha cardinalità $q^{<\pi,\mu>d}$. □

Per $r \in \mathbb{N}$ sia $\varphi_r(q) = \prod_{i=1}^{r}(1 - q^i)$ (con la convenzione che $\varphi_0 = 1$) e per $\pi = (1^{n_1}2^{n_2}...) \in \mathcal{P}$ sia $b_\pi(q) = \prod_{i\geq 1} \varphi_{n_i}(q)$.

Utilizziamo i lemmi precedenti per calcolare in maniera più esplicita le cardinalità dei centralizzatori e degli insiemi fissati dall'azione degli elementi di $GL(\alpha, \mathbb{F}_q)$ su $\prod_{a\in Q_1} Mat_{\alpha_{h(a)}\times\alpha_{t(a)}}(\mathbb{K})$.

Consideriamo un rappresentante $g = (J(f,\pi_1), J(f,\pi_2), ..., J(f,\pi_n)) \in GL(\alpha, \mathbb{F}_q)$ di una classe di coniugio in $GL(\alpha, \mathbb{F}_q)$, con f polinomio monico irriducibile di grado d e $\pi_i \in \mathcal{P}$ tali che $\alpha = (d|\pi_1|, d|\pi_2|, ..., d|\pi_n|)$.

Teorema 2.2.1. *Valgono le seguenti:*

$$|Z_g| = \prod_{i=1}^{n} q^{d<\pi_i,\pi_i>} b_{\pi_i}(q^{-d})$$

$$|X_g| = \prod_{1\leq i\leq j\leq n} q^{da_{ij}<\pi_i,\pi_j>}$$

Dimostrazione. Si consideri il centralizzatore $Z_{J(f,\pi_i)}$ di $J(f,\pi_i)$ in $GL(m_i, \mathbb{F}_q)$ con $m_i = d|\pi_i|$: dalla dimostrazione del Lemma 2.2.1 segue che $Z_{J(f,\pi_i)} = Aut_{\mathbb{F}_q[X]}(V_{J(f,\pi_i)})$, che, per [7, §4.2] e per il Lemma 2.1.2, ha cardinalità

$$|Z_{J(f,\pi_i)}| = q^{d(\pi_i+2z(\pi_i))} b_{\pi_i}(q^{-d}) = q^{d<\pi_i,\pi_i>} b_{\pi_i}(q^{-d}).$$

Quindi

$$|Z_g| = \prod_{i=1}^{n} |Z_{J(f,\pi_i)}| = \prod_{i=1}^{n} q^{d<\pi_i,\pi_i>} b_{\pi_i}(q^{-d}).$$

D'altra parte i punti fissati da g in $\prod_{a\in Q_1} Mat_{\alpha_{h(a)}\times\alpha_{t(a)}}(\mathbb{K})$ si ottengono scegliendo per ogni freccia $a \in Q_1$ un elemento di $X_{(J(f,\pi_{h(a)}),J(f,\pi_{t(a)}))}$, pertanto, utilizzando il Lemma 2.2.1:

$$|X_g| = \prod_{a\in Q_1} |X_{(J(f,\pi_{h(a)}),J(f,\pi_{t(a)}))}| = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} |X_{(J(f,\pi_i),J(f,\pi_j))}|^{b_{ij}} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} q^{db_{ij}<\pi_i,\pi_j>},$$

da cui, sfruttando il fatto che $b_{ii} = a_{ii}$ e $a_{ij} = b_{ij} + b_{ji}$, segue

$$|X_g| = \prod_{1\leq i\leq j\leq n} q^{da_{ij}<\pi_i,\pi_j>}.$$

$\square$

2.3 Formula di Hua

2.3.1 Identità formali

In questa sezione otteniamo alcune identità riguardanti serie formali che hanno come coefficienti le quantità che ci interessano: nel seguito per $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ useremo la notazione X^α per indicare il prodotto $\prod_{i \in Q_0} X_i^{\alpha_i}$ nelle indeterminate X_i.
Il Teorema di Krull-Remak-Schmidt (1.1.3) assicura che ogni rappresentazione si decompone in modo unico (a meno di permutazioni) come somma diretta di rappresentazioni indecomponibili, pertanto otteniamo la seguente identità formale:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}} M_Q(\alpha, q) X^\alpha = \prod_{\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0} \setminus \{0\}} (1 - X^\alpha)^{-I_Q(\alpha, q)}. \tag{2.1}$$

Infatti si ha

$$\prod_{\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0} \setminus \{0\}} (1 - X^\alpha)^{-I_Q(\alpha, q)} = \prod_{\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0} \setminus \{0\}} \left(\sum_{k \geq 0} \binom{I_Q(\alpha, q) + k - 1}{k} X^{k\alpha} \right)$$

e quindi il coefficiente di X^α nel membro di destra dell'equazione (2.1) è

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k_1\beta_1 + \ldots + k_m\beta_m = \alpha} \left(\prod_{j=1}^{m} \binom{I_Q(\beta_j, q) + k_j - 1}{k_j} \right)$$

che corrisponde alla somma dei possibili modi di scegliere per ogni j un multiinsieme di cardinalità k_j di rappresentazioni indecomponibili di dimensione β_i in modo che la somma delle rappresentazioni di tutti i multiinsiemi abbia dimensione α, al variare del numero m di dimensioni tra cui scegliere gli addendi, che è esattamente il numero di rappresentazioni di dimensione α.

Definizione 2.3.1. Sia $n = |Q_0|$: definiamo la serie formale a coefficienti in $\mathbb{Q}(q)$

$$P_Q(X_1, X_2, ..., X_n, q) = \sum_{\pi_1, ..., \pi_n \in \mathcal{P}} \frac{\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} q^{a_{ij} <\pi_i, \pi_j>}}{\prod_{1 \leq i \leq n} q^{<\pi_i, \pi_i>} b_{\pi_i}(q^{-1})} X_1^{|\pi_1|} X_2^{|\pi_2|} ... X_n^{|\pi_n|}$$

Si osservi che $P(X_1, X_2, ..., X_n, q)$ ha termine noto pari a 1 dato che l'unica partizione dell'insieme vuoto è $\pi = (1^0 2^0 3^0 ...)$ (e si ha $<\pi, \pi> = 0$ e $b_\pi(q^{-1}) = \prod_{i \geq 1} \phi_0(q^{-1}) = 1$) ed è indipendente dall'orientazione di Q.

Esempio 2.3.1. Sia Q il quiver

$$\begin{tikzcd} 1 \bullet \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & \bullet\, 2 \end{tikzcd}$$

I primi termini di $P_Q(X_1, X_2, q)$ sono:

$$P_Q(X_1, X_2, q) = 1 + \frac{q^{2\cdot 0}q^{0\cdot 1}}{q(1-q^{-1})}X_1 + \frac{q^{2\cdot 0}q^{0\cdot 1}}{q(1-q^{-1})}X_2 + \frac{q^{0\cdot 1}q^{0\cdot 1}q^{2\cdot 1}}{q(1-q^{-1})q(1-q^{-1})}X_1X_2 +$$

$$+\left(\frac{q^{2\cdot 0}q^{0\cdot 4}}{q^4(1-q^{-1})(1-q^{-2})} + \frac{q^{2\cdot 0}q^{0\cdot 2}}{q^2(1-q^{-1})}\right)X_1^2 + \left(\frac{q^{2\cdot 0}q^{0\cdot 4}}{q^4(1-q^{-1})(1-q^{-2})} + \frac{q^{2\cdot 0}q^{0\cdot 2}}{q^2(1-q^{-1})}\right)X_2^2 +$$

$$+\left(\frac{q^{0\cdot 2}q^{0\cdot 1}q^{2\cdot 1}}{q^2(1-q^{-1})q(1-q^{-1})} + \frac{q^{0\cdot 4}q^{0\cdot 1}q^{2\cdot 2}}{q^4(1-q^{-1})(1-q^{-2})q(1-q^{-1})}\right)X_1^2X_2 +$$

$$+\left(\frac{q^{0\cdot 1}q^{0\cdot 2}q^{2\cdot 1}}{q^2(1-q^{-1})q(1-q^{-1})} + \frac{q^{0\cdot 1}q^{0\cdot 4}q^{2\cdot 2}}{q^4(1-q^{-1})(1-q^{-2})q(1-q^{-1})}\right)X_1X_2^2 +$$

$$+\left(\frac{q^{0\cdot 2}q^{0\cdot 2}q^{2\cdot 2}}{q^2(1-q^{-1})q^2(1-q^{-1})} + \frac{q^{0\cdot 4}q^{0\cdot 4}q^{2\cdot 4}}{q^4(1-q^{-1})(1-q^{-2})q^4(1-q^{-1})(1-q^{-2})} + \right.$$

$$\left. + \frac{q^{0\cdot 4}q^{0\cdot 2}q^{2\cdot 2}}{q^4(1-q^{-1})(1-q^{-2})q^2(1-q^{-1})} + \frac{q^{0\cdot 2}q^{0\cdot 4}q^{2\cdot 2}}{q^4(1-q^{-1})(1-q^{-2})q^2(1-q^{-1})}\right)X_1^2X_2^2 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{q-1}X_1 + \frac{1}{q-1}X_2 + \frac{q^2}{(q-1)^2}X_1X_2 +$$

$$+\left(\frac{1}{q(q-1)^2(q+1)} + \frac{1}{q(q-1)}\right)X_1^2 + \left(\frac{1}{q(q-1)^2(q+1)} + \frac{1}{q(q-1)}\right)X_2^2 +$$

$$+\left(\frac{q}{(q-1)^2} + \frac{q^3}{(q-1)^3(q+1)}\right)X_1^2X_2 + \left(\frac{q}{(q-1)^2} + \frac{q^3}{(q-1)^3(q+1)}\right)X_1X_2^2 +$$

$$+\left(\frac{q^2}{(q-1)^2} + \frac{q^6}{(q-1)^4(q+1)^2} + 2\frac{q^2}{(q-1)^3(q+1)}\right)X_1^2X_2^2 + \ldots$$

Teorema 2.3.1. *Siano $\Phi_1(q) = q-1$ e $\Phi_d(q)$ il numero di polinomi monici irriducibili di grado d su $\mathbb{F}_q$ per $d \geq 2$. Allora vale l'identità formale*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} M_Q(\alpha, q)X^\alpha = \prod_{d=1}^{\infty}(P_Q(X_1^d, X_2^d, ..., X_n^d, q^d))^{\Phi_d(q)}. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Come già osservato $M_Q(\alpha, q) = \sum_{g\in Cl(\alpha,\mathbb{F}_q)} \frac{|X_g|}{|Z_g|}$, perciò:

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} M_Q(\alpha, q)X^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \left(\sum_{g\in Cl(\alpha,\mathbb{F}_q)} \frac{|X_g|}{|Z_g|} \right) X^\alpha.$$

Per quanto dimostrato nella sezione precedente ogni classe di coniugio di $GL(\alpha, \mathbb{F}_q)$ è somma diretta di un numero finito di elementi del tipo $(J(f_i, \pi_{1_i}), J(f_i, \pi_{2_i}), ..., J(f_i, \pi_{n_i}))$ con f_i polinomi monici irriducibili distinti e $\pi_{k_i} \in \mathcal{P}$ tali che $\sum_{i\geq 1} deg(f_i)|\pi_{k_i}| = \alpha_k$ per ogni $k \in \{1, ..., n\}$.
Essendo gli f_i distinti, dal Lemma 2.2.1 segue che

$$|X_{(J(f_i,\pi_{1_i})\oplus J(f_j,\pi_{1_j}),...,J(f_i,\pi_{n_i})\oplus J(f_j,\pi_{n_j}))}| = |X_{(J(f_i,\pi_{1_i}),...,J(f_i,\pi_{n_i}))}||X_{(J(f_j,\pi_{1_j}),...,J(f_j,\pi_{n_j}))}|$$

per $i \neq j$. Pertanto, chiamato Ω l'insieme dei polinomi monici irriducibili in $\mathbb{F}_q[X]$ escluso il polinomio X, si ha:

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \left(\sum_{g\in Cl(\alpha,\mathbb{F}_q)} \frac{|X_g|}{|Z_g|} \right) X^\alpha = \prod_{f\in\Omega} \left(\sum_{\pi_1,...,\pi_n\in\mathcal{P}} \frac{|X_{(J(f,\pi_1),...,J(f,\pi_n))}|}{|Z_{(J(f,\pi_1),...,J(f,\pi_n))}|} X_1^{deg(f)|\pi_1|}...X_n^{deg(f)|\pi_n|} \right).$$

Dal Teorema 2.2.1 segue

$$\prod_{f\in\Omega} \left(\sum_{\pi_1,...,\pi_n\in\mathcal{P}} \frac{|X_{(J(f,\pi_1),...,J(f,\pi_n))}|}{|Z_{(J(f,\pi_1),...,J(f,\pi_n))}|} X_1^{deg(f)|\pi_1|}...X_n^{deg(f)|\pi_n|} \right) =$$

$$= \prod_{f\in\Omega} \left(\sum_{\pi_1,...,\pi_n\in\mathcal{P}} \frac{\prod_{1\leq i\leq j\leq n} q^{deg(f)a_{ij}<\pi_i,\pi_j>}}{\prod_{1\leq i\leq n} q^{deg(f)<\pi_i,\pi_i>} b_{\pi_i}(q^{-deg(f)})} X_1^{deg(f)|\pi_1|}...X_n^{\deg(f)|\pi_n|} \right) =$$

$$= \prod_{f\in\Omega} P_Q(X_1^{deg(f)}, ..., X_n^{deg(f)}, q^{deg(f)}) = \prod_{d=1}^{\infty} (P_Q(X_1^d, ..., X_n^d, q^d))^{\Phi_d(q)}.$$

$\square$

Consideriamo ora le funzioni razionali $H_Q(\alpha, q)$ e $E_Q(\alpha, q)$ definite da:

$$log(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} M_Q(\alpha, q)X^\alpha) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n\setminus\{0\}} \frac{E_Q(\alpha, q)}{\overline{\alpha}} X^\alpha \quad \text{e}$$

$$log(P_Q(X_1, ..., X_n, q)) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n\setminus\{0\}} \frac{H_Q(\alpha, q)}{\overline{\alpha}} X^\alpha,$$

dove log indica il logaritmo formale, ovvero $log(1-X) = -\sum_{i\geq 1} \frac{X^i}{i}$, e $\overline{\alpha} = M.C.D.(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ per $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^{Q_0}$.

Esempio 2.3.2. Per il quiver Q dell'esempio 2.3.1 si ottiene

$$H_Q((2,1),q) = \left(\frac{q}{(q-1)^2} + \frac{q^3}{(q-1)^3(q+1)}\right) - \frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{q(q-1)^2(q+1)} + \frac{1}{q(q-1)}\right) -$$

$$-\frac{q^2}{(q-1)^3} + \frac{1}{(q-1)^3} = \frac{1}{q-1};$$

$$H_Q((1,1),q) = \frac{q^2}{(q-1)^2} - \frac{1}{(q-1)^2} = \frac{q+1}{q-1};$$

$$H_Q((2,2),1) = \frac{2q^2}{(q-1)^2} + \frac{2q^6}{(q-1)^4(q+1)^2} + \frac{4q^2}{(q-1)^3(q+1)} - 2\frac{q^4}{(q-1)^4} -$$

$$-4\left(\frac{1}{q^2(q-1)^4(q+1)^2} + \frac{1}{q^2(q-1)^2} + \frac{2}{q^2(q-1)^3(q+1)}\right) - 8\left(\frac{q}{(q-1)^3} + \frac{q^3}{(q-1)^4(q+1)}\right) +$$

$$+\frac{4q^2}{(q-1)^4} + 4\left(\frac{1}{q(q-1)^4(q+1)} + \frac{1}{q(q-1)^3}\right) - \frac{3}{(q-1)^4} =$$

$$= \frac{q^2(3q^6 - 2q^5 - 5q^4 + 5q^2 + 2q - 3)}{q^2(q-1)^4(q+1)^2} = \frac{3q^2+4q+3}{(q-1)(q+1)}.$$

Lemma 2.3.1. *Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ vale l'identità:*

$$E_Q(\alpha, q) = \sum_{d|\overline{\alpha}} d\Phi_d(q) H_Q(\frac{\alpha}{d}, q^d). \tag{2.3}$$

Dal Teorema 2.3.1 segue che $\frac{E_Q(\alpha,q)}{\overline{\alpha}}$ è il coefficiente di X^α nella serie formale

$$log(\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n} M_Q(\beta,q)X^\beta) = log(\prod_{d\geq 1}(P_Q(X_1^d, ..., X_n^d, q^d))^{\Phi_d(q)} = \sum_{d\geq 1}\Phi_d(q) log(P_Q(X_1^d, ..., X_n^d, q^d)) =$$

$$= \sum_{d\geq 1}\Phi_d(q)\left(\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n\setminus\{0\}} \frac{H_Q(\beta, q^d)}{\overline{\beta}} X^{d\beta}\right).$$

Quindi considerando i termini per cui $d\beta = \alpha$ si ha

$$\frac{E_Q(\alpha,q)}{\overline{\alpha}} = \sum_{d|\overline{\alpha}} d\Phi_d(q)\frac{H_Q(\frac{\alpha}{d}, q^d)}{\overline{\alpha}},$$

da cui segue che

$$E_Q(\alpha, q) = \sum_{d|\overline{\alpha}} d\Phi_d(q) H_Q(\frac{\alpha}{d}, q^d).$$

Lemma 2.3.2. *Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ vale l'identità*

$$I_Q(\alpha, q) = \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{d|\overline{\alpha}} \mu(d) E_Q(\frac{\alpha}{d}, q). \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Siccome $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} M_Q(\alpha, q) X^\alpha = \prod_{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} (1 - X^\alpha)^{-I_Q(\alpha,q)}$ si ha

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} \frac{E_Q(\alpha, q)}{\overline{\alpha}} X^\alpha = log \left(\prod_{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} (1 - X^\alpha)^{-I_Q(\alpha,q)} \right) =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} I_Q(\alpha, q) log \left(\frac{1}{(1 - X^\alpha)} \right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} I_Q(\alpha, q) \sum_{i \geq 1} \frac{X^{i\alpha}}{i} =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} \sum_{i \geq 1} \frac{I_Q(\alpha, q)}{i} X^{i\alpha}.$$

Pertanto, confrontando i coefficienti dei termini con lo stesso grado, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ si ha

$$\frac{E_Q(\alpha, q)}{\overline{\alpha}} = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} I_Q(\frac{\alpha}{d}, q) \Rightarrow E_Q(\alpha, q) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{\overline{\alpha}}{d} I_Q(\frac{\alpha}{d}, q),$$

da cui, posto $\underline{k} = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}} \in \mathbb{N}^{Q_0}$, segue che

$$E_Q(\overline{\alpha}\underline{k}, q) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{\overline{\alpha}}{d} I_Q(\frac{\overline{\alpha}}{d}\underline{k}, q) = \sum_{d|\overline{\alpha}} d I_Q(d\underline{k}, q).$$

Applicando la formula di inversione di Möbius si ottiene:

$$\overline{\alpha} I_Q(\overline{\alpha}\underline{k}, q) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \mu(d) E_Q(\frac{\overline{\alpha}}{d}\underline{k}, q),$$

da cui segue

$$I_Q(\alpha, q) = \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{d|\overline{\alpha}} \mu(d) E_Q(\frac{\alpha}{d}, q).$$

$\square$

2.3.2 Rappresentazioni assolutamente indecomponibili

In questa sezione si presentano i principali risultati riguardanti le rappresentazioni assolutamente indecomponibili: in particolare dimostriamo varie identità che legano $A_Q(\alpha, q)$ alle funzioni $I_Q(\alpha, q)$, $E_Q(\alpha, q)$ e $H_Q(\alpha, q)$, dimostriamo che $A_Q(\alpha, q)$ è un polinomio in q e nel Teorema 2.3.6 otteniamo un'identità formale dovuta a Hua che lega i coefficienti di tale polinomio a un'espressione combinatorica. Questa formula ci permette di mostrare che tali coefficienti sono interi, ed è stata sfruttata in [5] e [16] per dimostrare che tali coefficienti sono non negativi e che il termine noto di $A_Q(\alpha, q)$ è pari alla molteplicità di α come peso dell'algebra di Kac-Moody associata al quiver Q.

Lemma 2.3.3. *Sia Q un quiver e sia $V \in Rep_Q(\alpha, \mathbb{F}_{q^t})$. La rappresentazione V è assolutamente indecomponibile se e solo se $End(V)/Rad(End(V)) \cong \mathbb{F}_q$.*

Dimostrazione. Se V è assolutamente indecomponibile allora $End(V)$ è un anello locale per il Teorema 1.1.2, e $End(V)/Rad(End(V))$ è una $\mathbb{F}_q$-algebra di divisione di dimensione finita. Dal Teorema 4.1 di [12] segue che $End(V)/Rad(End(V))$ è un campo finito contenente $\mathbb{F}_q$, ovvero $End(V)/Rad(End(V)) \cong \mathbb{F}_{q^r}$ per qualche $r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Utilizzando il Teorema 7.9 di [11] otteniamo:

$$End(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r})/Rad(End(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r})) \cong End(V)/Rad(End(V)) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r} \cong \mathbb{F}_{q^r} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r} \cong \mathbb{F}_{q^r}^{\oplus r}.$$

D'altra parte essendo V assolutamente indecomponibile anche $V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}$ è indecomponibile come rappresentazione su $\mathbb{F}_{q^r}$, pertanto $End(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r})$ è locale, e $End(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r})/Rad(End(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r})) \cong \mathbb{F}_{q^r}^{\oplus r}$ è un anello di divisione, il che è possibile solo se $r = 1$, dato che altrimenti $\mathbb{F}_{q^r}^{\oplus r}$ ha elementi idempotenti non banali.

Viceversa se $End(V)/Rad(End(V)) \cong \mathbb{F}_q$, allora per ogni $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$End(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r})/Rad(End(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r})) \cong End(V)/Rad(End(V)) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r} \cong \mathbb{F}_q \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r} \cong \mathbb{F}_{q^r},$$

pertanto $End(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r})$ è locale e quindi per il Teorema 1.1.2 $V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}$ è indecomponibile per ogni $r \in \mathbb{N}$, e quindi V è assolutamente indecomponibile. □

Lemma 2.3.4. *Sia $V \in Rep_Q(\alpha, \mathbb{F}_{q^t})$ una rappresentazione assolutamente indecomponibile di un quiver Q tale che $\mathbb{F}_{q^t}$ è il suo campo minimale di definizione. Si consideri $G = Gal(\mathbb{F}_{q^t} : \mathbb{F}_q)$ e sia $\overline{V} = \sum_{\sigma \in G} {}^{\sigma}V$. Valgono i seguenti fatti:*

- *$\overline{V}$ è una ben definita rappresentazione indecomponibile su $\mathbb{F}_q$;*

- *due rappresentazioni V_1 e V_2 assolutamente indecomponibili su $\mathbb{F}_{q^t}$ sono tali che $\overline{V_1} = \overline{V_2}$ se e solo se V_1 e V_2 appartengono alla stessa classe di coniugio per G;*

- *ogni rappresentazione indecomponibile di $\mathbb{F}_q$ si può ottenere in questo modo a partire da una rappresentazione assolutamente indecomponibile su $\mathbb{F}_{q^t}$ per qualche t.*

Dimostrazione. Sia M la $GL(t\alpha, \mathbb{F}_{q^t})$-orbita di $\overline{V}$ in $Rep_Q(t\alpha, \mathbb{F}_{q^t})$. Siccome è invariante rispetto a G, è ben definita anche su $\mathbb{F}_q$.
Lo stabilizzatore di un punto $x \in M$ è $GL(t\alpha, \mathbb{F}_{q^t})_x = End(x) \cap GL(t\alpha, \mathbb{F}_{q^t})$ è connesso, e quindi per [2, Lemma 3.2] $M(\mathbb{F}_q)$ è un'orbita (non vuota) per l'azione di $GL(t\alpha, \mathbb{F}_q)$, quindi $\overline{V}$ è una rappresentazione ben definita su $\mathbb{F}_q$. D'altra parte se V_1 e V_2 sono rappresentazioni assolutamente indecomponibili su $\mathbb{F}_{q^t}$ tali che $\overline{V_1}$ e $\overline{V_2}$ sono isomorfe allora per il Teorema di Krull-Remak-Schmidt (1.1.3) V_2 è G-coniugata a V_1 come rappresentazione su $\mathbb{F}_{q^t}$.
Se U è una rappresentazione indecomponibile su $\mathbb{F}_q$, per il Lemma 2.3.3 si ha che $End(U)/Rad(End(U)) \cong \mathbb{F}_{q^r}$ per qualche $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sia $U \otimes \overline{\mathbb{F}}_q = \sum_{i=1}^k U_i$ la sua decomposizione in rappresentazioni assolutamente indecomponibili su $\overline{\mathbb{F}}_q$: siccome $End(U \otimes \overline{\mathbb{F}}_q)/Rad(End(U \otimes \overline{\mathbb{F}}_q)) \cong \overline{\mathbb{F}}_q^{\oplus r}$ necessariamente $k = r$. Sia $t \in \mathbb{N}$ minimo tale che U_1 è definita su $\mathbb{F}_{q^t}$, ovvero tale che l'automorfismo Φ_{q^t} di $\overline{\mathbb{F}}_q$ dato da $x \mapsto x^{q^t}$ agisce banalmente su U_1: si ha che

$$U \cong \sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{F}_{q^t}:\mathbb{F}_q)} {}^{\sigma}U_1.$$

$\square$

Esempio 2.3.3. Consideriamo il quiver Q

$$\begin{tikzcd} 1\bullet \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$$

e la rappresentazione U su $\mathbb{F}_8$ con vettore dimensione $\alpha = (2)$ data da $U_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Siccome su $\mathbb{F}_{64}$ la matrice è coniugata a $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1+\xi \end{pmatrix}$ (dove ξ è un elemento di $\mathbb{F}_4$ tale

che $\xi^2 = \xi + 1$), la rappresentazione $U \otimes_{\mathbb{F}_8} \mathbb{F}_{64}$ si decompone come $U_1 \oplus U_2$, dove U_1 e U_2 sono le rappresentazioni con vettore dimensione (1) (e quindi in particolare assolutamente indecomponibili) date dalla moltiplicazine per ξ e per $1+\xi$. Il gruppo di Galois $Gal(\mathbb{F}_{64} : \mathbb{F}_8)$ ha due elementi: l'identità e σ data da $\xi \mapsto 1+\xi$, quindi $U_2 = {}^{\sigma}U_1$ e $U \cong \sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{F}_{8^2}:\mathbb{F}_8)} {}^{\sigma}U_1$.
Il campo minimale di definizione di U_1 e U_2 è $\mathbb{F}_4$.

Esempio 2.3.4. Si osservi che se al posto di $GL(\alpha, \mathbb{K})$ si considera un gruppo diverso non è detto che un'orbita su un estensione di $\mathbb{K}$ corrisponda a un'orbita su $\mathbb{K}$. Prendendo ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ e considerando l'azione del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ (e di $SL(2, \mathbb{C})$) sulle rappresentazioni del quiver Q dell'esempio precedente si ha che la $SL(2, \mathbb{R})$-orbita della rappresentazione V data da $V_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non contiene la rappresentazione W data da $W_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mentre V_a e W_a sono coniugate tramite un elemento di $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e quindi $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e $W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ appartengono alla stessa $SL(2, \mathbb{C})$-orbita.

Teorema 2.3.2. *Per $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^{Q_0}$, vale la seguente identità:*

$$I_Q(\alpha, q) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r|d} \mu(\frac{d}{r}) A_Q(\frac{\alpha}{d}, q^r). \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Per il Lemma 2.3.4 ogni rappresentazione indecomponibile U su $\mathbb{F}_q$ si può scrivere in modo unico come $U = \sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{F}_{q^d}:\mathbb{F}_q)} {}^{\sigma}V$ per qualche $d \in \mathbb{N}$ e V rappresentazione assolutamente indecomponibile su $\mathbb{F}_{q^d}$.
Si osservi che $\sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{F}_{q^d}:\mathbb{F}_q)} {}^{\sigma}V$ ha dimensione pari a $d \cdot dim(V)$, pertanto se la dimensione di U è α allora la dimensione di V deve essere $\frac{\alpha}{d}$.
Per $d|\alpha$ sia $D_Q(\frac{\alpha}{d}, q^d)$ il numero di rappresentazioni assolutamente indecomponibili su $\mathbb{F}_{q^d}$ che hanno dimensione $\frac{\alpha}{d}$ e campo minimale di definizione $\mathbb{F}_{q^d}$. Siccome le rappresentazioni assolutamente indecomponibili definite su $\mathbb{F}_q$ hanno campo minimale di definizione

contenuto in $\mathbb{F}_q$ e dato che i sottocampi di $\mathbb{F}_{q^d}$ sono del tipo $\mathbb{F}_{q^r}$ con $r|d$, otteniamo

$$A_Q(\frac{\alpha}{d}, q^d) = \sum_{r|d} D_Q(\frac{\alpha}{d}, q^r),$$

da cui, tramite l'inversione di Möbius:

$$D_Q(\frac{\alpha}{d}, q^d) = \sum_{r|d} \mu(\frac{d}{r}) A_Q(\frac{\alpha}{d}, q^r).$$

Sia $q = p^k$ con p primo: siccome ogni rappresentazione indecomponibile su $\mathbb{F}_q$ si può ottenere a partire da d rappresentazioni assolutamente indecomponibili distinte su $\mathbb{F}_{q^d}$ possiamo contare le rappresentazioni indecomponibili su $\mathbb{F}_{p^k}$ considerando le rappresentazioni assolutamente indecomponibili sui campi $\mathbb{F}_{p^{dk}}$ per $d|\alpha$ con campo minimale di definizione $\mathbb{F}_{p^{\frac{dk}{c}}}$ con $(d, c) = 1$ (in modo da considerare una sola volta ogni campo $\mathbb{F}_{p^{\frac{dk}{c}}}$) e otteniamo la formula:

$$I(\alpha, p^k) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{c|dk \\ (c,d)=1}} D(\frac{\alpha}{d}, p^{\frac{dk}{c}}) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{c|dk \\ (c,d)=1}} \sum_{r|\frac{dk}{c}} \mu(\frac{dk}{rc}) A_Q(\frac{\alpha}{d}, p^r) =$$

$$= \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r|dk} \sum_{\substack{c|\frac{dk}{r} \\ (c,d)=1}} \mu(\frac{dk}{rc}) A_Q(\frac{\alpha}{d}, p^r) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r|dk} A_Q(\frac{\alpha}{d}, p^r) \sum_{\substack{c|\frac{dk}{r} \\ (c,d)=1}} \mu(\frac{dk}{rc}).$$

Consideriamo la sommatoria

$$\sum_{\substack{c|\frac{dk}{r} \\ (c,d)=1}} \mu(\frac{dk}{rc}) :$$

se $d = q_1^{n_1} ... q_i^{n_i}$ e $\frac{dk}{r} = q_1^{m_1} ... q_i^{m_i} p_1^{l_1} ... p_j^{l_j}$ con $q_1, ..., q_i, p_1, ... p_j$ primi distinti, necessariamente $c|p_1^{l_1} ... p_j^{l_j}$ e pertanto

$$\mu(\frac{dk}{rc}) = \mu(q_1^{n_1} ... q_k^{m_k}) \cdot \mu(\frac{p_1^{l_1} ... p_j^{l_j}}{c}),$$

da cui segue che

$$\sum_{\substack{c|\frac{dk}{r} \\ (c,d)=1}} \mu(\frac{dk}{rc}) = \mu(q_1^{n_1} ... q_k^{m_k}) \cdot \sum_{c|p_1^{l_1} ... p_j^{l_j}} \mu(\frac{p_1^{l_1} ... p_j^{l_j}}{c}),$$

che è diversa da 0 se e solo se $\frac{dk}{r}|q_1...q_i$, e quindi

$$\sum_{r|dk} A_Q(\frac{\alpha}{d}, p^r) \sum_{\substack{c|\frac{dk}{r} \\ (c,d)=1}} \mu(\frac{dk}{rc}) = \sum_{\substack{r|dk \\ \frac{dk}{r}|d}} \mu(\frac{dk}{r}) A_Q(\frac{\alpha}{d}, p^r) =$$

osservando che $k|r$ e ponendo $r' = \frac{r}{k}$:

$$= \sum_{r'|d} \mu(\frac{d}{r'}) A_Q(\frac{\alpha}{d}, p^{kr'}) = \sum_{r'|d} \mu(\frac{d}{r'}) A_Q(\frac{\alpha}{d}, q^{r'}).$$

Abbiamo pertanto mostrato che

$$I_Q(\alpha, q) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r|dk} A_Q(\frac{\alpha}{d}, p^r) \sum_{\substack{c|\frac{dk}{r} \\ (c,d)=1}} \mu(\frac{dk}{rc}) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r'|d} \mu(\frac{d}{r'}) A_Q(\frac{\alpha}{d}, q^{r'}).$$

□

Teorema 2.3.3. *Per $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^{Q_0}$, vale la seguente identità:*

$$A_Q(\alpha, q) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r|d} \mu(r) I_Q(\frac{\alpha}{d}, q^r). \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Sia $\underline{k} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ il vettore dimensione indivisibile $\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}$.
Per il teorema 2.3.2 si ha che

$$\sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r|d} \mu(r) I_Q(\frac{\alpha}{d}, q^r) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r|d} \mu(r) \sum_{s|\frac{\overline{\alpha}}{d}} \frac{1}{s} \sum_{t|s} \mu(\frac{s}{t}) A_Q(\frac{\overline{\alpha}}{ds}\underline{k}, q^{tr}) =$$

riorganizzando le sommatorie, notando che $d|\overline{\alpha}, s|\frac{\overline{\alpha}}{d} \iff ds|\overline{\alpha}, s|ds$, e chiamando $u = ds$

$$= \sum_{u|\overline{\alpha}} \sum_{s|u} \sum_{r|\frac{u}{s}} \sum_{t|s} \frac{1}{u} \mu(r) \mu(\frac{s}{t}) A_Q(\frac{\overline{\alpha}}{u}\underline{k}, q^{tr}) =$$

notando che $s|u, r|\frac{u}{s}, t|s \iff tr|u, t|tr, t|s, s|\frac{u}{tr}t$, e chiamando $v = tr$ e $\frac{s}{t} = w$

$$= \sum_{u|\overline{\alpha}} \sum_{v|u} \sum_{t|v} \sum_{w|\frac{u}{v}} \frac{1}{u} \mu(\frac{v}{t}) \mu(w) A_Q(\frac{\overline{\alpha}}{u}\underline{k}, q^v) =$$

$$= \sum_{u|\overline{\alpha}} \sum_{v|u} \sum_{t|v} \frac{1}{u} \mu(\frac{v}{t}) A_Q(\frac{\overline{\alpha}}{u} \underline{k}, q^v) \sum_{w|\frac{u}{v}} \mu(w) =$$

e siccome $\sum_{w|\frac{u}{v}} \mu(w) \neq 0$ se e solo se $u = v$:

$$= \sum_{u|\overline{\alpha}} \sum_{t|u} \frac{1}{u} \mu(\frac{u}{t}) A_Q(\frac{\overline{\alpha}}{u} \underline{k}, q^u) = \sum_{u|\overline{\alpha}} \frac{1}{u} A_Q(\frac{\overline{\alpha}}{u} \underline{k}, q^u) \sum_{t|u} \mu(\frac{u}{t})$$

e ancora siccome $\sum_{t|u} \mu(\frac{u}{t}) \neq 0$ se e solo se $u = 1$:

$$= A_Q(\overline{\alpha} \underline{k}, q) = A_Q(\alpha, q).$$

□

Lemma 2.3.5. *Per ogni* $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ *si ha che*

$$A_Q(\alpha, q) = \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{d|\overline{\alpha}} \mu(d) E_Q(\frac{\alpha}{d}, q^d). \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Dal Teorema 2.3.3 e dal Lemma 2.3.2 segue che:

$$A_Q(\alpha, q) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r|d} \mu(r) I_Q(\frac{\alpha}{d}, q^r) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r|d} \mu(r) \frac{d}{\overline{\alpha}} \sum_{s|\frac{\overline{\alpha}}{d}} \mu(s) E_Q(\frac{\alpha}{ds}, q^r) =$$

$$= \sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{1}{d} \sum_{r|d} \mu(r) \frac{d}{\overline{\alpha}} \sum_{s|\frac{\overline{\alpha}}{d}} \mu(\frac{\overline{\alpha}}{ds}) E_Q(\frac{s\alpha}{\overline{\alpha}}, q^r) = \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{d|\overline{\alpha}} \sum_{r|d} \sum_{s|\frac{\overline{\alpha}}{d}} \mu(r) \mu(\frac{\overline{\alpha}}{ds}) E_Q(\frac{s\alpha}{\overline{\alpha}}, q^r) =$$

$$= \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{d|\overline{\alpha}} \sum_{r|\frac{\overline{\alpha}}{d}} \sum_{s|d} \mu(r) \mu(\frac{d}{s}) E_Q(\frac{s\alpha}{\overline{\alpha}}, q^r) = \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{r|\overline{\alpha}} \sum_{d|\frac{\overline{\alpha}}{r}} \sum_{s|d} \mu(r) \mu(\frac{d}{s}) E_Q(\frac{s\alpha}{\overline{\alpha}}, q^r) =$$

$$= \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{r|\overline{\alpha}} \sum_{d|\frac{\overline{\alpha}}{r}} \sum_{s|\frac{\overline{\alpha}}{dr}} \mu(r) \mu(\frac{\overline{\alpha}}{drs}) E_Q(\frac{s\alpha}{\overline{\alpha}}, q^r) = \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{r|\overline{\alpha}} \sum_{s|\frac{\overline{\alpha}}{r}} \sum_{d|\frac{\overline{\alpha}}{sr}} \mu(r) \mu(\frac{\overline{\alpha}}{drs}) E_Q(\frac{s\alpha}{\overline{\alpha}}, q^r) =$$

$$\frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{r|\overline{\alpha}} \sum_{s|\frac{\overline{\alpha}}{r}} \mu(r) E_Q(\frac{s\alpha}{\overline{\alpha}}, q^r) \sum_{d|\frac{\overline{\alpha}}{sr}} \mu(\frac{\overline{\alpha}}{drs}) = \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{r|\overline{\alpha}} \mu(r) E_Q(\frac{\alpha}{r}, q^r)$$

siccome $\sum_{d|\frac{\overline{\alpha}}{sr}} \mu(\frac{\overline{\alpha}}{drs}) \neq 0$ se e solo se $\frac{\overline{\alpha}}{sr} = 1$, ovvero se e solo se $s = \frac{\overline{\alpha}}{r}$. □

Teorema 2.3.4. *Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ si ha che*

$$A_Q(\alpha, q) = \frac{q-1}{\overline{\alpha}} \sum_{d|\overline{\alpha}} \mu(d) H_Q(\frac{\alpha}{d}, q^d). \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Per il Lemma 2.3.5 si ha che

$$A_Q(\alpha, q) = \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{d|\overline{\alpha}} \mu(d) E_Q(\frac{\alpha}{d}, q^d)$$

ma applicando l'uguaglianza (2.3) si ottiene

$$A_Q(\alpha, q) = \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{d|\overline{\alpha}} \mu(d) \sum_{r|\frac{\overline{\alpha}}{d}} r\Phi_r(q^d) H_Q(\frac{r\alpha}{\overline{\alpha}}, q^{dr}) =$$

$$= \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{d|\overline{\alpha}} \mu(d) \sum_{r|\frac{\overline{\alpha}}{d}} \frac{\overline{\alpha}}{dr} \Phi_{\frac{\overline{\alpha}}{dr}}(q^d) H_Q(\frac{r\alpha}{\overline{\alpha}}, q^{\frac{\overline{\alpha}}{r}}) = \sum_{d|\overline{\alpha}} \sum_{r|\frac{\overline{\alpha}}{d}} \frac{\mu(d)}{dr} \Phi_{\frac{\overline{\alpha}}{dr}}(q^d) H_Q(\frac{r\alpha}{\overline{\alpha}}, q^{\frac{\overline{\alpha}}{r}}) =$$

$$= \sum_{r|\overline{\alpha}} \sum_{d|\frac{\overline{\alpha}}{r}} \frac{\mu(d)}{dr} \Phi_{\frac{\overline{\alpha}}{dr}}(q^d) H_Q(\frac{r\alpha}{\overline{\alpha}}, q^{\frac{\overline{\alpha}}{r}}) = \sum_{r|\overline{\alpha}} \sum_{d|r} \mu(d) \frac{r}{d\overline{\alpha}} \Phi_{\frac{r}{d}}(q^d) H_Q(\frac{\alpha}{r}, q^r) =$$

$$\frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_{r|\overline{\alpha}} H_Q(\frac{\alpha}{r}, q^r) \sum_{d|r} \mu(d) \frac{r}{d} \Phi_{\frac{r}{d}}(q^d) = \frac{q-1}{\overline{\alpha}} \sum_{r|\overline{\alpha}} \mu(r) H_Q(\frac{\alpha}{r}, q^r),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal Corollario B.0.2. □

Si osservi che dal Teorema 2.3.4 segue che $A_Q(\alpha, q)$ è una funzione razionale in q, siccome lo è $H(\alpha, q)$. Ma poiché $A_Q(\alpha, q)$ ha valori interi sugli infiniti valori di $q = p^k$ con p primo, si ha che necessariamente $A_Q(\alpha, q)$ è un polinomio a coefficienti razionali in q.
Infatti se $A_Q(\alpha, q) = \frac{f(q)}{g(q)}$ con f, g polinomi allora effettuando la divisione si ha $f(q) = s(q)g(q) + r(q)$ con r polinomio di grado minore di quello di g. Sia N è il prodotto dei denominatori dei coefficienti di s: per ogni q primo $N\frac{r(q)}{g(q)}$ è intero, ma, siccome per $q \to \infty$ vale $\frac{r(q)}{g(q)} \to 0$, necessariamente $r(q) \equiv 0$ e quindi g divide f.

Si noti anche che siccome la serie formale $P_Q(X_1, ..., X_n, q)$ non dipende dall'orientazione di Q, anche $H_Q(\alpha, q)$ è indipendente dall'orientazione di Q, e quindi anche $A_Q(\alpha, q)$.

Nei teoremi seguenti si userà la notazione $A_Q(\alpha, q) = \sum_{j=0}^{u_\alpha} t_j^\alpha q^j$, dove i coefficienti t_j^α sono numeri razionali: alla fine del capitolo si mostrerà che in realtà sono interi.

Esempio 2.3.5. Per il quiver Q dell'esempio 2.3.1 si ha:

$$A_Q((2,1),q) = (q-1)H_Q(\alpha,q) = \frac{q-1}{q-1} = 1;$$

$$A_Q((1,1),q) = (q-1)H_Q(\alpha,q) = \frac{(q-1)(q+1)}{q-1} = q+1;$$

$$A_Q((2,2),q) = \frac{q-1}{2}(\mu(1)H_Q((2,2),q) + \mu(2)H_Q((1,1),q^2) =$$

$$= \frac{q-1}{2}\left(\frac{3q^2+4q+3}{(q-1)(q+1)} - \frac{q^2+1}{q^2-1}\right) = \frac{q^2+2q+1}{q+1} = q+1.$$

Dal Teorema 2.3.2 segue che

$$I_Q((2,1)),q) = 1;$$

$$I_Q((1,1)),q) = q+1;$$

$$I_Q((2,2),q) = A_Q((2,2),q) + \frac{1}{2}\left(A_Q(\frac{\alpha}{2},q^2) - A_Q(\frac{\alpha}{2},q)\right) = \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q + 1.$$

Si osservi che effettivamente $(2,1)$ è una radice reale e $(1,1)$ e $(2,2)$ sono radici immaginarie per il quiver Q.

Teorema 2.3.5. *Vale la seguente identità formale:*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{Q_0}} M_Q(\alpha,q)X^\alpha = \prod_{\alpha\in\Delta^+}\prod_{j=0}^{u_\alpha}(1-q^jX^\alpha)^{-t_j^\alpha}. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Si ha che per il Lemma 2.3.5

$$\sum_{d|\overline{\alpha}} \frac{\overline{\alpha}}{d} A_Q(\frac{\alpha}{d},q^d) = \sum_{d|\overline{\alpha}}\sum_{r|\frac{\overline{\alpha}}{d}} \mu(r)E_Q(\frac{\alpha}{dr},q^{dr}) = \sum_{r|\overline{\alpha}}\sum_{d|\frac{\overline{\alpha}}{r}} \mu(r)E_Q(\frac{\alpha}{dr},q^{dr}) =$$

$$= \sum_{k|\overline{\alpha}}\sum_{r|k}\mu(r)E_Q(\frac{\alpha}{k},q^k) = \sum_{k|\overline{\alpha}} E_Q(\frac{\alpha}{k},q^k)\sum_{r|k}\mu(r) = E_Q(\alpha,q).$$

Dalla definizione di $E_Q(\alpha,q)$ e da quanto appena provato segue che:

$$log\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{Q_0}} M_Q(\alpha,q)X^\alpha\right) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{Q_0}\setminus\{0\}}\sum_{d|\overline{\alpha}}\frac{1}{d}A_Q(\frac{\alpha}{d},q^d)X^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{Q_0}\setminus\{0\}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}A_Q(\alpha,q^i)X^{i\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha\in\Delta^+}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}A_Q(\alpha,q^i)X^{i\alpha} = \sum_{\alpha\in\Delta^+}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sum_{j=0}^{u_\alpha}t_j^\alpha q^{ij}X^{i\alpha} = \sum_{\alpha\in\Delta^+}\sum_{j=0}^{u_\alpha}t_j^\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i}q^{ij}X^{i\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha\in\Delta^+}\sum_{j=0}^{u_\alpha}t_j^\alpha log((1-q^jX^\alpha)^{-1}) = log(\prod_{\alpha\in\Delta^+}\prod_{j=0}^{u_\alpha}(1-q^jX^\alpha)^{-t_j^\alpha}).$$

Pertanto

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{Q_0}} M_Q(\alpha,q)X^\alpha = \prod_{\alpha\in\Delta^+}\prod_{j=0}^{u_\alpha}(1-q^jX^\alpha)^{-t_j^\alpha}.$$

□

Lemma 2.3.6. *Vale la seguente identità formale:*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X^i}{i(q^i-1)} = log(\prod_{i=0}^{\infty}1-q^iX).$$

Dimostrazione. Applicando le proprietà del logaritmo:

$$log(\prod_{i=0}^{\infty}1-q^iX) = \sum_{i=0}^{\infty}log(1-q^iX) = -\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}(q^iX)^j = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{\infty}(q^iX)^j =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}X^j\sum_{i=0}^{\infty}q^{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{X^j}{j}\frac{1}{q^j-1}.$$

□

Teorema 2.3.6. *Vale la seguente identità formale:*

$$P_Q(X_1,...,X_n,q) = \sum_{\pi_1,...,\pi_n\in\mathcal{P}}\frac{\prod_{1\le i\le j\le n}q^{a_{ij}<\pi_i,\pi_j>}}{\prod_{1\le i\le n}q^{<\pi_i,\pi_i>}b_{\pi_i}(q^{-1})}X_1^{|\pi_1|}...X_n^{|\pi_n|} = \prod_{\alpha\in\Delta^+}\prod_{i=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{u_\alpha}(1-q^{i+1}X^\alpha)^{t_j^\alpha}. \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.3.4 si ha che

$$\sum_{d|\overline{\alpha}}\frac{\overline{\alpha}}{d(q^d-1)}A_Q(\frac{\alpha}{d},q^d) = \sum_{d|\overline{\alpha}}\frac{\overline{\alpha}}{d(q^d-1)}\frac{d(q^d-1)}{\overline{\alpha}}\sum_{r|\frac{\overline{\alpha}}{d}}\mu(r)H_Q(\frac{\alpha}{dr},q^{dr}) =$$

$$= \sum_{d|\overline{\alpha}}\sum_{r|\frac{\overline{\alpha}}{d}}\mu(r)H_Q(\frac{\alpha}{dr},q^{dr}) = \sum_{k|\overline{\alpha}}\sum_{r|k}\mu(r)H_Q(\frac{\alpha}{k},q^k) = \sum_{k|\overline{\alpha}}H_Q(\frac{\alpha}{k},q^k)\sum_{r|k}\mu(r) = H_Q(\alpha,q).$$

Pertanto dalla definizione di $H_Q(\alpha, q)$ segue che:

$$log(P_Q(X_1, ..., X_n, q)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} \frac{H_Q(\alpha, q)}{\overline{\alpha}} X^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} \sum_{d | \overline{\alpha}} \frac{1}{d(q^d - 1)} A_Q(\frac{\alpha}{d}, q^d) X^\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(q^i - 1)} A_Q(\alpha, q^i) X^{i\alpha} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(q^i - 1)} A_Q(\alpha, q^i) X^{i\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(q^i - 1)} \sum_{j=0}^{u_\alpha} t_j^\alpha q^{ij} X^{i\alpha} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{j=0}^{u_\alpha} t_j^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(q^j X^\alpha)^i}{i(q^i - 1)} =$$

applicando il Lemma 2.3.6

$$= \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{j=0}^{u_\alpha} t_j^\alpha log(\prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i q^j X^\alpha)) = log \left(\prod_{\alpha \in \Delta^+} \prod_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{u_\alpha} (1 - q^{i+j} X^\alpha)^{t_j^\alpha} \right)$$

da cui segue che:

$$\sum_{\pi_1, ..., \pi_n \in \mathcal{P}} \frac{\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} q^{a_{ij} < \pi_i, \pi_j >}}{\prod_{1 \leq i \leq n} q^{< \pi_i, \pi_i >} b_{\pi_i}(q^{-1})} X_1^{|\pi_1|} ... X_n^{|\pi_n|} = \prod_{\alpha \in \Delta^*} \prod_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{u_\alpha} (1 - q^{i+1} X^\alpha)^{t_j^\alpha}.$$

□

Corollario 2.3.7. *Per ogni $\alpha \in \Delta^+$ i coefficienti t_j^α sono interi.*

Dimostrazione. Si supponga esista $\alpha_0 \in \Delta^+$ tale che $A_Q(\alpha_0, q) \notin \mathbb{Z}[q]$ con $ht(\alpha_0)$ minimale (dove con altezza si intende la somma delle entrate).
Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $t_k^{\alpha_0} \notin \mathbb{Z}$, e siano

$$U = \prod_{\substack{\alpha \in \Delta^+ \\ ht(\alpha) < ht(\alpha_0)}} \prod_{i,j=0}^{\infty} (1 - q^{i+j} X^\alpha)^{t_j^\alpha}$$

e u il coefficiente di $q^k X^{\alpha_0}$ in U, mentre si indichi con w il coefficiente di $q^k X^{\alpha_0}$ in $P_Q(X_1, ..., X_n, q)$, che per il Teorema 2.3.6 è uguale al coefficiente di $q^k X^{\alpha_0}$ nel prodotto

$$U(1 - q^k X^{\alpha_0})^{t_k^{\alpha_0}}.$$

Il coefficiente di $q^k X^{t_k^{\alpha_0}}$ in $(1 - q^k X^{\alpha_0})^{t_k^{\alpha_0}}$ è $-t_k^{\alpha_0} = w - u \notin \mathbb{Z}$. Per minimalità di α_0 si ha che $u \in \mathbb{Z}$ e quindi $w \notin \mathbb{Z}$.
Mostriamo che ciò è assurdo:

$$P_Q(X_1, ..., X_n, q) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} C_Q(\alpha, q) X^\alpha$$

dove si sono raggruppate le partizioni con stesso peso: dalla definizione si vede che i coefficienti si possono scrivere nel seguente modo

$$C_Q(\alpha, q) = \frac{f(q)}{q^r \prod_{i=1}^{m}(q^i - 1)^{r_i}}$$

dove $f \in \mathbb{Z}[q]$ e $m, r, r_i \in \mathbb{N}$ dipendono da α.
Siccome $C_Q(\alpha, q)$ è una serie formale a coefficienti razionali in q, si ha che esiste il limite di $C_Q(\alpha, q)$ per $q \to 0$, e quindi $q^r | f(q)$, ovvero

$$C_Q(\alpha, q) = \frac{g(q)}{\prod_{i=1}^{m}(q^i - 1)^{r_i}}$$

con $g \in \mathbb{Z}[q]$.
Ricordando che

$$(1 - q^i)^{-r_i} = \sum_{N \geq 0} \binom{r_i + N - 1}{N} X^N$$

si ottiene che $C_Q(\alpha, q)$ è una serie formale in q a coefficienti interi, il che contraddice il fatto che $w \notin \mathbb{Z}$.
Abbiamo quindi dimostrato che non può esistere $\alpha_0 \in \Delta^+$ tale che un coefficiente $t_k^{\alpha_0}$ di $A_Q(\alpha_0, q)$ non sia intero, pertanto si ha che per ogni $\alpha \in \Delta^+$ i coefficienti t_j^{α} sono interi. $\square$

Appendice A

Formula di Burnside

In questa sezione si dimostra la Formula di Burnside, risultato elementare di teoria dei gruppi che è però il punto di partenza per il conteggio delle classi di isomorfismo di rappresentazioni di quiver su campi finiti, che come spiegato nel Capitolo 1 possono essere viste come orbite rispetto all'azione di un opportuno gruppo su uno spazio di matrici.

Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme finito X e sia X/G l'insieme delle orbite rispetto a tale azione.
Si indichi con X^g l'insieme degli elementi fissati da $g \in G$, ovvero $X^g = \{x \in X \mid g.x = x\}$, con $Stab_x$ lo stabilizzatore di $x \in X$, ovvero $Stab_x = \{g \in G | g.x = x\}$ e con $\mathcal{O}_G(x)$ l'orbita di $x \in X$.

Lemma A.0.1. *Vale la seguente identità:*

$$|\mathcal{O}_G(X)| = \frac{|G|}{|Stab_x|}.$$

Dimostrazione. La mappa $\Phi : G/Stab_x \longrightarrow \mathcal{O}_G(x)$ data da

$$g \mapsto g.x$$

è suriettiva per definizione di orbita e iniettiva perche $\Phi(g) = \Phi(h)$ se e solo se $gh^{-1} \in Stab_x$, ovvero se e solo se $g = h$ nel quoziente.
Pertanto

$$|\mathcal{O}_G(x)| = [G : Stab_x] = \frac{|G|}{|Stab_x|}.$$

$\square$

Teorema A.0.1 (Formula di Burnside)**.** *Vale la seguente identità:*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

Dimostrazione. Si ha che

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|\{g\in G|g.x=x\}| = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|Stab_x| =$$

e dal Lemma A.0.1 segue che

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}\frac{|G|}{|\mathcal{O}_G(x)|} = \sum_{\mathcal{O}_G(x)\in G/X}\ \sum_{y\in\mathcal{O}_G(x)}\frac{1}{|\mathcal{O}_G(y)|} = |X/G|.$$

□

Appendice B

Formula di Gauss

In questa appendice verrà dimostrata una formula, generalizzazione di un risultato noto come formula di Gauss, che fornisce un modo per contare il numero di polinomi monici irriducibili su un campo finito con grado fissato.
Tale risultato (e in particolare il suo Corollario) viene sfruttato nella dimostrazione del Teorema 2.3.4

Teorema B.0.1. *Sia $n \in \mathbb{Z}^+$ e sia $\mathbb{F}_q$ un campo finito. Il numero di polinomi monici irriducibili su $\mathbb{F}_q$ di grado n è*

$$\tilde{\Phi}_n(q) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})q^d = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d)q^{\frac{n}{d}}.$$

Dimostrazione. Si consideri il polinomio $g(X) = X^{q^n} - X \in \mathbb{F}_q[X]$: i polinomi monici irriducibili di $\mathbb{F}_q[X]$ che dividono g sono tutti e soli quelli di grado m tale che $m|n$, infatti se f è un tale polinomio e α è una sua radice nel campo di spezzamento di f allora siccome $[\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q] = m$ e $[\mathbb{F}_{q^n} : \mathbb{F}_q] = n$ e $\mathbb{F}_q(\alpha) \subseteq \mathbb{F}_{q^n}$ (visto che $\alpha^{q^n} - \alpha = 0$) si ha che $m|n$. D'altra parte se $f \in \mathbb{F}_q[X]$ è monico irriducibile di grado m con $m|n$ allora per ogni radice α di f si ha che $\mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{F}_{q^m} \subseteq \mathbb{F}_{q^n}$, e pertanto α è radice di g.
In particolare, siccome g non ha radici multiple (ad esempio perché $g'(X) = -1$), il prodotto dei polinomi monici irriducibili di $\mathbb{F}_q$ è $g(X)$, dato che i suoi fattori sono proprio tali polinomi e nessuno di essi appare una sola volta nella fattorizzazione di g.
Pertanto, confrontando i gradi, si ha che

$$q^n = \sum_{d|n} d\tilde{\Phi}_d(q).$$

Applicando la formula di inversione di Möbius si ottiene:

$$n\tilde{\Phi}_n(q) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})q^d.$$

□

Corollario B.0.2. *Sia $\Phi_n(q)$ la funzione definita nelle ipotesi del Teorema 2.3.1. Allora vale la seguente identità:*

$$\sum_{d|n} \frac{n}{d}\mu(d)\Phi_{\frac{n}{d}}(q^d) = \mu(n)(q-1).$$

Dimostrazione. Si osservi che per $n \neq 1$ si ha $\Phi_n(q) = \tilde{\Phi}_n(q)$, pertanto dal teorema segue che

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d)(q^{\frac{n}{d}} - 1) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d)q^{\frac{n}{d}} - \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d) = \tilde{\Phi}_n(q) - \delta_{1n} = \Phi_n(q).$$

Applicando la formula di inversione di Möbius si ottiene

$$\sum_{d|n} \frac{n}{d}\mu(d)\Phi_{\frac{n}{d}}(q^d) = \mu(n)(q-1).$$

□

Appendice C

Trasformata di Fourier aritmetica

In questa appendice si introduce la trasformata di Fourier aritmetica, un concetto analogo a quello della trasformata di Fourier per funzioni continue che viene sfruttato nel Capitolo 1 per esprimere il numero di preimmagini della mappa momento.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo finito $\mathbb{F}_q$ e si consideri il gruppo abeliano dato da V con la somma.
L'insieme $\hat{V}$ dei caratteri di tale gruppo (ovvero l'insieme degli omomorfismi di gruppi da V a $\mathbb{C}^\times$), ha una naturale struttura di $\mathbb{F}_q$-spazio vettoriale data da $\chi - \psi := \chi\psi^{-1}$ e $\alpha\chi(v) := \chi(\alpha v)$, per $\chi, \psi \in \hat{V}$, $\alpha \in \mathbb{F}_q$ e $v \in V$.

Lemma C.0.1. *Per ogni $\chi, \psi \in \hat{V}$ si ha che*

$$\sum_{v \in V} \chi(v)\psi(v) = \begin{cases} |V| \text{ se } \chi = -\psi \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $\chi \neq -\psi$ allora esiste $x \in V \setminus \{0\}$ tale che $\chi(x) \neq -\psi(x)$.
Allora tramite la sostituzione $v \mapsto x + v$ si ottiene

$$\sum_{v \in V} \chi(v)\psi(v) = \sum_{v \in V} \chi(x+v)\psi(x+v) = \chi(x)\psi(x) \sum_{v \in V} \chi(v)\psi(v)$$

e quindi siccome $\chi(x)\psi(x) \neq 1$ si ha

$$\sum_{v \in V} \chi(v)\psi(v) = 0.$$

Se invece $\chi = -\psi$ allora chiaramente per ogni $v \in V$ si ha $\chi(x)\psi(x) = 1$ e quindi

$$\sum_{v \in V} \chi(v)\psi(v) = |V|.$$

$\square$

Lemma C.0.2. *Si ha che* $|\hat{V}| = |V|$ *e* $\hat{\hat{V}} \cong V$ *tramite l'applicazione che associa a* $v \in V$ *il carattere* $\hat{v} : \hat{V} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ *dato da* $\hat{v}(\chi) = \chi(v)$.

Definizione C.0.1 (Trasformata di Fourier aritmetica)**.** Sia $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$. La sua trasformata di Fourier è $\hat{f} : \hat{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ data da

$$\hat{f}(\chi) = |V|^{-\frac{1}{2}} \sum_{v \in V} f(v)\chi(v).$$

Si osservi che dal Lemma C.0.1 segue che per ogni $\chi, \psi \in \hat{V}$ si ha

$$\hat{\chi}(\psi) = |V|^{-\frac{1}{2}} \sum_{v \in V} \chi(v)\psi(v) = \begin{cases} |V|^{\frac{1}{2}} \text{ se } \chi = -\psi \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} = |V|^{\frac{1}{2}} \delta_{-\chi}(\psi).$$

Identificando V con $\hat{\hat{V}}$, la trasformata di Fourier di una funzione $g : \hat{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ è data da

$$\hat{g}(v) = |V|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\chi \in \hat{V}} g(\chi)\chi(v).$$

Lemma C.0.3 (Formula di Inversione di Fourier)**.** *Per ogni* $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ *e per ogni* $x \in V$ *si ha che*

$$\hat{\hat{f}}(x) = |V|^{-1} \sum_{v \in V} \sum_{\chi \in \hat{V}} f(v)\chi(v)\chi(x) = |V|^{-1} \sum_{v \in V} |V| f(v)\delta_{-x}(v) = f(-x).$$

Dimostrazione. Dalla definizione di trasformata di Fourier segue che

$$\hat{\hat{f}}(x) = |V|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\chi \in \hat{V}} \hat{f}(\chi)\chi(x) = |V|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\chi \in \hat{V}} |V|^{-\frac{1}{2}} \sum_{v \in V} f(v)\chi(v) = |V|^{-1} \sum_{v \in V} \sum_{\chi \in \hat{V}} f(v)\chi(v)\chi(x).$$

D'altra parte usando la seconda uguaglianza del Lemma C.0.1 si ha

$$\hat{\hat{f}}(x) = |V|^{-1} \sum_{v \in V} f(v) \sum_{\chi \in \hat{V}} \chi(v)\chi(x) = |V|^{-1} \sum_{v \in V} f(v)|V|\delta_{-x}(v) = f(-x).$$

$\square$

Si fissi un carattere additivo $\Psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ diverso da quello banale: per ogni $w \in V^*$ sia $\chi_w : V \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ dato da $\chi_w(v) = \Psi(w(v))$ per $v \in V$.
L'applicazione $w \mapsto \chi_w$ è lineare, infatti per come è stata definita la struttura di spazio vettoriale su $\hat{\mathbb{F}}_q$ se $w_1, w_2 \in V^*$ e $v \in V$ valgono le seguenti:

$$\chi_{w_1+w_2}(v) = \Psi(w_1(v) + w_2(v)) = \Psi(w_1(v))\Psi(w_2(v)) = (\chi_{w_1} + \chi_{w_2})(v)$$

$$\chi_{w_1}(\alpha v) = \Psi(w_1(\alpha v)) = \Psi(\alpha w_1(v)) = (\alpha \chi_{w_1})(v).$$

Inoltre se $w \in V^*$ è non banale allora per il Lemma C.0.1 si ha

$$\sum_{v \in V} \chi_w(v) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \sum_{w(v)=x} \Psi(x) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} |Ker\ w| \Psi(x) = |Ker\ w| \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \Psi(x) = 0.$$

e quindi χ_w è non banale, da cui segue che $w \mapsto \chi_w$ è un isomorfismo siccome $|V^*| = |\hat{V}|$.

Bibliografia

[1] Jiuzhao Hua, *Counting Representations of Quivers over Finite Fields*, Journal of Algebra 226 (2000)

[2] Victor G. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, Inventiones Mathematicae (1980)

[3] Victor G. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory II*, Journal of Algebra 78 (1982)

[4] Victor G. Kac, *Root systems, representations of quivers and invariant theory*, Lecture Notes in Mathematics - Invariant Theory (1982)

[5] Tamás Hausel, *Kac's conjecture from Nakajima quiver varieties*, Inventiones Mathematicae (2010)

[6] Hiraku Nakajima, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Mathematical Journal (1998)

[7] Ian G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition*, Oxford University Press (1995)

[8] Rudolf Lidl, *Introduction to finite fields and their applications*, Cambridge University Press (1986)

[9] Tamás Hausel, Emmanuel Letellier, Fernando Rodriguez-Villegas, *Arithmetic harmonic analysis on character and quiver varieties*, Duke Mathematical Journal (2011)

[10] Conjeevaram S. Seshadri, *Geometric reductivity over arbitrary base*, Advances in Mathematics (1977)

[11] Charles W. Curtis, I. Reiner, *Methods of representation theory*, Wiley-Interscience (1981)

[12] James S. Milne , *Class Field Theory*, https://www.jmilne.org/math/ (2020)

[13] Harm Derksen, Jerzy Weyman, *An introduction to quiver representations*, Graduate Studies in Mathematics, 184 (2017)

[14] Alexander Kirillov, *Quiver representations and quiver varieties*, Graduate Studies in Mathematics, 174 (2016)

[15] Peter Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Mathematica 6 (1972)

[16] Tamas Hausel, Emmanuel Letellier, Fernando Rodriguez-Villegas, *Positivity of Kac polynomials and DT-invariants for quivers*, Annals of Mathematics (2012)