

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Triennale in Matematica

TEOREMA DI BAIRE  
E SUE NOTEVOLI APPLICAZIONI

Tesi di Laurea Triennale

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
GIOVANNI CUPINI

Presentata da:  
LORENZO CAVICCHI

I Sessione  
Anno Accademico 2023-2024



# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Risultati preliminari</b>                               | <b>9</b>  |
| 1.1      | Norme equivalenti . . . . .                                | 9         |
| 1.2      | Completezza dello spazio delle funzioni continue . . . . . | 13        |
| 1.3      | Densità dei polinomi . . . . .                             | 14        |
| 1.4      | Applicazioni lineari continue . . . . .                    | 21        |
| 1.5      | Serie in spazi di Banach . . . . .                         | 22        |
| 1.6      | Un sottospazio completo di $C^2([0, 1])$ . . . . .         | 24        |
| 1.7      | Spazio di Hilbert . . . . .                                | 26        |
| <b>2</b> | <b>Teorema di Baire e applicazioni</b>                     | <b>29</b> |
| 2.1      | Teorema di Baire . . . . .                                 | 29        |
| 2.2      | Applicazioni . . . . .                                     | 33        |
| <b>3</b> | <b>Teorema di Banach-Steinhaus e applicazioni</b>          | <b>39</b> |
| 3.1      | Teorema di Banach-Steinhaus . . . . .                      | 39        |
| 3.2      | Applicazioni . . . . .                                     | 41        |
| 3.2.1    | Teorema di Polya . . . . .                                 | 41        |
| 3.2.2    | Interpolazione di Lagrange . . . . .                       | 44        |
| <b>4</b> | <b>Teorema della mappa aperta e applicazioni</b>           | <b>49</b> |
| 4.1      | Teorema della mappa aperta . . . . .                       | 49        |
| 4.2      | Applicazioni . . . . .                                     | 53        |
| <b>5</b> | <b>Teorema del grafico chiuso e applicazione</b>           | <b>55</b> |
| 5.1      | Teorema del grafico chiuso . . . . .                       | 55        |
| 5.2      | Applicazione . . . . .                                     | 56        |



# Notazioni

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ .

$\mathbb{N}^* := \{n \in \mathbb{N} : n > 0\}$ .

$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ .

Siano  $X$  uno spazio topologico,  $A \subseteq X$ . Indichiamo con  $\text{int}(A)$  l'interno o parte interna di  $A$ , con  $\overline{A}$  la chiusura di  $A$ .

Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico,  $x_0 \in X$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ . Allora

$$B(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico,  $A \subseteq X$ .  $\text{diam}(A) := \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$ .

Siano  $X$  uno spazio vettoriale reale o complesso,  $\|\cdot\|$  una norma su  $X$ ,  $x_0 \in X$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ . Allora

$$B_{\|\cdot\|}(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}.$$

Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  spazio normato,  $x_0 \in X$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ .

Allora  $B_X(x_0, r) := B_{\|\cdot\|_X}(x_0, r)$ .

Siano  $X, Y$  due spazi topologici.  $C(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ è continua}\}$ . Nel caso in cui  $Y = \mathbb{R}$ , che pensiamo sempre dotato dell'usuale topologia euclidea, scriviamo semplicemente  $C(X)$  al posto di  $C(X, \mathbb{R})$ .

Siano  $X, Y$  due spazi normati.  $L(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ è lineare e continua}\}$ .

$C^2([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile due volte con derivate continue}\}$ .

$P([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è un polinomio a coefficienti reali}\}$ .

Sia  $n \in \mathbb{N}$ .  $P_n([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è un polinomio a coefficienti reali di grado minore o uguale a } n\}$ .

Per funzione segno intendiamo la seguente applicazione:

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  indichiamo con  $[x]$  la parte intera di  $x$ .

Siano  $A, B$  due insiemi non vuoti,  $f : A \rightarrow B$ . Indichiamo con  $Gr(f)$  il grafico di  $f$ , cioè  $Gr(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$ .

# Introduzione

In questa tesi verrà trattato il Teorema di Baire e verranno approfondite alcune sue applicazioni, soprattutto nell'ambito dell'analisi funzionale lineare e in particolar modo riguardo la teoria degli operatori lineari continui definiti su spazi di Banach.

Il Teorema di Baire afferma che in uno spazio metrico completo, data una famiglia al più numerabile di chiusi aventi ciascuno interno vuoto, allora l'unione di tali chiusi ha interno vuoto.

Verranno enunciati e dimostrati il Teorema di Banach-Steinhaus, il Teorema della mappa aperta, entrambe conseguenze dirette del Teorema di Baire, e, infine, il Teorema del grafico chiuso, conseguenza diretta del Teorema della mappa aperta. Per ciascuno di questi teoremi, verranno presentate varie conseguenze, alcune teoriche, altre riguardanti problemi numerici posti in matematica applicata.

La tesi è così strutturata. Nel primo capitolo verranno presentati vari risultati preliminari, parte dei quali visti nel percorso di studi triennale, con lo scopo primo di mettere in evidenza in che modo i teoremi principali studiati nella tesi entrano in gioco nelle varie applicazioni. Ricordiamo, ad esempio, la caratterizzazione delle applicazioni lineari continue, risultato che verrà applicato più e più volte nelle dimostrazioni di questa tesi.

Nel secondo capitolo verrà enunciato il Teorema di Baire e verranno presentate le prime sue conseguenze. Vedremo ad esempio che non può esistere una norma che renda lo spazio dei polinomi in una o più variabili uno spazio di Banach, inoltre dimostreremo l'esistenza di una funzione continua che non è derivabile in alcun punto. Nel dimostrare queste applicazioni useremo i seguenti risultati del Capitolo 1. Per la prima applicazione useremo che ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio normato è chiuso; per la seconda useremo che  $C([0, 1])$  è uno spazio di Banach rispetto alla norma infinito, che verrà definita nel Teorema 1.2.1.

Nel terzo capitolo entreremo nel vivo dell'analisi funzionale lineare con lo studio del Teorema di Banach-Steinhaus. In questo capitolo vedremo le prime applicazioni numeriche presenti nella tesi, riguardanti integrali e interpolazioni polinomiali. Nel dimostrare queste applicazioni useremo i seguenti risultati del Capitolo 1. Per l'applicazione riguardante gli integrali useremo il risultato di densità dei polinomi  $P([0, 1])$  nello spazio  $C([0, 1])$ . Questo risultato è noto come Teorema dell'appro-

simazione di Weierstrass, conseguenza del Teorema di Korovkin, del Teorema di Bohman e del Teorema di Bernstein. Per la seconda applicazione sarà sufficiente utilizzare la completezza dello spazio  $C([a, b])$ .

Nel quarto capitolo verrà studiato il Teorema della mappa aperta. In questo teorema utilizzeremo un risultato sull'assoluta convergenza delle serie negli spazi di Banach presente nel Capitolo 1.

Studieremo un'applicazione riguardante problemi al bordo della forma:

$$\begin{cases} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dove  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ed  $f \in C([0, 1])$ . In particolare, sotto opportune ipotesi su  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ed  $f$ , vedremo in che modo si perturba la soluzione del problema a seguito di una perturbazione del dato  $f$ . Per questa applicazione saranno necessari i seguenti risultati preliminari del Capitolo 1: la completezza di  $C([0, 1])$  e la completezza dell'insieme delle funzioni di  $C^2([0, 1])$  che si annullano in 0 e in 1. Teniamo a sottolineare che questi spazi non vengono considerati rispetto alla medesima norma, per maggiori dettagli sulla norma del sottospazio di  $C^2([0, 1])$  guardare il Teorema 1.6.2. La seconda applicazione che vedremo riguarderà le norme equivalenti, fornendo una condizione sufficiente per l'equivalenza di due norme. Per questa applicazione useremo la caratterizzazione delle norme equivalenti presente nel Capitolo 1.

Nel quinto e ultimo capitolo studieremo il Teorema del grafico chiuso. Questo risultato permetterà di dimostrare la continuità di una classe di endomorfismi lineari, gli endomorfismi autoaggiunti su uno spazio di Hilbert, a tale scopo verranno utilizzate le proprietà del prodotto interno dimostrate nel Capitolo 1.

Il testo di riferimento principale per questa tesi è [1].



# Capitolo 1

## Risultati preliminari

In questo primo capitolo presenteremo dei risultati preliminari che verranno utilizzati nei capitoli successivi. Molti di questi risultati saranno di natura topologica e metrica, inoltre studieremo alcune proprietà delle norme sugli spazi vettoriali normati e daremo qualche risultato di completezza e densità.

Iniziamo il capitolo con un lemma preliminare, che fornisce una formula in grado di mettere in relazione la chiusura di un sottoinsieme di uno spazio topologico con l'interno del suo complementare rispetto a tale spazio.

**Lemma 1.0.1.** *Siano  $X$  uno spazio topologico,  $A \subseteq X$ . Allora*

$$\overline{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A).$$

*Dimostrazione.* Sia  $F \subseteq X$  un chiuso contenente  $A$ . Dobbiamo dimostrare che valgono le seguenti:

- (1)  $A \subseteq X \setminus \text{int}(X \setminus A) \subseteq F$ ;
- (2)  $X \setminus \text{int}(X \setminus A)$  è chiuso.

Per definizione di interno  $\text{int}(X \setminus A) \subseteq X \setminus A$  quindi  $A \subseteq X \setminus \text{int}(X \setminus A)$ .

$A \subseteq F$  quindi  $X \setminus F \subseteq X \setminus A$  inoltre, essendo  $X \setminus F$  aperto si ha che  $X \setminus F \subseteq \text{int}(X \setminus A)$ . Pertanto,  $X \setminus \text{int}(X \setminus A) \subseteq F$ . La (1) è così dimostrata.

La (2) segue dal fatto che  $\text{int}(X \setminus A)$  è aperto quindi  $X \setminus \text{int}(X \setminus A)$  è chiuso.  $\square$

### 1.1 Norme equivalenti

Daremo la definizione di norme equivalenti su uno spazio vettoriale reale o complesso. Studieremo in seguito quando è possibile dire che due norme su uno spazio vettoriale sono equivalenti, in particolare dimostreremo che se lo spazio vettoriale che stiamo studiando ha dimensione finita allora tutte le norme definibili su tale spazio sono equivalenti.

**Definizione 1.1.1** (Norme equivalenti). Siano  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale dove  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|'$  due norme su  $X$ . Diciamo che  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|'$  sono norme equivalenti se le topologie indotte da tali norme sono coincidenti.

**Teorema 1.1.2.** *Siano  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale dove  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|'$  due norme su  $X$ . Sono equivalenti le seguenti:*

- (1)  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|'$  sono norme equivalenti;
- (2) esistono  $C, C' \in \mathbb{R}^+$  tali che per ogni  $x \in X$   $\|x\| \leq C\|x\|'$  e  $\|x\|' \leq C'\|x\|$ .

*Dimostrazione.* (1)  $\Rightarrow$  (2)

Sia  $B' := \{y \in X : \|y\|' < 1\}$ , quindi  $B'$  è aperto in  $(X, \|\cdot\|')$  e, dal momento che  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|'$  sono equivalenti,  $B'$  è aperto in  $(X, \|\cdot\|)$ . Allora, essendo  $0 \in B'$ , esiste  $r \in \mathbb{R}^+$  tale che  $B_{\|\cdot\|}(0, r) \subseteq B'$ . Sia  $C := \frac{1}{r}$ . Allora  $B_{\|\cdot\|}\left(0, \frac{1}{C}\right) \subseteq B'$ , da cui  $\overline{B_{\|\cdot\|}\left(0, \frac{1}{C}\right)} \subseteq \overline{B'}$ , quindi per ogni  $y \in X$  tale che  $\|y\| \leq \frac{1}{C}$  si ha che  $\|y\|' \leq 1$ . Sia  $x \neq 0$ , allora

$$\left\| \frac{x}{C\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{C\|x\|} = \frac{1}{C} \Rightarrow \left\| \frac{x}{C\|x\|} \right\|' \leq 1 \Rightarrow \frac{\|x\|'}{C\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \|x\|' \leq C\|x\|.$$

In modo del tutto analogo si dimostra l'altra disuguaglianza.

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Esistono  $C, C' \in \mathbb{R}^+$  tali che per ogni  $x \in X$   $\|x\| \leq C\|x\|'$  e  $\|x\|' \leq C'\|x\|$ , mostriamo che ogni aperto in  $(X, \|\cdot\|)$  è aperto in  $(X, \|\cdot\|')$ . Sia  $A$  un aperto in  $(X, \|\cdot\|)$  e sia  $x_0 \in A$ , quindi esiste  $r \in \mathbb{R}^+$  tale che  $B_{\|\cdot\|}(x_0, r) \subseteq A$ . Mostriamo che  $B_{\|\cdot\|'}\left(x_0, \frac{r}{C}\right) \subseteq B_{\|\cdot\|}(x_0, r)$ . Sia  $y \in B_{\|\cdot\|'}\left(x_0, \frac{r}{C}\right)$ , allora si ha che

$$\|y - x_0\|' < \frac{r}{C} \Rightarrow \|y - x_0\| \leq C\|y - x_0\|' < C \cdot \frac{r}{C} = r.$$

Abbiamo così dimostrato che  $B_{\|\cdot\|'}\left(x_0, \frac{r}{C}\right) \subseteq A$ , cioè  $A$  è aperto in  $(X, \|\cdot\|')$ .

Sfruttando l'altra disuguaglianza si dimostra la parte rimanente della tesi in modo del tutto analogo.  $\square$

**Teorema 1.1.3.** *Sia  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale dove  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Allora valgono le seguenti:*

- (1) se  $X$  è di dimensione finita, allora date due norme su  $X$  esse sono equivalenti;
- (2) se  $X$  è dotato di una norma, allora ogni suo sottospazio di dimensione finita è chiuso.

*Dimostrazione.* (1) Sia  $n$  la dimensione di  $X$ . Se  $n = 0$  non c'è niente da dimostrare in quanto ogni norma definibile su  $X$  si riduce all'applicazione nulla, applicando quindi il Teorema 1.1.2 si ha la tesi. Supponiamo allora  $n \geq 1$  e sia  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $X$ . Sia  $\|\cdot\|_1$  la norma su  $X$  definita come segue:

$$\forall x \in X \quad \|x\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Se dimostro che ogni norma su  $X$  è equivalente a  $\|\cdot\|_1$  ho la tesi. Siano  $x \in X$  e  $\|\cdot\|$  una norma su  $X$ , allora

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \Rightarrow \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|v_i\|.$$

Sia  $C := \max\{\|v_1\|, \dots, \|v_n\|\}$ , allora

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n C|x_i| = C\|x\|_1.$$

Sia  $f : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \|x\|$ , mostriamo che  $f$  è continua. Fissiamo  $x_0 \in X$ , allora per ogni  $x \in X$  vale

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| = \left| \|x\| - \|x_0\| \right| \leq \|x - x_0\| \leq C\|x - x_0\|_1.$$

Dunque per il Teorema dei carabinieri  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  per ogni  $x_0 \in X$ . Abbiamo così dimostrato che  $f$  è continua in ogni punto del suo dominio, cioè  $f$  è continua.

Sia  $\phi : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi(x) = \|x\|_1$ . Analogamente a quanto fatto per dimostrare la continuità di  $f$  si dimostra che  $\phi$  è continua. Essendo  $\phi$  continua e  $\{1\}$  chiuso in  $\mathbb{R}$  si ha che  $K := \phi^{-1}(1)$  è chiuso in  $(X, \|\cdot\|_1)$ .  $K$  è chiuso e limitato in  $(X, \|\cdot\|_1)$ , quindi per il Teorema di Heine-Borel applicato allo spazio  $(X, \|\cdot\|_1)$   $K$  è compatto.  $f$  è continua, quindi  $f(K)$  è compatto in  $\mathbb{R}$ , perciò  $f(K)$  è chiuso e limitato, in particolare  $\inf_{y \in K} f(y) \in [0, +\infty[$  ed esiste  $y_0 \in Y$  tale che  $f(y_0) = \inf_{y \in K} f(y)$  (Teorema di Weierstrass). Se fosse  $\inf_{y \in K} f(y) = 0$ , avremmo

$$f(y_0) = 0 \Rightarrow \|y_0\| = 0 \Rightarrow y_0 = 0.$$

Tutto ciò è assurdo perché  $\|0\|_1 = 0 \neq 1$ . Pertanto,  $\inf_{y \in K} f(y) > 0$ . Sia  $C'$  il suo inverso. Allora per ogni  $y \in K$  si ha che  $f(y) \geq \frac{1}{C'}$ , cioè  $\|y\| \geq \frac{1}{C'}$ . Siano  $x \neq 0$  e  $y = \frac{x}{\|x\|_1}$ , allora

$$\|y\|_1 = 1 \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq \frac{1}{C'} \Rightarrow \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \geq \frac{1}{C'} \Rightarrow \|x\|_1 \leq C'\|x\|.$$

Per il Teorema 1.1.2 segue la tesi.

(2) Siano ora  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato,  $Y \subseteq X$  un suo sottospazio di dimensione finita. Se  $Y = \{0\}$  non c'è niente da dimostrare, supponiamo quindi che esistano  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $v_1, \dots, v_n \in Y$  linearmente indipendenti tali che  $Y = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ . Sia  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una successione in  $Y$  convergente a  $y \in X$ , dimostriamo che  $y \in Y$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$   $y_k \in Y$  quindi, se indichiamo con  $\mathbb{K}$  il campo su cui è definito lo spazio  $X$ , esistono  $\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)} \in \mathbb{K}$  tali che  $y_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(k)} v_j$ .

Per quanto dimostrato precedentemente esiste  $C' \in \mathbb{R}^+$  tale che per ogni  $k, m \in \mathbb{N}$

$$\|y_k - y_m\|_1 \leq C' \|y_k - y_m\| \Rightarrow \sum_{j=1}^n |\lambda_j^{(k)} - \lambda_j^{(m)}| \leq C' \|y_k - y_m\|.$$

Pertanto, fissato  $i \in \{1, \dots, n\}$ , si ha che

$$|\lambda_i^{(k)} - \lambda_i^{(m)}| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j^{(k)} - \lambda_j^{(m)}| \leq C' \|y_k - y_m\|.$$

La successione  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione convergente, quindi di Cauchy, pertanto,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall k, m \in \mathbb{N}, k, m > k_\epsilon \Rightarrow \|y_k - y_m\| < \frac{\epsilon}{C'}.$$

Allora anche la successione  $(\lambda_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy, infatti

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall k, m \in \mathbb{N}, k, m > k_\epsilon \Rightarrow |\lambda_i^{(k)} - \lambda_i^{(m)}| < C' \frac{\epsilon}{C'} = \epsilon.$$

$(\lambda_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $\mathbb{K}$  che è completo, quindi esiste  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  tale che  $\lambda_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^{(k)}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Se dimostro che  $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  ho la tesi. Per quanto dimostrato precedentemente sappiamo che esiste  $C \in \mathbb{R}^+$  tale che

$$0 \leq \left\| y_k - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right\| \leq C \left\| y_k - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right\|_1 = C \sum_{i=1}^n |\lambda_i^{(k)} - \lambda_i| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Poiché per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$   $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^{(k)} = \lambda_i$ , per il Teorema dei carabinieri

$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  e, per l'unicità del limite,  $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in Y$ . Abbiamo così dimostrato che  $Y$  è chiuso.  $\square$

## 1.2 Completezza dello spazio delle funzioni continue su un compatto

In questa sezione studieremo lo spazio delle funzioni continue da uno spazio topologico compatto a valori in uno spazio di Banach, in particolare definiremo una norma rispetto alla quale tale spazio è esso stesso uno spazio di Banach.

**Teorema 1.2.1.** *Siano  $K$  uno spazio topologico compatto,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  uno spazio di Banach e per ogni  $f \in C(K, Y)$  sia  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} \|f(x)\|_Y$ . Allora  $(C(K, Y), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach.*

*Dimostrazione.* Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $C(K, Y)$ , allora

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_\epsilon \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon.$$

Poiché, fissato  $x \in K$ ,  $\|f_n(x) - f_m(x)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ , abbiamo che

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall x \in K, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_\epsilon \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\|_Y < \epsilon.$$

Pertanto, per ogni  $x \in K$ , la successione  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  che è uno spazio di Banach, quindi è ben definita la seguente applicazione:

$$f : K \rightarrow Y, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Abbiamo precedentemente mostrato che

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall x \in K, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_\epsilon \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\|_Y < \epsilon.$$

Allora se  $n, m > n_\epsilon$ , per ogni  $x \in K$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_Y \leq \|f_n(x) - f_m(x)\|_Y + \|f_m(x) - f(x)\|_Y < \epsilon + \|f_m(x) - f(x)\|_Y.$$

Allora, mandando  $m$  a  $+\infty$ ,

$$\|f_n(x) - f(x)\|_Y \leq \epsilon \forall x \in K, \forall n > n_\epsilon.$$

In particolare data l'arbitrarietà di  $x$

$$\sup_{x \in K} \|f_n(x) - f(x)\|_Y \leq \epsilon \forall n > n_\epsilon.$$

Abbiamo dimostrato quanto segue:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > n_\epsilon \Rightarrow \|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon$$

cioè la successione  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$ , in particolare

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : \|f_{n_0} - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Rimane da mostrare che  $f$  è continua, prendiamo allora  $x_0 \in K$ . D'altra parte  $f_{n_0}$  è continua in  $x_0$ , pertanto,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists V_{x_0} \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in V_{x_0} \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\|_Y < \frac{\epsilon}{3}.$$

Allora per ogni  $x \in V_{x_0}$  si ha che

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\|_Y &= \|f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\|_Y \\ &\leq \|f(x) - f_{n_0}(x)\|_Y + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\|_Y + \|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\|_Y \\ &\leq 2\|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\|_Y < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{3\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato quanto segue:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists V_{x_0} \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in V_{x_0} \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \epsilon.$$

Di conseguenza  $f$  è continua in  $x_0$  per ogni  $x_0 \in K$ , cioè  $f$  è continua.  $\square$

*Osservazione 1.2.2.* Osserviamo che la compattezza dello spazio topologico  $K$  ci assicura che  $\|\cdot\|_\infty$  è una norma su  $C(K, Y)$ .

Per le ben note proprietà delle norme e dell'estremo superiore è sufficiente dimostrare che per ogni  $f \in C(K, Y)$  è  $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ . Sia quindi  $f \in C(K, Y)$ .  $f$  è continua e  $K$  è compatto, quindi  $f(K)$  è compatto in  $Y$  che è uno spazio normato, da cui segue che  $f(K)$  è chiuso e limitato. In particolare  $f(K)$  è limitato, cioè  $\sup_{x \in K} \|f(x)\|_Y \in \mathbb{R}$ .

**Corollario 1.2.3.** *Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a < b$ . Allora  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach.*

### 1.3 Densità dei polinomi nello spazio delle funzioni continue

Consideriamo lo spazio normato  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ . Lo scopo che ci prefiggiamo in questa sezione è quello di mostrare che l'insieme  $P([0, 1])$  è denso in questo spazio, tale risultato è noto come Teorema dell'approssimazione di Weierstrass. Per dimostrare questo teorema, tuttavia, occorrono alcuni risultati preliminari quali il Teorema di Korovkin, il Teorema di Bohman e il Teorema di Bernstein.

**Lemma 1.3.1.** *(Continuità della distanza) Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, allora  $d$  è una funzione continua.*

*Dimostrazione.* Fissiamo  $(x_0, y_0) \in X \times X$  e dimostriamo che  $d$  è continua in  $(x_0, y_0)$ , dall'arbitrarietà di  $(x_0, y_0)$  seguirà la tesi.

Osserviamo preliminarmente che vale la seguente disuguaglianza:

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0) \quad \forall (x, y) \in X \times X.$$

Fissiamo  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  e sia  $V_{(x_0, y_0)} = B\left(x_0, \frac{\epsilon}{2}\right) \times B\left(y_0, \frac{\epsilon}{2}\right)$ . Allora  $V_{(x_0, y_0)}$  è un intorno di  $(x_0, y_0)$  e vale:

$$(x, y) \in V_{(x_0, y_0)} \Rightarrow |d(x, y) - d(x_0, y_0)| < \epsilon$$

cioè  $d$  è continua in  $(x_0, y_0)$ . □

**Lemma 1.3.2.** *Siano  $(K, d)$  uno spazio metrico compatto,  $A : C(K) \rightarrow C(K)$  un operatore lineare tale che  $A(f) \geq 0$  per ogni  $f \geq 0$ . Allora date  $f, g \in C(K)$ , se  $f \leq g$  si ha che  $A(f) \leq A(g)$*

*Dimostrazione.* Siano  $f, g \in C(K)$  tali che  $f \leq g$ . Allora

$$g - f \geq 0 \Rightarrow A(g - f) \geq 0 \Rightarrow A(g) - A(f) \geq 0 \Rightarrow A(f) \leq A(g).$$

□

**Teorema 1.3.3** (Teorema di Korovkin). *Siano  $(K, d)$  uno spazio metrico compatto,  $\Phi \in C([0, +\infty[)$  tale che  $\Phi(t) > 0$  per ogni  $t > 0$  e per ogni  $x \in K$  sia  $\psi_x : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi_x(y) = \Phi(d(x, y))$ . Sia  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  una famiglia di operatori lineari da  $C(K)$  in  $C(K)$  con le seguenti proprietà:*

- (1) per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , se  $f \geq 0$  allora  $A_n(f) \geq 0$ ;
- (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_0 - A_n(f_0)\|_\infty = 0$  dove  $f_0 : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = 1$ ;
- (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in K} |A_n(\psi_x)(x)| \right) = 0$ .

Allora per ogni  $f \in C(K)$  è  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - A_n(f)\|_\infty = 0$ .

*Dimostrazione.* Siano  $f \in C(K)$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ . Mostriamo che esiste  $C \in \mathbb{R}^+$  tale che

$$\forall x, y \in K \quad |f(x) - f(y)| \leq \tilde{\epsilon} + 2C \|f\|_\infty \psi_x(y) \quad \text{dove } \tilde{\epsilon} := \frac{\epsilon}{2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n(f_0)\|_\infty}.$$

Osserviamo che  $\tilde{\epsilon}$  è ben definito. La successione  $(A_n(f_0))_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente, quindi limitata, cioè  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n(f_0)\|_\infty < +\infty$ . D'altra parte valgono le seguenti

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n(f_0)\|_\infty = 0 \Rightarrow 0 \leq \|A_n(f_0)\|_\infty \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A_n(f_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'ipotesi (2) verrebbe così a mancare in quanto  $\|f_0\|_\infty = 1 \neq 0$ . Abbiamo così dimostrato che  $\tilde{\epsilon}$  è ben definito.

$f$  è una funzione continua su un compatto, quindi per il Teorema di Heine-Cantor  $f$  è uniformemente continua, cioè

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x, y \in K, d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \tilde{\epsilon}.$$

Sia  $H := \{(x, y) \in K \times K : d(x, y) \geq \delta\}$ , è evidente che  $H = d^{-1}([\delta, +\infty[)$ . Essendo  $[\delta, +\infty[$  chiuso in  $\mathbb{R}$  e  $d$  continua per il Lemma 1.3.1, si ha che  $H$  è chiuso in  $K \times K$  che è compatto perché prodotto di compatti.  $H$  è chiuso in un compatto, quindi è compatto. Consideriamo la funzione  $(x, y) \mapsto \Phi(d(x, y))$ , si tratta di una funzione continua perché composizione di funzioni continue.  $H$  è compatto, pertanto  $\inf_{(x, y) \in H} \Phi(d(x, y)) \in \mathbb{R}$  ed esiste  $(x_0, y_0) \in H$  tale che  $\Phi(d(x_0, y_0)) = \inf_{(x, y) \in H} \Phi(d(x, y))$ . Sia  $(x, y) \in H$ . Allora

$$d(x, y) \geq \delta \Rightarrow d(x, y) > 0 \Rightarrow \Phi(d(x, y)) > 0 \Rightarrow \inf_{(x, y) \in H} \Phi(d(x, y)) \in [0, +\infty[.$$

Supponiamo per assurdo che  $\inf_{(x, y) \in H} \Phi(d(x, y)) = 0$ , allora  $\Phi(d(x_0, y_0)) = 0$ . Ciò è assurdo perché  $(x_0, y_0) \in H$ , quindi  $d(x_0, y_0) > 0$  e di conseguenza  $\Phi(d(x_0, y_0)) > 0$ . Pertanto,  $\inf_{(x, y) \in H} \Phi(d(x, y)) \in \mathbb{R}^+$ . Sia  $C$  il suo inverso. Allora

$$\forall (x, y) \in K \times K, d(x, y) \geq \delta \Rightarrow \Phi(d(x, y)) \geq \frac{1}{C} \Rightarrow \psi_x(y) \geq \frac{1}{C}.$$

Pertanto,

$$\forall (x, y) \in K \times K, d(x, y) \geq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2C\|f\|_\infty \psi_x(y).$$

Abbiamo quindi le seguenti:

- (a)  $\sup_{d(x, y) < \delta} |f(x) - f(y)| \leq \tilde{\epsilon}$ ;
- (b)  $\sup_{d(x, y) \geq \delta} |f(x) - f(y)| \leq 2C\|f\|_\infty \psi_x(y)$ .

Combinando (a) e (b) otteniamo che

$$\forall x, y \in K \quad |f(x) - f(y)| \leq \tilde{\epsilon} + 2C\|f\|_\infty \psi_x(y).$$

Osserviamo che la precedente disuguaglianza può essere riscritta come

$$\forall x \in K \quad -\tilde{\epsilon}f_0 - 2C\|f\|_\infty \psi_x \leq f - f(x)f_0 \leq \tilde{\epsilon}f_0 + 2C\|f\|_\infty \psi_x.$$

Pertanto, per come sono definiti gli operatori  $A_n$ , otteniamo per il Lemma 1.3.2 che per ogni  $x \in K$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$-\tilde{\epsilon}A_n(f_0) - 2C\|f\|_\infty A_n(\psi_x) \leq A_n(f) - f(x)A_n(f_0) \leq \tilde{\epsilon}A_n(f_0) + 2C\|f\|_\infty A_n(\psi_x).$$



Tali disuguaglianze possono essere riscritte come segue: per ogni  $x, y \in K$

$$\begin{aligned} -\tilde{\epsilon}A_n(f_0)(y) - 2C\|f\|_\infty A_n(\psi_x)(y) &\leq A_n(f)(y) - f(x)A_n(f_0)(y) \\ &\leq \tilde{\epsilon}A_n(f_0)(y) + 2C\|f\|_\infty A_n(\psi_x)(y) \end{aligned}$$

da cui, ponendo  $y = x$ ,

$$|A_n(f)(x) - f(x)A_n(f_0)(x)| \leq \tilde{\epsilon}A_n(f_0)(x) + 2C\|f\|_\infty A_n(\psi_x)(x) \quad \forall x \in K. \quad (1.1)$$

Osserviamo che per ogni  $x \in K$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$  valgono le seguenti:

$$\tilde{\epsilon}A_n(f_0)(x) \leq \tilde{\epsilon} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n(f_0)\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.2)$$

Da (1.1) e (1.2) otteniamo quanto segue

$$\begin{aligned} |A_n(f)(x) - f(x)| &= |A_n(f)(x) - f(x)A_n(f_0)(x) + f(x)A_n(f_0)(x) - f(x)| \\ &\leq |A_n(f)(x) - f(x)A_n(f_0)(x)| + |f(x)| \cdot |A_n(f_0)(x) - f_0(x)| \\ &\leq \tilde{\epsilon}A_n(f_0)(x) + 2C\|f\|_\infty A_n(\psi_x)(x) + \|f\|_\infty \cdot \|A_n(f_0) - f_0\|_\infty \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2C\|f\|_\infty \sup_{x \in K} |A_n(\psi_x)(x)| + \|f\|_\infty \cdot \|A_n(f_0) - f_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di  $x$  si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|A_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} + 2C\|f\|_\infty \sup_{x \in K} |A_n(\psi_x(x))| + \|f\|_\infty \cdot \|A_n(f_0) - f_0\|_\infty.$$

Per (2) e (3) si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2C\|f\|_\infty \sup_{x \in K} |A_n(\psi_x(x))| + \|f\|_\infty \cdot \|A_n(f_0) - f_0\|_\infty \right) = 0,$$

pertanto,

$$\begin{aligned} \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\epsilon \\ \Rightarrow 2C\|f\|_\infty \sup_{x \in K} |A_n(\psi_x(x))| + \|f\|_\infty \cdot \|A_n(f_0) - f_0\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

da cui

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\epsilon \Rightarrow \|A_n(f) - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

cioè  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n(f) - f\|_\infty = 0$  per ogni  $f \in C(K)$ . □

**Teorema 1.3.4** (Teorema di Bohman). *Sia  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  una famiglia di operatori lineari da  $C([0, 1])$  in  $C([0, 1])$  con le seguenti proprietà:*

(1) per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , se  $f \geq 0$  allora  $A_n(f) \geq 0$ ;

(2) per ogni  $p \in \{0, 1, 2\}$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_p - A_n(f_p)\|_\infty = 0$  dove per ogni  $p \in \{0, 1, 2\}$   
 $f_p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_p(x) = x^p$ .

Allora per ogni  $f \in C([0, 1])$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - A_n(f)\|_\infty = 0$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo che ci troviamo nelle ipotesi del Teorema 1.3.3.

Sia  $\Phi : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(t) = t^2$ .  $\Phi \in C([0, +\infty[)$  e  $\Phi(t) > 0$  per ogni  $t > 0$ .

Per ogni  $x \in [0, 1]$  sia  $\psi_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi_x(y) = \Phi(d(x, y))$ , allora per ogni  $x, y$

$$\psi_x(y) = |x - y|^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 f_0(y) - 2x f_1(y) + f_2(y) \Rightarrow \psi_x = x^2 f_0 - 2x f_1 + f_2.$$

Mostriamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in [0, 1]} |A_n(\psi_x)(x)| \right) = 0$  per poter applicare il Teorema

1.3.3. Si ha che

$$A_n(\psi_x) = x^2 A_n(f_0) - 2x A_n(f_1) + A_n(f_2) \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo inoltre che per ogni  $x \in [0, 1]$   $\psi_x(x) = 0$ , infatti

$$\psi_x(x) = x^2 f_0(x) - 2x f_1(x) + f_2(x) = x^2 - 2x^2 + x^2 = 0.$$

Allora per ogni  $x \in [0, 1]$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_n(\psi_x)(x) &= x^2 A_n(f_0)(x) - 2x A_n(f_1)(x) + A_n(f_2)(x) - (x^2 f_0(x) - 2x f_1(x) + f_2(x)) \\ &= x^2 (A_n(f_0)(x) - f_0(x)) - 2x (A_n(f_1)(x) - f_1(x)) + (A_n(f_2)(x) - f_2(x)) \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} |A_n(\psi_x)(x)| &\leq x^2 |A_n(f_0)(x) - f_0(x)| + 2x |A_n(f_1)(x) - f_1(x)| + |A_n(f_2)(x) - f_2(x)| \\ &\leq \|A_n(f_0) - f_0\|_\infty + 2\|A_n(f_1) - f_1\|_\infty + \|A_n(f_2) - f_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di  $x$  segue che

$$\sup_{x \in [0, 1]} |A_n(\psi_x)(x)| \leq \|A_n(f_0) - f_0\|_\infty + 2\|A_n(f_1) - f_1\|_\infty + \|A_n(f_2) - f_2\|_\infty.$$

Dall'ipotesi (2) e dal Teorema dei carabinieri deduciamo che

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in [0, 1]} |A_n(\psi_x)(x)| \right) = 0$ . Siamo nelle ipotesi del Teorema 1.3.3, perciò per ogni  $f \in C([0, 1])$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n(f) - f\|_\infty = 0$ .  $\square$

**Definizione 1.3.5** (Operatori di Bernstein). Per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$  sia

$B_n : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  l'operatore che associa ad ogni  $f \in C([0, 1])$  la funzione  $B_n(f) \in C([0, 1])$  così definita:

$$B_n(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Un operatore di Bernstein è un qualsiasi operatore appartenente alla famiglia  $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ .

*Osservazione 1.3.6.* Per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$   $B_n(C([0, 1])) \subseteq P([0, 1])$ .

Applichiamo il Teorema di Bohman agli operatori di Bernstein per dimostrare che  $P([0, 1])$  è denso in  $C([0, 1])$ .

**Lemma 1.3.7.** Per ogni  $p \in \{0, 1, 2\}$  siano  $f_p$  le funzioni definite nel Teorema 1.3.4. Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$ , per ogni  $x \in [0, 1]$  valgono le seguenti:

$$(1) B_n(f_0)(x) = 1;$$

$$(2) B_n(f_1)(x) = x;$$

$$(3) B_n(f_2)(x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}.$$

*Dimostrazione.* Ai fini della dimostrazione ricordiamo la ben nota formula del binomio di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Da (1.3), ponendo  $a = x$  e  $b = (1 - x)$ , si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1] B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = 1^n = 1. \quad (1.4)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1] B_n(f_1)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &\stackrel{(j=k-1)}{=} x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} x^j (1-x)^{n-j-1} = x \cdot 1 = x. \end{aligned}$$

Consideriamo ora  $f_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Se } n = 1, \forall x \in [0, 1] B_n(f_2)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^1 \frac{0!}{(k-1)!(1-k)!} k x^k (1-x)^{1-k} = x. \end{aligned}$$

Supponiamo quindi  $n \geq 2$ , allora per ogni  $x \in [0, 1]$  si ha che

$$\begin{aligned}
B_n(f_2)(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{k}{n} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&\stackrel{(j=k-1)}{=} x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \binom{j+1}{n} x^j (1-x)^{n-1-j} \\
&= x \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \frac{j}{n} x^j (1-x)^{n-1-j} + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} x^j (1-x)^{n-1-j} \right).
\end{aligned}$$

Sfruttando (1.4) si ha:

$$\begin{aligned}
B_n(f_2)(x) &= \frac{x}{n} + x \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \frac{j}{n} x^j (1-x)^{n-1-j} \\
&= \frac{x}{n} + x^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-j)!} \frac{1}{n} x^{j-1} (1-x)^{n-1-j} \\
&\stackrel{(j=k-1)}{=} \frac{x}{n} + x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{k!(n-2-k)!} \frac{1}{n} x^k (1-x)^{n-2-k} \\
&= \frac{x}{n} + x^2 \cdot \frac{n-1}{n} \left( \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^k (1-x)^{n-2-k} \right).
\end{aligned}$$

Sfruttando (1.3), ponendo  $a = x$  e  $b = (1-x)$ , si ha:

$$B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + x^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot 1 = x^2 + \frac{x-x^2}{n}.$$

□

**Corollario 1.3.8** (Teorema di Bernstein). *Per ogni  $f \in C([0, 1])$*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo che valgono le ipotesi del Teorema 1.3.4.

Per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$  valgono le seguenti:

- (1)  $B_n$  è lineare;
- (2) se  $f \geq 0$  allora  $B_n(f) \geq 0$ .

Per ogni  $p \in \{0, 1, 2\}$  siano  $f_p$  le funzioni definite nel Teorema 1.3.4. Vale il Lemma 1.3.7.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1] B_n(f_0)(x) - f_0(x) = 0, \text{ allora } \|B_n(f_0) - f_0\|_\infty = 0$$

$$\text{da cui } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f_0) - f_0\|_\infty = 0.$$

Similmente

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1] B_n(f_1)(x) - f_1(x) = 0, \text{ allora } \|B_n(f_1) - f_1\|_\infty = 0$$

$$\text{da cui } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f_1) - f_1\|_\infty = 0.$$

Infine osserviamo che

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1] B_n(f_2)(x) - f_2(x) = \frac{x - x^2}{n}.$$

Allora

$$0 \leq |B_n(f_2)(x) - f_2(x)| \leq \frac{|x - x^2|}{n} \leq \frac{x + x^2}{n} \leq \frac{2}{n}, \text{ da cui } 0 \leq \|B_n(f_2) - f_2\|_\infty \leq \frac{2}{n}.$$

Per il Teorema dei carabinieri  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f_2) - f_2\|_\infty = 0$ , allora per il Teorema 1.3.4 per ogni  $f \in C([0, 1])$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0$ .  $\square$

Dimostriamo che ogni funzione di  $C([0, 1])$  è esprimibile come limite uniforme di una successione in  $P([0, 1])$ .

**Teorema 1.3.9** (Teorema dell'approssimazione di Weierstrass).  $P([0, 1])$  è denso in  $C([0, 1])$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f \in C([0, 1])$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $f_n = B_{n+1}(f) \in P([0, 1])$ . Per il Corollario 1.3.8  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ , da cui la tesi.  $\square$

## 1.4 Applicazioni lineari continue

Siano  $X, Y$  due spazi normati e  $A : X \rightarrow Y$  un'applicazione lineare. Ci chiediamo sotto quali ipotesi  $A$  sia continua. Daremo in questa sezione un paio di condizioni che sono allo stesso tempo necessarie e sufficienti, in particolare dimostreremo che è sufficiente verificare la continuità di  $A$  in un punto opportuno del suo dominio per concludere che  $A$  è continua in un qualsiasi altro suo punto.

**Teorema 1.4.1** (Teorema di caratterizzazione delle applicazioni lineari continue). Siano  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi normati,  $A : X \rightarrow Y$  un'applicazione lineare. Sono equivalenti le seguenti:

- (1)  $A$  è continua;  
 (2)  $A$  è continua in 0;  
 (3)  $A$  è un'applicazione lineare limitata, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in X \quad \|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

*Dimostrazione.* (1)  $\Rightarrow$  (2)

$A$  è continua, cioè  $A$  è continua in ogni punto del suo dominio, in particolare  $A$  è continua in 0.

(2)  $\Rightarrow$  (3)

$A$  è continua in 0, pertanto,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_\epsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in X, \quad \|x\|_X < \delta_\epsilon \Rightarrow \|A(x)\|_Y < \epsilon.$$

Fissiamo  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  e sia  $x \in X$ . Per ogni  $t \in \mathbb{R}^+$  si ha che  $\left\| \frac{\delta_\epsilon}{t + \|x\|_X} x \right\|_X < \delta_\epsilon$  in

quanto  $\frac{\|x\|_X}{t + \|x\|_X} < 1$ , allora

$$\begin{aligned} \left\| A \left( \frac{\delta_\epsilon}{t + \|x\|_X} x \right) \right\|_Y < \epsilon &\Rightarrow \left\| \frac{\delta_\epsilon}{t + \|x\|_X} A(x) \right\|_Y < \epsilon \Rightarrow \frac{\delta_\epsilon}{t + \|x\|_X} \|A(x)\|_Y < \epsilon \\ &\Rightarrow \|A(x)\|_Y < \frac{\epsilon}{\delta_\epsilon} (t + \|x\|_X) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \|A(x)\|_Y \leq \frac{\epsilon}{\delta_\epsilon} \|x\|_X. \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che  $A$  è un'applicazione lineare limitata.

(3)  $\Rightarrow$  (1)

Esiste  $M \in \mathbb{R}^+$  tale che per ogni  $x \in X$   $\|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ . Fissiamo  $x_0 \in X$ , allora per ogni  $x \in X$  si ha che

$$0 \leq \|A(x) - A(x_0)\|_Y \leq M\|x - x_0\|_X.$$

Per il Teorema dei carabinieri  $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = A(x_0)$  per ogni  $x_0 \in X$ , dunque  $A$  è continua in ogni punto del suo dominio, cioè  $A$  è continua.  $\square$

## 1.5 Serie in spazi di Banach

Siano  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach,  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  una serie in  $X$ . Il prossimo risultato fornisce una condizione sufficiente per la convergenza della serie, in particolare mostreremo che se la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  converge assolutamente, cioè  $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$  converge

in  $\mathbb{R}$ , allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  converge in  $X$ .

**Lemma 1.5.1.** *Siano  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach,  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  una serie in  $X$  tale che  $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$  sia convergente. Allora anche  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  è convergente e vale la seguente:*

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|.$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $\sigma_n := \sum_{k=0}^n \|x_k\|$ .  $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$  è convergente, cioè la successione  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente quindi di Cauchy, pertanto,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_\epsilon \Rightarrow |\sigma_n - \sigma_m| < \epsilon.$$

Osserviamo che per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$  tali che  $n > m$  si ha

$$|\sigma_n - \sigma_m| = \left| \sum_{k=0}^n \|x_k\| - \sum_{k=0}^m \|x_k\| \right| = \sum_{k=m+1}^n \|x_k\|.$$

Pertanto,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n > m > n_\epsilon \Rightarrow \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \epsilon.$$

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $s_n := \sum_{k=0}^n x_k$ . Allora per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$  tali che  $n > m$  si ha che

$$s_n - s_m = \sum_{k=0}^n x_k - \sum_{k=0}^m x_k = \sum_{k=m+1}^n x_k.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} & \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n > m > n_\epsilon \\ \Rightarrow \|s_n - s_m\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che la successione  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $X$  che è uno spazio di Banach, quindi è convergente e in particolare la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  è convergente. Infine, per la disuguaglianza triangolare,

$$\forall n \in \mathbb{N} \left\| \sum_{k=0}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|x_k\|$$

da cui per la continuità della norma, passando al limite

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|.$$

□

## 1.6 Un sottospazio completo di $C^2([0, 1])$

Sia  $X := \{u \in C^2([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ . Mostriamo in questa sezione che esiste una norma su  $X$  rispetto alla quale  $X$  è uno spazio di Banach.

Premettiamo prima il seguente lemma.

**Lemma 1.6.1.** *Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a < b$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni da  $[a, b]$  in  $\mathbb{R}$ . Supponiamo che valgano le seguenti:*

- (1) *esiste  $x_0 \in [a, b]$  tale che  $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  sia convergente;*
- (2)  *$f_n$  è derivabile per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ;*
- (3)  *$(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente.*

Allora anche  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a una funzione  $f$ , inoltre  $f$  è derivabile e per ogni  $x \in [a, b]$  vale la seguente:

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x).$$

*Dimostrazione.* Si veda [2].

□

**Teorema 1.6.2.** *Consideriamo lo spazio normato  $(C^2([0, 1]), \|\cdot\|_{C^2([0,1])})$  dove per ogni  $f \in C^2([0, 1])$   $\|f\|_{C^2([0,1])} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$  e sia  $X := \{u \in C^2([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ . Allora  $(X, \|\cdot\|_X)$  è uno spazio di Banach dove  $\|\cdot\|_X$  è la restrizione della norma  $\|\cdot\|_{C^2([0,1])}$  su  $X$ .*

*Dimostrazione.* Mostriamo in primis che  $(C^2([0, 1]), \|\cdot\|_{C^2([0,1])})$  è uno spazio di Banach. Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $C^2([0, 1])$ , allora

$$\begin{aligned} \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_\epsilon &\Rightarrow \|f_n - f_m\|_{C^2([0,1])} < \epsilon \\ &\Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty + \|f'_n - f'_m\|_\infty + \|f''_n - f''_m\|_\infty < \epsilon. \end{aligned}$$

Pertanto, fissato  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  se  $n > n_\epsilon$  allora valgono le seguenti:

- (a)  $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon;$
- (b)  $\|f'_n - f'_m\|_\infty < \epsilon;$
- (c)  $\|f''_n - f''_m\|_\infty < \epsilon.$



Dunque le successioni  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(f''_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sono tre successioni di Cauchy in  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  che per il Corollario 1.2.3 è uno spazio di Banach, quindi esistono  $f, g, h \in C([0, 1])$  tali che:

$$(a') \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0;$$

$$(b') \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f'_n - g\|_\infty = 0;$$

$$(c') \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f''_n - h\|_\infty = 0.$$

Valgono le ipotesi del Lemma 1.6.1:

(a'')  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$ , quindi la successione  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente per ogni  $x \in [0, 1]$ ;

(b'')  $f_n$  è derivabile per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ;

(c'')  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $g$ .

Quindi  $f$  è derivabile ed  $f' = g$ . Essendo  $g$  continua, allora  $f'$  è continua. Analogamente si dimostra che  $f'$  è derivabile e  $f'' = h$ .  $h$  è continua, quindi  $f''$  è continua, ossia  $f \in C^2([0, 1])$ . Rimane da dimostrare che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{C^2([0, 1])} = 0$ . Abbiamo appena dimostrato che le successioni  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(f''_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergono uniformemente a  $f, f', f''$  rispettivamente. Pertanto, fissato  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  esiste  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tale che se  $n > n_\epsilon$  allora valgono le seguenti:

$$(a''') \quad \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3};$$

$$(b''') \quad \|f'_n - f'\|_\infty < \frac{\epsilon}{3};$$

$$(c''') \quad \|f''_n - f''\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dunque se  $n > n_\epsilon$

$$\|f_n - f\|_{C^2([0, 1])} = \|f_n - f\|_\infty + \|f'_n - f'\|_\infty + \|f''_n - f''\|_\infty < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

cioè  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{C^2([0, 1])} = 0$ . Abbiamo così dimostrato che  $(C^2([0, 1]), \|\cdot\|_{C^2([0, 1])})$  è uno spazio di Banach. Dimostriamo che  $X$  è chiuso in  $C^2([0, 1])$ . Siano  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione in  $X$  ed  $f \in C^2([0, 1])$  tali che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{C^2([0, 1])} = 0$ . Allora

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{C^2([0, 1])}.$$

Per il Teorema dei carabinieri per ogni  $x \in [0, 1]$   $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ . Allora:

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0;$$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

Allora  $f \in X$ , da cui segue che  $X$  è chiuso.  $X$  è chiuso in  $(C^2([0, 1]), \|\cdot\|_{C^2([0, 1])})$  che è uno spazio di Banach, quindi  $(X, \|\cdot\|_X)$  è uno spazio di Banach.  $\square$

## 1.7 Spazio di Hilbert

Terminiamo il capitolo richiamando la definizione di prodotto interno, alcune sue proprietà, e dando la definizione di spazio di Hilbert.

**Definizione 1.7.1** (Prodotto interno su uno spazio vettoriale reale). Sia  $X$  un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale. Un prodotto interno su  $X$  è un prodotto scalare.

**Definizione 1.7.2** (Prodotto interno su uno spazio vettoriale complesso). Sia  $X$  un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. Un prodotto interno su  $X$  è un'applicazione  $\langle, \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  con le seguenti proprietà:

- (1)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  per ogni  $x \in X$ ;
- (2)  $\langle x, x \rangle = 0$  se e solo se  $x = 0$ ;
- (3) per ogni  $x, y \in X$   $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;
- (4) per ogni  $x, y, z \in X$   $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ;
- (5) per ogni  $x \in X$ , per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$   $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ .

**Lemma 1.7.3.** (*Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*) Siano  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale dove  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\langle, \rangle$  un prodotto interno su  $X$  e per ogni  $x \in X$  sia  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Allora per ogni  $x, y \in X$   $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , in particolare  $\|\cdot\|$  è una norma su  $X$ .

*Dimostrazione.* Siano  $x, y \in X$ . Se  $y = 0$  la disuguaglianza è ovviamente verificata ( $0 \leq 0$ ), quindi supponiamo  $y \neq 0$ . Allora per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$  vale quanto segue:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle &= \|x\|^2 + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2 = \|x\|^2 \\ &+ \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2 = \|x\|^2 + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\lambda| \cdot |\langle x, y \rangle| + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2. \end{aligned}$$

Sia  $p(|\lambda|) := \|x\|^2 + 2|\lambda| \cdot |\langle x, y \rangle| + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2$ , quindi, poiché  $y \neq 0$ ,  $p(|\lambda|)$  è un polinomio a coefficienti reali di grado 2. Poiché per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$  vale la disuguaglianza  $p(|\lambda|) \geq 0$ , si ha, se indico con  $\Delta$  il discriminante del polinomio  $p(|\lambda|)$ , che vale la seguente

$$\frac{\Delta}{4} \leq 0 \Rightarrow |\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow |\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

da cui

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

□

**Lemma 1.7.4.** *Siano  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale dove  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\langle, \rangle$  un prodotto interno su  $X$ . Allora valgono le seguenti:*

- (1) *per ogni  $y \in X$  la funzione  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  è continua;*
- (2) *per ogni  $y \in X$  la funzione  $x \mapsto \langle y, x \rangle$  è continua.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo (1) in quanto (2) si dimostra in modo del tutto analogo. Fissiamo  $y \in X$  e sia  $f(x) = \langle x, y \rangle$  per ogni  $x \in X$ . Fissiamo  $x_0 \in X$ , allora per il Lemma 1.7.3

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| = | \langle x, y \rangle - \langle x_0, y \rangle | = | \langle x - x_0, y \rangle | \leq \|x - x_0\| \cdot \|y\|.$$

Per il Teorema dei carabinieri  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Abbiamo così dimostrato che  $f$  è continua in ogni punto del suo dominio, cioè  $f$  è continua.  $\square$

**Definizione 1.7.5** (Spazio di Hilbert). Uno spazio di Hilbert è una coppia  $(X, \langle, \rangle)$  dove  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\langle, \rangle$  è un prodotto interno su  $X$  tale che  $X$  rispetto alla norma indotta dal prodotto interno è uno spazio di Banach.



# Capitolo 2

## Teorema di Baire e applicazioni

In questo capitolo enunceremo e dimostreremo il Teorema di Baire e mostriamo alcune sue applicazioni. Il Teorema di Baire afferma che in uno spazio metrico completo, data una famiglia al più numerabile di chiusi aventi ciascuno interno vuoto, allora l'unione di tali chiusi ha interno vuoto; ciò è equivalente a dire che dato uno spazio metrico completo e una famiglia al più numerabile di aperti densi, allora l'intersezione di tali aperti è ancora densa.

### 2.1 Teorema di Baire

Prima di enunciare il Teorema di Baire premettiamo un risultato, noto come Teorema dell'intersezione di Cantor.

**Teorema 2.1.1** (Teorema dell'intersezione di Cantor). *Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico completo,  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  una famiglia di sottoinsiemi chiusi limitati non vuoti di  $X$  con le seguenti proprietà:*

$$(1) \quad A_{n+1} \subseteq A_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N};$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(A_n) = 0.$$

Allora esiste  $x \in X$  tale che  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x\}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione in  $X$  tale che  $x_n \in A_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è ben definita perché  $A_n \neq \emptyset$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Dimostriamo che  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy. Siano  $n, m \in \mathbb{N}$  tali che  $n \geq m$ , allora, poiché  $x_n \in A_n$ ,  $x_m \in A_m$ , ho che  $x_n, x_m \in A_m$ , quindi  $d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(A_m)$ .  
 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \text{diam}(A_m) = 0$ , pertanto,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, m > n_\epsilon \Rightarrow \text{diam}(A_m) < \epsilon,$$

da cui

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq m > n_\epsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

La successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $X$  che è completo, quindi esiste  $x \in X$  tale che  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ . In particolare per ogni  $m \in \mathbb{N}$   $x$  è anche limite della successione  $(x_n)_{n \geq m}$  in quanto sottosuccessione di  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Per ogni  $n \geq m$   $x_n \in A_m$ , quindi, poiché  $A_m$  è chiuso,  $x \in A_m$  per ogni  $m \in \mathbb{N}$  cioè  $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$ . Supponiamo esista  $y \in X$  tale che  $y \neq x$  e  $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . In tal caso esisterebbe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $\text{diam}(A_{n_0}) < d(x, y)$ . Infatti se per assurdo  $d(x, y) \leq \text{diam}(A_n)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  allora per il Teorema dei carabinieri avrei che  $d(x, y) = 0$  cioè  $x = y$ , ma ciò è assurdo perché  $y \neq x$ . D'altra parte  $x, y \in A_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , in particolare  $x, y \in A_{n_0}$  quindi  $d(x, y) \leq \text{diam}(A_{n_0})$ . Allora  $\text{diam}(A_{n_0}) < d(x, y) \leq \text{diam}(A_{n_0})$  che è assurdo, perciò  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x\}$ .  $\square$

**Teorema 2.1.2** (Teorema di Baire). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo. Allora valgono e sono equivalenti le seguenti:*

(1) se  $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è una famiglia di chiusi di  $X$  tali che  $\text{int}(F_n) = \emptyset$  per ogni

$$n \in \mathbb{N} \text{ allora } \text{int} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \emptyset;$$

(2) se  $\{O_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è una famiglia di aperti di  $X$  tali che  $\overline{O_n} = X$  per ogni

$$n \in \mathbb{N} \text{ allora } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = X.$$

*Dimostrazione.* Per dimostrare (1)  $\Rightarrow$  (2) usiamo che per ogni  $A \subseteq X$   $\overline{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A)$ , per dimostrare (2)  $\Rightarrow$  (1) usiamo che per ogni  $F \subseteq X$   $X \setminus F = X \setminus \text{int}(F)$ . La prima identità segue dal Lemma 1.0.1, la seconda segue dalla prima ponendo  $A = X \setminus F$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2)

Sia  $\{O_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  una famiglia di aperti di  $X$  tali che  $\overline{O_n} = X$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e sia  $F_n = X \setminus O_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $O_n$  è aperto quindi  $F_n$  è chiuso.  $\overline{O_n} = X$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi per il Lemma 1.0.1  $\text{int}(F_n) = \emptyset$  da cui per (1)

$$\text{int} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \emptyset. \text{ Essendo}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus O_n) = X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

$$\text{e } \text{int} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \emptyset \text{ allora per il Lemma 1.0.1 } \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n} = X.$$

Per (2)  $\Rightarrow$  (1) si procede in modo del tutto analogo.

Dimostriamo (1).

Sia  $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  una famiglia di chiusi di  $X$  tali che  $\text{int}(F_n) = \emptyset$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Osserviamo preliminarmente che, dato  $A \subseteq X$ ,  $\text{int}(A) = \emptyset$  se e solo se per ogni  $O \subseteq X$  aperto non vuoto  $O \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ .

Sia quindi  $O \subseteq X$  un aperto non vuoto e dimostriamo che  $O \cap \left( X \setminus \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) \right) \neq \emptyset$ . Sia  $O_0 = O$ .  $\text{int}(F_0) = \emptyset$ , quindi  $O_0 \cap (X \setminus F_0) \neq \emptyset$ .  $F_0$  è chiuso quindi  $X \setminus F_0$  è aperto.  $O_0, X \setminus F_0$  sono due aperti che hanno intersezione non vuota, quindi  $O_0 \cap (X \setminus F_0)$  è un aperto non vuoto, in particolare preso  $p \in O_0 \cap (X \setminus F_0)$  esiste  $r \in \mathbb{R}^+$  tale che  $B\left(p, \frac{r}{2}\right) \subseteq O_0 \cap (X \setminus F_0)$ . Non è restrittivo supporre  $r < 1$ .

Osserviamo che  $\text{diam} B\left(p, \frac{r}{2}\right) \leq r$ . Poniamo  $O_1 = B\left(p, \frac{r}{2}\right)$ .

Abbiamo così dimostrato che esiste un aperto  $O_1$  non vuoto con le seguenti proprietà:

$$(a) \overline{O_1} \subseteq O_0 \cap (X \setminus F_0);$$

$$(b) \text{diam}(\overline{O_1}) < 1.$$

Anche  $\text{int}(F_1) = \emptyset$ , quindi  $O_1 \cap (X \setminus F_1)$  è un aperto non vuoto. Ragionando come sopra riusciamo a trovare un aperto  $O_2$  non vuoto con le seguenti proprietà:

$$(a') \overline{O_2} \subseteq O_1 \cap (X \setminus F_1);$$

$$(b') \text{diam}(\overline{O_2}) < \frac{1}{2}.$$

Iterando la procedura per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$  riusciamo a trovare un aperto  $O_n$  non vuoto con le seguenti proprietà:

$$(a'') \overline{O_n} \subseteq O_{n-1} \cap (X \setminus F_{n-1});$$

$$(b'') \text{diam}(\overline{O_n}) < \frac{1}{n}.$$

In particolare per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$   $0 \leq \text{diam}(\overline{O_n}) < \frac{1}{n}$ , quindi per il Teorema dei carabinieri  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(\overline{O_n}) = 0$ . Siamo nelle ipotesi del Teorema 2.1.1, quindi

esiste  $x \in X$  tale che  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{O_n} = \{x\}$ .

Mostriamo che  $x \in O \cap \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus F_n) \right)$ . Essendo  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{O_n}$ , allora

$$x \in \overline{O_1} \subseteq O_0 \cap (X \setminus F_0) \subseteq O_0 = O \Rightarrow x \in O;$$

d'altra parte per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$x \in \overline{O_{n+1}} \subseteq O_n \cap (X \setminus F_n) \subseteq X \setminus F_n \Rightarrow x \in X \setminus F_n,$$

da cui

$$x \in O \cap \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus F_n) \right) = O \cap \left( X \setminus \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) \right).$$

Pertanto,  $O \cap \left( X \setminus \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) \right) \neq \emptyset$  per ogni  $O \subseteq X$  aperto non vuoto da cui la tesi.  $\square$

**Corollario 2.1.3.** *Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico,  $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  un ricoprimento chiuso di  $X$ . Allora valgono le seguenti affermazioni equivalenti:*

- (1) se per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $\text{int}(F_n) = \emptyset$  allora  $(X, d)$  non è completo;
- (2) se  $(X, d)$  è completo allora esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$ .

*Dimostrazione.* (1) Supponiamo che per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $\text{int}(F_n) = \emptyset$  e che  $(X, d)$  sia completo. Allora per il Teorema 2.1.2  $\text{int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) = \emptyset$ , quindi, poiché  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ ,  $\text{int}(X) = \emptyset$ . Ma  $X$  è aperto, cioè  $X = \text{int}(X)$  quindi  $X = \emptyset$ . Tutto ciò è assurdo perché per definizione di spazio metrico  $X \neq \emptyset$ .

(2) segue immediatamente da (1).  $\square$

*Osservazione 2.1.4.* Il Corollario 2.1.3 (2) fornisce una condizione necessaria per la completezza di uno spazio metrico.

**Corollario 2.1.5.** *Sia  $d$  la restrizione a  $\mathbb{Q}$  della distanza euclidea su  $\mathbb{R}$ . Allora lo spazio  $(\mathbb{Q}, d)$  non è completo.*

*Dimostrazione.*  $\mathbb{Q}$  è numerabile, in particolare è esprimibile come  $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}$ .

Poiché per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $\text{int}(\{q_n\}) = \emptyset$ , per il Corollario 2.1.3 (1) si ha che lo spazio  $(\mathbb{Q}, d)$  non è completo.  $\square$

Richiamiamo la definizione di iperpiano di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 2.1.6** (Iperpiano). Un iperpiano  $H$  di  $\mathbb{R}^n$  è un insieme della forma  $H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\}$  dove  $(a_1, \dots, a_n)$  è un qualche vettore non nullo di  $\mathbb{R}^n$ .



**Corollario 2.1.7.**  $\mathbb{R}^n$  non è esprimibile come unione numerabile di iperpiani, in particolare lo spazio  $\mathbb{R}^3$  non è esprimibile come unione numerabile di piani e il piano  $\mathbb{R}^2$  non è esprimibile come unione numerabile di rette.

*Dimostrazione.* Basta utilizzare il Corollario 2.1.3 e osservare che ogni iperpiano è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ , quindi ha dimensione finita e di conseguenza, come mostrerà il Teorema 2.2.3, ha interno vuoto.  $\square$

## 2.2 Applicazioni

Vedremo in questo paragrafo due prime notevoli applicazioni del Teorema di Baire. La prima è che in uno spazio di Banach di dimensione infinita non esiste una base di Hamel numerabile; come sua conseguenza si otterrà che non può esistere una norma rispetto alla quale lo spazio dei polinomi sia uno spazio di Banach. La seconda applicazione del Teorema di Baire è la dimostrazione dell'esistenza di una funzione continua che non è derivabile in alcun punto.

Prima di andare ad analizzare queste applicazioni diamo la definizione di Base di Hamel.

**Definizione 2.2.1** (Base di Hamel). Sia  $X$  uno spazio vettoriale. Una base di Hamel su  $X$  è un sottoinsieme  $\{v_i \mid i \in I\}$  di  $X$  con le seguenti proprietà:

- (1) per ogni  $J \subseteq I$  finito  $\{v_j \mid j \in J\}$  è un insieme di vettori linearmente indipendenti, cioè se  $\{\alpha_j \mid j \in J\}$  è un insieme di scalari tali che  $\sum_{j \in J} \alpha_j v_j = 0$  allora  $\alpha_j = 0$  per ogni  $j \in J$ ;
- (2) per ogni  $x \in X$  esiste  $J(x) \subseteq I$  finito,  $\{\alpha_j \mid j \in J(x)\}$  insieme di scalari tali che  $x = \sum_{j \in J(x)} \alpha_j v_j$ .

**Definizione 2.2.2.** Siano  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{K}$  un campo. Per  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  intendiamo lo spazio dei polinomi a coefficienti in  $\mathbb{K}$  nelle variabili  $x_1, \dots, x_n$ .

**Teorema 2.2.3.** Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach di dimensione infinita. Allora  $X$  non ha una base di Hamel numerabile, in particolare non esiste una norma che renda  $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$  uno spazio di Banach dove  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista una base di Hamel numerabile per  $X$ , sia essa  $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $F_n := \text{Span}\{v_0, \dots, v_n\}$ .  $F_n$  è chiuso per il Teorema 1.1.3 per ogni  $n \in \mathbb{N}$  ed  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .

Mostriamo che  $\text{int}(F_n) = \emptyset$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , per il Corollario 2.1.3 seguirà la tesi.

Fissiamo  $n \in \mathbb{N}$  e supponiamo che  $\text{int}(F_n) \neq \emptyset$ , allora esistono  $x \in X$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  tali che  $\overline{B(x, r)} \subseteq F_n$ . Sia  $y := r \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|} + x$ . Osserviamo che  $y \in \overline{B(x, r)}$ , infatti

$$\|y - x\| = \left\| r \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|} + x - x \right\| = \left\| r \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|} \right\| = r \frac{\|v_{n+1}\|}{\|v_{n+1}\|} = r \leq r.$$

Indichiamo con  $\mathbb{K}$  il campo su cui è definito lo spazio  $X$ , allora valgono le seguenti:

$$y \in \overline{B(x, r)} \subseteq F_n = \text{Span}\{v_0, \dots, v_n\} \Rightarrow \exists \beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{K} : y = \sum_{i=0}^n \beta_i v_i;$$

$$x \in \overline{B(x, r)} \subseteq F_n = \text{Span}\{v_0, \dots, v_n\} \Rightarrow \exists \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : x = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i.$$

Pertanto,

$$\sum_{i=0}^n \beta_i v_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i + r \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|} \Rightarrow \sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i + r \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|} = 0.$$

Dal momento che  $\frac{r}{\|v_{n+1}\|} \neq 0$  ho trovato una combinazione lineare nulla non banale di  $v_0, \dots, v_{n+1}$ , ma ciò è assurdo perché  $v_0, \dots, v_{n+1}$  sono linearmente indipendenti.

Per la seconda parte della tesi è sufficiente osservare che  $B = \{x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}\}$  è una base di Hamel numerabile per  $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ .  $\square$

**Teorema 2.2.4.** *Esiste una funzione in  $C([0, 1])$  che non è derivabile in nessun punto.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che se  $f \in C([0, 1])$  è derivabile in almeno un punto, allora  $f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  dove, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$F_n := \left\{ f \in C([0, 1]) : \exists a \in [0, 1] \text{ tale che } \sup_{h \neq 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq n \right\}.$$

Infatti, sia  $f$  derivabile in un punto  $a$ . Allora

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists h_\epsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall h \in \mathbb{R}, 0 < |h| < h_\epsilon \Rightarrow \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon.$$

Sia  $\epsilon = 1$ , allora

$$0 < |h| < h_1 \Rightarrow \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| = \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) + f'(a) \right|$$

$$\leq \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| + |f'(a)| < 1 + |f'(a)|. \quad (2.1)$$

D'altra parte

$$|h| \geq h_1 \Rightarrow \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq \frac{2}{h_1} \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|. \quad (2.2)$$

$f$  è una funzione continua su  $[0, 1]$  che è compatto, quindi  $\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < +\infty$  per il Teorema di Weierstrass. Da (2.1) e (2.2) segue quindi che

$$\sup_{h \neq 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \in [0, +\infty[.$$

Sia

$$n_0 := \left[ \sup_{h \neq 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \right] + 1$$

dove il simbolo  $[\cdot]$  denota la parte intera. Allora  $\sup_{h \neq 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq n_0$ , di

conseguenza  $f \in F_{n_0} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .

Dimostriamo che per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $F_n$  è chiuso in  $C([0, 1])$ . Fissiamo  $n \in \mathbb{N}$  e siano  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  una successione in  $F_n$  ed  $f \in C([0, 1])$  tali che  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m - f\|_\infty = 0$ .

Dato che  $f_m \in F_n$  per ogni  $m \in \mathbb{N}$ , allora esiste  $a_m \in [0, 1]$  tale che

$$\sup_{h \neq 0} \left| \frac{f_m(a_m+h) - f_m(a_m)}{h} \right| \leq n. \quad (2.3)$$

Consideriamo la successione  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ . Si tratta di una successione in  $[0, 1]$ , quindi la successione è limitata. Allora, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, essa ha una sottosuccessione convergente, indichiamo con  $(a_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$  questa sottosuccessione e sia  $a$  il suo limite. Poiché  $[0, 1]$  è chiuso, si ha che  $a \in [0, 1]$ . Per ogni  $h \neq 0$  sia  $(h_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$  la successione così definita:

$$h_{k_m} := a - a_{k_m} + h.$$

Poiché  $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_{k_m} = a$ , si ha che  $(h_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$  è convergente e  $\lim_{m \rightarrow +\infty} h_{k_m} = h \neq 0$ , allora esiste  $\bar{m} \in \mathbb{N}$  tale che  $h_{k_m} \neq 0$  per ogni  $m > \bar{m}$ . Inoltre per ogni  $m \in \mathbb{N}$

$$|f_{k_m}(a_{k_m} + h_{k_m}) - f(a+h)| = |f_{k_m}(a_{k_m} + h_{k_m}) - f(a_{k_m} + h_{k_m})| \leq \|f - f_{k_m}\|_\infty.$$

$(f_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$  è una sottosuccessione di  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , quindi  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_{k_m} - f\|_\infty = 0$ ; allora, per il Teorema dei carabinieri,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_{k_m}(a_{k_m} + h_{k_m}) = f(a+h)$ .

Dimostriamo ora che si ha  $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_{k_m}(a_{k_m}) = f(a)$ .

$$|f_{k_m}(a_{k_m}) - f(a)| = |f_{k_m}(a_{k_m}) - f(a_{k_m}) + f(a_{k_m}) - f(a)|$$

$$\leq |f_{k_m}(a_{k_m}) - f(a_{k_m})| + |f(a_{k_m}) - f(a)| \leq \|f_{k_m} - f\|_\infty + |f(a_{k_m}) - f(a)| \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Essendo  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_{k_m} - f\|_\infty = 0$  e tenendo conto che, per la continuità di  $f$ ,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(a_{k_m}) = f(a)$ , deduciamo dal Teorema dei carabinieri che  $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_{k_m}(a_{k_m}) = f(a)$ . Inoltre da (2.3) si ha che

$$\left| \frac{f_{k_m}(a_{k_m} + h_{k_m}) - f_{k_m}(a_{k_m})}{h_{k_m}} \right| \leq n \quad \forall m > \bar{m};$$

pertanto, passando al limite, otteniamo che  $\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq n$  per ogni  $h \neq 0$ , da cui

$$\sup_{h \neq 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq n.$$

Pertanto,  $f \in F_n$ . Abbiamo così dimostrato che  $F_n$  è chiuso.

Dimostriamo infine che  $\text{int}(F_n) = \emptyset$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Fissiamo  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  e, per ogni  $k \in \mathbb{N}^*$ , sia  $g_{k,\epsilon} \in C([0,1])$  la funzione lineare a tratti così definita:

$$g_{k,\epsilon}(x) = \begin{cases} 2k\epsilon \left( x - \frac{j-1}{k} \right) & \text{se } \frac{j-1}{k} \leq x \leq \frac{j-1}{k} + \frac{1}{2k} \\ \epsilon - 2k\epsilon \left( x - \frac{j-1}{k} - \frac{1}{2k} \right) & \text{se } \frac{j-1}{k} + \frac{1}{2k} \leq x \leq \frac{j}{k} \end{cases}$$

per ogni  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Vale che  $\|g_{k,\epsilon}\|_\infty = \epsilon < 2\epsilon$ , da cui, fissata  $f \in C([0,1])$ ,  $\|(f + g_{k,\epsilon}) - f\|_\infty < 2\epsilon$ . Dimostriamo che  $f + g_{k,\epsilon} \notin F_n$  per  $k$  sufficientemente grande.  $f$  è una funzione continua su  $[0,1]$  che è compatto, quindi per il Teorema di Heine-Cantor  $f$  è uniformemente continua, cioè fissato  $\delta \in \mathbb{R}^+$  vale la seguente

$$\exists k_\delta \in \mathbb{N}^* : \forall k \in \mathbb{N}^*, k > k_\delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta \text{ se } |x - y| < \frac{1}{k}.$$

Siano  $k > k_\delta$  e  $x_0 \in [0,1]$ . Essendo  $[0,1] = \bigcup_{j=1}^k \left[ \frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right]$ , esiste  $j \in \{1, \dots, k\}$

tale che  $x_0 \in \left[ \frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right]$ . Sia  $x \in \left[ \frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right]$  scelto in modo tale che valgano le seguenti:

$$(i) \quad \frac{1}{4k} \leq |x - x_0| < \frac{1}{k} \quad \left( \text{da cui } k < \frac{1}{|x - x_0|} \leq 4k \right);$$

$$(ii) \quad |g_{k,\epsilon}(x) - g_{k,\epsilon}(x_0)| = 2k\epsilon|x - x_0|.$$

Allora

$$|(f + g_{k,\epsilon})(x) - (f + g_{k,\epsilon})(x_0)| = |g_{k,\epsilon}(x) - g_{k,\epsilon}(x_0) - (f(x_0) - f(x))|$$

$$\begin{aligned} &\geq |g_{k,\epsilon}(x) - g_{k,\epsilon}(x_0)| - |f(x_0) - f(x)| = 2k\epsilon|x - x_0| - |f(x) - f(x_0)| \\ &> 2k\epsilon|x - x_0| - \delta = |x - x_0| \left( 2k\epsilon - \frac{\delta}{|x - x_0|} \right) \geq |x - x_0|(2k\epsilon - 4k\delta). \end{aligned}$$

Scegliamo ora  $\delta$  in modo che sia minore di  $\frac{\epsilon}{4}$ , allora

$$|x - x_0|(2k\epsilon - 4k\delta) > |x - x_0|(2k\epsilon - k\epsilon) = k\epsilon|x - x_0|.$$

Prendendo  $k > \max \left\{ \frac{n}{\epsilon}, k_\delta \right\}$ , si ha che

$$k\epsilon|x - x_0| > n|x - x_0| \Rightarrow |(f + g_{k,\epsilon})(x) - (f + g_{k,\epsilon})(x_0)| > n|x - x_0|,$$

da cui

$$\left| \frac{(f + g_{k,\epsilon})(x) - (f + g_{k,\epsilon})(x_0)}{x - x_0} \right| > n.$$

Pertanto,  $f + g_{k,\epsilon} \notin F_n$ . Abbiamo quindi dimostrato che per ogni  $f \in C([0, 1])$ , per ogni  $r \in \mathbb{R}^+$   $B(f, r) \cap (C([0, 1]) \setminus F_n) \neq \emptyset$ , cioè  $\text{int}(F_n) = \emptyset$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Essendo  $C([0, 1])$  uno spazio completo per il Corollario 1.2.3, allora per il Teorema

2.1.2 si ha che  $\text{int} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \emptyset$ . Pertanto,  $C([0, 1]) \setminus \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) \neq \emptyset$ , cioè esiste  $f \in C([0, 1])$  tale che  $f \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  e, per quanto dimostrato inizialmente, questa funzione non è derivabile in alcun punto.  $\square$



# Capitolo 3

## Teorema di Banach-Steinhaus e applicazioni

Una delle più importanti applicazioni del Teorema di Baire è il Teorema di Banach-Steinhaus. Forniremo inizialmente la sua dimostrazione e in seguito ci concentreremo su un paio di sue applicazioni.

### 3.1 Teorema di Banach-Steinhaus

Iniziamo il paragrafo con la seguente definizione.

**Definizione 3.1.1.** Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi normati,  $A \in L(X, Y)$ . Definiamo la norma di  $A$  come  $\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}$ . Per il Teorema 1.4.1  $\|A\| \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 3.1.2** (Teorema di Banach-Steinhaus o principio di uniforme limitatezza). *Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio di Banach,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  uno spazio normato,  $\{A_i \mid i \in I\}$  un sottoinsieme di  $L(X, Y)$  tale che per ogni  $x \in X$   $\sup_{i \in I} \|A_i(x)\|_Y < +\infty$ . Allora  $\sup_{i \in I} \|A_i\| < +\infty$ .*

*Dimostrazione.* Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $F_n := \left\{ x \in X : \sup_{i \in I} \|A_i(x)\|_Y \leq n \right\}$ . Sia  $x \in X$ , allora  $\sup_{i \in I} \|A_i(x)\|_Y \in [0, +\infty[$ . Sia  $n(x) := \left[ \sup_{i \in I} \|A_i(x)\|_Y \right] + 1$ , allora  $\sup_{i \in I} \|A_i(x)\|_Y \leq n(x)$ , quindi  $x \in F_{n(x)} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Abbiamo così dimostrato che  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Dimostriamo ora che  $F_n$  è chiuso per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . In primis osserviamo che  $\sup_{i \in I} \|A_i(x)\|_Y \leq n$  se e solo se  $\|A_i(x)\|_Y \leq n$  per ogni  $i \in I$ . Pertanto,

si ha che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n = \bigcap_{i \in I} \{z \in X : \|A_i(z)\|_Y \leq n\}$ . Per ogni  $i \in I$  sia  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i(z) = \|A_i(z)\|_Y$ .  $\|\cdot\|_Y$  è continua e  $A_i$  è continua, quindi anche  $f_i$  è continua perché composizione di funzioni continue, in particolare abbiamo che  $\{z \in X : \|A_i(z)\|_Y \leq n\} = f_i^{-1}([0, n])$ .  $[0, n]$  è chiuso in  $\mathbb{R}$  ed  $f_i$  è continua, quindi  $f_i^{-1}([0, n])$  è chiuso in  $X$ . Allora si ha che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  è chiuso perché intersezione di chiusi.  $X$  è uno spazio completo ed  $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è un ricoprimento chiuso di  $X$ , allora per il Corollario 2.1.3 (2) esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$ . Pertanto, esistono  $x_0 \in X$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  tali che  $\overline{B_X(x_0, r)} \subseteq F_{n_0}$ , cioè per ogni  $z$  tale che  $\|z - x_0\|_X \leq r$  si ha che  $\sup_{i \in I} \|A_i(z)\|_Y \leq n_0$ . Sia  $x \neq 0$ , allora, posto  $z := \frac{r}{\|x\|_X}x + x_0 \in \overline{B_X(x_0, r)}$ , risulta  $x = \frac{\|x\|_X}{r}(z - x_0)$ . Fissiamo  $i \in I$ , allora

$$\begin{aligned} \|A_i(x)\|_Y &= \left\| A_i\left(\frac{\|x\|_X}{r}(z - x_0)\right) \right\|_Y = \left\| \frac{\|x\|_X}{r}(A_i(z) - A_i(x_0)) \right\|_Y \\ &= \frac{\|x\|_X}{r} \|A_i(z) - A_i(x_0)\|_Y \leq \frac{\|x\|_X}{r} (\|A_i(z)\|_Y + \|A_i(x_0)\|_Y) \\ &\leq \frac{\|x\|_X}{r} \left( \sup_{i \in I} \|A_i(z)\|_Y + \sup_{i \in I} \|A_i(x_0)\|_Y \right). \end{aligned}$$

Sfruttando che  $z \in \overline{B_X(x_0, r)} \subseteq F_{n_0}$  otteniamo che

$$\|A_i(x)\|_Y \leq \frac{\|x\|_X}{r} \left( n_0 + \sup_{i \in I} \|A_i(x_0)\|_Y \right).$$

Dall'arbitrarietà di  $x$  segue che

$$\|A_i\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A_i(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \frac{1}{r} \left( n_0 + \sup_{i \in I} \|A_i(x_0)\|_Y \right).$$

Infine dall'arbitrarietà di  $i$  si deduce che

$$\sup_{i \in I} \|A_i\| \leq \frac{1}{r} \left( n_0 + \sup_{i \in I} \|A_i(x_0)\|_Y \right) < +\infty.$$

□

**Corollario 3.1.3.** *Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio di Banach,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  uno spazio normato,  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  un sottoinsieme di  $L(X, Y)$  tale che per ogni  $x \in X$  la successione  $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  sia convergente. Allora  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$ .*

*Inoltre sia  $A : X \rightarrow Y$ ,  $A(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(x)$ . Allora  $A \in L(X, Y)$ , in particolare*

$$\|A\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|.$$



*Dimostrazione.* Per ogni  $x \in X$  la successione  $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente quindi limitata, cioè  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n(x)\|_Y < +\infty$ , allora  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$  per il Teorema 3.1.2. Siano  $x_1, x_2 \in X$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  due scalari. Allora

$$\begin{aligned} A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_1 A_n(x_1) + \lambda_2 A_n(x_2)) \\ &= \lambda_1 \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(x_1) + \lambda_2 \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2). \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che  $A$  è lineare.

Mostriamo che  $A$  è continua. Sia  $x \neq 0$ , allora

$$\frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|A_n(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|A_n(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|,$$

da cui

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|.$$

Se dimostro che  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|$  è finito, la tesi segue dal Teorema 1.4.1.

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\| := \lim_{n \rightarrow +\infty} (\inf \{\|A_m\| : m \geq n\})$ . Fissiamo  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\inf \{\|A_m\| : m \geq n\} \leq \sup \{\|A_m\| : m \geq n\} \leq \sup \{\|A_m\| : m \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\inf \{\|A_m\| : m \geq n\}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup \{\|A_m\| : m \in \mathbb{N}\}),$$

da cui

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|A_m\| < +\infty.$$

□

## 3.2 Applicazioni

### 3.2.1 Teorema di Polya

Siano  $f \in C([0, 1])$  e  $\omega \in L^1([0, 1])$ .

Vogliamo approssimare l'integrale  $\int_0^1 f(x)\omega(x)dx$  mediante una somma finita del-

la forma  $\sum_{j=0}^n \omega_j^n f(x_j^n)$  dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_0^n, \dots, x_n^n$  sono  $n+1$  nodi in  $[0, 1]$  tali che  $0 \leq x_0^n < \dots < x_n^n \leq 1$  e  $\omega_0^n, \dots, \omega_n^n$  sono  $n+1$  numeri reali non nulli.

Mostriamo preliminarmente che l'integrale  $\int_0^1 f(x)\omega(x)dx$  è ben posto e finito, più precisamente che  $f\omega \in L^1([0, 1])$ . Infatti  $f$  è continua, quindi è misurabile e

$\omega \in L^1([0, 1])$ , quindi è anch'essa misurabile, allora  $f\omega$  è misurabile perché prodotto di funzioni misurabili.  $f$  è continua e  $[0, 1]$  è compatto, allora, per il Teorema di Weierstrass,  $\|f\|_\infty < +\infty$ . Dunque,

$$\int_0^1 |f(x)\omega(x)|dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty |\omega(x)|dx = \|f\|_\infty \cdot \|\omega\|_{L^1([0,1])} < +\infty$$

da cui la tesi. Il prossimo teorema, noto come Teorema di Polya, fornisce una condizione necessaria e sufficiente per stabilire se per  $n$  grande, sotto opportune ipotesi,

una somma finita della forma  $\sum_{j=0}^n \omega_j^n f(x_j^n)$  è buona ai fini dell'approssimazione di  $\int_0^1 f(x)\omega(x)dx$ , cioè se l'errore  $\left| \int_0^1 f(x)\omega(x)dx - \sum_{j=0}^n \omega_j^n f(x_j^n) \right|$  è piccolo.

**Teorema 3.2.1** (Teorema di Polya). *Siano  $\omega \in L^1([0, 1])$ ,  $\{l_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  la famiglia di operatori da  $C([0, 1])$  in  $\mathbb{R}$  così definita: per ogni  $n \in \mathbb{N}$*

$$l_n : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad l_n(f) = \sum_{j=0}^n \omega_j^n f(x_j^n)$$

dove  $x_0^n, \dots, x_n^n$  sono  $n+1$  nodi in  $[0, 1]$  tali che  $0 \leq x_0^n < x_1^n < \dots < x_{n-1}^n < x_n^n \leq 1$  e  $\omega_0^n, \dots, \omega_n^n$  sono  $n+1$  numeri reali non nulli.

Supponiamo che per ogni polinomio  $p \in P([0, 1])$  valga

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(p) = \int_0^1 p(x)\omega(x)dx.$$

Allora sono equivalenti le seguenti:

$$(1) \text{ per ogni } f \in C([0, 1]) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(f) = \int_0^1 f(x)\omega(x)dx;$$

$$(2) \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j=0}^n |\omega_j^n| \right) < +\infty.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo che per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $l_n \in L(C([0, 1]), \mathbb{R})$ .

Fissiamo  $n \in \mathbb{N}$ . Facilmente si verifica che  $l_n$  è lineare.

Dimostriamo che  $l_n$  è un operatore continuo e che  $\|l_n\| = \sum_{j=0}^n |\omega_j^n|$ .

Sia  $f \in C([0, 1])$  tale che  $f \neq 0$ .

$$|l_n(f)| = \left| \sum_{j=0}^n \omega_j^n f(x_j^n) \right| \leq \sum_{j=0}^n |\omega_j^n| \cdot |f(x_j^n)| \leq \|f\|_\infty \sum_{j=0}^n |\omega_j^n|.$$

Dall'arbitrarietà di  $f$  si deduce che

$$\|l_n\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|l_n(f)|}{\|f\|_\infty} \leq \sum_{j=0}^n |\omega_j^n|. \quad (3.1)$$

Pertanto,  $l_n$  è un operatore lineare limitato, quindi per il Teorema 1.4.1 è anche continuo.

Sia  $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione continua lineare a tratti tale che:

- (a)  $f_0(0) = \operatorname{sgn}(\omega_0^n)$ ;
- (b)  $f_0(x_j^n) = \operatorname{sgn}(\omega_j^n)$  per ogni  $j \in \{0, \dots, n\}$ ;
- (c)  $f_0(1) = \operatorname{sgn}(\omega_n^n)$ .

Allora

$$|l_n(f_0)| = \left| \sum_{j=0}^n \omega_j^n f_0(x_j^n) \right| = \left| \sum_{j=0}^n \omega_j^n \operatorname{sgn}(\omega_j^n) \right| = \left| \sum_{j=0}^n |\omega_j^n| \right| = \sum_{j=0}^n |\omega_j^n|.$$

Per costruzione  $\|f_0\|_\infty = 1$ . Quindi

$$\|l_n\| \geq \frac{|l_n(f_0)|}{\|f_0\|_\infty} = |l_n(f_0)| = \sum_{j=0}^n |\omega_j^n|,$$

allora da (3.1) deduciamo che

$$\|l_n\| = \sum_{j=0}^n |\omega_j^n|.$$

(1)  $\Rightarrow$  (2)

Per ogni  $f \in C([0, 1])$  la successione  $(l_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente. Per il Corollario 1.2.3  $C([0, 1])$  è uno spazio di Banach quindi, per il Corollario 3.1.3,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|l_n\| < +\infty$

da cui  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j=0}^n |\omega_j^n| \right) < +\infty$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Per ogni  $f \in C([0, 1])$ , per ogni  $p \in P([0, 1])$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \left| l_n(f) - \int_0^1 f(x)\omega(x)dx \right| &\leq |l_n(f-p)| + \left| l_n(p) - \int_0^1 p(x)\omega(x)dx \right| \\ + \left| \int_0^1 (p(x) - f(x))\omega(x)dx \right| &\leq \|l_n\| \cdot \|f-p\|_\infty + \left| l_n(p) - \int_0^1 p(x)\omega(x)dx \right| \end{aligned}$$

$$+ \int_0^1 |p(x) - f(x)| \cdot |\omega(x)| dx \leq \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} \|l_n\| + \|w\|_{L^1([0,1])} \right) \|f - p\|_\infty \\ + \left| l_n(p) - \int_0^1 p(x)\omega(x) dx \right|.$$

Fissiamo ora  $f \in C([0, 1])$ ; per il Teorema 1.3.9 si ha

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists p = p(f, \epsilon) \in P([0, 1]) : \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} \|l_n\| + \|w\|_{L^1([0,1])} \right) \|f - p\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'altra parte per ipotesi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(p) = \int_0^1 p(x)\omega(x) dx$ , cioè

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > n_\epsilon \Rightarrow \left| l_n(p) - \int_0^1 p(x)\omega(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si conclude che

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > n_\epsilon \Rightarrow \left| l_n(f) - \int_0^1 f(x)\omega(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

cioè per ogni  $f \in C([0, 1])$  si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n(f) = \int_0^1 f(x)\omega(x) dx$ .  $\square$

### 3.2.2 Interpolazione di Lagrange

Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a < b$  e siano dati  $n + 1$  nodi  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  tali che  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$ . Sia  $f \in C([a, b])$ . Ci chiediamo se esiste un polinomio  $p_n \in P_n([a, b])$  che interpoli  $f$  nei nodi  $x_0, \dots, x_n$ , cioè un polinomio che in  $x_i$  valga  $f(x_i)$  per ogni  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Vedremo che tale polinomio esiste ed è unico e prende il nome di interpolazione di Lagrange di  $f$  nei nodi assegnati. Quello che poi vorremmo fare sarebbe approssimare  $f$  con tale polinomio, cioè ci piacerebbe avere  $\|f - p_n\|_\infty$  piccolo per  $n$  grande; tuttavia, come vedremo, ciò non è detto a priori.

**Teorema 3.2.2.** *Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a < b$  e siano dati  $n + 1$  nodi  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  tali che  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$ . Sia  $f \in C([a, b])$ . Allora esiste un unico polinomio di grado  $\leq n$  che interpola  $f$  nei nodi assegnati, indichiamo tale polinomio con  $L_n(f)$ . Per ogni  $j \in \{0, \dots, n\}$  sia  $p_j(x) :=$*

$$\prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}. \text{ Valgono le seguenti:}$$

$$(1) \text{ per ogni } x \in [a, b] \quad L_n(f)(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) p_j(x);$$

(2) per ogni  $p \in P_n([a, b])$   $L_n(p) = p$ ;

(3)  $L_n \in L(C([a, b]), C([a, b]))$ ;

(4)  $\|L_n\| = \sup_{x \in [a, b]} \left( \sum_{j=0}^n |p_j(x)| \right)$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Allora

$$p_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dimostriamo che l'insieme  $\{p_0, \dots, p_n\}$  forma una base di  $P_n([a, b])$  quindi, dal momento che  $\dim P_n([a, b]) = n+1$ , è sufficiente dimostrare la lineare indipendenza di  $p_0, \dots, p_n$ . Siano  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tali che  $\sum_{i=0}^n \lambda_i p_i$  sia la funzione identicamente nulla. Allora se  $x = x_j$  per un qualche  $j \in \{0, \dots, n\}$  otteniamo, da (3.2),

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i p_i(x_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0.$$

Dall'arbitrarietà di  $j$  deduciamo che  $p_0, \dots, p_n$  sono linearmente indipendenti. Pertanto, se  $p \in P_n[a, b]$ , esistono e sono unici  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tali che

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Quindi, per (3.2),

$$\forall j \in \{0, \dots, n\} \quad p(x_j) = \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i(x_j) = \lambda_j.$$

Abbiamo così

$$p(x) = \sum_{i=0}^n p(x_i) p_i(x) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.3)$$

Pertanto, se cerco un polinomio  $p \in P_n([a, b])$  tale che  $p(x_j) = f(x_j)$  per ogni  $j \in \{0, \dots, n\}$  basta porre  $p(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) p_j(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$  e, per costruzione, si tratta dell'unico polinomio in  $P_n([a, b])$  interpolante  $f$  nei nodi assegnati. Ciò dimostra (1).

Dimostriamo ora (2). Siano  $p \in P_n([a, b])$  e  $x \in [a, b]$ , allora, per (3.3),

$$L_n(p)(x) = \sum_{i=0}^n p(x_i) p_i(x) = p(x) \Rightarrow L_n(p) = p.$$

Dimostriamo (3) e (4). Facilmente si dimostra che l'operatore  $L_n$  è lineare. Dimostriamo che  $L_n$  è un operatore continuo. Sia  $f \in C([a, b])$  tale che  $f \neq 0$  e sia  $x \in [a, b]$ , allora

$$|L_n(f)(x)| = \left| \sum_{j=0}^n f(x_j) p_j(x) \right| \leq \sum_{j=0}^n |f(x_j)| \cdot |p_j(x)| \leq \|f\|_\infty \sup_{x \in [a, b]} \left( \sum_{j=0}^n |p_j(x)| \right).$$

Dall'arbitrarietà di  $x$  si ha

$$\|L_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \sup_{x \in [a, b]} \left( \sum_{j=0}^n |p_j(x)| \right).$$

Dall'arbitrarietà di  $f$  si deduce che

$$\|L_n\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|L_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \sup_{x \in [a, b]} \left( \sum_{j=0}^n |p_j(x)| \right). \quad (3.4)$$

Dimostriamo ora che in (3.4) vale l'uguaglianza.

Sia  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi(x) = \sum_{j=0}^n |p_j(x)|$ .  $\phi$  è continua e  $[a, b]$  è compatto, quindi per il teorema di Weierstrass esiste  $\eta \in [a, b]$  tale che  $\phi(\eta) = \sup_{x \in [a, b]} \phi(x)$ , cioè esiste

$$\eta \in [a, b] \text{ tale che } \sum_{j=0}^n |p_j(\eta)| = \sup_{x \in [a, b]} \left( \sum_{j=0}^n |p_j(x)| \right).$$

Sia  $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione continua e lineare a tratti tale che:

- (i)  $\tilde{f}(a) = \text{sgn}(p_0(\eta))$ ;
- (ii)  $\tilde{f}(x_j) = \text{sgn}(p_j(\eta))$  per ogni  $j \in \{0, \dots, n\}$ ;
- (iii)  $\tilde{f}(b) = \text{sgn}(p_n(\eta))$ .

Per costruzione  $\|\tilde{f}\|_\infty = 0$  oppure  $\|\tilde{f}\|_\infty = 1$ . Sia  $f_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = 1$ . Per (2) si ha  $L_n(f_0) = f_0$ , cioè per ogni  $x \in [a, b]$   $\sum_{j=0}^n p_j(x) = 1$  da cui

$$\sum_{j=0}^n p_j(\eta) = 1. \quad (3.5)$$

Supponiamo per assurdo che  $\|\tilde{f}\|_\infty = 0$ , allora  $\tilde{f} = 0$ . Tuttavia, in tal caso, per ogni  $j \in \{0, \dots, n\}$  si avrebbe  $\tilde{f}(x_j) = 0$  da cui  $p_j(\eta) = 0$  che è in contraddizione con (3.5). Abbiamo così dimostrato che  $\|\tilde{f}\|_\infty = 1$ . Ne segue quindi che

$$\|L_n\| \geq \|L_n(\tilde{f})\|_\infty \geq |L_n(\tilde{f})(\eta)| = \left| \sum_{j=0}^n \tilde{f}(x_j) p_j(\eta) \right| = \left| \sum_{j=0}^n \text{sgn}(p_j(\eta)) p_j(\eta) \right|$$

$$= \sum_{j=0}^n |p_j(\eta)| = \sup_{x \in [a,b]} \left( \sum_{j=0}^n |p_j(x)| \right). \quad (3.6)$$

Dal (3.6) e da (3.4) si deduce che

$$\|L_n\| = \sup_{x \in [a,b]} \left( \sum_{j=0}^n |p_j(x)| \right).$$

Abbiamo così dimostrato che  $L_n$  è un operatore lineare limitato, quindi per il Teorema 1.4.1 è anche continuo.  $\square$

Fissiamo due numeri reali  $a$  e  $b$  tali che  $a < b$  e per ogni numero naturale  $n$  supponiamo che siano dati  $n + 1$  nodi distinti  $x_0^n, \dots, x_n^n$  nell'intervallo  $[a, b]$  tali che  $a \leq x_0^n < x_1^n < \dots < x_{n-1}^n < x_n^n \leq b$ . Il Teorema di Banach-Steinhaus e il Teorema 3.2.2 permettono di dimostrare l'esistenza di una funzione  $f \in C([a, b])$  tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_n(f) - f\|_\infty \neq 0$  dove  $L_n(f)$  è l'interpolazione di Lagrange di  $f$  sui nodi  $x_0^n, \dots, x_n^n$ , in particolare dimostreremo l'esistenza di questa funzione senza costruirla esplicitamente. Vale dunque il seguente risultato.

**Corollario 3.2.3** (Esistenza di una funzione continua con interpolazione di Lagrange non convergente). *Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a < b$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  siano dati  $n + 1$  nodi in  $[a, b]$   $x_0^n, \dots, x_n^n$  tali che  $a \leq x_0^n < x_1^n < \dots < x_{n-1}^n < x_n^n \leq b$  e per ogni  $f \in C([a, b])$  sia  $L_n(f)$  l'interpolazione di Lagrange di  $f$  sui nodi  $x_0^n, \dots, x_n^n$ . Allora esiste  $f \in C([a, b])$  tale che  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n(f)\|_\infty = +\infty$ , in particolare, per tale  $f$ , la successione  $(L_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  non converge uniformemente a  $f$ .*

*Dimostrazione.* Dal Teorema 3.2.2 (4) si può dimostrare quanto segue:

$$\exists C \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}^* \|L_n\| \geq C \log n$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_n\| = +\infty.$$

Supponiamo per assurdo che  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n(f)\|_\infty < +\infty$  per ogni  $f \in C([a, b])$ . Essendo  $C([a, b])$  uno spazio di Banach e  $L_n \in L(C([a, b]), C([a, b]))$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (Corollario 1.2.3, Teorema 3.2.2) avrei che, per il Teorema 3.1.2,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n\| < +\infty$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $\|L_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n\|$ , quindi se  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n\| < +\infty$  avrei che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_n\| < +\infty$  contraddicendo quanto precedentemente mostrato, allora esiste  $f \in C([a, b])$  tale che  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n(f)\|_\infty = +\infty$ .

Mostriamo che in tal caso  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_n(f) - f\|_\infty \neq 0$ .

Supponiamo per assurdo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_n(f) - f\|_\infty = 0$ , allora si avrebbe che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|L_n(f) - f\|_\infty + \|f\|_\infty) = \|f\|_\infty$$

da cui

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n(f)\|_\infty \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (\|L_n(f) - f\|_\infty + \|f\|_\infty) < +\infty$$

contraddicendo quanto precedentemente mostrato. □



# Capitolo 4

## Teorema della mappa aperta e applicazioni

Un'altra notevole applicazione del Teorema di Baire è il Teorema della mappa aperta, il quale fornisce una condizione sufficiente affinché un'applicazione lineare continua tra due spazi di Banach sia aperta. Una conseguenza immediata di questo risultato sarà la continuità dell'inversa di un'applicazione lineare continua invertibile tra due spazi di Banach.

### 4.1 Teorema della mappa aperta

Prima di enunciare il Teorema della mappa aperta facciamo qualche richiamo, in particolare richiamiamo la definizione di funzione aperta e diamo la dimostrazione di un lemma preliminare.

**Definizione 4.1.1** (Funzione aperta). Siano  $X, Y$  due spazi topologici,  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  si dice aperta se dato  $U$  aperto in  $X$   $f(U)$  è aperto in  $Y$ .

**Lemma 4.1.2.** *Siano  $X, Y$  due spazi topologici,  $f : X \rightarrow Y$  biunivoca. Sono equivalenti le seguenti:*

(1)  $f^{-1}$  è continua;

(2)  $f$  è aperta.

*Dimostrazione.* (1)  $\Rightarrow$  (2)

Sia  $U \subseteq X$  aperto e sia  $V = f(U)$ , allora  $V = (f^{-1})^{-1}(U)$ .  $f^{-1}$  è continua e  $U$  è aperto, quindi  $V = (f^{-1})^{-1}(U)$  è aperto. Abbiamo così dimostrato che  $f$  è aperta. In modo del tutto analogo si dimostra l'altra inclusione.  $\square$

**Definizione 4.1.3.** Siano  $X$  uno spazio vettoriale,  $A, B \subseteq X$  e  $\lambda$  uno scalare. Allora

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\};$$

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

**Teorema 4.1.4** (Teorema della mappa aperta). *Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi di Banach,  $A \in L(X, Y)$  suriettiva. Allora  $A$  è aperta.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo in primis che  $\overline{A(B_X(0, 1))}$  contiene una palla centrata nell'origine.

Siano  $x \in X$ ,  $n := [\|x\|_X] + 1$ . Allora  $\|x\|_X < n$  cioè  $x \in B_X(0, n)$ , da cui segue che  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_X(0, n)$ .

$A$  è suriettiva, quindi

$$Y = A(X) = A\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_X(0, n)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A(B_X(0, n)).$$

Poiché per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$   $A(B_X(0, n)) \subseteq \overline{A(B_X(0, n))}$ , si ha che  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A(B_X(0, n))}$ .

$Y$  è uno spazio completo e  $\{\overline{A(B_X(0, n))} : n \in \mathbb{N}^*\}$  è un ricoprimento chiuso di  $Y$ , quindi per il Corollario 2.1.3 (2) esiste  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tale che  $\text{int}(\overline{A(B_X(0, n_0))}) \neq \emptyset$ . Ne segue che  $\text{int}(\overline{A(B_X(0, 1))}) \neq \emptyset$ . Infatti  $A$  è lineare, allora

$$\overline{A(B_X(0, 1))} = \frac{1}{n_0} \overline{A(B_X(0, n_0))}, \text{ da cui } \text{int}(\overline{A(B_X(0, 1))}) \neq \emptyset.$$

Pertanto, esistono  $y \in \overline{A(B_X(0, 1))}$ ,  $s \in \mathbb{R}^+$  tali che  $B_Y(y, 2s) \subseteq \overline{A(B_X(0, 1))}$ . Allora

$$B_Y(0, 2s) = \{-y\} + B_Y(y, 2s) \subseteq \{-y\} + \overline{A(B_X(0, 1))}.$$

$A$  è lineare, quindi  $-y \in \overline{A(B_X(0, 1))}$ . Pertanto,

$$B_Y(0, 2s) \subseteq \overline{A(B_X(0, 1))} + \overline{A(B_X(0, 1))}. \quad (4.1)$$

Dimostriamo ora che

$$\overline{A(B_X(0, 1))} + \overline{A(B_X(0, 1))} \subseteq 2\overline{A(B_X(0, 1))}. \quad (4.2)$$

Sia  $z \in \overline{A(B_X(0, 1))} + \overline{A(B_X(0, 1))}$ , allora esistono  $z_1, z_2 \in \overline{A(B_X(0, 1))}$  tali che  $z = z_1 + z_2$ . Essendo  $z_1, z_2$  elementi appartenenti alla chiusura di  $A(B_X(0, 1))$  esistono due successioni  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $B_X(0, 1)$  tali che  $z_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n)$  e  $z_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} A(y_n)$ . Allora

$$\frac{z}{2} = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} A(y_n)}{2},$$

da cui per l'algebra dei limiti e la linearità di  $A$

$$\frac{z}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right).$$

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|_X = \frac{\|x_n + y_n\|_X}{2} \leq \frac{\|x_n\|_X + \|y_n\|_X}{2} < 1$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che  $x_n, y_n \in B_X(0, 1)$ . Quindi

$$\frac{z}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) \in \overline{A(B_X(0, 1))},$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $z$ ,

$$\overline{A(B_X(0, 1))} + \overline{A(B_X(0, 1))} \subseteq 2\overline{A(B_X(0, 1))}.$$

Allora, per (4.1) e (4.2),

$$B_Y(0, 2s) \subseteq \overline{2A(B_X(0, 1))}$$

da cui per la linearità di  $A$

$$B_Y(0, s) \subseteq \overline{A(B_X(0, 1))}. \quad (4.3)$$

Dimostriamo ora che  $B_Y\left(0, \frac{s}{2}\right) \subseteq A(B_X(0, 1))$ .

Per la linearità di  $A$  e (4.3)

$$B_Y\left(0, \frac{s}{2}\right) \subseteq \overline{A\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}.$$

Sia  $y \in B_Y\left(0, \frac{s}{2}\right)$ . Allora  $y \in \overline{A\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$  e quindi esiste  $x_1 \in B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)$  tale che  $\|y - A(x_1)\|_Y < \frac{s}{4}$ , da cui  $y - A(x_1) \in B_Y\left(0, \frac{s}{4}\right) \subseteq \overline{A\left(B_X\left(0, \frac{1}{4}\right)\right)}$ . Pertanto, esiste  $x_2 \in B_X\left(0, \frac{1}{4}\right)$  tale che  $\|y - A(x_1) - A(x_2)\|_Y < \frac{s}{8}$ .

Iterando il ragionamento si ottiene una successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  con le seguenti proprietà:

- (1)  $x_n \in B_X\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$ ;
- (2)  $\left\| y - \sum_{k=1}^n A(x_k) \right\|_Y < \frac{s}{2^{n+1}}$  cioè  $\left\| y - A\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \right\|_Y < \frac{s}{2^{n+1}}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$ .

In particolare  $\|x_n\|_X < \frac{1}{2^n}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$ , da cui

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_X < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1;$$

quindi, essendo  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio di Banach,  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  convergente, in virtù del

Lemma 1.5.1. Sia  $x := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ , allora, per il Lemma 1.5.1,

$$\|x\|_X \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_X < 1$$

da cui  $x \in B_X(0, 1)$ . Per (2)

$$0 \leq \left\| y - A \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \right\|_Y \leq \frac{s}{2^{n+1}}$$

allora, per il Teorema dei carabinieri e per la convergenza di  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ,

$$y = \lim_{n \rightarrow +\infty} A \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) = A \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n x_k \right) = A(x).$$

Essendo  $x \in B_X(0, 1)$  ciò implica  $y \in A(B_X(0, 1))$ . Per l'arbitrarietà di  $y$  segue che  $B_Y \left( 0, \frac{s}{2} \right) \subseteq A(B_X(0, 1))$ .

Siamo pronti a dimostrare la tesi del teorema. Sia  $U \subseteq X$  un aperto e sia  $y \in A(U)$ , allora esiste  $x \in U$  tale che  $y = A(x)$ . Se  $x \in U$ , essendo  $U$  aperto, esiste  $r \in \mathbb{R}^+$  tale che  $B_X(x, r) \subseteq U$ . Per quanto appena dimostrato esiste  $t \in \mathbb{R}^+$  tale che

$$B_Y(0, t) \subseteq A(B_X(0, 1)) \Rightarrow B_Y(0, rt) \subseteq A(B_X(0, r)).$$

Sia  $\sigma := rt \in \mathbb{R}^+$ , allora

$$\begin{aligned} B_Y(0, \sigma) \subseteq A(B_X(0, r)) &\Rightarrow B_Y(y, \sigma) = \{y\} + B_Y(0, \sigma) \subseteq A(\{x\}) + A(B_X(0, r)) \\ &= A(\{x\} + B_X(0, r)) = A(B_X(x, r)) \subseteq A(U). \end{aligned}$$

Pertanto,  $A(U)$  è aperto. Abbiamo così dimostrato che  $A$  è aperta.  $\square$

**Corollario 4.1.5.** *Siano  $X, Y$  due spazi di Banach,  $A \in L(X, Y)$  biunivoca. Allora  $A^{-1} \in L(Y, X)$ .*

*Dimostrazione.* Un'applicazione  $A$  lineare invertibile ha l'inversa  $A^{-1}$  che è lineare. Se  $A$  è anche continua allora per il Teorema 4.1.4  $A$  è aperta, quindi per il Lemma 4.1.2  $A^{-1}$  è continua.  $\square$

## 4.2 Applicazioni

Forniremo in questa sezione due applicazioni del Teorema della mappa aperta. La prima applicazione riguarda le equazioni differenziali. In particolare, supponiamo che esistano tre funzioni  $a, b, c \in C([0, 1])$  tali che per ogni  $f \in C([0, 1])$  il problema al bordo

$$\begin{cases} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) & \forall x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

abbia una e una sola soluzione  $u_f \in C^2([0, 1])$ .

**Corollario 4.2.1.** *Siano  $a, b, c \in C([0, 1])$  tali che per ogni  $f \in C([0, 1])$  il problema al bordo*

$$\begin{cases} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) & \forall x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione  $u_f \in C^2([0, 1])$ .

Allora esiste  $C \in \mathbb{R}^+$  tale che  $\|u_f\|_\infty + \|u'_f\|_\infty + \|u''_f\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$  per ogni  $f \in C([0, 1])$ .

*Dimostrazione.* Sia  $X := \{v \in C^2([0, 1]) : v(0) = v(1) = 0\}$  dotato della norma  $\|\cdot\|_X$  definita nel Teorema 1.6.2. Sia  $L : X \rightarrow C([0, 1])$ ,  $L(v) = L_v$  dove

$$L_v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_v(x) = a(x)v''(x) + b(x)v'(x) + c(x)v(x).$$

Facilmente si dimostra che  $L$  è un operatore lineare.

$L$  è biunivoca per come sono definiti  $a, b, c$ .

Siano  $v \in C([0, 1])$ ,  $x \in [0, 1]$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} |L(v)(x)| &= |a(x)v''(x) + b(x)v'(x) + c(x)v(x)| \\ &\leq |a(x)| \cdot |v''(x)| + |b(x)| \cdot |v'(x)| + |c(x)| \cdot |v(x)| \\ &\leq \max\{\|a\|_\infty, \|b\|_\infty, \|c\|_\infty\}(\|v\|_\infty + \|v'\|_\infty + \|v''\|_\infty). \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di  $x$  si deduce che

$$\|L(v)\|_\infty \leq \max\{\|a\|_\infty, \|b\|_\infty, \|c\|_\infty\}(\|v\|_\infty + \|v'\|_\infty + \|v''\|_\infty).$$

$L$  è un'applicazione lineare limitata, quindi per il Teorema 1.4.1 è anche continua. Pertanto, poiché  $X$  e  $C([0, 1])$  sono spazi di Banach (Corollario 1.2.3, Teorema 1.6.2),  $L^{-1}$  è un'applicazione lineare continua per il Corollario 4.1.5. Allora, per il Teorema 1.4.1,  $L^{-1}$  è un'applicazione lineare limitata, cioè esiste  $C \in \mathbb{R}^+$  tale che  $\|L^{-1}(f)\|_X \leq C\|f\|_\infty$  per ogni  $f \in C([0, 1])$ , da cui la tesi in quanto  $u_f = L^{-1}(f)$ .  $\square$

*Osservazione 4.2.2.* Il Corollario 4.2.1 afferma che se si dispone di tre funzioni  $a, b, c \in C([0, 1])$  tali che per ogni  $f \in C([0, 1])$  il problema al bordo

$$\begin{cases} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione  $u_f \in C^2([0, 1])$ , allora tale problema è ben posto, nel senso che a una piccola perturbazione dei dati in  $\|\cdot\|_\infty$  corrisponde una piccola perturbazione della soluzione in  $\|\cdot\|_X$ .

La prossima applicazione sarà utile per dimostrare il Teorema 5.1.1 del grafico chiuso. Essa riguarda le norme equivalenti, in particolare quest'ultima applicazione fornirà una condizione sufficiente per poter concludere, sotto opportune ipotesi, che due norme sono equivalenti.

**Corollario 4.2.3.** *Siano  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale dove  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\|\cdot\|'$ ,  $\|\cdot\|$  due norme su  $X$  con le seguenti proprietà:*

- (1) *esiste  $C \in \mathbb{R}^+$  tale che per ogni  $x \in X$   $\|x\|' \leq C\|x\|$ ;*
- (2)  *$(X, \|\cdot\|')$ ,  $(X, \|\cdot\|)$  sono spazi di Banach.*

Allora  $\|\cdot\|'$ ,  $\|\cdot\|$  sono norme equivalenti.

*Dimostrazione.* Consideriamo  $id_X : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|')$  e mostriamo che si tratta di una funzione continua. Sia  $A$  un aperto in  $(X, \|\cdot\|')$  e mostriamo che  $A = id_X^{-1}(A)$  è aperto in  $(X, \|\cdot\|)$ . Sia  $x_0 \in A$ .  $A$  è aperto in  $(X, \|\cdot\|')$ , quindi esiste  $r \in \mathbb{R}^+$  tale che  $B_{\|\cdot\|'}(x_0, r) \subseteq A$ . Sia  $x \in B_{\|\cdot\|}\left(x_0, \frac{r}{C}\right)$ , allora:

$$\|x - x_0\| < \frac{r}{C} \Rightarrow \|x - x_0\|' \leq C\|x - x_0\| < C \cdot \frac{r}{C} = r.$$

Quindi  $x \in B_{\|\cdot\|'}(x_0, r)$ , da cui  $B_{\|\cdot\|}\left(x_0, \frac{r}{C}\right) \subseteq B_{\|\cdot\|'}(x_0, r) \subseteq A$ , cioè  $A$  è aperto in  $(X, \|\cdot\|)$ . Abbiamo così dimostrato che  $id_X$  è continua.

$id_X$  è una funzione lineare, continua e biunivoca tra due spazi di Banach, quindi è aperta per il Teorema 4.1.4. Pertanto,  $id_X : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|')$  è continua e aperta, allora le topologie indotte da  $\|\cdot\|'$ ,  $\|\cdot\|$  coincidono, cioè  $\|\cdot\|'$ ,  $\|\cdot\|$  sono norme equivalenti.  $\square$

# Capitolo 5

## Teorema del grafico chiuso e applicazione

In questo capitolo enunceremo e dimostreremo un corollario del Teorema della mappa aperta, noto come Teorema del grafico chiuso, e ne forniremo un'applicazione.

### 5.1 Teorema del grafico chiuso

Il Teorema del grafico chiuso fornisce una condizione sufficiente per la continuità di un'applicazione lineare, in particolare fornisce un nuovo strumento per capire se una data applicazione lineare è continua.

**Teorema 5.1.1** (Teorema del grafico chiuso). *Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  spazi di Banach e  $A : X \rightarrow Y$  un'applicazione lineare tale che  $Gr(A)$  sia chiuso in  $X \times Y$ . Allora  $A$  è continua.*

*Dimostrazione.* Definiamo su  $X$  una nuova norma come segue:

$$\forall x \in X \quad \|x\|' := \|x\|_X + \|A(x)\|_Y.$$

Dimostriamo che  $(X, \|\cdot\|')$  è uno spazio di Banach.

Sia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $(X, \|\cdot\|')$ , allora

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n, m > n_\epsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\|' < \epsilon$$

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\|_X + \|A(x_n) - A(x_m)\|_Y < \epsilon.$$

Fissiamo  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  e siano  $n, m > n_\epsilon$ ; allora valgono le seguenti:

- (a)  $\|x_n - x_m\|_X < \epsilon$ ;
- (b)  $\|A(x_n) - A(x_m)\|_Y < \epsilon$ .

Dunque le successioni  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(A(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sono due successioni di Cauchy rispettivamente in  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  che sono spazi di Banach, quindi esistono  $x \in X$  e  $y \in Y$  tali che:

$$(a') \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_X = 0;$$

$$(b') \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A(x_n) - y\|_Y = 0.$$

Dato che  $Gr(A)$  è chiuso in  $X \times Y$ , ne deduciamo che  $y = A(x)$ .

Dimostriamo ora che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|' = 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|' &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|x_n - x\|_X + \|A(x_n) - A(x)\|_Y) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_X + \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A(x_n) - y\|_Y = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, la successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione convergente in  $(X, \|\cdot\|')$  ed  $x$  è il suo limite, da cui segue che  $(X, \|\cdot\|')$  è uno spazio di Banach.

$(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(X, \|\cdot\|')$  sono spazi di Banach e per ogni  $x \in X$   $\|x\|_X \leq \|x\|'$ , allora per il Corollario 4.2.3  $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|'$  sono norme equivalenti cioè, per il Teorema 1.1.2, esiste  $C \in \mathbb{R}^+$  tale che per ogni  $x \in X$

$$\|x\|' \leq C\|x\|_X \Rightarrow \|A(x)\|_Y \leq \|x\|' \leq C\|x\|_X \Rightarrow \|A(x)\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

$A$  è un'applicazione lineare limitata, quindi per il Teorema 1.4.1 è anche continua.  $\square$

*Osservazione 5.1.2.* Vale anche il viceversa del Teorema 5.1.1, in particolare se  $A$  è una funzione continua tra due spazi normati allora  $Gr(A)$  è chiuso.

Siano infatti  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(A(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  due successioni convergenti rispettivamente a  $x$  e a  $y$ .

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \Rightarrow A(x) = A\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = y \Rightarrow y = A(x).$$

Abbiamo così dimostrato che  $Gr(A)$  è chiuso.

## 5.2 Applicazione

Come applicazione del Teorema del grafico chiuso vediamo la continuità di una classe particolare di endomorfismi lineari, egli endomorfismi autoaggiunti su uno spazio di Hilbert.

**Corollario 5.2.1.** *Siano  $(X, \langle, \rangle)$  uno spazio di Hilbert,  $A : X \rightarrow X$  un endomorfismo lineare autoaggiunto, cioè tale che per ogni  $x, y \in X$*

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle .$$

*Allora  $A$  è un endomorfismo lineare continuo.*



*Dimostrazione.* Per il Teorema 5.1.1 è sufficiente dimostrare che  $Gr(A)$  è chiuso in  $X \times X$ . Siano  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(A(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  due successioni in  $X$ ,  $x$  e  $y \in X$  tali che:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x;$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = y.$$

Dobbiamo dimostrare che  $y = A(x)$ .

$A$  è un endomorfismo autoaggiunto, allora per ogni  $z \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle A(x_n), z \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, A(z) \rangle$$

da cui, per il Lemma 1.7.4,

$$\langle y, z \rangle = \langle x, A(z) \rangle .$$

$A$  è un endomorfismo autoaggiunto, allora  $\langle y, z \rangle = \langle A(x), z \rangle$  per ogni  $z \in X$ , dunque, scegliendo  $z = y - A(x)$ ,

$$\langle y - A(x), y - A(x) \rangle = 0, \text{ da cui } y = A(x).$$

□



# Bibliografia

- [1] P.G. Ciarlet, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2013.*
- [2] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Lezioni di Analisi matematica due, Zanichelli, 2020.*
- [3] D. Guidetti, *Dispense del corso "Elementi di Analisi Funzionale", Università di Bologna, Anno Accademico 2022/2023*
- [4] W. Rudin, *Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.*