

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Simmetrie in Meccanica Quantistica con applicazioni

Relatore:
Prof. Roberto Zucchini

Presentata da:
Mattia Pini

Anno Accademico 2022/2023

Sommario

Lo scopo di questa tesi consiste nel fornire una descrizione del concetto di simmetria e della sua utilità in Meccanica Quantistica. Partendo dalla definizione di simmetria, si prosegue esplorando il linguaggio attraverso cui essa si esprime, ossia la teoria dei gruppi, della quale vengono richiamati i principi basilari: definizione, gruppi dinamici, rappresentazioni e gruppi di Lie, ai quali è riservata un'attenzione particolare. Si analizzano infine le due simmetrie principali, quelle per traslazione e per rotazione, e si dimostra come esse conducano a leggi di conservazione e regole di selezione sulle transizioni quantistiche. Approfondendo infine il discorso relativo alle rotazioni, si è descritta la parametrizzazione di queste ultime tramite gli angoli di Eulero e si è ricavata l'espressione delle funzioni D di Wigner.

Indice

Introduzione	8
1 Richiami di Meccanica Quantistica	9
1.1 Stati e osservabili	9
1.2 Misura simultanea di due osservabili	12
1.3 Evoluzione temporale di un sistema quantistico e matrice S	13
1.4 Breve accenno di Meccanica Quantistica Relativistica	18
2 Trasformazioni, gruppi di simmetria e quantità conservate	19
2.1 Trasformazioni di coordinate e dei vettori di stato	19
2.2 Gruppi di simmetria in Fisica Quantistica	20
2.3 Gruppi di simmetria e loro realizzazione operatoriale	26
2.4 Gruppi di simmetria dinamici	29
2.5 Rappresentazioni	32
2.5.1 Rappresentazioni unitarie	35
2.6 Gruppi di Lie, trasformazioni infinitesime e costanti del moto	36
2.6.1 Gruppi di Lie e Algebre di Lie	36
2.6.2 Rappresentazioni unitarie dei gruppi di Lie	40
2.6.3 Simmetrie discrete	43
3 Invarianza per traslazione e conservazione dell'impulso	45
3.1 Traslazioni e impulso	45
3.2 Conservazione dell'impulso	47
4 Invarianza per rotazione e conservazione del momento angolare	49
4.1 Momento angolare e rotazioni	49
4.2 Conservazione del momento angolare	55
4.3 Parametrizzazione di una rotazione tramite gli angoli di Eulero	56

4.4	Azione di una rotazione sulle autofunzioni del momento angolare	58
4.4.1	Calcolo di $D^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma)$	61
4.4.2	Calcolo di $D^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma)$	62
4.4.3	Particella con spin semintero: un caso di rappresentazione a valori doppi	63
	Bibliografia	65

Introduzione

Le simmetrie sono da sempre uno degli aspetti più affascinanti della natura: le ritroviamo nelle forme geometriche, come per esempio nella forma dei fiocchi di neve, negli esseri viventi, basti pensare ai lineamenti dei volti degli esseri umani o alla simmetria degli arti di qualsiasi mammifero, fino ad arrivare addirittura nel mondo microscopico nella forma delle molecole e degli atomi che compongono la materia.

Esse sono così evidenti da essere ritenute da secoli una proprietà costitutiva della natura stessa, oltre che un modo per studiarla e indagarla: dove c'era simmetria c'era armonia, naturalezza, rispetto delle leggi del cosmo e bellezza. Tuttavia oggi comprendiamo che la simmetria rappresenta solo uno degli aspetti della complessità della natura, anche se rimane uno strumento di studio valido e praticamente applicabile in ogni campo, riflettendo un modo di pensare innato dell'uomo.

Per quanto riguarda la Fisica, il concetto di simmetria emerge fin dalle prime fasi dello sviluppo teorico, dato che le leggi fisiche devono essere le stesse per qualunque osservatore in qualunque punto dello spazio e del tempo: devono pertanto essere simmetriche, ossia rimanere invariate in forma, rispetto certe trasformazioni e cambi di sistema di riferimento. In Fisica Classica, inoltre, la loro importanza è ulteriormente sottolineata dal famoso teorema di Emmy Noether, il quale mette in relazione simmetrie e quantità conservate durante l'evoluzione temporale di un sistema fisico. La ricerca delle simmetrie di un sistema, ossia delle trasformazioni rispetto alle quali le leggi fisiche a cui il sistema obbedisce non variano, ha inoltre l'importanza fondamentale di far emergere proprietà intrinseche dello spazio quali isotropia e omogeneità.

E' possibile sfruttare l'utilità dello studio delle proprietà di simmetria di un sistema anche in Fisica Quantistica? Vedremo in questa tesi come, con alcuni accorgimenti, ciò sia ancora possibile e come la simmetria di un sistema conduca a leggi di conservazione e regole di selezione.

In particolare, nel capitolo 1 riprenderemo alcuni concetti basilari della Meccanica Quantistica di Schroedinger, introducendo inoltre il concetto di matrice di scattering S ; nel capitolo 2 forniremo un'introduzione al linguaggio delle simmetrie, ossia la teoria dei gruppi: si tratteranno, di seguito, la definizione di gruppo di simmetria, la sua realizzazione operatoriale (con esempi relativi al gruppo delle traslazioni e delle rotazioni), il concetto di gruppo dinamico, le rappresentazioni di un gruppo di simmetria e le proprietà dei gruppi di Lie. Nel capitolo 3 applicheremo i principi del capitolo 2 relativamente al caso delle traslazioni e vedremo come la simmetria per traslazione conduca

alla conservazione dell'impulso; nel capitolo 4 faremo la stessa cosa per quanto riguarda le rotazioni, arrivando a dimostrare la conservazione del momento angolare. Infine introdurremo una maniera di parametrizzare le rotazioni, attraverso i tre angoli di Eulero, che ci permetterà di calcolare le rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni $SO(3)$, le funzioni D di Wigner.

Capitolo 1

Richiami di Meccanica Quantistica

In questo breve capitolo verranno richiamati sinteticamente i principali aspetti della Meccanica Quantistica in maniera funzionale a quanto verrà poi trattato nei capitoli successivi. Per una trattazione più completa si vedano [8], [10], [3], [2], [1]. In particolare verranno trattati:

- la Meccanica Quantistica non relativistica di Schroedinger;
- il concetto di matrice S ;
- un brevissimo accenno alla Meccanica Quantistica Relativistica.

1.1 Stati e osservabili

Consideriamo un sistema di N particelle: a ogni istante di tempo t il suo stato è descritto da una **funzione d'onda** normalizzata $\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ che è funzione delle coordinate spaziali delle varie particelle. La condizione di normalizzazione risulta essere:

$$\int d\tau |\Psi|^2 = 1 \quad (1.1)$$

dove $d\tau = dx_1 dy_1 dz_1 \cdots dx_N dy_N dz_N$. D'ora in avanti, come è stato fatto in (1.1), la dipendenza delle funzioni d'onda dalle coordinate verrà sottintesa per una maggiore chiarezza espositiva; verrà esplicitata ove necessario.

Le funzioni d'onda soddisfano il cosiddetto **principio di sovrapposizione**: se $\Psi(\mathbf{x})$ e $\Phi(\mathbf{x})$ descrivono possibili stati di un sistema, allora anche una loro combinazione lineare

$$a\Psi + b\Phi$$

con $a, b \in \mathbb{C}$ e non entrambi nulli, descrive un possibile stato del sistema. Il principio si traduce matematicamente affermando che gli stati di un sistema formano uno spazio vettoriale complesso, in particolare uno **spazio di Hilbert**.

E' possibile fissare nello spazio di Hilbert H un insieme completo di funzioni d'onda normalizzate Ψ_1, Ψ_2, \dots , ossia una base, tali che:

- ogni Ψ_n risulta normalizzata:

$$\int d\tau |\Psi_n|^2 = 1$$

$n=1,2,\dots$;

- le funzioni d'onda sono ortogonali l'una all'altra:

$$\int d\tau \Psi_n^* \Psi_m = 0$$

per $n \neq m$, integrale di sovrapposizione per il quale si può adottare la scrittura più chiara e sintetica:

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = 0$$

sempre per $n \neq m$;

- l'insieme è completo, ossia ogni possibile stato del sistema può essere scritto come sovrapposizione degli Ψ_n con opportuni coefficienti c_n :

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n \quad (1.2)$$

con c_n dati da

$$c_n = \langle \Psi_n, \Psi \rangle$$

In Meccanica Quantistica un osservabile è rappresentato da un operatore **Hermitiano**, di cui richiamiamo brevemente la definizione:

Definizione 1.1.1 (Operatore Hermitiano) *Un operatore A nello spazio di Hilbert H è detto **Hermitiano** se:*

$$\langle \Psi, A\Phi \rangle = \langle A\Psi, \Phi \rangle \quad (1.3)$$

$\forall \Psi, \Phi$

Più genericamente, definendo l'operatore aggiunto A^+

Definizione 1.1.2 (Operatore aggiunto) *Dato un operatore A , il suo aggiunto A^+ è definito tramite la proprietà:*

$$\langle \Psi, A\Phi \rangle = \langle A^+\Psi, \Phi \rangle \quad (1.4)$$

$$\langle \Psi, A\Phi \rangle = \langle A^+\Psi, \Phi \rangle^* \quad (1.5)$$

rispettivamente nei casi lineare e antilineare.

un operatore risulta Hermitiano se $A^+ = A$. Non tutti gli operatori Hermitiani corrispondono a un osservabile: tra questi, quelli associati agli osservabili di un sistema quantistico sono detti **operatori autoaggiunti**.

In Meccanica Quantistica, gli unici risultati possibili di una misura di un osservabile A sono i suoi **autovalori** a_n : una autovalore di A è un valore a tale che

$$A\Phi = a\Phi \quad (1.6)$$

e la corrispondente funzione d'onda Φ è detta **autofunzione**. Ci sono in genere tante soluzioni scritte nella forma:

$$A\Phi_n = a_n\Phi_n \quad (1.7)$$

per $n=1,2,\dots$. Autovalori e autofunzioni hanno varie proprietà:

- se A è Hermitiano, tutti gli autovalori a_n sono reali;
- autofunzioni appartenenti ad autovalori diversi sono mutualmente ortogonali;
- se r autofunzioni linearmente indipendenti appartengono allo stesso autovalore, quest'ultimo è detto r -degenere;
- si assume che le autofunzioni di un osservabile formino una base dello spazio di Hilbert.

Se il sistema si trova in uno stato Ψ , la probabilità di ottenere il valore a come risultato di una misura di A è data da:

$$P(a) = \sum_n |c_n|^2 \quad (1.8)$$

dove la somma è estesa per tutti gli n tali che $a_n = a$ e dove i c_n sono i coefficienti delle Φ_n nell'espansione di Ψ in termini delle autofunzioni di A nella forma (1.2). Nel caso non degenere $P(a_n) = |c_n|^2$. L'ampiezza di probabilità di trovare il sistema nello stato Φ_n sapendo che si trovava prima della misura nello stato Ψ è data da:

$$\langle \Phi_n, \Psi \rangle \quad (1.9)$$

Se una sola autofunzione Φ_n corrisponde all'autovalore a_n , dopo la misura il sistema sarà immediatamente descritto da Φ_n . Più in generale se ci sono r autofunzioni $\Phi_{n_1}, \dots, \Phi_{n_r}$ il sistema si troverà in uno stato nella forma

$$\sum_{i=1}^r c_i \Phi_{n_i} \quad (1.10)$$

Dato un sistema quantistico in uno stato Ψ e un osservabile O , il suo valore di aspettazione è dato da:

$$\langle O \rangle = \langle \Psi, O\Psi \rangle \quad (1.11)$$

Per gli argomenti trattati in questa tesi sono fondamentali inoltre i concetti di **operatore unitario** e **antiunitario**, di cui richiamiamo brevemente le definizioni:

Definizione 1.1.3 (Operatore unitario) *Un operatore unitario è un operatore lineare*

$$U(\Phi a + \Phi' a') = U\Phi a + U\Phi' a' \quad (1.12)$$

che è invertibile e preserva il prodotto interno di Hilbert

$$\langle U\Phi', U\Phi \rangle = \langle \Phi', \Phi \rangle \quad (1.13)$$

Definizione 1.1.4 (Operatore antiunitario) *Un operatore antiunitario è un operatore antilineare*

$$U(\Phi a + \Phi' a') = U\Phi a^* + U\Phi' a'^* \quad (1.14)$$

che è invertibile e preserva il prodotto interno di Hilbert

$$\langle U\Phi', U\Phi \rangle = \langle \Phi', \Phi \rangle^* \quad (1.15)$$

a meno soltanto di una coniugazione complessa.

In entrambi i casi si ha $U^{-1} = U^\dagger$.

1.2 Misura simultanea di due osservabili

È piuttosto frequente incontrare situazioni in cui bisogna compiere una misura simultanea di due osservabili A e B . Affinché ciò sia possibile è necessario che A e B possiedano simultaneamente valori definiti. Chiariamo meglio questo punto: dato che in fisica quantistica le misure possono interferire tra loro a tal punto che, cercando di ottenere un valore definito per un osservabile, diventa impossibile farlo per altri (ad esempio cercando di ottenere un valore definito per la posizione x , non risulta più definito l'impulso p_x), quello di cui abbiamo bisogno è un insieme di osservabili Q_1, Q_2, \dots, Q_n detti **compatibili**, ossia tali che possono essere misurati simultaneamente senza interferenza. Questo in fisica classica è sempre possibile, dato che ogni insieme di osservabili risulta essere compatibile, ma non sempre in fisica quantistica. Immaginando ora di realizzare una misura multipla di due osservabili A e B di un sistema preparato in uno stato s descritto da una funzione d'onda Ψ , possiamo affermare che A e B hanno valori ben definiti solo se, ripetendo la misura più e più volte, otteniamo sempre gli stessi valori a per A e b per B . Questo accade se esiste una base di autofunzioni comuni di A e B , ossia se dopo la misura il

sistema si trova in uno stato Φ_n autofunzione sia dell'operatore A che dell'operatore B . Più in generale deve essere possibile trovare una base di autofunzioni comuni Φ_1, Φ_2, \dots di A e B per cui $\Psi = \sum_n c_n \Phi_n$ tali che $A\Phi_n = a_n \Phi_n$, $B\Phi_n = b_n \Phi_n$ per $n = 1, 2, \dots$

La condizione per cui due osservabili A e B siano compatibili, e dunque sia possibile trovare una base comune di autofunzioni, risulta essere il fatto che i due operatori corrispondenti agli osservabili commutino, ossia:

$$[A, B] = 0 \quad (1.16)$$

Riprendendo l'esempio prima citato per cui non è possibile misurare contemporaneamente la posizione x e l'impulso nella direzione x p_x , possiamo verificare immediatamente che i due corrispondenti operatori non commutano. Infatti, data l'espressione dell'operatore $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, si ha che, agendo su una generica funzione d'onda Ψ :

$$[x, p_x] \Psi = xp_x \Psi - p_x x \Psi = \quad (1.17)$$

$$= -xi\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\Psi) = \quad (1.18)$$

$$= -xi\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi + i\hbar \Psi + i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \Psi = \quad (1.19)$$

$$= i\hbar \Psi \quad (1.20)$$

Per cui $[x, p_x] = i\hbar$.

Infine possiamo dire che spesso risulta utile indicizzare le autofunzioni con gli autovalori degli osservabili di cui sono autostati, per esempio un'onda piana $\Psi_p(x) = e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ è autofunzione dell'operatore p_x appartenente all'autovalore p .

1.3 Evoluzione temporale di un sistema quantistico e matrice S

Le funzioni d'onda che descrivono gli stati di un sistema quantistico obbediscono a un'equazione d'onda che ne governa l'evoluzione temporale, l'**equazione di Schroedinger**:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (1.21)$$

dove H è l'operatore **Hamiltoniano**.

L'operatore Hamiltoniano H di un sistema quantistico può essere ottenuto in analogia al caso classico, ossia promuovendo a operatore l'Hamiltoniana classica come funzione delle coordinate e dei momenti operando per questi ultimi le sostituzioni $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$.

L'evoluzione temporale di un sistema quantistico si può riassumere nel modo seguente: dato uno stato $\Psi(s)$ al tempo iniziale s , lo stato al tempo $t \neq s$ si può scrivere come $\Psi(t) = U(t, s)\Psi(s)$, dove l'operatore $U(t, s)$ è soluzione

delle equazioni:

$$i\hbar \frac{\partial U(t, s)}{\partial t} = H(t)U(t, s) \quad (1.22)$$

$$i\hbar \frac{\partial U(t, s)}{\partial s} = -U(t, s)H(t) \quad (1.23)$$

data la condizione iniziale $U(s, s) = 1$. Si è mantenuta in questo caso la possibile dipendenza di H da t . $U(t, s)$ è detto **operatore d'evoluzione** e gode delle seguenti proprietà:

- Unitarietà e invertibilità: $U^+(t, s) = U^{-1}(t, s)$;
- $U(t, s) = U(t, u)U(u, s)$;
- $U(s, t) = U^{-1}(t, s)$.

La soluzione dell'equazione di Schroedinger (1.21) si risolve dunque al calcolo dell'operatore di evoluzione $U(t, s)$.

Se l'Hamiltoniana non dipende dal tempo, ossia $H(t) = H_0$, esso assume la forma semplice:

$$U(t, s) = U_0(t, s) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-s)H_0} \quad (1.24)$$

Un ruolo fondamentale nella risoluzione del problema dell'evoluzione temporale di un sistema quantistico è svolto dalla scelta della rappresentazione adeguata: non ci soffermeremo su questo aspetto dato che la trattazione delle rappresentazioni principali (Schroedinger, Heisenberg e Dirac) esula dallo scopo di questa tesi, tuttavia menzioniamo soltanto la **rappresentazione di Dirac/d'interazione** che risulta molto utile per lo studio dei processi di scattering, oltre ad essere l'unica in cui può essere introdotta la matrice S che verrà definita successivamente. Per maggiori dettagli vedere [10].

Una delle principali applicazioni dell'equazione di Schroedinger sono i processi di scattering, dai quali provengono la maggior parte delle informazioni che possediamo sulle particelle elementari. Un tipico processo di scattering è caratterizzato da alcune particelle iniziali, a e b , preparate in uno stato iniziale con momenti definiti e possibilmente anche orientazioni di spin definite, e dei prodotti finali c , d , e , ... che possono essere di natura diversa da quelle iniziali:

$$a + b \rightarrow c + d + e + \dots$$

La modellizzazione di un processo di scattering avviene nel modo seguente: le particelle prima e dopo l'interazione possono essere considerate particelle libere, preparate lontano dalla regione di interazione, la cui larghezza è circa $10^{-13}cm$, e rilevate poi a distanze di ordini di grandezza maggiori tali da annullare le interazioni reciproche. Quello che direttamente si ottiene tramite un esperimento di scattering è la distribuzione di probabilità degli impulsi $W(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d, \mathbf{p}_e, \dots)$ delle particelle finali. In linea di principio il calcolo diretto di W sarebbe possibile a partire dall'equazione di Schroedinger (1.21), dato che essa contiene tutte le informazioni sull'evoluzione temporale della

funzione d'onda del sistema. Ciò è possibile in alcuni semplici casi non relativistici, ma nel caso relativistico la questione si complica dato che l'interpretazione probabilistica delle funzioni d'onda crolla e l'equazione di Schroedinger viene modificata; risulta pertanto utile considerare come variabili basiche della teoria le ampiezze di scattering o di reazione, il cui modulo quadro fornisce la probabilità W . Siamo pronti ora a chiarire e definire il concetto di matrice S , che corrisponde all'ampiezza di reazione.

Supponiamo che, molto prima dell'interazione, il sistema sia stato preparato in uno stato ben definito (ciò è possibile dato che viene considerato come sistema di particelle libere) denotato da una funzione d'onda Φ_a , dove a è un indice, per semplicità discreto, che contiene tutti i vari numeri quantici (impulso, spin, isospin,...). Molto dopo l'interazione il sistema si troverà sempre in uno stato definito Ψ , il quale sarà complicato in generale contenendo sia componenti relative a stati finali anelastici sia elastici. Tuttavia grazie alla linearità dell'equazione di Schroedinger e al principio di sovrapposizione possiamo definire l'operatore S :

Definizione 1.3.1 (Operatore S) *Dato un sistema in uno stato iniziale ben definito con numeri quantici definiti Φ_a , l'operatore di scattering S è un operatore tale che lo stato finale del sistema a seguito di un processo di scattering può essere scritto come:*

$$\Psi = S\Phi_a \quad (1.25)$$

Da notare, come già evidenziato, che la definizione dell'operatore S è possibile nella rappresentazione di Dirac e non in quella di Schroedinger. L'operatore S si può considerare in un certo senso come funzione dell'Hamiltoniana. Definiamo ora l'elemento di matrice S :

Definizione 1.3.2 *Dato lo stato finale Ψ e lo stato rilevato Φ_b con tipi di particelle e momenti definiti, l'ampiezza di probabilità di trovare il sistema nello stato Φ_b dato lo stato reale Ψ è $\langle \Phi_b, \Psi \rangle$ che in questo caso diventa:*

$$\langle \Phi_b, S\Phi_a \rangle = S_{ba} \quad (1.26)$$

ed è detto *elemento di matrice S* .

Assumendo che a vari nel range di tutti i momenti e dei numeri quantici interni, gli stati ϕ_a sono ortonormali e formano una base:

$$\langle \Phi_b, \Phi_a \rangle = \delta_{ab} \quad (1.27)$$

$$\sum_a \Phi_a \Phi_a^* = 1 \quad (1.28)$$

Qualsiasi stato iniziale normalizzato potrebbe essere dunque espresso nella forma

$$\Phi = \sum_a c_a \Phi_a$$

con coefficienti c_a tali che

$$\sum_a |c_a|^2 = 1$$

Pertanto un sistema inizialmente in uno stato Φ sar  rilevato in uno stato finale Φ_b con una ampiezza di probabilit 

$$\langle \Phi_b, S\Phi \rangle = \sum_a c_a \langle \Phi_b, S\Phi_a \rangle \quad (1.29)$$

$$= \sum_a S_{ba} c_a \quad (1.30)$$

e dunque con probabilit :

$$|\sum_a S_{ba} c_a|^2 = \sum_a \sum_{a'} S_{ba} S_{ba'}^* c_a c_{a'}^* \quad (1.31)$$

Dato che lo stato iniziale risulta normalizzato e la probabilit  di trovare il sistema in un qualche stato finale   uguale a 1, sommando su b dobbiamo ottenere:

$$1 = \sum_b \sum_a \sum_{a'} S_{ba} S_{ba'}^* c_a c_{a'}^* \quad (1.32)$$

Data la conservazione della probabilit , la (1.32) deve vale per ogni possibile valore di c_a tale che valga la condizione sopra riportata. Da qui ricaviamo l'**unitariet ** di S :

$$\sum_b S_{ba} S_{ba'}^* = \delta_{aa'} \quad (1.33)$$

che scritta esplicitamente:

$$\sum_b \langle \Phi_{a'}, S^+ \Phi_b \rangle \langle \Phi_b, S\Phi_a \rangle = \delta_{aa'} \quad (1.34)$$

e dunque:

$$\langle \Phi_{a'}, S^+ S\Phi_a \rangle = \delta_{aa'} \quad (1.35)$$

il che   equivalente a

$$S^+ S = 1 \quad (1.36)$$

Con alcune precisazioni in cui non ci addentreremo si pu  ottenere anche la relazione gemella:

$$SS^+ = 1 \quad (1.37)$$

che dimostra l'unitariet  dell'operatore S , la quale esprime la conservazione della probabilit .

Avendo fornito una spiegazione sintetica del concetto di operatore di scattering S , vediamone ora l'utilit . Per prima cosa possiamo scriverlo in funzione di un altro operatore, il cosiddetto **operatore di transizione** T , i cui

elementi di matrice descrivono le interazioni tra i costituenti del sistema quantistico in esame: se le particelle del sistema sono considerate non interagenti, lo stato finale sarà esattamente uguale allo stato iniziale e l'operatore di scattering corrisponderà all'operatore unità $S = 1$; pertanto, nel caso più generale con presenza di interazioni, S può essere scritto come:

$$S = 1 + iT \quad (1.38)$$

Vedremo come i principi di simmetria imporranno condizioni sulla forma di S e T . Inoltre, dato che S è in un certo senso funzione dell'Hamiltoniana, ogni osservabile Q che commuta con H :

$$[H, Q] = 0$$

commuterà anche con l'operatore S :

$$[Q, S] = 0 \quad (1.39)$$

Vedremo successivamente come un osservabile che commuta con H si conserva ed è detto **costante del moto**. La (1.39) ha notevoli implicazioni fisiche: se il sistema si trova in uno stato iniziale Φ_a autostato di un osservabile Q con autovalore q_a che commuta con S :

$$Q\Phi_a = q_a\Phi_a$$

allora lo stato finale $\Psi = S\Phi_a$ è ancora autostato di Q , per cui:

$$Q\Psi = QS\Phi_a = SQ\Phi_a = q_a S\Phi_a = q_a\Psi$$

Considerando gli elementi di matrice e applicando Q a sinistra su Φ_b e a destra su Φ_a otteniamo:

$$\langle \Phi_b, QS\Phi_a \rangle = \langle \Phi_b, SQ\Phi_a \rangle \quad (1.40)$$

$$q_b \langle \Phi_b, S\Phi_a \rangle = \langle \Phi_b, S\Phi_a \rangle q_a \quad (1.41)$$

per cui:

$$\langle \Phi_b, S\Phi_a \rangle = 0 \quad (1.42)$$

a meno che $q_b = q_a$. Dunque, se Q è conservato e il sistema è inizialmente in un autostato di Q con autovalore q_a , esso può effettuare transizioni solo a stati finali con lo stesso autovalore di Q .

1.4 Breve accenno di Meccanica Quantistica Relativistica

Come abbiamo già accennato precedentemente, quando si passa dal considerare fenomeni su scala atomica ($10^{-8}cm$) a fenomeni su scala nucleare ($10^{-13}cm$) le velocità diventano talmente elevate che entrano in gioco le leggi della Relatività Speciale e l'equazione di Schroedinger va modificata. Le versioni relativistiche dell'equazione di Schroedinger (equazione di **Klein-Gordon** ed equazione di **Dirac**) ci conducono tuttavia sulla strada della teoria quantistica dei campi, argomento che esula dallo scopo di questa tesi. Ci limitiamo dunque a osservare che l'unica descrizione relativistica di cui abbiamo bisogno per analizzare i processi di scattering è quella di particelle libere, dato che le uniche osservazioni sono compiute prima e dopo l'interazione, dove le particelle non sono sottoposte ad alcuna interazione.

Capitolo 2

Trasformazioni, gruppi di simmetria e quantità conservate

Le trasformazioni di simmetria, ossia operazioni che preservano le proprietà del sistema in esame, erano già ritenute importanti in Meccanica Classica e in Teoria Classica dei Campi in quanto, tramite il famoso teorema di Noether, conducevano a leggi di conservazione spesso molto utili per semplificare la soluzione di problemi fisici. Esse, tuttavia, risultano ugualmente importanti in Meccanica Quantistica, dove per esempio permettono di stabilire regole di selezione per transizioni quantistiche e di calcolare gli spettri esatti delle Hamiltoniane utilizzando la teoria dei gruppi. In questo capitolo forniremo una breve introduzione al concetto di simmetria in fisica quantistica, di gruppo di simmetria, di gruppo di Lie, di rappresentazione, di quantità conservate e di principio d'invarianza, il tutto correlato da vari esempi utili.

2.1 Trasformazioni di coordinate e dei vettori di stato

Nel capitolo precedente, abbiamo sempre assunto implicitamente un sistema di riferimento Σ rispetto al quale esprimere tutte le quantità utilizzate. Cosa accade se cambiamo sistema di riferimento spostandoci in un nuovo Σ' definito dall'equazione:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

che indica le coordinate di un punto $P \in \Sigma'$ in termini delle coordinate di $P \in \Sigma$?

In generale la forma delle funzioni d'onda e degli operatori cambierà nel nuovo sistema di riferimento:

$$\Psi(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi'(\mathbf{x}') \quad (2.2)$$

$$O \rightarrow O' \quad (2.3)$$

2.2 Gruppi di simmetria in Fisica Quantistica

Quando due sistemi Σ' e Σ , legati da una certa trasformazione nella forma (2.1), sono equivalenti per formulare le leggi che descrivono il comportamento di un sistema, si parla di **simmetria** del sistema e la trasformazione che lega i due sistemi è detta **trasformazione di simmetria**. Chiariamo meglio cosa si intende per trasformazione di simmetria e come esse si realizzano in maniera operativa.

Le trasformazioni di simmetria sono operazioni che agiscono:

- sui dispositivi che preparano gli stati di un sistema quantistico;
- sugli apparati che misurano gli osservabili di un sistema quantistico.

Esse hanno la proprietà chiave di non modificare i risultati degli esperimenti: il risultato ottenuto a seguito di un esperimento eseguito su un sistema quantistico deve essere lo stesso prima e dopo l'azione di una trasformazione di simmetria.

Come vedremo nel dettaglio, alcune delle più famose trasformazioni di simmetria sono le traslazioni spaziali, in quanto, a causa dell'omogeneità dello spazio, traslare uniformemente tutti i dispositivi di preparazione e gli apparati di misura non altera i risultati degli esperimenti. Allo stesso modo si comportano anche le rotazioni spaziali, in quanto la rotazione uniforme di tutti i dispositivi di preparazione e degli apparati di misura non modifica i risultati degli esperimenti a causa dell'isotropia dello spazio, e, in ambito relativistico, i boosts di Lorentz, dato che i risultati degli esperimenti sono i medesimi in un dato sistema di riferimento inerziale e in tutti gli altri sistemi inerziali che si muovono a velocità costante rispetto a quello dato, a causa dell'isotropia dello spazio-tempo.

In generale le trasformazioni di simmetria si raggruppano in famiglie con proprietà speciali. Siamo pronti a dare ora una delle definizioni fondamentali, ossia quella di una struttura algebrica con il nome di **gruppo**.

Definizione 2.2.1 (Gruppo) *Una famiglia di trasformazioni G , dotata di una certa operazione (prodotto) tale che $\forall g, g' \in G, g' \cdot g \in G$ è un **gruppo** se:*

1. $\exists e \in G$ tale che $e \cdot g = g \cdot e = g \forall g \in G$ (e è detto *elemento neutro*).
2. $\forall g \in G \exists g^{-1}$ tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ (g^{-1} annulla l'effetto di una trasformazione g ed è pertanto chiamata *inversa di g*).

3. Vale l'associatività: $\forall g, g', g'' \in G, g'' \cdot (g' \cdot g) = (g'' \cdot g') \cdot g$.

Poiché G risulta costituito da trasformazioni di simmetria, esso prende il nome di **gruppo di simmetria**. Molta importanza è data anche ai concetti di **gruppo Abeliano/non Abeliano** e **gruppo finito/infinito**

Definizione 2.2.2 (Gruppo Abeliano) Un gruppo G è detto **Abeliano** se è commutativo, ossia se

$$g' \cdot g = g \cdot g' \quad \forall g, g' \in G.$$

Altrimenti viene chiamato **non Abeliano**.

Definizione 2.2.3 (Gruppo finito/infinito) Un gruppo G è detto **finito** se contiene un numero finito di elementi; altrimenti è detto **infinito**.

Esempio 2.2.1 (Simmetria per traslazione spaziale) A ogni vettore spostamento $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ è associata un'operazione di traslazione $T(\mathbf{x})$. Se uno stato s è realizzato tramite la preparazione di un certo dispositivo, allora lo stato $T(\mathbf{x}) \cdot s$ è realizzato tramite lo stesso dispositivo preparatorio tuttavia traslato di \mathbf{x} rispetto al precedente, e similmente se un osservabile a è registrato tramite un certo apparato sperimentale, allora l'osservabile $T(\mathbf{x}) \cdot a$ è registrato traslando l'apparato di \mathbf{x} . Dato che i risultati sperimentali rimangono invariati prima e dopo la traslazione a causa dell'omogeneità dello spazio, per $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ $T(\mathbf{x})$ è una trasformazione di simmetria. Le traslazioni spaziali formano un gruppo denotato da \mathbb{E}^3 poiché i suoi elementi sono in corrispondenza uno a uno con quelli di \mathbb{E}^3 . Si ha dunque:

$$T(\mathbf{x}_1) \cdot T(\mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad (2.4)$$

$$T(\mathbf{x})^{-1} = T(-\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

$$E = T(\mathbf{0}) \quad (2.6)$$

A seguito di una traslazione uniforme di un vettore \mathbf{a} , un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ si trasformerà in:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (2.7)$$

Esempio 2.2.2 (Simmetria per rotazione spaziale) A ogni angolo vettoriale $\phi = \phi \mathbf{n} \in \mathbb{E}^3$, c'è associata un'operazione di rotazione spaziale $R(\phi)$ di un angolo ϕ attorno all'asse con direzione specificata dal versore \mathbf{n} . Se uno stato s è realizzato tramite un certo dispositivo di preparazione, allora lo stato $R(\phi) \cdot s$ è ottenuto tramite lo stesso dispositivo ruotato però di ϕ rispetto a prima, e similmente se un osservabile a è registrato tramite un certo apparato sperimentale, allora l'osservabile $R(\phi) \cdot a$ è ottenuto ruotando l'apparato di ϕ . Anche in questo caso, a causa dell'isotropia dello spazio, i risultati sperimentali non cambiano e pertanto, per $\phi \in \mathbb{E}^3$, $R(\phi)$ è una trasformazione

di simmetria. Le rotazioni spaziali formano un gruppo denominato $SO(\mathbb{E}^3)$. Si ha dunque:

$$R(\phi_1) \cdot R(\phi_2) = R(\theta(\phi_1, \phi_2)) \quad (2.8)$$

$$R(\phi)^{-1} = R(-\phi) \quad (2.9)$$

$$E = R(\mathbf{0}) \quad (2.10)$$

dove $\theta(\phi_1, \phi_2)$ è un angolo vettoriale che dipende dagli angoli vettoriali di partenza.

Come agiscono le rotazioni su un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$? Il gruppo delle rotazioni in 3 dimensioni, che denominiamo $SO(3)$, consiste in tutte le trasformazioni lineari in uno spazio euclideo a tre dimensioni, come abbiamo già visto sopra, **che lasciano invariata la lunghezza dei vettori**. Considerando un sistema di riferimento cartesiano con base ortonormale $\{\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3\}$, a seguito di una rotazione esso si trasformerà:

$$\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}'_i = \sum_j R_{ji} \mathbf{e}_j \quad (2.11)$$

dove le \mathbf{R} sono matrici 3×3 a coefficienti reali. La richiesta di preservare la lunghezza dei vettori si traduce nell'ortogonalità delle matrici $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{1}$ ($O=Orthogonal$). Il determinante di queste matrici è ± 1 , ma siccome vogliamo che ogni rotazione sia connessa con continuità all'identità, richiediamo che abbiano determinante $+1$ ($S=Special$, cioè con $\det(\mathbf{R}) = 1$): da qui il nome $SO(3)$. Le matrici ortogonali a determinante -1 corrispondono a rotazioni combinate con la trasformazione di parità (riflessione degli assi) e vengono in genere trattate a parte.

Cogliamo l'occasione per addentrarci un po' più a fondo nel concetto di rotazione. Altre informazioni si troveranno nelle sezioni successive di questo capitolo e nell'ultimo. Nella parametrizzazione **asse-angolo** (una delle più utilizzate, insieme a quella con gli angoli di Eulero descritta nell'ultimo capitolo) una generica rotazione infinitesima di un vettore \mathbf{x} di un angolo infinitesimo $\delta\phi$ attorno a un generico asse di versore \mathbf{n} si può scrivere come (Fig.(2.1)):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\phi \times \mathbf{x} \quad (2.12)$$

dove $\delta\phi$ è un angolo vettoriale infinitesimo $\delta\phi\mathbf{n}$.

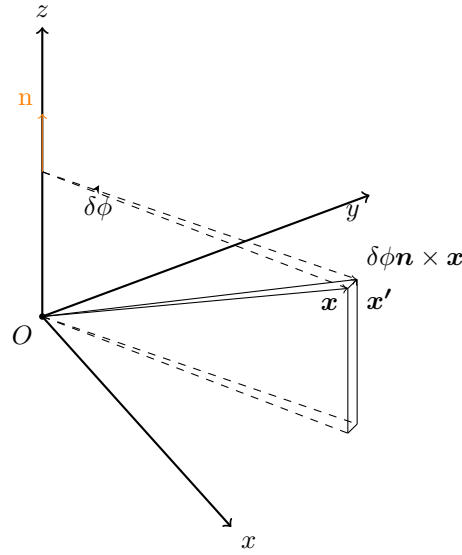


Figura 2.1: La rotazione di un angolo infinitesimo $\delta\phi$ attorno a un asse \mathbf{n} trasla un vettore \mathbf{x} di un vettore $\delta\phi\mathbf{n} \times \mathbf{x}$

Il termine $\delta\phi \times \mathbf{x}$ si può scrivere come una matrice 3×3 ($-*\delta\phi$) applicata al vettore \mathbf{x} :

$$-*\delta\phi\mathbf{x} = \delta\phi \times \mathbf{x} \quad (2.13)$$

con

$$*\delta\phi = \begin{pmatrix} 0 & \delta\phi_3 & -\delta\phi_2 \\ -\delta\phi_3 & 0 & \delta\phi_1 \\ \delta\phi_2 & -\delta\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Si ha dunque:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - *\delta\phi\mathbf{x} = (1 - *\delta\phi)\mathbf{x} \quad (2.15)$$

Una rotazione finita di un angolo vettoriale ϕ può dunque essere pensata come il limite di n rotazioni infinitesime:

$$R(\phi)\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} R\left(\frac{\phi}{n}\right)^n \mathbf{x} \quad (2.16)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{*\phi}{n}\right)^n \mathbf{x} \quad (2.17)$$

$$= e^{-*\phi} \mathbf{x} \quad (2.18)$$

Vedremo come questo tipo di ragionamento possa essere esteso ad altre trasformazioni che, come le rotazioni, dipendono da parametri continui.

Vogliamo ora ricavare le espressioni del caso particolare di una rotazione di un angolo ϕ attorno all'asse z . Per prima cosa notiamo che vale il seguente teorema:

Teorema 2.2.1 Se $\mathbf{R} \in O(3)$, ossia \mathbf{R} è una matrice ortogonale 3×3 ($\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{1}$), allora $\exists \epsilon \in$

$\{-1, +1\}$, $\phi \in [0, \pi]$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{n}| = 1$ tali che:

$$\mathbf{R} = \epsilon [\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \cos(\phi)(1 - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \sin(\phi) * \mathbf{n}] \quad (2.19)$$

Vale anche il viceversa: se \mathbf{R} è data dalla formula sopra con i parametri che soddisfano le condizioni sopracitate, allora $\mathbf{R} \in O(3)$.

Per la dimostrazione di questo teorema fare riferimento a [9]. In ciò che segue assumeremo sempre $\epsilon = +1$ dato che stiamo trattando rotazioni appartenenti a $SO(3)$ e dunque a determinate pari a $+1$.

Fissata una base ortonormale orientata di \mathbb{R}^3 $\{\mathbf{e}_i : i = 1, 2, 3\}$ e ponendo $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ si ottiene:

$$\mathbf{R}(\phi, \mathbf{n})\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 \hat{R}(\phi, \mathbf{n})_{ji} \mathbf{e}_j \quad (2.20)$$

con $\hat{R}(\phi, \mathbf{n})$ matrice 3×3 a coefficienti reali:

$$\hat{R}(\phi, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Infatti, ponendo $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ in (2.19):

$$\mathbf{R}(\phi, \mathbf{n})\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \cos(\phi)(1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) - \sin(\phi) * \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_i \quad (2.22)$$

$$= (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_3 + \cos(\phi)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_3) + \sin(\phi) \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_i) \quad (2.23)$$

$$= (\delta_{3i} \mathbf{e}_3 + \cos(\phi)(\mathbf{e}_i - \delta_{3i} \mathbf{e}_3) + \sin(\phi) \sum_{j=1}^3 \epsilon_{3ij} \mathbf{e}_j) \quad (2.24)$$

Si ricavano da questa le relazioni esplicite:

$$\mathbf{R}(\phi, \mathbf{n})\mathbf{e}_1 = [\cos(\phi)\mathbf{e}_1 + \sin(\phi)\mathbf{e}_2] \quad (2.25)$$

$$\mathbf{R}(\phi, \mathbf{n})\mathbf{e}_2 = [-\sin(\phi)\mathbf{e}_1 + \cos(\phi)\mathbf{e}_2] \quad (2.26)$$

$$\mathbf{R}(\phi, \mathbf{n})\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \quad (2.27)$$

da cui si ottengono subito (2.20) e (2.21).

Sia ora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$. Si ha:

$$\mathbf{R}(\phi, \mathbf{n})\mathbf{x} = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{R}(\phi, \mathbf{n})\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \hat{R}(\phi, \mathbf{n})_{ij} x_j \right) \mathbf{e}_i \quad (2.28)$$

Esplicitando le somme:

$$\sum_{j=1}^3 \hat{R}(\phi, \mathbf{n})_{1j} x_j = \cos(\phi)x - \sin(\phi)y \quad (2.29)$$

$$\sum_{j=1}^3 \hat{R}(\phi, \mathbf{n})_{2j} x_j = \sin(\phi)x + \cos(\phi)y \quad (2.30)$$

$$\sum_{j=1}^3 \hat{R}(\phi, \mathbf{n})_{3j} x_j = z \quad (2.31)$$

si ottiene finalmente:

$$x \rightarrow x' = x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \quad (2.32)$$

$$y \rightarrow y' = x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \quad (2.33)$$

$$z \rightarrow z' = z \quad (2.34)$$

Menzioniamo senza scendere nei dettagli che nei calcoli e nelle espressioni precedenti abbiamo fatto uso della definizione di **prodotto stella** $*$ e **prodotto diretto** \otimes , che qui richiamiamo:

Definizione 2.2.4 (Prodotto stella) Per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, dato che la mappa $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow -\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ è lineare, definiamo la matrice 3×3 a coefficienti reali:

$$(*\mathbf{x})\mathbf{y} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y} \quad (2.35)$$

detta **prodotto stella**.

Definizione 2.2.5 (Prodotto diretto) Dati due elementi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, dato che la mappa $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ è lineare, possiamo definire la matrice 3×3 a coefficienti reali:

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}\mathbf{x} \quad (2.36)$$

con $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, detta **prodotto diretto**.

Dato un gruppo di simmetria G , vorremmo trovare ora una sua realizzazione, ossia come le sue trasformazioni agiscono sulla funzione d'onda e sugli osservabili. Vorremmo in pratica poter scrivere ${}^g\Psi = U(g)\Psi$, dove $U(g)$ è un generico operatore che realizza una trasformazione $g \in G$, e una corrispondente legge di trasformazione per gli osservabili; in questo ci verrà in aiuto il teorema di Wigner, il quale afferma che gli operatori $U(g)$ devono essere unitari o antiunitari.

2.3 Gruppi di simmetria e loro realizzazione operatoriale

Come abbiamo visto nel capitolo 1 in fisica quantistica stati e osservabili di un sistema sono rappresentati rispettivamente da vettori normalizzati definiti a meno di un fattore di fase moltiplicativo nello spazio di Hilbert H e da operatori autoaggiunti nell'algebra operatoriale $L(H)$. L'invarianza dei risultati sperimentali sotto l'azione di un gruppo di simmetria si riduce all'invarianza dei valori di aspettazione: se Ψ è uno stato, O è un osservabile e $g \in G$ è una trasformazione di simmetria, ${}^g\Psi$ e gO sono rispettivamente stato e osservabile trasformati di Ψ e O , per l'invarianza è necessario avere:

$$\langle {}^g\Psi, {}^gO^g\Psi \rangle = \langle \Psi, O\Psi \rangle \quad (2.37)$$

Esiste, inoltre, una classe elementare di osservabili, i cosiddetti osservabili "sì/no", definiti dal valore 0 o 1 a seconda che il sistema si trovi in un certo stato Φ o no. L'operatore associato è dato da:

$$O_\Phi\Psi = \Phi \langle \Phi, \Psi \rangle \quad (2.38)$$

Il valore di aspettazione di un osservabile "sì/no" in Ψ è la probabilità di transizione da Ψ a Ψ' :

$$\langle \Psi, O_{\Psi'}\Psi \rangle = |\langle \Psi', \Psi \rangle|^2 \quad (2.39)$$

Pertanto l'invarianza dei valori di aspettazione si riduce all'invarianza delle probabilità di transizione

$$|\langle {}^g\Psi', {}^g\Psi \rangle|^2 = |\langle \Psi', \Psi \rangle|^2 \quad (2.40)$$

Per il **teorema di Wigner** questa proprietà ci assicura l'esistenza di un operatore unitario o antiunitario $U(g)$ che realizza la trasformazione di simmetria g :

$${}^g\Psi = U(g)\Psi \quad (2.41)$$

$${}^gO = U(g)OU(g)^+ \quad (2.42)$$

La seconda delle relazioni sopra viene dal calcolo seguente: per prima cosa, come affermato all'inizio della sezione, richiediamo che il valore di aspettazione dell'osservabile trasformato gO nello stato ${}^g\Psi$ sia uguale a quello di O in Ψ , ossia

$$\langle {}^g\Psi, {}^gO^g\Psi \rangle = \langle \Psi, O\Psi \rangle \quad (2.43)$$

Esplicitando il termine a sinistra tramite $U(g)$:

$$\langle {}^g\Psi, {}^gO^g\Psi \rangle = \langle U(g)\Psi, {}^gOU(g)\Psi \rangle \quad (2.44)$$

$$= \langle \Psi, U(g)^{+g}OU(g)\Psi \rangle \quad (2.45)$$

$$= \langle \Psi, O\Psi \rangle \quad (2.46)$$

e dunque

$$U(g)^{+g}OU(g) = O \quad (2.47)$$

che, data l'unitarietà di $U(g)$, equivale a:

$${}^gO = U(g)OU(g)^+ \quad (2.48)$$

Un caso particolare si verifica quando un osservabile O è invariante rispetto la trasformazione considerata: in tal caso:

$${}^gO = O \quad (2.49)$$

$$\rightarrow U(g)OU(g)^+ = O \quad (2.50)$$

$$\rightarrow [U(g), O] = 0 \quad (2.51)$$

ossia O commuta con $U(g)$. Lasciando variare g nel gruppo G , otteniamo una famiglia di operatori unitari (o antiunitari) $U(g)$ contenuti nell'algebra operatoriale $L(H)$.

Concludiamo dicendo che il caso di operatore antiunitario si verifica soltanto per la trasformazione di simmetria di inversione temporale e per tutte le trasformazioni che la coinvolgono (ad esempio CPT).

Approfondiamo questo ultimo aspetto: dato un sistema in uno stato s descritto all'istante di tempo t da una funzione d'onda $\Psi(t)$, la trasformazione di inversione temporale sarà realizzata da un operatore U_T , unitario o antiunitario:

$$U_T\Psi(t) = \Psi(-t) \quad (2.52)$$

Esprimendo $\Psi(t)$ in termini dell'operatore d'evoluzione:

$$\Psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\Psi(0) \quad (2.53)$$

dove $\Psi(0)$ è lo stato iniziale, e inserendo (2.53) in (2.52) si ottiene:

$$U_T e^{-\frac{i}{\hbar}tH} U_T^\dagger U_T \Psi(0) = \Psi(-t) \quad (2.54)$$

$$\rightarrow U_T e^{-\frac{i}{\hbar}tH} U_T^\dagger \Psi(0) = e^{\frac{i}{\hbar}tH} \Psi(0) \quad (2.55)$$

$$\rightarrow U_T e^{-\frac{i}{\hbar}tH} U_T^\dagger = e^{\frac{i}{\hbar}tH} \quad (2.56)$$

dove rispettivamente in (2.55) e (2.56) si è utilizzato il fatto che $U_T \Psi(0) = \Psi(0)$ e che lo stato iniziale $\Psi(0)$ è arbitrario. Ora, differenziando rispetto a t in $t = 0$, otteniamo:

$$U_T (-iH) U_T^\dagger = iH \quad (2.57)$$

Dato che U_T per il teorema di Wigner deve essere unitario o antiunitario, si possono dunque verificare due casi:

1. U_T unitario: $U_T H U_T^\dagger = -H$;
2. U_T antiunitario: $U_T H U_T^\dagger = +H$;

Tuttavia il caso (1) è da scartare, dato che se per assurdo il sistema fosse in uno stato Ψ autostato di H :

$$H\Psi = h\Psi$$

applicando l'operatore di inversione temporale U_T otterremmo:

$$H U_T \Psi = -U_T H \Psi \quad (2.58)$$

$$= -h U_T \Psi \quad (2.59)$$

ossia H e U_T anticommuterebbero e $U_T \Psi$ sarebbe autostato di H con energia $-h$. Questo non ha senso, come si può vedere analizzando il semplice caso di una particella libera: lo spettro di energia è semidefinito positivo (da 0 a $+\infty$) e non esiste alcuno stato al di sotto di quello di una particella a riposo, descritta da un'autofunzione dell'impulso con autovalore d'impulso pari a 0. Lo spettro da $-\infty$ a 0 è completamente inaccettabile e pertanto l'operatore che realizza la trasformazione di inversione temporale deve essere antiunitario, così come quello di tutte le altre trasformazioni che la coinvolgono.

Al contrario le simmetrie che dipendono da parametri continui, come per esempio le traslazioni e le rotazioni, non possono che essere realizzate tramite operatori unitari, dato che non si ha modo di passare con continuità da unitarietà ad antiunitarietà.

2.4 Gruppi di simmetria dinamici

Dato che l'evoluzione temporale di un sistema quantistico è governata dall'Hamiltoniana H del sistema, le trasformazioni di simmetria di maggior interesse sono quelle che lasciano quest'ultima invariata. Da qui possiamo dunque definire il concetto di **gruppo di simmetria dinamico**:

Definizione 2.4.1 (Gruppo di simmetria dinamico) *Un gruppo di simmetria G è detto **dinamico** se, agendo con una qualsiasi trasformazione di simmetria di G sul dispositivo che prepara gli stati del sistema in esame ma non sull'apparato che misura l'energia, i risultati sperimentali rimangono invariati. Da notare come anche includendo l'apparato di misura dell'energia, i risultati non variano.*

Dunque, quando G è un gruppo di simmetria dinamico, $\forall g \in G$ l'Hamiltoniana H del sistema soddisfa la relazione:

$${}^g H = H \quad (2.60)$$

Se G agisce tramite una rappresentazione unitaria U , la (2.60) si riduce a

$$U(g)HU(g)^+ = H \quad (2.61)$$

In pratica H commuta con tutti gli operatori unitari $U(g)$, una proprietà molto utile che vincola la forma di H e ci fornisce varie informazioni sulla forma delle interazioni a cui il sistema è soggetto. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 2.4.1 (L'atomo di Idrogeno) *La forma standard dell'Hamiltoniana dell'atomo di Idrogeno risulta essere:*

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}). \quad (2.62)$$

Un'osservazione diretta mostra che tutte le rotazioni proprie dei dispositivi che preparano gli stati dell'atomo lasciano invariate le misurazioni di energia, pertanto il gruppo proprio delle rotazioni $SO(3)$ è dinamico. L'atomo ha simmetria sferica e, dalla (2.61), otteniamo:

$$U(\mathbf{R})HU(\mathbf{R})^+ = H \quad (2.63)$$

$\forall \mathbf{R} \in SO(3)$, dove U è la rappresentazione unitaria tramite cui il gruppo agisce. Vediamo ora come la simmetria rispetto $SO(3)$ ci conduce a un vincolo sulla forma del potenziale $V(\mathbf{q})$. Per prima cosa possiamo assumere ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{q} = \mathbf{R}\mathbf{q}$

e ${}^R\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{p}$ cosicché:

$$U(\mathbf{R})\mathbf{q}U(\mathbf{R})^+ = \mathbf{R}\mathbf{q} \quad (2.64)$$

$$U(\mathbf{R})\mathbf{p}U(\mathbf{R})^+ = \mathbf{R}\mathbf{p} \quad (2.65)$$

Queste relazioni, insieme alla (2.61), implicano:

$$\frac{(\mathbf{R}\mathbf{p})^2}{2m} + V(\mathbf{R}\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}) \quad (2.66)$$

Dato che le rotazioni preservano la lunghezza dei vettori, si ha $(\mathbf{R}\mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2$ e la relazione (2.66) si riduce a

$$V(\mathbf{R}\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}) \quad (2.67)$$

che afferma l'invarianza rotazionale del potenziale V . Questo restringe la forma del potenziale a

$$V(\mathbf{x}) = v(|\mathbf{x}|) \quad (2.68)$$

per una certa $v(r)$ dato che $|\mathbf{R}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Ciò non è ancora sufficiente per determinare l'espressione Coulombiana del potenziale ma è piuttosto utile.

Esempio 2.4.2 (Un sistema di particelle identiche) Un caso molto simile al precedente è costituito da un sistema di particelle identiche, la cui Hamiltoniana può essere scritta nel modo seguente:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{p}_i)^2}{2m} + V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \quad (2.69)$$

Permutando le particelle che compongono il sistema, i risultati delle misurazioni di energia non variano e pertanto il gruppo delle permutazioni $S(N)$ è dinamico. Indicando con U la rappresentazione unitaria tramite cui agisce il gruppo possiamo scrivere, dalla (2.61):

$$U(\sigma)HU(\sigma)^+ = H \quad (2.70)$$

$\forall \sigma \in S(N)$. L'invarianza del potenziale rispetto alle permutazioni delle particelle si dimostra nel modo seguente: date le relazioni ${}^\sigma\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{\sigma(i)}$ e ${}^\sigma\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{\sigma(i)}$ otteniamo

$$U(\sigma)\mathbf{q}_iU(\sigma)^+ = \mathbf{q}_{\sigma(i)} \quad (2.71)$$

$$U(\sigma)\mathbf{p}_iU(\sigma)^+ = \mathbf{p}_{\sigma(i)} \quad (2.72)$$

che, insieme alla (2.70), implicano

$$\sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{p}_{\sigma(i)})^2}{2m} + V(\mathbf{q}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{q}_{\sigma(N)}) = \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{p}_i)^2}{2m} + V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \quad (2.73)$$

Dato che il contributo cinetico è lo stesso da entrambe le parti, per il potenziale deve valere

$$V(\mathbf{q}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{q}_{\sigma(N)}) = V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \quad (2.74)$$

che di nuovo vincola la forma del potenziale.

Esempio 2.4.3 (Elettroni di conduzione in un reticolo cristallino) *Gli elettroni di conduzione di un cristallo possono essere modellati come particelle non interagenti che si muovono in un potenziale efficace V_{eff} che tiene conto della repulsione elettrostatica fra elettroni e attrazione elettrostatica fra elettroni e ioni che formano il reticolo cristallino Λ . L'Hamiltoniana elettronica risulta pertanto essere:*

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N V_{eff}(\mathbf{q}_i) \quad (2.75)$$

mentre gli ioni sono collocati nei nodi del reticolo Λ della forma:

$$\mathbf{r} = \sum_{a=1}^3 n_a \mathbf{u}_a \quad (2.76)$$

dove n_a sono interi arbitrari, mentre \mathbf{u}_a sono tre vettori fissati linearmente indipendenti. Tale reticolo rimane invariato a seguito di una rototraslazione del tipo:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r} + \mathbf{l} \quad (2.77)$$

Queste rototraslazioni fanno parte di un gruppo discreto G_Λ detto gruppo di simmetria del cristallo e sono rappresentate da operatori unitari $U(\mathbf{R}, \mathbf{l})$. Si verifica che G_Λ è dinamico, ossia le misurazioni di energia non sono influenzate dall'azione di esso e pertanto possiamo scrivere:

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{l})HU(\mathbf{R}, \mathbf{l})^\dagger = H \quad (2.78)$$

$\forall(\mathbf{R}, \mathbf{l}) \in G_\Lambda$. Dato che ${}^{R,\mathbf{l}}\mathbf{q}_i = \mathbf{R}\mathbf{q}_i + \mathbf{l}$ e ${}^{R,\mathbf{l}}\mathbf{p}_i = \mathbf{R}\mathbf{p}_i$ otteniamo:

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{l})\mathbf{q}_i U(\mathbf{R}, \mathbf{l})^+ = \mathbf{R}\mathbf{q}_i + \mathbf{l} \quad (2.79)$$

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{l})\mathbf{p}_i U(\mathbf{R}, \mathbf{l})^+ = \mathbf{R}\mathbf{p}_i \quad (2.80)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{R}\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N V_{eff}(\mathbf{R}\mathbf{q}_i + \mathbf{l}) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N V_{eff}(\mathbf{q}_i) \quad (2.81)$$

Dato che, come abbiamo visto nel caso dell'atomo di idrogeno, le rotazioni preservano la lunghezza dei vettori ($\mathbf{R}\mathbf{p}_i^2 = \mathbf{p}_i^2$), la nostra condizione sul potenziale si riduce a:

$$\sum_{i=1}^N V_{eff}(\mathbf{R}\mathbf{q}_i + \mathbf{l}) = \sum_{i=1}^N V_{eff}(\mathbf{q}_i) \quad (2.82)$$

che è garantita se V_{eff} è invariante rispetto G_Λ :

$$V_{eff}(\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{l}) = V_{eff}(\mathbf{x}) \quad (2.83)$$

2.5 Rappresentazioni

Abbiamo già citato e utilizzato il concetto di rappresentazione unitaria di un gruppo di simmetria: il teorema di Wigner ci assicurava che le trasformazioni di simmetria appartenenti a un gruppo di simmetria fossero realizzate da operatori unitari (o antiunitari). Chiariamo meglio il concetto di rappresentazione e di rappresentazione unitaria. Matematicamente i gruppi sono oggetti definiti a sé stante, ma la loro apparizione è legata alla loro azione su altri oggetti.

Ci sono tanti modi di agire di un gruppo: per esempio un gruppo di matrici $n \times n$ può agire su vettori n -dimensionali o su vettori di altre dimensioni.. Questi diversi modi di agire sono legati al concetto di **rappresentazione**.

Definizione 2.5.1 (Rappresentazione lineare) Dato un gruppo G , una **rappresentazione lineare** è un omomorfismo

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V) \quad (2.84)$$

tra il gruppo G e il gruppo degli automorfismi (mappe lineari invertibili) su uno spazio vettoriale V , a sua volta detto **spazio della rappresentazione**:

$$\forall g, h \in G : \rho(e) = I_V, \rho(gh) = \rho(g)\rho(h), \rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} \quad (2.85)$$

Per spazi vettoriali a dimensione finita ($\dim(V) = n < +\infty$), dopo aver fissato una base in V , gli automorfismi su V sono isomorfi alle matrici quadrate $n \times n$ definite sullo stesso campo \mathbb{K} di V , con le leggi del gruppo rappresentate dalle leggi di moltiplicazione delle matrici.

Come campo assumiamo \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Data una rappresentazione (ρ, V) , il gruppo agisce sui vettori di V come trasformazione lineare:

$$v \in V, g \in G, v \rightarrow \rho(g)v \quad (2.86)$$

Definizione 2.5.2 (Rappresentazioni equivalenti) Due rappresentazioni ρ_1, ρ_2 con la stessa dimensione n sono dette **equivalenti** se $\exists S$ matrice invertibile $n \times n$ tale che:

$$\forall g \in G : \rho_2(g) = S^{-1}\rho_1(g)S \quad (2.87)$$

ossia se esiste un cambio di base S su V che mette in relazione le due rappresentazioni.

Definizione 2.5.3 (Rappresentazioni fedeli/non fedeli) Una rappresentazione ρ è detta **fedele** se:

$$g_1 \neq g_2 \rightarrow \rho(g_1) \neq \rho(g_2) \quad (2.88)$$

altrimenti è detta **non fedele**.

Definizione 2.5.4 (Rappresentazione riducibile/irriducibile) Una rappresentazione è detta **riducibile** se esiste un sottospazio non vuoto $U \subset V, U \neq 0, U \neq V$ detto **sottospazio invariante** tale che:

$$\forall g \in G, \forall u \in U : \rho(g)u \in U \quad (2.89)$$

Se tale sottospazio non esiste, la rappresentazione è detta **irriducibile**.

Per una rappresentazione riducibile potremmo dunque definire una rappresentazione di dimensione minore restringendoci al sottospazio invariante. Più esplicitamente, con un'opportuna scelta della base, potremmo scrivere:

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \hat{\rho}(g) & \beta(g) \\ 0 & \gamma(g) \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

per $u = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ 0 \end{pmatrix}$, dove le matrici $\hat{\rho}(g)$ formano a loro volta una rappresentazione di G . Se, per ogni sottospazio invariante, possiamo restringere le matrici della rappresentazione nella forma (2.90) con $\beta(g) = 0 \forall g$, la rappresentazione è detta **completamente riducibile**.

In generale, per una rappresentazione completamente riducibile lo spazio della rappresentazione V si decompone nella somma diretta dei sottospazi invarianti U_r a loro volta irriducibili:

$$V = \bigoplus_{r=1}^k U_r \quad (2.91)$$

Dunque in tal caso esiste una matrice S tale che :

$$S\rho(g)S^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 & \dots & \\ & \rho_2(g) & \dots & \\ & & \ddots & \\ \dots & \dots & \dots & \rho_k(g) \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

dove $\rho_r(g)$ è una rappresentazione irriducibile $\forall r$. Indicando con R la rappresentazione data dalle matrici $\rho(g)$ e con R_r quelle irriducibili date dalle $\rho_r(g)$, la (2.92) si scrive come:

$$R = \bigoplus_{r=1}^k R_r \quad (2.93)$$

Menzioniamo soltanto senza dimostrarlo e senza scendere nel dettaglio uno dei risultati più importanti della teoria delle rappresentazioni: il **lemma di Schur**.

Teorema 2.5.1 (Lemma di Schur) *Sia G un gruppo e siano ρ_1, ρ_2 due rappresentazioni irriducibili di G negli spazi vettoriali V_1, V_2 sul campo \mathbb{K} rispettivamente. Sia $A \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ tale che:*

$$A\rho_1 = \rho_2 A, \quad g \in G \quad (2.94)$$

Allora o $A = 0$ o A è invertibile e ρ_1, ρ_2 sono equivalenti.

Per una dimostrazione del lemma si veda [9].

Vediamo una conseguenza importante del lemma di Schur.

Teorema 2.5.2 *Sia G un gruppo e sia ρ una rappresentazione irriducibile di G sullo spazio vettoriale V su \mathbb{C} . Sia $B \in \text{End}(V)$ un endomorfismo tale che:*

$$B\rho(g) = \rho(g)B, \quad g \in G \quad (2.95)$$

Allora $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tale che $B = \lambda I_V$.

Dimostriamo questo teorema: dato che V è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{C} , B ha almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$. Fissiamo $A = B - \lambda I_V \in \text{End}(V)$. Allora per $g \in G$ si ha:

$$A\rho(g) = (B - \lambda I_V)\rho(g) = \rho(g)(B - \lambda I_V) = \rho(g)A \quad (2.96)$$

Per il lemma di Schur $A = 0$ o A è invertibile. Dato però che $\det(A) = \det(B - \lambda I_V) = 0$ in quanto λ è autovalore di B , A non può essere invertibile. Si ottiene pertanto $A = 0$ e $B = \lambda I_V$, che chiude la dimostrazione. Questo teorema ci sarà utile nel capitolo 4.

Un altro importante teorema è il seguente:

Teorema 2.5.3 *Sia G un gruppo Abeliano. Sia ρ una rappresentazione irriducibile di G nello spazio vettoriale V su \mathbb{C} . Allora $\dim(V) = 1$.*

Possiamo dimostrare questo teorema nel modo seguente: siano $g, g' \in G$: $g \cdot g' = g' \cdot g$. Di conseguenza deve valere: $\rho(g)\rho(g') = \rho(g \cdot g') = \rho(g' \cdot g) = \rho(g')\rho(g)$. Dato che ρ è irriducibile e g' arbitraria, esiste $\lambda(g) \in \mathbb{C}$ tale che $\rho(g) = \lambda(g)I_V$. Dato che $g \in G$ è arbitrario e ρ è irriducibile, $\dim(V) = 1$, visto che se fosse $\dim(V) > 1$ ci sarebbero sottospazi diversi da 0 $L \subset V$ a seguito di I_V .

2.5.1 Rappresentazioni unitarie

Definizione 2.5.5 (Rappresentazione unitaria) *Sia G un gruppo. Una rappresentazione ρ di G sullo spazio vettoriale V su \mathbb{C} è **unitaria** se esiste un prodotto interno hermitiano definito positivo su V tale che, $\forall g \in G$, $\rho(g) \in U(V)$, cioè:*

$$\rho(g)^+ = \rho(g)^{-1}, \quad g \in G \quad (2.97)$$

dove $U(V)$ sono le matrici unitarie su V .

Come si può ben intuire, le rappresentazioni unitarie sono fondamentali in Meccanica Quantistica.

Un teorema molto utile per le rappresentazioni unitarie che ci servirà nel capitolo 4 è il **teorema di Weyl**:

Teorema 2.5.4 (Teorema di Weyl) *Sia G un gruppo e sia ρ una rappresentazione unitaria di G nello spazio vettoriale V sul campo \mathbb{C} .*

ρ è riducibile se e solo se è completamente riducibile.

Vediamo la dimostrazione: se ρ è una rappresentazione riducibile unitaria, $\exists L \subseteq V$ non triviale invariante per ρ . Dato che esiste un prodotto interno hermitiano semidefinito positivo (vista l'unitarietà di ρ), risulta definito il complemento ortogonale L^\perp e $V = L + L^\perp$ con $L \cap L^\perp = 0$. Poiché $L \neq 0$, $0 < \dim(L) < \dim(V)$ e di conseguenza $0 < \dim(L^\perp) < \dim(V)$. Segue dunque che L^\perp è un sottospazio non triviale di V . Siano ora $\mathbf{x} \in L^\perp$, $\mathbf{y} \in L$, $g \in G$;

allora, se L è invariante rispetto a ρ , $\rho(g^{-1})\mathbf{y} \in L$. L'unitarietà implica che $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} = \rho(g)^+$ da cui:

$$\langle \rho(g)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \rho(g)^+\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \rho(g)^{-1}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \rho(g^{-1})\mathbf{y} \rangle = 0 \quad (2.98)$$

dove qua \langle, \rangle indica il prodotto hermitiano. Risulta pertanto che $\rho(g)\mathbf{x} \in L^\perp$ e di conseguenza L^\perp è invariante per ρ . Questo conclude la dimostrazione.

2.6 Gruppi di Lie, trasformazioni infinitesime e costanti del moto

2.6.1 Gruppi di Lie e Algebre di Lie

I gruppi di simmetria possono essere **continui**, se le corrispondenti trasformazioni dipendono da parametri continui, oppure **discreti**, come ad esempio la trasformazione di Parità o coniugazione di carica. Vediamo più in dettaglio i gruppi continui e le loro proprietà visti gli sviluppi dei capitoli successivi.

Definizione 2.6.1 (Gruppo di Lie) *Un Gruppo di Lie G è un gruppo che può essere parametrizzato in un intorno dell'elemento neutro tramite parametri continui α^a , $a = 1, \dots, d$, spesso organizzato in un vettore di parametri α .*

Assumiamo inoltre che lo 0 appartenga allo spazio dei parametri e che:

$$g(\mathbf{0}) = 1 \quad (2.99)$$

Data la parametrizzazione, per ogni coppia di vettori di parametri α, α' deve esistere un terzo vettore di parametri α'' tale che:

$$g(\alpha'') = g(\alpha')g(\alpha) \quad (2.100)$$

Data la parametrizzazione uno a uno, α'' deve dipendere unicamente da α' e da α :

$$\alpha'' = \mathbf{m}(\alpha', \alpha) \quad (2.101)$$

Possiamo dunque riscrivere la (2.100) come:

$$g(\alpha')g(\alpha) = g(\mathbf{m}(\alpha', \alpha)) \quad (2.102)$$

Similmente, per ogni vettore di parametri α deve esistere un altro vettore di parametri α' tale che:

$$g(\alpha') = g(\alpha)^{-1} \quad (2.103)$$

Come nel caso precedente, ciò implica che α' sia una funzione unicamente di α :

$$\alpha' = j(\alpha) \quad (2.104)$$

Possiamo dunque riscrivere la (2.103) come:

$$g(\alpha)^{-1} = g(j(\alpha)) \quad (2.105)$$

Vediamo ora come le proprietà generali esposte nella definizione di gruppo implicino varie condizioni sulla forma delle funzioni $m(\alpha', \alpha)$ e $j(\alpha)$. Dalla proprietà di associatività del gruppo e usando ripetutamente la (2.102) si ha:

$$g(m(\alpha'', m(\alpha', \alpha))) = g(\alpha'')g(m(\alpha', \alpha)) = g(\alpha'')(g(\alpha')g(\alpha)) \quad (2.106)$$

$$= (g(\alpha'')g(\alpha'))g(\alpha) = g(m(\alpha'', \alpha'))g(\alpha) = g(m(m(\alpha'', \alpha'), \alpha)) \quad (2.107)$$

da queste si ricava la proprietà (1):

$$m(\alpha'', m(\alpha', \alpha)) = m(m(\alpha'', \alpha'), \alpha) \quad (2.108)$$

Dalla proprietà generale di invertibilità e utilizzando le (2.99), (2.102) e (2.105) si ha:

$$g(m(j(\alpha), \alpha)) = g(j(\alpha))g(\alpha) = g(\alpha)^{-1}g(\alpha) = 1 = g(\mathbf{0}) \quad (2.109)$$

Da queste ricaviamo:

$$m(j(\alpha), \alpha) = \mathbf{0} \quad (2.110)$$

Similmente si ricava anche la stessa relazione con gli argomenti di m invertiti e dunque la proprietà (2):

$$m(j(\alpha), \alpha) = m(\alpha, j(\alpha)) = \mathbf{0} \quad (2.111)$$

Dalla proprietà di neutralità e usando (2.99) e (2.102) si ottengono invece:

$$g(\mathbf{m}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha})) = g(\mathbf{0})g(\boldsymbol{\alpha}) = 1 \cdot g(\boldsymbol{\alpha}) = g(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.112)$$

$$g(\mathbf{m}(\boldsymbol{\alpha}', \mathbf{0})) = g(\boldsymbol{\alpha}')g(\mathbf{0}) = g(\boldsymbol{\alpha}') \cdot 1 = g(\boldsymbol{\alpha}') \quad (2.113)$$

da cui si ottiene la proprietà (3):

$$\mathbf{m}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{m}(\boldsymbol{\alpha}', \mathbf{0}) = \boldsymbol{\alpha}' \quad (2.114)$$

Le tre proprietà riassunte sono dunque:

1. $\mathbf{m}(\boldsymbol{\alpha}'', \mathbf{m}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha})) = \mathbf{m}(\mathbf{m}(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\alpha}'), \boldsymbol{\alpha})$;
2. $\mathbf{m}(\mathbf{j}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{m}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{j}(\boldsymbol{\alpha})) = \mathbf{0}$;
3. $\mathbf{m}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{m}(\boldsymbol{\alpha}', \mathbf{0}) = \boldsymbol{\alpha}'$.

Per parametri piccoli, $g(\boldsymbol{\alpha})$ si può espandere come.

$$g(\boldsymbol{\alpha}) = 1 + \alpha^a t_a + \frac{1}{2} \alpha^a \alpha^b t_{ab} + O(\alpha^3) \quad (2.115)$$

con opportuni coefficienti t_a, t_{ab} tali che $t_{ab} = t_{ba}$ data la simmetria del prodotto $\alpha^a \alpha^b$. I t_a si definiscono **generatori infinitesimali del gruppo di Lie G**. Essi sono linearmente indipendenti e descrivono il gruppo nelle vicinanze dell'identità, dato che geometricamente costituiscono una base dello spazio tangente \mathbf{g} a G in 1:

$$t_a = \frac{\partial g(\mathbf{0})}{\partial \alpha^a} \quad (2.116)$$

Per piccoli valori di $\boldsymbol{\alpha}$ possiamo espandere $\mathbf{m}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha})$:

$$m^a(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}) = p^a + q_b^a \alpha^b + q_b^a \alpha^b + \frac{1}{2} r_{bc}^a \alpha^b \alpha^c + m_{bc}^a \alpha^b \alpha^c \quad (2.117)$$

$$+ \frac{1}{2} r_{bc}^a \alpha^b \alpha^c + O(\alpha^2, \alpha') + O(\alpha, \alpha'^2) \quad (2.118)$$

Data la proprietà (3) si ha $p^a = 0$, $q_b^a = q_b^a = \delta_b^a$ e $r_{bc}^a = r_{bc}^a = 0$ e dunque:

$$m^a(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}) = \alpha'^a + \alpha^a + m_{bc}^a \alpha^b \alpha^c + O(\alpha^2, \alpha') + O(\alpha, \alpha'^2) \quad (2.119)$$

Similmente vale per $\mathbf{j}(\boldsymbol{\alpha})$:

$$j^a(\boldsymbol{\alpha}) = k^a + l_b^a \alpha^b + \frac{1}{2} j_{bc}^a \alpha^b \alpha^c + O(\alpha^3) \quad (2.120)$$

Inserendo questa espressione nella proprietà (2) e facendo uso dell'espansione di $\mathbf{m}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha})$ appena ricavata:

$$0 = \alpha^a + k^a + l_b^a \alpha^b + m_{bc}^a \alpha^b \alpha^c + \frac{1}{2} j_{bc}^a \alpha^b \alpha^c \quad (2.121)$$

$$+ m_{bd}^a l_c^d \alpha^b \alpha^c + O(\alpha^3) \quad (2.122)$$

da cui si ricava $k^a = 0$, $l_b^a = -\delta_b^a$ e dunque:

$$j^a(\boldsymbol{\alpha}) = -\alpha^a + \frac{1}{2} j_{bc}^a \alpha^b \alpha^c + O(\alpha^3) \quad (2.123)$$

con j_{bc}^a opportuni coefficienti tali che $j_{bc}^a = j_{cb}^a$. Possiamo notare anche che m_{bc}^a e j_{bc}^a non sono indipendenti:

$$j_{bc}^a = m_{bc}^a + m_{cb}^a \quad (2.124)$$

Vogliamo ora andare a definire il concetto di algebra di Lie; per farlo calcoliamo i commutatori dei generatori infinitesimali di un gruppo di Lie: inserendo la (2.115) e la (2.119) nella (2.102) si ha:

$$(1 + \alpha'^a t_a + \frac{1}{2} \alpha'^a \alpha'^b t_{ab} + O(\alpha'^3))(1 + \alpha^c t_c + \frac{1}{2} \alpha^c \alpha^d t_{cd} + O(\alpha^3)) \quad (2.125)$$

$$= 1 + (\alpha'^a + \alpha^a + m_{bc}^a \alpha'^b \alpha^c) t_a + \frac{1}{2} (\alpha'^a + \alpha^a) (\alpha'^b + \alpha^b) t_{ab} + O(\alpha', \alpha^2) + O(\alpha, \alpha'^2) \quad (2.126)$$

Eguagliando i coefficienti delle potenze $\alpha'^a \alpha^b$ dei due lati si ha:

$$t_a t_b = m_{ab}^c t_c + t_{ab} \quad (2.127)$$

Dato che $t_{ab} = t_{ba}$ si ha:

$$t_a t_b - t_b t_a = (m_{ab}^c - m_{ba}^c) t_c \quad (2.128)$$

da cui, definendo:

$$m_{ab}^c - m_{ba}^c = f_{ab}^c \quad (2.129)$$

si ha:

$$[t_a, t_b] = f_{ab}^c t_c \quad (2.130)$$

Una struttura algebrica di questo tipo prende il nome di **algebra di Lie** ed è caratterizzata dalle proprietà:

$$[t_a, t_b] + [t_b, t_a] = 0 \quad (2.131)$$

$$[t_a, [t_b, t_c]] + [t_b, [t_c, t_a]] + [t_c, [t_a, t_b]] = 0 \quad (2.132)$$

che non dimostreremo data la non essenzialità in questa tesi. Per una dimostrazione si veda [9]. I coefficienti f_{ab}^c sono detti **costanti di struttura** dell'algebra di Lie e soddisfano:

$$f_{ab}^c + f_{ba}^c = 0 \quad (2.133)$$

$$f_{ae}^d f_{bc}^e + f_{be}^d f_{ca}^e + f_{ce}^d f_{ab}^e = 0 \quad (2.134)$$

che seguono direttamente da (2.132).

Possiamo pertanto affermare che a un gruppo di Lie G corrisponde un'algebra di Lie g .

Una volta ottenuti i generatori infinitesimali di un gruppo di Lie possiamo facilmente passare da una parametrizzazione locale del tipo (2.115) a un'altra parametrizzazione tramite il limite:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} g\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{N}\right)^N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha^a t_a}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)^N = e^{\alpha^a t_a} \quad (2.135)$$

Vale pertanto l'importantissima relazione:

$$\tilde{g}(\boldsymbol{\alpha}) = e^{\alpha^a t_a} \quad (2.136)$$

con $\tilde{g}(\boldsymbol{\alpha})$ detta **parametrizzazione esponenziale**.

Espandendo questa parametrizzazione tramite la (2.115) si ha:

$$\tilde{t}_a = t_a \quad (2.137)$$

$$\tilde{t}_{ab} = \frac{1}{2}(t_a t_b + t_b t_a) \quad (2.138)$$

La funzione $\tilde{m}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha})$, detta funzione di Hausdorff-Campbell-Baker, nell'espansione (2.119) ha come coefficienti:

$$\tilde{m}_{bc}^a = \frac{1}{2} f_{ab}^c \quad (2.139)$$

mentre la $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\alpha})$ ha coefficienti in (2.123):

$$\tilde{j}_{bc}^a = 0 \quad (2.140)$$

Infatti, notando che $\tilde{g}(\boldsymbol{\alpha})^{-1} = \tilde{g}(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\alpha})) = e^{-\alpha^a t_a} = \tilde{g}(-\boldsymbol{\alpha})$, si ottiene subito $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\alpha}) = -\boldsymbol{\alpha}$ e dunque le (2.140) e (2.139), dato che le costanti di struttura $\tilde{f}_{ab}^c = f_{ab}^c$ per (2.138).

2.6.2 Rappresentazioni unitarie dei gruppi di Lie

Vediamo ora di applicare quanto detto precedentemente in ambito quantistico.

Se G è un gruppo di Lie, gli operatori quantistici unitari che agiscono su stati e osservabili si possono esprimere

come funzioni del vettore di parametri α :

$$U(\alpha) = U(g(\alpha)) \quad (2.141)$$

con:

$$U(\mathbf{0}) = 1 \quad (2.142)$$

Tralasciando per semplicità il caso di rappresentazioni proiettive si ha:

$$U(\mathbf{m}(\alpha', \alpha)) = U(\alpha')U(\alpha) \quad (2.143)$$

$$U(\mathbf{j}(\alpha)) = U(\alpha)^{-1} \quad (2.144)$$

Similmente a $g(\alpha)$, per piccoli valori di α vale l'espansione:

$$U(\alpha) = 1 - i\alpha^a G_a + \frac{1}{2}\alpha^a \alpha^b G_{ab} + O(\alpha^3) \quad (2.145)$$

dove G_a e G_b sono operatori tali che $G_{ab} = G_{ba}$.

Gli operatori G_a sono i **generatori infinitesimali** dell'azione unitaria di G :

$$G_a = i \frac{\partial U(\mathbf{0})}{\partial \alpha^a} \quad (2.146)$$

Essi risultano autoaggiunti:

$$G_a^+ = G_a \quad (2.147)$$

Infatti si può vedere esplicitamente che:

$$G_a^+ = (i \frac{\partial U(\mathbf{0})}{\partial \alpha^a})^+ = -i \frac{\partial U(\alpha)^+}{\partial \alpha^a} |_{\alpha=\mathbf{0}} = -i \frac{\partial U(\alpha)^{-1}}{\partial \alpha^a} |_{\alpha=\mathbf{0}} \quad (2.148)$$

$$= i U(\alpha)^{-1} \frac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha^a} U(\alpha)^{-1} |_{\alpha=\mathbf{0}} = i \frac{\partial U(\mathbf{0})}{\partial \alpha^a} = G_a \quad (2.149)$$

Ciò si rivela di fondamentale importanza: se $U(\alpha)$ è un operatore unitario che corrisponde a una trasformazione di simmetria appartenente a un gruppo dinamico, esso commuta dunque con l'Hamiltoniana H del sistema

$$U(\alpha)H = HU(\alpha)$$

ed è una costante del moto. Tuttavia $U(\alpha)$ non può essere considerato un osservabile poiché non è autoaggiunto; abbiamo visto, però, nel caso di gruppi di Lie, come i generatori infinitesimali sono operatori autoaggiunti e dunque

corrispondono a osservabili. Essi inoltre commutano con l'Hamiltoniana

$$HG_a = G_aH$$

e sono pertanto delle **costanti del moto**.

Sempre escludendo il caso di rappresentazioni proiettive, possiamo vedere come i generatori infinitesimali G_a obbediscono alle regole di commutazione:

$$[G_a, G_b] = if_{ab}^c G_c \quad (2.150)$$

dove f_{ab}^c sono le costanti di struttura dell'algebra di Lie g . Infatti, inserendo l'espansione (2.145) nella (2.143) si ha:

$$(1 - i\alpha'^a G_a + \frac{1}{2}\alpha'^a \alpha'^b G_{ab} + O(\alpha'^3))(1 - i\alpha^c G_c + \frac{1}{2}\alpha^c \alpha^d G_{cd} + O(\alpha^3)) \quad (2.151)$$

$$= 1 - i(\alpha'^a + \alpha^a + m_{bc}^a \alpha'^b \alpha^c) G_a + \frac{1}{2}(\alpha'^a + \alpha^a)(\alpha'^b + \alpha^b) G_{ab} + O(\alpha^2, \alpha') + O(\alpha, \alpha'^2) \quad (2.152)$$

Uguagliando i coefficienti di $\alpha'^a \alpha^b$ dei due lati dell'equazione sopra si ottiene:

$$G_a G_b = im_{ab}^c G_c - G_{ab} \quad (2.153)$$

e dunque, dato $G_{ab} = G_{ba}$:

$$G_a G_b - G_b G_a = i(m_{ab}^c - m_{ba}^c) G_c = if_{ab}^c G_c \quad (2.154)$$

che dimostra la (2.150).

I generatori infinitesimali G_a obbediscono fondamentalmente alle stesse identità algebriche dell'algebra di Lie, che anche questa volta non dimostreremo:

$$[G_a, G_b] + [G_b, G_a] = 0 \quad (2.155)$$

$$[G_a, [G_b, G_c]] + [G_b, [G_c, G_a]] + [G_c, [G_a, G_b]] = 0 \quad (2.156)$$

Queste identità, infatti, si basano solo sull'operazione algebrica di commutazione, che è la stessa per i t_a e i G_a .

Valgono dunque anche le (2.133) e le (2.134).

Sempre escludendo il caso di rappresentazione proiettiva, Quando la parametrizzazione di un gruppo di Lie è quella esponenziale $\tilde{g}(\boldsymbol{\alpha}) = e^{\alpha^a t_a}$, i corrispondenti operatori unitari saranno:

$$\tilde{U}(\boldsymbol{\alpha}) = U(\tilde{g}(\boldsymbol{\alpha})) \quad (2.157)$$

Tramite (2.145) si può espandere:

$$\tilde{U}(\boldsymbol{\alpha}) = 1 - i\alpha^a \tilde{G}_a + \frac{1}{2}\alpha^a \alpha^b \tilde{G}_{ab} + O(\alpha^3) \quad (2.158)$$

Cerchiamo ora le espressioni per \tilde{G}_{ab} e \tilde{G}_a . Dato che al primo ordine in $\boldsymbol{\alpha}$ deve essere $\tilde{g}(\boldsymbol{\alpha}) = g(\boldsymbol{\alpha})$, bisogna avere anche $\tilde{U}(\boldsymbol{\alpha}) = U(\boldsymbol{\alpha})$ al primo ordine. Si ricava pertanto:

$$\tilde{G}_a = G_a \quad (2.159)$$

Considerando invece la versione con la tilde di (2.153) si ottiene subito, richiamando la (2.139):

$$\tilde{G}_{ab} = -\frac{1}{2}(G_a G_b + G_b G_a) \quad (2.160)$$

Calcoliamo ora l'espressione di $\tilde{U}(\boldsymbol{\alpha})$ considerando il limite:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{U}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{N}\right)^N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{i\alpha^a G_a}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) = e^{-i\alpha^a G_a} \quad (2.161)$$

La struttura esponenziale di $\tilde{g}(\boldsymbol{\alpha})$ viene pertanto mantenuta:

$$\tilde{U}(\boldsymbol{\alpha}) = e^{-i\alpha^a G_a} \quad (2.162)$$

2.6.3 Simmetrie discrete

Questo discorso non è applicabile nel caso di un gruppo di simmetria discreto, come ad esempio la trasformazione di Parità. Tuttavia, per alcune simmetrie le cui realizzazioni unitarie soddisfano la proprietà:

$$U_p^2 = 1 \quad (2.163)$$

possiamo comunque ottenere un risultato importante (nel caso della parità, la (2.163) discende dal fatto che, operando due volte la trasformazione di parità, otteniamo l'identità: $P^2 = 1$). Infatti, data l'unitarietà di U_p e la (2.163), otteniamo subito:

$$U_p = U_p^+ \quad (2.164)$$

ossia U_p è esso stesso autoaggiunto, dunque è un osservabile. Questa proprietà è molto importante in quanto, dato che U_p commuta con l'Hamiltoniana H , possiamo avere autostati comuni della parità e dell'energia.

Capitolo 3

Invarianza per traslazione e conservazione dell'impulso

3.1 Traslazioni e impulso

Come già accennato nei capitoli precedenti, la più semplice simmetria a parametri continui con cui abbiamo a che fare è quella per **traslazione spaziale**: si ha invarianza per traslazione spaziale quando due sistemi di riferimento Σ e Σ' collegati dalla trasformazione (2.7) a cui si aggiunge quella per l'impulso:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} \quad (3.1)$$

sono equivalenti per la descrizione del comportamento del sistema quantistico in esame. Ciò si traduce nell'invarianza dell'Hamiltoniana del sistema H rispetto tale trasformazione. Come già evidenziato, le traslazioni formano un gruppo dinamico, che indicheremo con $T(3)$, il quale agisce sulle funzioni d'onda di una particella quantistica. Per una traslazione \mathbf{a} , l'azione del gruppo è data da:

$$U(\mathbf{a})\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \quad (3.2)$$

Per prima cosa, possiamo dimostrare che $U(\mathbf{a})$ costituisce una rappresentazione unitaria di $T(3)$. Definiamo l'operatore:

$$U^*(\mathbf{a})\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (3.3)$$

Tramite (3.2) e (3.3) otteniamo:

$$U^*(\mathbf{a})U(\mathbf{a})\Psi(\mathbf{x}) = U(\mathbf{a})\Psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{x} - \mathbf{a} + \mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

$$U(\mathbf{a})U^*(\mathbf{a})\Psi(\mathbf{x}) = U^*(\mathbf{a})\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

Dunque $U(\mathbf{a})$ è invertibile:

$$U^*(\mathbf{a})U(\mathbf{a}) = U(\mathbf{a})U^*(\mathbf{a}) = 1 \quad (3.6)$$

Data la normalizzazione delle funzioni d'onda abbiamo anche che:

$$\int d\tau |U(\mathbf{a})\Psi(\mathbf{x})|^2 = \int d\tau |\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{a})|^2 = \int d\tau' |\Psi(\mathbf{x}')|^2 = 1 \quad (3.7)$$

dove $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$. $U(\mathbf{a})$ pertanto preserva la norma delle funzioni d'onda ed è unitario. Inoltre abbiamo che:

$$U(\mathbf{a} + \mathbf{a}')\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{a}') = U(\mathbf{a}')U(\mathbf{a})\Psi(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

da cui deduciamo subito:

$$U(\mathbf{a}' + \mathbf{a}) = U(\mathbf{a}')U(\mathbf{a}) \quad (3.9)$$

che ci porta ad affermare che la famiglia di operatori $U(\mathbf{a})$ è una rappresentazione unitaria di $T(3)$. Come possiamo ottenere una forma esplicita per gli operatori $U(\mathbf{a})$? Procediamo con il metodo delineato nella sezione (2.6) e cerchiamo per prima cosa i generatori infinitesimali del gruppo delle traslazioni. Per le traslazioni spaziali il generatore infinitesimale si rivelerà essere l'operatore \mathbf{p} dell'impulso, la cui espressione risulta essere:

$$\mathbf{p}\Psi(\mathbf{x}) = -i\hbar\nabla\Psi(\mathbf{x}) \quad (3.10)$$

Infatti l'azione del generatore infinitesimale $\hbar^{-1}\mathbf{p}$ delle traslazioni è definita tramite l'espansione:

$$U(\delta\mathbf{a})\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + i\hbar^{-1}\delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}\Psi(\mathbf{x}) + O(\delta a^2) \quad (3.11)$$

Inoltre tramite un'espansione di Taylor si ha che:

$$U(\delta\mathbf{a})\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{a} + O(\delta a^2)) = \Psi(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{a} \cdot \nabla\Psi(\mathbf{x}) + O(\delta a^2) \quad (3.12)$$

Confrontando questa espressione con la (3.11) otteniamo proprio l'espressione dell'operatore impulso:

$$\mathbf{p}\Psi(\mathbf{x}) = -i\hbar\nabla\Psi(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

le cui componenti $p_k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_k$ soddisfano le relazioni di commutazione:

$$[p_k, p_l] = 0 \quad (3.14)$$

Relativamente alle traslazioni la relazione (2.162) diventa dunque:

$$U(\mathbf{a}) = e^{-i\hbar^{-1}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}} \quad (3.15)$$

dove \mathbf{a} è il vettore che genera la traslazione.

3.2 Conservazione dell'impulso

Vediamo ora come l'invarianza per traslazione precedentemente descritta conduce a restrizioni sull'Hamiltoniana H e sull'operatore di scattering S .

Consideriamo prima un sistema composto da una sola particella: dato che l'invarianza per traslazione ci ha condotto all'esistenza di tre operatori autoaggiunti $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, i quali corrispondono alle componenti dell'impulso lungo gli assi coordinati, possiamo passare dallo spazio delle coordinate allo spazio dei momenti nel quale una base è data dall'insieme degli autostati dell'operatore impulso, denotati $\Phi_{\mathbf{p}}$, che soddisfano:

$$\mathbf{p}\Phi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}\Phi_{\mathbf{p}} \quad (3.16)$$

Lo stato generale della particella sarà indicato come:

$$\Psi = \int d^3p f(\mathbf{p})\Phi_{\mathbf{p}} \quad (3.17)$$

dove $f(\mathbf{p})$ è l'autofunzione nello spazio dei momenti. La probabilità di trovare la particella con impulso nell'intervallo $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$ sarà $|f(\mathbf{p})|^2 d^3p$.

In un sistema costituito da più particelle, invece, possiamo formare un insieme completo di stati moltiplicando gli stati $\Phi_{\mathbf{p}}$. Dunque, per esempio:

$$\Phi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(12)} = \Phi_{\mathbf{p}_1}^{(1)}\Phi_{\mathbf{p}_2}^{(2)} \quad (3.18)$$

rappresenterà uno stato in cui la particella (1) è caratterizzata dall'impulso \mathbf{p}_1 e la particella (2) dall'impulso \mathbf{p}_2 . Possiamo ora esprimere gli elementi di matrice S rispetto a questi stati considerando, per esempio, un processo del tipo:

$$a + b \rightarrow c + d \quad (3.19)$$

L'ampiezza di transizione dallo stato iniziale $\Phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}$ allo stato finale $\Phi_{\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d}$ è data da:

$$\langle \Phi_{\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d}, S\Phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b} \rangle \quad (3.20)$$

Data l'invarianza per traslazione, gli operatori unitari che realizzano la traslazione commutano con l'Hamiltoniana H e dunque anche con la matrice S :

$$U(\mathbf{a})S = SU(\mathbf{a}) \quad (3.21)$$

Data questa relazione, i generatori della trasformazione commutano con S :

$$\mathbf{P}S = S\mathbf{P} \quad (3.22)$$

Calcolando gli elementi di matrice di questa equazione tra gli stati $\Phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}$ e $\Phi_{\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d}$ autostati di \mathbf{p} otteniamo:

$$(\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_d) \langle \Phi_{\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d}, S\Phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b} \rangle = \langle \mathbf{P}\Phi_{\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d}, S\Phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b} \rangle \quad (3.23)$$

$$= \langle \Phi_{\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d}, \mathbf{P}S\Phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b} \rangle \quad (3.24)$$

$$= \langle \Phi_{\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d}, S\mathbf{P}\Phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b} \rangle \quad (3.25)$$

$$= (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b) \langle \Phi_{\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d}, S\Phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b} \rangle \quad (3.26)$$

$$= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) W(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \quad (3.27)$$

la quale implica che l'ampiezza di transizione tra i due stati considerati deve essere 0 a meno che l'impulso totale nei due stati non sia lo stesso, ossia si **conservi**.

Capitolo 4

Invarianza per rotazione e conservazione del momento angolare

4.1 Momento angolare e rotazioni

Un discorso simile alle traslazioni vale anche per le rotazioni spaziali in tre dimensioni; abbiamo visto nell'esempio (2.2.2) come una generica rotazione sia a tutti gli effetti una mappa lineare che agisce nello spazio delle configurazioni e che conserva la distanza tra i punti:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (4.1)$$

con $|\mathbf{x}'| = |\mathbf{x}|$. Essa è inoltre caratterizzata da due parametri fondamentali: un angolo di rotazione ϕ e un versore \mathbf{n} che identifica l'asse di rotazione (Fig.(4.1)):

$$\mathbf{R} = \Lambda(\phi, \mathbf{n}) \quad (4.2)$$

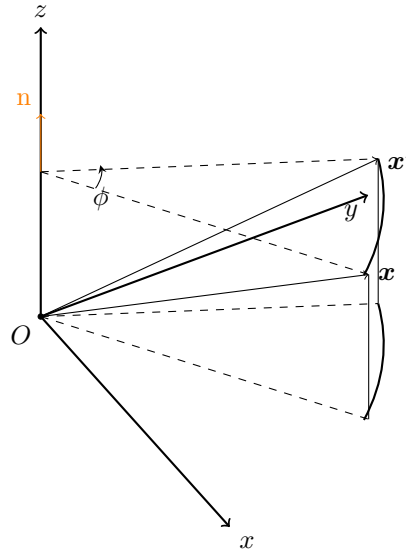


Figura 4.1: La rotazione di un angolo ϕ attorno a un asse \mathbf{n} trasforma un vettore \mathbf{x} in un vettore \mathbf{x}' della stessa lunghezza

Analizzando una rotazione infinitesima (2.12) e considerandone il limite, abbiamo poi scritto l'espressione di una rotazione finita (2.18).

Abbiamo infine visto in (2.2.2) come le rotazioni formino un gruppo, che denomineremo $SO(3)$. Vediamo ora come questo gruppo agisce sulle funzioni d'onda che descrivono gli stati di un sistema quantistico.

Dato un sistema in uno stato s preparato da un dispositivo D , lo stato ruotato $\mathbf{R}s$ è definito come lo stato preparato dal dispositivo $\mathbf{R}D$ ottenuto ruotando D in accordo con $\mathbf{R} \in SO(3)$. Data l'isotropia dello spazio, le probabilità di misura dei valori non devono cambiare a seguito di una rotazione: se uno stato s è una sovrapposizione, per esempio, di due stati s' e s'' con certi coefficienti, lo stato ruotato $\mathbf{R}s$ sarà una sovrapposizione degli stati $\mathbf{R}s'$, $\mathbf{R}s''$ con gli **stessi coefficienti**.

Ogni stato s è rappresentato da una funzione d'onda Ψ definita a meno di un fattore di fase; data dunque una rotazione \mathbf{R} , la mappa che associa a uno stato s lo stato ruotato $\mathbf{R}s$ deve tradursi in una mappa che associa a Ψ una funzione d'onda $\mathbf{R}\Psi$ che rappresenta lo stato ruotato. Questa mappa lineare può essere resa unica con un'opportuna scelta dei fattori di fase, dunque deve esistere un operatore lineare $U(\mathbf{R})$ tale che :

$$\mathbf{R}\Psi = U(\mathbf{R})\Psi \quad (4.3)$$

L'invarianza dei coefficienti delle sovrapposizioni di stati a seguito di una rotazione si esprime come:

$$|\langle \mathbf{R}\Psi', \mathbf{R}\Psi \rangle|^2 = |\langle \Psi', \Psi \rangle|^2 \quad (4.4)$$

Sussistono dunque tutte le condizioni necessarie per applicare il già citato teorema di Wigner, il quale ci garantisce l'unitarietà dell'operatore $U(\mathbf{R})$. Come nel caso del gruppo delle traslazioni $T(3)$, siamo dunque in presenza di una

rappresentazione unitaria del gruppo delle rotazioni $SO(3)$. Vogliamo ora trovare un'espressione per gli operatori $U(\mathbf{R})$ in termini dei generatori infinitesimali del gruppo.

Per prima cosa verifichiamo che gli $U(\mathbf{R})$ costituiscono a tutti gli effetti una rappresentazione unitaria del gruppo: consideriamo una particella quantistica di spin s descritta da una funzione d'onda spinoriale con $2s + 1$ componenti. Una rotazione $\mathbf{R} \in SO(3)$ agisce sulle funzioni d'onda spinoriali secondo:

$$U(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{x}) = D(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

dove $D(\mathbf{R})$ è una matrice unitaria $2s + 1 \times 2s + 1$ che dipende da \mathbf{R} e tale che $D(\mathbf{R}\mathbf{R}') = D(\mathbf{R})D(\mathbf{R}')$:

$$D(\mathbf{R})^+D(\mathbf{R}) = D(\mathbf{R})D(\mathbf{R})^+ = 1 \quad (4.6)$$

Tramite la (4.5) e l'equazione:

$$U^*(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{x}) = D(\mathbf{R})^+\Psi(\mathbf{R}\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

otteniamo

$$U^*(\mathbf{R})U(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{x}) = D(\mathbf{R})^+U(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}\mathbf{x}) = D(\mathbf{R})^+D(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

$$U(\mathbf{R})U^*(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{x}) = D(\mathbf{R})U^*\Psi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}) = D(\mathbf{R})D(\mathbf{R})^+\Psi(\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \quad (4.9)$$

Dunque si dimostra l'invertibilità di $U(\mathbf{R})$: $U^*(\mathbf{R})U(\mathbf{R}) = U(\mathbf{R})U^*(\mathbf{R}) = 1$. Da (4.5) e (4.6) si ha inoltre:

$$\int d\tau |U(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{x})|^2 = \int d\tau |D(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x})|^2 = \int d\tau' |det(\mathbf{R})| |\Psi(\mathbf{x}')|^2 = 1 \quad (4.10)$$

dove $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$ e $det(\mathbf{R}) = 1$, dalla definizione di $SO(3)$ (Special, ossia a determinante 1, Orthogonal). L'operatore $U(\mathbf{R})$ risulta dunque unitario e inoltre, dato che

$$U(\mathbf{R}'\mathbf{R})\Psi(\mathbf{x}) = D(\mathbf{R}'\mathbf{R})\Psi((\mathbf{R}'\mathbf{R})^{-1}\mathbf{x}) = D(\mathbf{R}')D(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}'^{-1}\mathbf{x}) = D(\mathbf{R}')U(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}'^{-1}\mathbf{x}) = U(\mathbf{R}')U(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

possiamo affermare che:

$$U(\mathbf{R}'\mathbf{R}) = U(\mathbf{R}')U(\mathbf{R}) \quad (4.12)$$

La famiglia di operatori $U(\mathbf{R})$ costituisce dunque una rappresentazione unitaria di $SO(3)$.

Dato come parametro l'angolo vettoriale di rotazione $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, la matrice di rotazione $\mathbf{R}(\phi)$ può essere scritta in termini dell'esponenziale della matrice $*\phi$ secondo la (2.14) e la (2.18):

$$U(\phi)\Psi(\mathbf{x}) = D(\phi)\Psi(e^{*\phi}\mathbf{x}) \quad (4.13)$$

Vogliamo ora ricavare l'espressione dei generatori infinitesimali. Indicando il generatore infinitesimale come $\hbar^{-1}\mathbf{J}$ la sua azione è definita tramite:

$$U(\delta\phi) = 1 - i\delta\phi \cdot \mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}) + O(\delta\phi^2) \quad (4.14)$$

L'espressione di \mathbf{J} risulta essere:

$$\mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}) = (-i\hbar\mathbf{x} \times \nabla + \hbar\boldsymbol{\Sigma})\Psi(\mathbf{x}) \quad (4.15)$$

dove $\boldsymbol{\Sigma}$ è una matrice di vettori $(2s+1) \times (2s+1)$ Hermitiana, generatore infinitesimale di $D(\phi)$ definita dall'espansione:

$$D(\delta\phi) = 1 - i\delta\phi \cdot \boldsymbol{\Sigma} + O(\delta\phi^2) \quad (4.16)$$

Per dimostrare la relazione (4.15), per prima cosa dimostriamo che $\boldsymbol{\Sigma}$ è Hermitiana: dall'unitarietà di $D(\mathbf{R})$ si ha:

$$1 = (1 - i\delta\phi \cdot \boldsymbol{\Sigma} + O(\delta\phi^2))^+ (1 - i\delta\phi \cdot \boldsymbol{\Sigma} + O(\delta\phi^2)) \quad (4.17)$$

$$= (1 + i\delta\phi \cdot \boldsymbol{\Sigma}^+ + O(\delta\phi^2))(1 - i\delta\phi \cdot \boldsymbol{\Sigma} + O(\delta\phi^2)) \quad (4.18)$$

$$= 1 + i\delta\phi \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^+ - \boldsymbol{\Sigma}) + O(\delta\phi^2) \quad (4.19)$$

vera solo se $\boldsymbol{\Sigma}^+ = \boldsymbol{\Sigma}$. Inoltre si ha che:

$$e^{*\delta\phi} \mathbf{x} = \mathbf{x} - \delta\phi \times \mathbf{x} + O(\delta\phi^2) \quad (4.20)$$

dato che $*\delta\phi \mathbf{x} = -\delta\phi \times \mathbf{x}$. Si ottiene dunque:

$$U(\delta\phi)\Psi(\mathbf{x}) = (1 - i\delta\phi \cdot \boldsymbol{\Sigma} + O(\delta\phi^2))\Psi(\mathbf{x} - \delta\phi \times \mathbf{x} + O(\delta\phi^2)) \quad (4.21)$$

$$= \Psi(\mathbf{x}) - \delta\phi \times \mathbf{x} \cdot \nabla \Psi(\mathbf{x}) - i\delta\phi \cdot \boldsymbol{\Sigma}\Psi(\mathbf{x}) + O(\delta\phi^2) \quad (4.22)$$

$$= \Psi(\mathbf{x}) - \delta\phi \cdot (\mathbf{x} \times \nabla + i\boldsymbol{\Sigma})\Psi(\mathbf{x}) + O(\delta\phi^2) \quad (4.23)$$

Comparando questa espressione con la (4.14), otteniamo la (4.15). L'espressione di \mathbf{J} è esattamente quella dell'operatore del momento angolare totale in Meccanica Quantistica, che a sua volta comprende l'operatore momento angolare orbitale \mathbf{L} :

$$\mathbf{L}\Psi(\mathbf{x}) = -i\hbar\mathbf{x} \times \nabla\Psi(\mathbf{x}) \quad (4.24)$$

e l'operatore di spin \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}\Psi(\mathbf{x}) = \hbar\boldsymbol{\Sigma}\Psi(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

Le componenti di \mathbf{J} sono $J_k = \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_k$ e soddisfano le regole di commutazione $[J_k, J_l] = i\hbar \sum_m \epsilon_{klm} J_m$ dove ϵ_{klm}

sono le componenti del tensore di Ricci. Dunque, in accordo con (2.162), possiamo scrivere:

$$U(\phi) = e^{-i\hbar^{-1}\phi \cdot \mathbf{J}} \quad (4.26)$$

Possiamo ricavare anche le regole di commutazione tra \mathbf{J} e \mathbf{P} . Se il sistema si trova in un autostato dell'impulso:

$$\mathbf{P}\Phi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}\Phi_{\mathbf{p}} \quad (4.27)$$

applicando una rotazione si ottiene:

$$U(\mathbf{R})\Phi_{\mathbf{p}} = \Phi_{\mathbf{R}\mathbf{p}} \quad (4.28)$$

Vediamo come si trasforma l'operatore impulso. Esso è dato dal teorema spettrale:

$$\mathbf{P} = \int d^3p \Phi_{\mathbf{p}} \mathbf{P} \Phi_{\mathbf{p}}^+ \quad (4.29)$$

Applicando una rotazione si ha:

$$U(\mathbf{R})\mathbf{P}U(\mathbf{R}) = \int d^3p U(\mathbf{R})\Phi_{\mathbf{p}} \mathbf{P} \Phi_{\mathbf{p}}^+ U(\mathbf{R})^+ \quad (4.30)$$

$$= \int d^3p \Phi_{\mathbf{R}\mathbf{p}} \mathbf{P} \Phi_{\mathbf{R}\mathbf{p}}^+ \quad (4.31)$$

$$= \int d^3p' \Phi_{\mathbf{p}'} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}' \Phi_{\mathbf{p}'}^+ \quad (4.32)$$

$$= \mathbf{R}^{-1} \int d^3p' \Phi_{\mathbf{p}'} \mathbf{p}' \Phi_{\mathbf{p}'}^+ \quad (4.33)$$

$$= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} \quad (4.34)$$

con $\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p}$.

Applicando ora una rotazione infinitesima $U(\delta\phi)$ tramite $U(\delta\phi)\mathbf{P}U(\delta\phi)^+$ si ha l'identità:

$$e^{*\delta\phi} \mathbf{P} = \mathbf{p} + *\delta\phi \mathbf{p} = \mathbf{p} - \delta\phi \times \mathbf{p} \quad (4.35)$$

$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta\phi \cdot \mathbf{J} + O(\delta\phi^2)\right) \mathbf{P} \left(1 + \frac{i}{\hbar} \delta\phi \cdot \mathbf{J} + O(\delta\phi^2)\right) \quad (4.36)$$

$$= \mathbf{P} - \frac{i}{\hbar} \delta\phi (\mathbf{J}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{J}) + O(\delta\phi^2) \quad (4.37)$$

Confrontando i due lati si trova:

$$\frac{i}{\hbar} [\delta\phi \cdot \mathbf{J}, \mathbf{P}] = \delta\phi \times \mathbf{p} \quad (4.38)$$

$$\rightarrow [\delta\phi \cdot \mathbf{J}, \mathbf{P}] = -i\hbar \delta\phi \times \mathbf{p} \quad (4.39)$$

Esprimendo $\delta\phi = \delta\phi e_i$ ricaviamo infine:

$$\delta\phi [\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{J}, \mathbf{P}] \cdot \mathbf{e}_j = -i\hbar\delta\phi \mathbf{e}_i \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j \quad (4.40)$$

$$\rightarrow [\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{J}, \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j] = i\hbar \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{P} = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{P} \quad (4.41)$$

$$\rightarrow [\mathbf{J}_i, \mathbf{P}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} P_k \quad (4.42)$$

Esempio 4.1.1 (Azione sulle autofunzioni dell'operatore impulso) Consideriamo una autofunzione dell'operatore impulso

$$\Psi = e^{i\hbar^{-1} p x} \quad (4.43)$$

corrispondente all'impulso $\mathbf{p} = (p, 0, 0)$. Applichiamo ora una rotazione di un angolo ϕ attorno all'asse z ($\phi = \phi \mathbf{k}$):

$$U(\mathbf{R}_z)\Psi = e^{i\hbar^{-1}(p x \cos(\phi) + p y \sin(\phi))} \quad (4.44)$$

Essa costituisce ancora un autostato dell'operatore impulso.

Esempio 4.1.2 (Azioni sugli autostati di L_z) Consideriamo per semplicità una particella senza spin e l'azione di una rotazione attorno all'asse z di un angolo $\alpha = \alpha \mathbf{k}$ sulla sua funzione d'onda espressa in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) :

$$U(\mathbf{R}_z)\Psi(r, \theta, \phi) = \Psi(r, \theta, \phi - \alpha) \quad (4.45)$$

Se Ψ è autostato dell'operatore della terza componente del momento angolare orbitale L_z nella forma:

$$\Psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.46)$$

dalle proprietà delle armoniche sferiche segue che:

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi - \alpha) = e^{-im\alpha} \Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) \quad (4.47)$$

Dunque:

$$U(\mathbf{R}_z)\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = e^{-im\alpha} \Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) \quad (4.48)$$

Questa espressione segue direttamente anche dalla (4.26). Dunque per un autostato di L_z l'effetto di una rotazione attorno all'asse z è quello di una moltiplicazione per un fattore di fase, ossia Ψ_{nlm} è autostato di $U(\mathbf{R}_z)$ con autovalore $e^{-im\alpha}$, che ha modulo unitario in accordo con l'unitarietà di $U(\mathbf{R}_z)$.

4.2 Conservazione del momento angolare

L'invarianza per rotazione di un sistema quantistico si traduce nella commutatività dell'Hamiltoniana H e dell'operatore unitario $U(\mathbf{R})$ attraverso cui agisce la rotazione:

$$[U(\mathbf{R}), H] = 0 \quad (4.49)$$

dove $\mathbf{R} \in SO(3)$. Considerando una rotazione infinitesima, questa relazione si riduce alla commutatività di H con i generatori infinitesimali \mathbf{J} , ossia gli operatori del momento angolare:

$$[\mathbf{J}, H] = 0 \quad (4.50)$$

Da notare come \mathbf{J} sia la somma dei momenti angolari orbitali e degli spin di tutte le particelle del sistema.

Consideriamo ora un processo di scattering o una reazione: la (4.49) implica che la matrice di scattering S commuti con $U(\mathbf{R})$:

$$[S, U(\mathbf{R})] = 0 \quad (4.51)$$

la quale a sua volta ci conduce alle relazioni:

$$[\mathbf{J}, S] = 0 \quad (4.52)$$

$$[\mathbf{J}^2, S] = 0 \quad (4.53)$$

Vediamo ora quali restrizioni impone l'invarianza per rotazione sugli elementi di matrice $\langle \Phi_b, S\Phi_a \rangle$ di un processo del tipo $a \rightarrow b$ con Φ_a stato iniziale e Φ_b stato finale.

Prendiamo per prima cosa gli elementi di matrice della (4.52):

$$\langle \Phi_b, \mathbf{J}S\Phi_a \rangle = \langle \Phi_b, S\mathbf{J}\Phi_a \rangle \quad (4.54)$$

Se Φ_a e Φ_b sono autostati di \mathbf{J} e J_z , possiamo affermare che l'ampiezza di transizione del processo è 0 a meno che Φ_a e Φ_b non abbiano lo stesso momento angolare totale e la stessa proiezione del momento angolare totale sull'asse z . Infatti, esplicitando gli autovalori:

$$\langle \Phi_{bj'm'}, S\Phi_{ajm} \rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \langle \Phi_{bjm}, S\Phi_{ajm} \rangle \quad (4.55)$$

Possiamo inoltre affermare che, a causa dell'invarianza rotazionale, $\langle \Phi_{bjm}, S\Phi_{ajm} \rangle$ sono indipendenti da m : considerando gli operatori J_{\pm} , notiamo che questi commutano con S :

$$[J_{\pm}, S] = 0 \quad (4.56)$$

Prendendo gli elementi di matrice della relazione sopra con l'operatore J_+ e gli autostati del momento angolare Φ_{bjm} e $\Phi_{aj,m-1}$ otteniamo:

$$\langle \Phi_{bjm}, J_+ S\Phi_{aj,m-1} \rangle = \langle \Phi_{bjm}, SJ_+\Phi_{aj,m-1} \rangle \quad (4.57)$$

e, dato che $J_+^+ = J_-$, si ha:

$$\langle J_- \Phi_{bjm}, S\Phi_{aj,m-1} \rangle = \langle \Phi_{bjm}, SJ_+\Phi_{aj,m-1} \rangle \quad (4.58)$$

Possiamo riscrivere questa relazione come:

$$[(j+m)(j+m-1)]^{\frac{1}{2}} \langle \Phi_{bj,m-1}, S\Phi_{aj,m-1} \rangle = \quad (4.59)$$

$$= [(j-m+1)(j+m)]^{\frac{1}{2}} \langle \Phi_{bjm}, S\Phi_{ajm} \rangle \quad (4.60)$$

la quale dimostra che gli elementi di matrice hanno lo stesso valore per stesso j ma diversi m . Per sintetizzare ciò possiamo scrivere:

$$\langle \Phi_{bj'm'}, S\Phi_{ajm} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} S_{ba}^j \quad (4.61)$$

4.3 Parametrizzazione di una rotazione tramite gli angoli di Eulero

Finora abbiamo descritto una rotazione attraverso la parametrizzazione asse-angolo: una generica rotazione \mathbf{R} era funzione di un angolo vettoriale $\phi = \phi \mathbf{n}$, con ϕ angolo di rotazione e \mathbf{n} versore dell'asse di rotazione. Esiste tuttavia un'altra parametrizzazione delle rotazioni: la parametrizzazione con i tre angoli di Eulero α, β, γ .

In questa parametrizzazione, una rotazione \mathbf{R} può essere specificata dalla configurazione relativa di due sistemi di riferimento cartesiani con origine in comune:

1. Σ sistema fisso;
2. Σ_f sistema ruotato.

La rotazione tramite gli angoli di Eulero α, β, γ , il cui effetto è quello di far coincidere gli assi del sistema ruotato con quelli del sistema fisso, è definita come la trasformazione, mostrata in Fig.(4.2), $\Sigma \rightarrow \Sigma_f$ i cui passaggi sono:

- a) Una rotazione di α attorno all'asse z che trasforma $\Sigma \rightarrow \Sigma'$;
- b) una rotazione di β attorno all'asse y' che trasforma $\Sigma' \rightarrow \Sigma''$;

c) una rotazione di γ attorno all'asse z'' che trasforma $\Sigma'' \rightarrow \Sigma_f$.

Gli angoli di Eulero α, β, γ costituiscono dunque i parametri che specificano l'orientazione finale di Σ_f rispetto a Σ . Una generica rotazione sarà indicata in questa parametrizzazione tramite $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ con:

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (4.62)$$

$$0 \leq \beta \leq \pi \quad (4.63)$$

$$0 \leq \gamma \leq 2\pi \quad (4.64)$$

Se $\beta = 0$, la rotazione è una rotazione attorno all'asse z originale di un angolo $\alpha + \gamma$.

L'operatore unitario corrispondente a una rotazione $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ si indicherà:

$$U(\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)) = U(\mathbf{R}_{z''}(\gamma))U(\mathbf{R}_{y'}(\beta))U(\mathbf{R}_z(\alpha)) = e^{-i\hbar^{-1}J_{z''}\gamma}e^{-i\hbar^{-1}J_{y'}\beta}e^{-i\hbar^{-1}J_z\alpha} \quad (4.65)$$

Per una maggiore applicabilità nei calcoli, è utile riferire tutte le tre rotazioni al sistema fisso Σ .

L'operatore $J_{y'}$ è il generatore delle rotazioni attorno all'asse y' il quale è ottenuto da una rotazione dell'asse y di un angolo α attorno all'asse z , ma ha le stesse proprietà di J_y . Pertanto dalla (2.48) si avrà:

$$J_{y'} = U(\mathbf{R}_z(\alpha))J_yU(\mathbf{R}_z(\alpha))^+ \quad (4.66)$$

$$\rightarrow e^{-i\hbar^{-1}J_{y'}\beta} = e^{i\hbar^{-1}J_z\alpha}e^{-i\hbar^{-1}J_y\beta}e^{+i\hbar^{-1}J_z\alpha} \quad (4.67)$$

Lo stesso vale per $J_{z''}$:

$$J_{z''} = U(\mathbf{R}_{y'}(\beta))U(\mathbf{R}_z(\alpha))J_zU(\mathbf{R}_z(\alpha))^+U(\mathbf{R}_{y'}(\beta))^+ \quad (4.68)$$

$$\rightarrow e^{-i\hbar^{-1}J_{z''}\gamma} = e^{-i\hbar^{-1}J_{y'}\beta}e^{-i\hbar^{-1}J_z\alpha}e^{-i\hbar^{-1}J_z\gamma}e^{+i\hbar^{-1}J_z\alpha}e^{+i\hbar^{-1}J_{y'}\beta} \quad (4.69)$$

Sostituendo (4.67) e (4.69) in (4.65) si ottiene:

$$U(\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)) = e^{-i\hbar^{-1}J_z\alpha}e^{-i\hbar^{-1}J_y\beta}e^{-i\hbar^{-1}J_z\gamma} \quad (4.70)$$

La sequenza di rotazioni, tutte riferite al sistema fisso Σ :

a ') rotazione di γ attorno all'asse z ;

b ') rotazione di β attorno all'asse y ;

c ') rotazione di α attorno all'asse z

ha lo stesso effetto di quella descritta nei punti (a), (b) e (c).

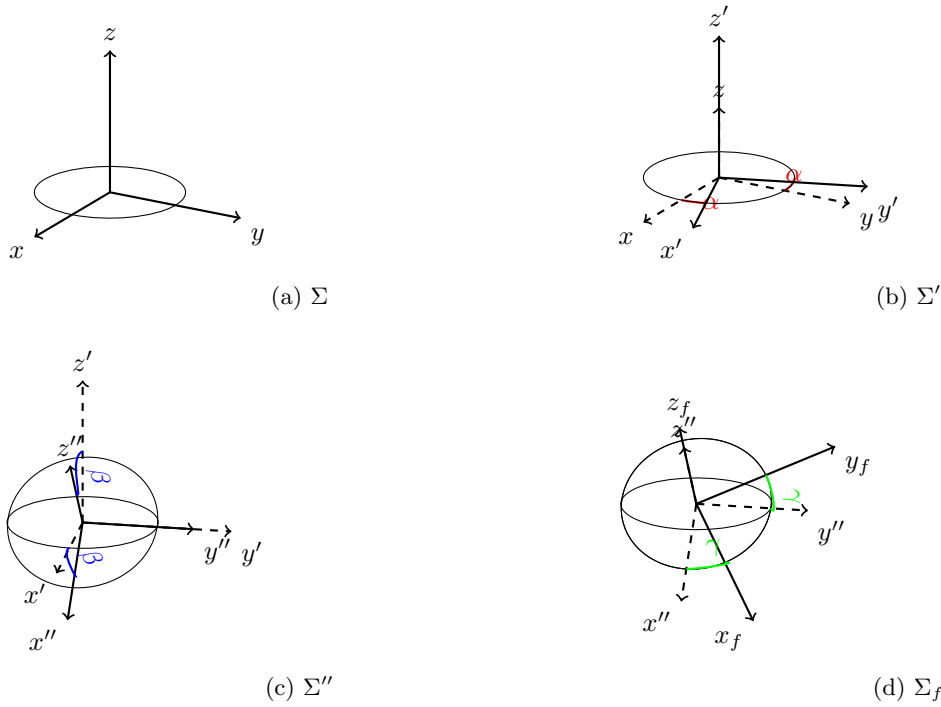


Figura 4.2: Sequenza di rotazioni utilizzata per costruire una generica rotazione delle coordinate con gli angoli di Eulero

4.4 Azione di una rotazione sulle autofunzioni del momento angolare

Vogliamo ora utilizzare la parametrizzazione di una rotazione attraverso gli angoli di Eulero per ricercare una rappresentazione del gruppo delle rotazioni $SO(3)$ rispetto a una base di autostati comuni dell'Hamiltoniana, di J^2 e di $J_z \Psi(n, j, m)$.

Abbiamo già visto come, supponendo che le rotazioni siano una trasformazione di simmetria dinamica, i generatori infinitesimali di queste ultime (gli operatori J_x, J_y, J_z) commutino con H :

$$[\mathbf{J}, H] = 0 \tag{4.71}$$

E' inoltre noto dalla teoria del momento angolare come i tre generatori non siano contemporaneamente diagonalizzabili, ma come di solito si sceglie di lavorare in una base di autostati comuni di $J^2, J_z \Psi(j, m)$:

$$J^2 \Psi(j, m) = j(j + 1) \hbar^2 \Psi(j, m) \tag{4.72}$$

$$J_z \Psi(j, m) = m \hbar \Psi(j, m) \tag{4.73}$$

Dato che entrambi commutano con H , possiamo scegliere una base comune di autostati di H , J^2 , J_z $\Psi(n, j, m)$:

$$J^2\Psi(n, j, m) = j(j+1)\hbar^2\Psi(n, j, m) \quad (4.74)$$

$$J_z\Psi(n, j, m) = m\hbar\Psi(n, j, m) \quad (4.75)$$

$$H\Psi(n, j, m) = E_n\Psi(n, j, m) \quad (4.76)$$

Applichiamo ora una rotazione $U(\mathbf{R})$: dato che le rotazioni sono un gruppo di simmetria dinamico, lo stato $U(\mathbf{R})\Psi(n, j, m)$ deve rimanere autostato di H con autovalore E_n :

$$H(U(\mathbf{R})\Psi(n, j, m)) = U(\mathbf{R})H\Psi(n, j, m) = E_n(U(\mathbf{R})\Psi(n, j, m)) \quad (4.77)$$

Una rotazione, infatti, non altera il valore di energia E_n . Considerazioni simili si applicano a J^2 , dato che esso commuta con i generatori:

$$J^2(U(\mathbf{R})\Psi(n, j, m)) = U(\mathbf{R})(J^2\Psi(n, j, m)) = j(j+1)\hbar^2(U(\mathbf{R})\Psi(n, j, m)) \quad (4.78)$$

Una rotazione, dunque, non modifica i valori dei numeri quantici n , j degli autostati comuni $\Psi(n, j, m)$ di H , J^2 , J_z . Ciò che può variare è il valore di m .

Si può dire qualcosa a priori sulla rappresentazione rispetto questa base? Ci vengono in aiuto gli strumenti della sezione (2.5). Definiamo per prima cosa un **operatore di Casimir**:

Definizione 4.4.1 (Operatore di Casimir) *Un operatore B che commuta con tutti gli elementi di un gruppo di Lie è detto operatore di Casimir del gruppo.*

Dato che l'operatore J^2 commuta con i generatori del gruppo di Lie delle rotazioni J_a , $a = x, y, z$, esso commuta con tutti gli elementi di $SO(3)$; esso risulta dunque un operatore di Casimir del gruppo delle rotazioni. A questo punto vale il teorema (2.95) tramite cui tutti i vettori, ossia le autofunzioni, delle rappresentazioni irriducibili sono autostati di J^2 con lo stesso autovalore. Il calcolo che segue ci porterà dunque alle rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$, le quali possono essere organizzate, tramite il teorema di Weyl, in una rappresentazione unitaria completamente riducibile (una matrice diagonale a blocchi).

Considerando una rotazione parametrizzata dagli angoli di Eulero si ha dunque:

$$U(\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma))\Psi(n, j, m) = e^{-i\hbar^{-1}\alpha J_z} e^{-i\hbar^{-1}\beta J_y} e^{-i\hbar^{-1}\gamma J_z}\Psi(n, j, m) \quad (4.79)$$

$$= e^{-i\hbar^{-1}\alpha J_z} e^{-i\hbar^{-1}\beta J_y} e^{-im\gamma}\Psi(n, j, m) \quad (4.80)$$

Tuttavia $\Psi(n, j, m)$ non è autostato di J_y dato che non esiste una base di autostati in cui J_x , J_y , J_z , J^2 sono tutti diagonali. Possiamo però affermare che J_y ha elementi di matrice non nulli solo tra stati con lo stesso j , e dunque

$e^{-i\hbar^{-1}\beta J_y}\Psi(n, j, m)$ deve essere una combinazione lineare degli stati $\Psi(n, j, m)$. I coefficienti della sovrapposizione sono denotati $d_{m'm}^j(\beta)$:

$$e^{-i\hbar^{-1}\beta J_y}\Psi(n, j, m) = \sum_{m'=-j}^{+j} \Psi(n, j, m')d_{m'm}^j(\beta) \quad (4.81)$$

combinando questa equazione con la precedente si ottiene:

$$U(\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma))\Psi(n, j, m) = \sum_{m'=-j}^{+j} \Psi(n, j, m')D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.82)$$

dove abbiamo posto:

$$D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im'\alpha}d_{m'm}^j(\beta)e^{-im\gamma} \quad (4.83)$$

Queste funzioni sono dette **funzioni D di Wigner**. Se calcoliamo il prodotto scalare di entrambi i lati della (4.82) con $\Psi(n, j, m')$ si trova.

$$\langle \Psi(n, j, m'), U(\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma))\Psi(n, j, m) \rangle = D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.84)$$

che ci mostra che le D di Wigner sono gli elementi di matrice delle rotazioni rispetto alla base $\Psi(n, j, m)$. I coefficienti $d_{m'm}^j(\beta)$ sono invece gli elementi di matrice di $e^{-i\hbar^{-1}\beta J_y}$ rispetto alla stessa base. Dato che J_y in questa base ha elementi puramente immaginari, iJ_y e $e^{-i\hbar^{-1}\beta J_y}$ hanno dunque elementi puramente reali.

Dato che, applicando una rotazione arbitraria agli autostati $\Psi(n, j, m)$, il risultato è una combinazione lineare di stati con lo stesso n e lo stesso j , l'insieme dei $(2j + 1)$ stati con $-j \leq m \leq +j$ genera un sottospazio invariante per gli operatori $U(\mathbf{R})$. Questo è vero per ogni j . Le D di Wigner costituiscono pertanto una rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni. Infatti, applicando due rotazioni consecutive si ha:

$$U(\mathbf{R}_2)U(\mathbf{R}_1)\Psi(n, j, m) = U(\mathbf{R}_1) \sum_{m'=-j}^{+j} \Psi(n, j, m')D_{m'm}^{(j)}(\mathbf{R}_1) \quad (4.85)$$

$$= \sum_{m'=-j}^{+j} U(\mathbf{R}_2)\Psi(n, j, m')D_{m'm}^{(j)}(\mathbf{R}_1) \quad (4.86)$$

$$= \sum_{m'=-j}^{+j} \sum_{m''=-j}^{+j} \Psi(n, j, m'')D_{m''m'}^{(j)}(\mathbf{R}_2)D_{m'm}^{(j)}(\mathbf{R}_1) \quad (4.87)$$

Ma dato che le rotazioni sono un gruppo si deve avere anche:

$$U(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)\Psi(n, j, m) = \sum_{m''=-j}^{+j} D_{m''m}^{(j)}(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1) \quad (4.88)$$

Comparando le due si ha:

$$D_{m''m}^{(j)}(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1) = \sum_{m'=-j}^{+j} D_{m''m'}^{(j)}(\mathbf{R}_2)D_{m'm}^{(j)}(\mathbf{R}_1) \quad (4.89)$$

e dunque:

$$D(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = D(\mathbf{R}_1)D(\mathbf{R}_2) \quad (4.90)$$

Questo mostra come, per un dato j , la matrice corrispondente al prodotto di due rotazioni è uguale al prodotto delle matrici corrispondenti alle due rotazioni separate: le matrici $D^{(j)}(\mathbf{R})$ di dimensione $(2j+1) \times (2j+1)$, di elementi $D_{m'm}^{(j)}$, sono una rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni rispetto alla base $\Psi(n, j, m)$.

In generale, pertanto, la matrice che rappresenta l'operatore unitario $U(\mathbf{R})$ si può suddividere in un numero infinito di matrici $D^{(j)}(\mathbf{R})$ e assume la forma diagonale:

$$U(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} D^{(j_1)}(\mathbf{R}) & 0 & \dots \\ 0 & D^{(j_2)}(\mathbf{R}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.91)$$

Vediamo ora alcuni calcoli espliciti delle D di Wigner nei casi più semplici. Alcune proprietà dei coefficienti $d_{m'm}^j$ si possono trovare in [8].

4.4.1 Calcolo di $D^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma)$

Sia $j = \frac{1}{2}$. Riferendoci alla teoria del momento angolare, nella base in cui stiamo lavorando gli operatori hanno la forma: $J_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k$, $k = 1, 2, 3$ dove σ_k sono le **matrici di Pauli**:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

Si avrà pertanto

$$d^{1/2}(\beta) = e^{\frac{-i\beta\sigma_2}{2}} \quad (4.93)$$

Possiamo notare come valgano le formule, per $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\left(-i\frac{\sigma_2}{2}\right)^{2l} = \frac{(-1)^l}{2^{2l}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

$$\left(-i\frac{\sigma_2}{2}\right)^{2l+1} = \frac{(-1)^l}{2^{2l+1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

Dalla definizione di esponenziale di una matrice si ha dunque:

$$e^{-i\beta\frac{\sigma_2}{2}} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\beta^l}{l!} \left(-i\frac{\sigma_2}{2}\right)^l \quad (4.96)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\beta^{2l}}{2l!} \left(-i\frac{\sigma_2}{2}\right)^{2l} + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\beta^{2l+1}}{(2l+1)!} \left(-i\frac{\sigma_2}{2}\right)^{2l+1} \quad (4.97)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\beta^{2l}}{2l!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\beta^{2l+1}}{(2l+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

$$= \cos(\beta/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(\beta/2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

Di conseguenza:

$$d^{1/2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

Tramite la (4.83) si ha:

$$D^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\beta/2) e^{-i\gamma/2} & -e^{i\alpha/2} \sin(\beta/2) e^{-i\gamma/2} \\ e^{-i\alpha/2} \sin(\beta/2) e^{i\gamma/2} & e^{i\alpha/2} \cos(\beta/2) e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

dove i possibili valori di m e m' sono indicati in ordine decrescente rispettivamente da sinistra a destra e dall'alto in basso (la casella in alto a sinistra avrà pertanto m e m' massimi, in questo caso pari a $1/2$). Questa convenzione è adottata anche successivamente.

4.4.2 Calcolo di $D^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma)$

Senza scendere troppo nei dettagli del calcolo dei coefficienti $d_{m'm}^1$ (si può consultare, per un metodo generale di calcolo, [5]), nel caso $j = 1$ si ha:

$$d^1(\beta) = \begin{pmatrix} (1 + \cos(\beta))/2 & -\sin(\beta)/\sqrt{2} & (1 - \cos(\beta))/2 \\ \sin(\beta)/\sqrt{2} & \cos(\beta) & -\sin(\beta)/2 \\ (1 - \cos(\beta))/2 & \sin(\beta)/2 & (1 + \cos(\beta))/2 \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

Si ha pertanto:

$$D^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha}((1 + \cos(\beta))/2)e^{-i\gamma} & (-\sin(\beta)/\sqrt{2})e^{-i\gamma} & e^{i\alpha}((1 - \cos(\beta))/2)e^{-i\gamma} \\ e^{-i\alpha}(\sin(\beta)/\sqrt{2}) & \cos(\beta) & e^{i\alpha}(-\sin(\beta)/2) \\ e^{-i\alpha}((1 - \cos(\beta))/2)e^{i\gamma} & (\sin(\beta)/2)e^{i\gamma} & e^{i\alpha}((1 + \cos(\beta))/2)e^{i\gamma} \end{pmatrix} \quad (4.104)$$

4.4.3 Particella con spin semintero: un caso di rappresentazione a valori doppi

Consideriamo come esempio di applicazione delle matrici sopra la trasformazione delle autofunzioni dello spin di una particella di spin $\frac{1}{2}$. Assumiamo la particella fissa nell'origine così da non considerare alcun moto orbitale. Denotiamo le $\Psi(j, m)$ (per semplicità non indichiamo il numero n visto che è lasciato invariato dalle rotazioni) come:

$$\Phi_+ = \Psi(1/2, 1/2), \quad \Phi_- = \Psi(1/2, -1/2) \quad (4.105)$$

che soddisfano:

$$S_z \Phi_+ = +\frac{1}{2} \hbar \Phi_+ \quad (4.106)$$

$$S_z \Phi_- = -\frac{1}{2} \hbar \Phi_- \quad (4.107)$$

L'operatore S_z rispetto tale base Φ_{\pm} è la matrice di Pauli σ_3 moltiplicata per $\frac{1}{2}\hbar$. Pertanto si può scrivere:

$$\Phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

Un generico stato di spin $\frac{1}{2}$ sarà dunque:

$$\Psi = a\Phi_+ + b\Phi_- = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (4.109)$$

La(4.109) è detta spinore.

Possiamo ora trovare le autofunzioni di una particella con componente dello spin $\pm\frac{1}{2}\hbar$ lungo una direzione arbitraria definita dagli angoli polari (θ, ϕ) applicando una rotazione $U(\mathbf{R})$. Nella parametrizzazione di Eulero tale rotazione

si può scrivere $U(\mathbf{R}(\phi, \theta, 0))\Phi_\lambda$. Per $\lambda = \pm 1$ si avrà:

$$U(\mathbf{R}(\phi, \theta, 0))\Phi_\lambda = \sum_{\mu=\pm 1/2} \Phi_\mu D_{\mu\lambda}^{(1/2)}(\phi, \theta, 0) \quad (4.110)$$

$$= \sum_{\mu} \Phi_\mu e^{-i\mu\phi} d_{\mu\lambda}^{1/2}(\theta) \quad (4.111)$$

Usando la (4.101) e denotando lo stato ruotato Φ'_λ si ha:

$$\Phi'_+ = \cos(\theta/2)e^{-i\frac{\phi}{2}}\Phi_+ + \sin(\theta/2)e^{i\frac{\phi}{2}}\Phi_- \quad (4.112)$$

$$\Phi'_- = -\sin(\theta/2)e^{-i\frac{\phi}{2}}\Phi_+ + \cos(\theta/2)e^{i\frac{\phi}{2}}\Phi_- \quad (4.113)$$

Nella rappresentazione come vettori colonna:

$$\Phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin(\theta/2)e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad \Phi'_- = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \cos(\theta/2)e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.114)$$

che sono le autofunzioni normalizzate dello spin nella direzione (θ, ϕ) .

Il fatto che appaiono degli angoli diviso due ha un'importante conseguenza: se eseguiamo una rotazione di un angolo 2π attorno a qualsiasi asse si ottiene:

$$\Phi'_\pm = -\Phi_\pm \quad (4.115)$$

Dunque, anche se geometricamente una rotazione di un angolo 2π dovrebbe corrispondere all'identità in quanto non dovrebbe variare nulla, sulle autofunzioni dello spin con $s = \frac{1}{2}$ essa produce un cambio di segno. Si parla in questo caso di rappresentazione **a valori doppi**.

Questo discorso è generalizzabile a tutti i casi con j semintero.

E' tuttavia possibile eliminare questa ambiguità: senza scendere nei dettagli menzioniamo il fatto che in realtà il gruppo $SO(3)$ non è altro che una rappresentazione tridimensionale del gruppo $SU(2)$ (il gruppo delle matrici unitarie 2×2 a $\det = 1$); ragionando dunque in termine di $SU(2)$ e non $SO(3)$ l'ambiguità del valore doppio viene eliminata. Infatti, dati $U \in SU(2)$ e $\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i$, l'azione di U su $\sigma(\mathbf{x})$ è data da:

$$U\sigma(\mathbf{x})U^+ = \sigma(\mathbf{R}(U)\mathbf{x}) \quad (4.116)$$

Si ha dunque che alla matrice U di $SU(2)$ corrisponde sullo spazio tridimensionale una matrice di rotazione $\mathbf{R}(U)$ di $SO(3)$. Per maggiori dettagli si veda [7].

Bibliografia

- [1] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 1995.
- [2] J.J.Sakurai. *Modern quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [3] E.M. Lifshitz L.D. Landau. *Quantum Mechanics. Non Relativistic Theory*. Pergamon Press, 1977.
- [4] Ling Lin. *Relativistic Quantum-Mechanics-Module 2. Spacetime Symmetries and their Representations*. 2023.
- [5] R. Hagedorn M. Chaichian. *Symmetries in Quantum Mechanics. From Angular Momentum to Supersymmetry*. Institute of Physics Publishing Bristol e Philadelphia, 1997.
- [6] Hugh Osborn. *Part I: Symmetries and their Representations*. 2011.
- [7] Wu-Ki Tung. *Group Theory in Physics. An Introduction to Symmetry Principles, Group Representations, and Special Functions in Classical and Quantum Physics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1985.
- [8] B.R. Pollard W. M. Gibson. *Symmetry Principles in Elementary Particle Physics*. Cambridge University Press, 1976.
- [9] Roberto Zucchini. *Group Theory: Lecture Notes*. 2023.
- [10] Roberto Zucchini. *Quantum Mechanics: Lecture Notes*. 2023.