ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Introduzione alla Geometria Algebrica e Teorema di Bézout

Tesi di Laurea in Algebra e Geometria

Relatore:
Prof. Luca Battistella
Correlatore:
Prof. Francesco Meazzini

Presentata da:
Antonio Diviggiano

Anno Accademico 2022/2023

Alla mia famiglia

Introduzione

La geometria algebrica è un campo della matematica che coniuga l'algebra e la geometria per studiare sistemi di equazioni polinomiali a coefficienti in un dato campo K e, in generale, problemi di natura algebrico-geometrica. Una varietà affine è l'insieme delle soluzioni di tali sistemi di equazioni nonché massimo oggetto di studio della geometria algebrica.

Nella tesi faremo vedere i legami che hanno queste varietà con l'algebra, mostrando come molte loro proprietà geometriche possano essere descritte da oggetti algebrici.

Introdurremo successivamente il concetto di morfismi tra varietà affini, cioè un tipo particolare di funzioni che ne lascia invariate molte caratteristiche algebrico-geometriche, e il concetto di varietà, più moderno, che generalizza quello di varietà affine.

Ci concentreremo su di un tipo particolare e molto importante di esse: le varietà proiettive. La scelta non è casuale, infatti come vedremo nella tesi queste varietà hanno un forte legame con le varietà affini. Come risultato finale per questa tesi ho scelto il teorema di Bézout, uno dei risultati più importanti della geometria algebrica. Grazie ad esso riusciremo a quantificare i punti di intersezione tra una curva e un generico iperpiano e nel caso planare tra due curve. Questa tesi è ispirata alla dispensa del professore Andreas Gathmann.

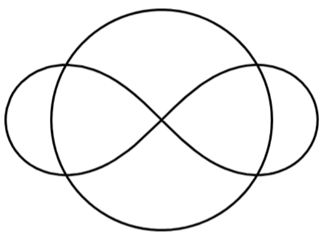

Figura 1: curve che si intersecano

Indice

Capitolo 1

Preliminari

In questa tesi saranno necessari molti concetti e risultati acquisiti nei corsi di Algebra 1, Algebra 2, Geometria 1 e Geometria 2.
Nel capitolo 4 si raggiungerà la definizione della cosiddetta localizzazione di un anello. Qui segue la sua costruzione.
Sia R un anello commutativo con unità. Un sottoinsieme non vuoto S si chiama sistema moltiplicativo se

1. $0 \notin S$.

2. $s_1, s_2 \in S$ implica che $s_1 s_2 \in S$.

Sia $\mathcal{M}$ l'insieme delle coppie ordinate (r, s), con $r \in R$ e $s \in S$, e si definisca in $\mathcal{M}$ la relazione $(r, s) \sim (r', s')$ se esiste un elemento $s'' \in S$ tale che

$$s''(rs' - r's) = 0.$$

La relazione di equivalenza è ben posta e denotiamo $\mathcal{M}/\sim$ con $S^{-1}R$. Denotiamo con $[r, s]$ la classe di equivalenza di (r, s) e definiamo l'operazione di somma $[r, s] + [r', s'] = [rs' + r's, ss']$ e di prodotto $[r, s] \cdot [r', s'] = [rr', ss']$, allora $S^{-1}R$ è anello commutativo con unita.
Esiste un sottoanello di $S^{-1}R$ isomorfo a R, l'anello $\{[rs, s] : r \in R\}$. Ogni elemento della forma $[r, r']$ con $r, r' \in S$ è invertibile.
Siano R un anello commutativo con unità e $I \subseteq R$ un ideale primo. Allora I^c è un sistema moltiplicativo. Verrà indicato $(I^c)^{-1}R$ con R_I.
Tutte le osservazioni, proposizioni e tutti i teoremi, lemmi e corollari non dimostrati si trovano nella dispensa del prof. Andreas Gathmann [1].

Capitolo 2

Varietà affini e topologia di Zariski

Iniziamo con l'introdurre i primi concetti fondamentali delle geometria algebrica: le varietà affini.

Convezione. In questa tesi considereremo i polinomi anche come funzioni. Per ogni polinomio $p = \sum_{i_1,...,i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{i_n} \in K[x_1, ..., x_n]$ e per ogni $c = (c_1, ..., c_n) \in K^n$, possiamo definire la valutazione di p in c come

$$p(c) = \sum_{i_1,...,i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1,...,i_n} c_1^{i_1} \cdot \cdots \cdot c_n^{i_n} \in K$$

Convenzione. In questa tesi, ma come in ogni libro di geometria algebrica, denoteremo K^n come $\mathbb{A}_K^n$, o solamente $\mathbb{A}^n$, per ogni n naturale. Oltretutto, per noi K sarà sempre un campo algebricamente chiuso, a meno che non specifichiamo il contrario.

Definizione 2.1. *Sia $S \subseteq K[x_1, ..., x_n]$. Chiamiamo*

$$V(S) := \{x \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0 \text{ per ogni } f \in S\}$$

***luogo degli zeri affine**, o semplicemente luogo degli zeri, di S. I sottoinsiemi di $\mathbb{A}^n$ di questa forma sono chiamati **varietà affini**. Se $S = \{f_1, ..., f_k\}$ allora scriveremo $V(S) = V(\{f_1, ..., f_k\})$ come $V(f_1, ..., f_k)$*

Esempio 2.2. Iniziamo a dare qualche esempio di varietà affine.

1. I sottospazi lineari di $\mathbb{A}^n$ sono delle varietà affini, perché descritti da equazioni polinomiali di grado 1, come in Figura 2.1.

2. Il gruppo lineare speciale $SL_n(K) = \{A \in M_n(K) : \det(A) = 1\}$.

3. Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ sono varietà affini allora anche il loro prodotto $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ lo è.

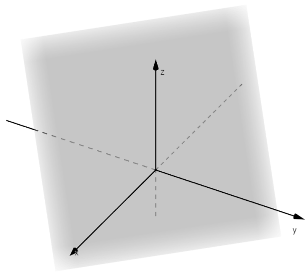

Figura 2.1: Piano in $\mathbb{R}^3$, $x + y + z = 0$

Osservazione 2.1. *Sia $S \subseteq K[x_1, ..., x_n]$, e sia (S) l'ideale generato da S. Allora $V(S) = V((S))$.*

Dimostrazione. Siano $x \in V(S)$, $f, g \in S$ e $h \in K[x_1, ..., x_n]$, allora $f+g$ e hf si annullano su $V(S)$. Questo vuol dire che $V(S) \subseteq V((S))$. Sia $x \in V((S))$ allora $x \in V(S)$. □

Introduciamo uno dei teoremi più importanti dell'algebra commutativa, il teorema della base di Hilbert. Esso ci sarà molto utile per lo sviluppo della teoria, fondamentale per dimostrare che le varietà sono luoghi degli zeri di famiglie finite di polinomi.

Teorema 2.3 (Teorema della base di Hilbert). *Ogni ideale nell'anello dei polinomi $K[x_1, ..., x_n]$ è finitamente generato.*

Osservazione 2.2. *Sia $X = V(S)$ una varietà affine. L'ideale (S) è finitamente generato grazie al teorema 2.3, quindi $(S) = (f_1, ..., f_n)$ con f_i in (S) per ogni $i \in \{1, ..., n\}$. Dato che $V(S) = V((S))$, abbiamo che $V(S) = V((f_1, ..., f_n)) = V(f_1, ..., f_n)$. Abbiamo dimostrato che ogni varietà affine X è generata da un numero finito di polinomi.*

L'osservazione 2.1 e il teorema di Hilbert ci mostrano i primi legami che vi sono tra le varietà affini e gli ideali di $K[x_1, ..., x_n]$ nella geometria algebrica.

Definizione 2.4 (Ideale di un sottoinsieme di $\mathbb{A}^n$). *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un qualsiasi sottoinsieme. Allora*

$$I(X) := \{f \in K[x_1, ..., x_n] : f(x) = 0 \text{ per ogni } x \in X\}$$

è chiamato ideale di X.

Osservazione 2.3. *L'insieme $I(X)$ è un ideale radicale di $K[x_1, ..., x_n]$, infatti se $f^n \in I(X)$, allora $f^n(x) = 0$ per tutti gli $x \in X$ e dato che l'anello dei polinomi è un dominio, si ha che $f(x) = 0$ per tutti gli $x \in X$, quindi $f \in I(X)$.*

Lemma 2.5. *Siano S' e S due sottoinsiemi di $K[x_1, ..., x_n]$, e siano X e X' due sottoinsiemi di $\mathbb{A}^n$. Allora*

1. *Se $X \subseteq X'$ allora $I(X') \subseteq I(X)$ e se $S \subseteq S'$ allora $V(S') \subseteq V(S)$.*

2. *$X \subseteq V(I(X))$ e $S \subseteq I(V(S))$.*

3. *Se X è una varietà affine allora $X = V(I(X))$.*

Dimostrazione.

1. Sia $X \subseteq X'$. Se $f \in I(X')$ allora si annullerà su tutto X', cioè $f(x) = 0$ per tutti gli $x \in X'$, quindi $f(x) = 0$ per tutti gli $x \in X$, quindi $f \in I(X)$. La seconda tesi si dimostra in modo analogo.

2. Sia $x \in X$. Allora $f(x) = 0$ per ogni $f \in I(X)$, quindi per definizione $x \in V(I(X))$. Come prima, la seconda tesi si dimostra in modo analogo.

3. Per il punto 2 bisogna solo dimostrare che $V(I(X)) \subseteq X$. Dato che X è una varietà affine, allora $X = V(S)$, con S sottoinsieme dell'anello dei polinomi in K. Allora $S \subseteq I(V(S))$ per il punto 2, e quindi $V(S) \supseteq V(I(V(S)))$ per il punto 1.Sostituendo $V(S)$ con X dimostriamo la tesi.

Osservazione 2.4. *In generale l'inclusione $J \subseteq I(V(J))$ è stretta, con $J \subseteq K[x_1, ..., x_n]$, ideale qualsiasi. Per esempio, se $K = \mathbb{C}$ e consideriamo l'ideale $J = ((x-2)^2(x-i)^5) \subseteq \mathbb{C}[x]$, abbiamo che $V(J) = \{2, i\}$ ma $I(V(J)) = ((x-2)(x-i))$, che contiene strettamente J.*

Come abbiamo appena visto $J \subseteq I(V(J))$, ma quando vi è l'uguaglianza? In che modo $I(V(J))$ è legato a J? Una risposta la dà il Teorema degli zeri di Hilbert.

Teorema 2.6 (Il teorema degli zeri di Hilbert)**.** *Sia K un campo algebricamente chiuso. Per ogni ideale $J \subseteq K[x_1, ..., x_n]$ abbiamo che $I(V(J)) = \sqrt{J}$. In particolare, c'è una corrispondenza biunivoca tra le varietà affini di $\mathbb{A}^n$ e gli ideali radicali di $K[x_1, ..., x_n]$,*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{varietà affini di } \mathbb{A}^n\} & \longleftrightarrow & \{\textit{ideali radicali di } K[x_1, ..., x_n]\} \\ X & \longmapsto & I(X) \\ V(J) & \longleftarrow\!\!\shortmid & J. \end{array}$$

Questo è uno dei teoremi più importanti dell'algebra commutativa, fondamentale per dimostrare la maggior parte delle proposizioni e teoremi della geometria algebrica.

Osservazione 2.5 (polinomi e funzioni polinomiali nei campi algebricamente chiusi)**.** *I polinomi e le funzioni polinomiali sono due concetti diversi nell'algebra. Infatti a volte due polinomi possono essere distinti ma uguali come funzioni polinomiali, come*

0 e $x^2 - x$ in $\mathbb{Z}_2[x]$. Se il campo è algebricamente chiuso le cose cambiano. Siano $f, g \in K[x_1, ..., x_n]$, e ipotizziamo che $f(x) = g(x)$ per tutti gli $x \in \mathbb{A}^n$, allora $f - g \in I(\mathbb{A}^n) = I(V(0)) = \sqrt{(0)} = (0)$, quindi f è uguale a g in $K[x_1, ..., x_n]$. Nei campi algebricamente chiusi polinomi e funzioni polinomio "sono la stessa cosa".

Data una varietà affine $X \subseteq \mathbb{A}^n$, siamo interessati a studiare i polinomi visti come funzioni ristrette ad X e per questo introduciamo l'anello delle coordinate. Se due polinomi p e q sono identici su X, allora $p - q \in I(X)$, cioè $[p] = [q]$ in $K[x_1, ..., x_n]/I(X)$.

Definizione 2.7. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine. Una funzione polinomiale su X è una mappa $\varphi : X \to K$ tale che $x \mapsto f(x)$ per qualche $f \in K[x_1, ..., x_n]$. Possiamo identificare l'anello di tali funzioni con*

$$A(X) := K[x_1, ..., x_n]/I(X).$$

*In generale $A(X)$ è chiamato **anello delle coordinate** della varietà affine X.*

Possiamo vedere un elemento di $A(X)$ come una funzione, polinomiale, su X. La valutazione di $[f]$ in $c \in X$ è semplicemente $f(c)$.
Possiamo definire, come per $\mathbb{A}^n$, il luogo degli zeri di un ideale di $A(X)$ e l'ideale generato da un sottoinsieme di X.

Definizione 2.8. *Siano X una varietà affine, $Y \subseteq X$ e $S \subseteq A(X)$. Allora*

1. $V_X(S) := \{x \in X : [f](x) = 0$ *per ogni* $f \in S\}$.
2. $I_X(Y) := \{[f] \in A(X) : [f](y) = 0$ *per ogni* $y \in Y\}$.

Questi due operatori godono delle stesse proprietà di $V(\cdot)$ e $I(\cdot)$. Non solo, il teorema della base e il teorema degli zeri di Hilbert possono essere generalizzati come segue.

Proposizione 2.9. *Sia Y una varietà affine in $\mathbb{A}^n$,*

1. *(**Teorema della Base di Hilbert**) Ogni ideale di $A(Y)$ è finitamente generato.*
2. *(**Teorema degli zeri di Hilbert**) Per ogni ideale $J \subseteq A(Y)$ abbiamo che $I_Y(V_Y(J)) = \sqrt{J}$. In particolare vi è una corrispondenza biunivoca tra le sottovarietà affine di Y e gli ideali radicali di $A(Y)$*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{sottovarietà affini di } Y\} & \longleftrightarrow & \{\textit{ideali radicali di } A(Y)\} \\ X & \longmapsto & I_Y(X) \\ V_Y(J) & \longleftarrow\!\shortmid & J. \end{array}$$

3. *Per ogni sottovarietà X di Y si ha che $A(X) \cong A(Y)/I_Y(X)$.*

Lemma 2.10 (Proprietà di $V(\cdot)$)**.** *Sia X una varietà affine.*

1. *Se J è un insieme di indici e $\{S_i : i \in J\}$ è una famiglia di sottoinsiemi di $A(X)$ allora $\bigcap_{i\in J} V(S_i) = V(\bigcup_{i\in J} S_i)$ in X.*

2. *Se $S_1, S_2 \subseteq A(X)$ si ha che $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1S_2)$ in X, dove $S_1S_2 := \{fg : f \in S_1, g \in S_2\}$.*

Dimostrazione.

1. Si ha che $x \in \bigcap_{i\in J} V(S_i)$ se e solo se $f(x) = 0$ per ogni $f \in S_i$, per ogni $i \in J$, se e solo se $x \in V(\bigcup_{i\in J} S_i)$.

2. Se $x \in V(S_1) \cup V(S_2)$ allora $f(x) = 0$ per ogni $f \in S_1$ o $g(x) = 0$ per ogni $g \in S_2$. In ogni caso $(fg)(x) = 0$ per ogni $f \in S_1$ e per ogni $g \in S_2$, $x \in V(S_1S_2)$.
   Se $x \notin V(S_1) \cup V(S_2)$, cioè $x \notin V(S_1)$ e $V(S_2)$, allora ci sono $f \in S_1$ e $g \in S_2$ con $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$. Allora $(fg)(x) \neq 0$, quindi $x \notin V(S_1S_2)$.

□

Osservazione 2.6 (Topologia di Zariski)**.** *Grazie al lemma 2.10 possiamo definire la topologia di Zariski su $\mathbb{A}^n$, dove i chiusi sono le varietà affini. Infatti grazie al lemma le intersezioni arbitrarie di varietà affini sono ancora varietà affini e le unioni finite di varietà affini sono ancora varietà affini. $\mathbb{A}^n = V(0)$ e $\{\} = V(1)$. Possiamo definire una topologia anche Y, varietà affine di $\mathbb{A}^n$, chiamando chiusi tutti i sottoinsiemi $X \subseteq Y$ che sono del tipo $X = V_Y(S)$, con $S \subseteq A(Y)$. Si ha che la topologia indotta da $\mathbb{A}^n$ su Y è la stessa di quella definita prima. Quindi quando parleremo di topologia (di Zariski) su Y, varietà affine, intenderemo sia quella di sottospazio che quella che deriva da V_Y, dato che sono la stessa.*

Capitolo 3

Topologia di Zariski

In questo capitolo studieremo la topologia di Zariski già introdotta nel capitolo precedente. Questa ci permetterà di descrivere le proprietà geometriche che le varietà affini ne ereditano, come dimensione e numero di componenti in cui si possono spezzare, e, nei capitoli successivi, ci permetterà di descrivere anche il legame che le varietà affini hanno con spazi a loro simili.

Osservazione 3.1.

1. *La topologia di Zariski, se $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, è meno fine di quella euclidea. Dato che i polinomi sono funzioni continue per la topologia euclidea, allora ogni varietà affine è un chiuso nella topologia euclidea. In generale, si dice che gli aperti della topologia di Zariski siano molto grandi e i chiusi, sempre nella topologia di Zariski, siano molto piccoli.*

2. *In topologia vi è la nozione di topologia prodotto. Nel nostro caso, se X e Y sono due varietà affini, muniti della topologia di Zariski, la topologia prodotto in $X \times Y$ non coincide con la topologia di Zariski in $X \times Y$. Per esempio $V(x_1 - x_2) = \{(a, a) : a \in K\} \subset \mathbb{A}^n$ è un chiuso per la topologia di Zariski ma non per la topologia prodotto in $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$.*

In generale, per quanto detto, non useremo mai la topologia prodotto, anzi in futuro definiremo una topologia ad hoc per il prodotto di quelle che chiameremo prevarietà.
Dopo queste importanti osservazioni possiamo introdurre la nozione di irriducibilità e quella di connessione.

Definizione 3.1 (Spazi irriducibili)**.** *Sia X uno spazio topologico. Diciamo che X è **riducibile** se può essere scritto come $X = X_1 \cup X_2$, dove $X_1, X_2 \subset X$ sono due chiusi propri. In caso contrario X si dice **irriducibile**.*

Come al solito, le proprietà geometriche sono legate alle proprietà algebriche in geometria algebrica, come mostra il seguente risultato.

Proposizione 3.2. *Sia X una varietà affine. X è irriducibile se e solo se $A(X)$ è un dominio di integrità.*

Dimostrazione. (Implicazione sufficiente): Abbiamo che X è irriducibile. Supponiamo per assurdo che $A(X)$ non sia un dominio, cioè esistono $f_1, f_2 \in A(X)$, diversi da 0, ma tali che $f_1 f_2 = 0$. Allora si ha che $X_1 = V_X(f_1)$ e $X_2 = V_X(f_2)$ sono chiusi, ma non uguali a X, dato che i polinomi non sono nulli. Ma $X_1 \cup X_2 = V(f_1) \cup V_X(f_2) = V_X(f_1 f_2) = V(0) = X$, quindi X è riducibile, assurdo.
(Implicazione necessaria): Abbiamo che $A(X)$ è un dominio. Supponiamo X riducibile, quindi esistono $X_1, X_2 \subset X$, chiusi propri, tale che $X = X_1 \cup X_2$. Si ha che $I_X(X_1)$ e $I_X(X_2)$ non siano vuoti, per il teorema degli zeri. Scelgo $f_1 \in I_X(X_1)$ e $f_2 \in I_X(X_2)$, allora $f_1 f_2$ si annulla su tutto X, quindi $f_1 f_2 \in I(X)$, quindi è nullo in $A(X)$. $A(X)$ non è un dominio, assurdo. □

Osservazione 3.2. *$\mathbb{A}^n$ è irriducibile, dato che $A(\mathbb{A}^n) = K[x_1, ..., x_n]$.*

Definizione 3.3 (Spazio topologico Noetheriano)**.** *Sia X uno spazio topologico. X è chiamato Noetheriano se non esiste una catena strettamente decrescente*

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$$

di sottoinsiemi chiusi di X.

Lemma 3.4. *Ogni varietà affine è uno spazio topologico Noetheriano.*

Dimostrazione. Sia X una varietà affine. Supponiamo per assurdo che esista una catena infinita di sottovarietà $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ di X. Per il teorema degli zeri, ad essa corrisponde una catena infinita strettamente crescente di ideali in $A(X)$

$$I(X_0) \subset I(X_1) \subset I(X_2) \subset \cdots .$$

L'ideale $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \subseteq A(X)$ è finitamente generato per il teorema della base, quindi esistono $f_1, ..., f_r \in I$ tali che $I = (f_1, ..., f_r)$. Questi polinomi devono appartenere a qualche I_m, per $m \in \mathbb{N}$. Allora deve essere che $I \subseteq I_m$, ma questo è un assurdo dato che è una catena strettamente crescente. □

Osservazione 3.3. *Vale oltretutto che se X è uno spazio Noetheriano, allora lo è anche ogni suo sottoinsieme.*

Giungiamo a dimostrare un'importante proposizione che ci dice come uno spazio Noetheriano si scompone in componenti irriducibili.

Proposizione 3.5 (Decomposizione irriducibile degli spazi Noetheriani)**.** *Ogni spazio Noetheriano X può essere scritto come unione finita $X = X_1 \cup ... \cup X_r$ di chiusi irriducibili di X. Se si assume che X_i non sia contenuto in X_j, per ogni $i, j \in \{1, ..., r\}$, $i \neq j$, allora gli $X_1, ..., X_r$ sono unici (a meno di permutazioni). Questi sottoinsiemi vengono chiamati componenti irriducibili di X.*

Dimostrazione. Per dimostrare l'esistenza, supponiamo per assurdo che esista X, spazio topologico, che neghi la tesi. Si ha che X è riducibile, quindi abbiamo che $X = X_1 \cup X_1'$, con $X_1, X_1' \subseteq X$ chiusi. Uno dei due deve essere riducibile, per far sì che la tesi sia falsa, diciamo X_1'. Dato che X_1' è riducibile allora esistono $X_2, X_2' \subseteq X_1'$, chiusi, dove uno dei due deve essere riducibile per far sì che la tesi sia falsa, diciamo X_2'. Se iteriamo il processo per un numero infinito di volte otteniamo una catena strettamente decrescente

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$$

di insiemi chiusi. Questa è un assurdo dato che X è uno spazio Noetheriano.
Per dimostrare l'unicità, supponiamo esistano due decomposizioni

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_r = X_1' \cup \cdots \cup X_s'.$$

Fissato $i \in \{1, ..., r\}$, diciamo $X_i \subseteq \bigcup_{j=0}^{s} X_j'$, allora $X_i = \bigcup_{j=0}^{s}(X_i \cap X_j')$. Ma X_i è irriducibile, allora deve esiste un $j' \in \{1, ..., s\}$ tale che $X_i = X_i \cap X_{j'}'$, quindi $X_i \subseteq X_{j'}'$. La stessa cosa accade per ogni X_j', $j \in \{1, ..., s\}$, cioè esiste un $k \in \{1, ..., r\}$ tale che $X_j' \subseteq X_k$. Allora si ha che $X_i \subseteq X_{j'}' \subseteq X_k$, per ogni $i \in \{1, ..., r\}$, ma questo è possibile solo se $X_i = X_k$. Quindi ogni sottoinsieme a destra compare a sinistra e viceversa. □

Adesso sappiamo che ogni spazio Noetheriano si scompone in parti irriducibili e quindi che ogni varietà affine, che è Noetheriana per il lemma 3.4, si scompone in sottovarietà irriducibili. La definizione di irriducibilità è importante anche per definire il concetto di dimensione di una varietà affine e in generale di uno spazio Noetheriano.

Definizione 3.6 (Dimensione e codimensione)**.** *Sia X uno spazio Noetheriano non vuoto.*

1. *La **dimensione** $\dim X \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ è il più grande $n \in \mathbb{N}$ tale che esista una catena*

$$\{\} \neq Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n \subseteq X$$

di lunghezza n di sottoinsiemi chiusi irriducibili $Y_1, ..., Y_n$ di X.

2. *Se $Y \subseteq X$ è un sottoinsieme non vuoto chiuso e irriducibile di X la* ***codimensione*** *$codim_X Y$ di Y in X è, di nuovo, il più grande $n \in \mathbb{N}$ tale che esita una catena*

$$Y \subseteq Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n \subseteq X$$

di sottoinsiemi chiusi e irriducibili $Y_1, ..., Y_n$ contenenti Y.

In matematica ci sono varie definizioni di dimensione, noi in questa tesi useremo quella di spazio vettoriale e quella di uno spazio topologico Noetheriano. Per evitare confusione, per gli spazi vettoriali useremo $\dim_K X$, dove X è un K-spazio vettoriale e $\dim X$ quando X è uno spazio Noetheriano.

Osservazione 3.4. *Si può pensare agli Y_i come a delle sottovarietà di dimensione $i \in \mathbb{N}$, così che la dimensione di $Y_n \subseteq X$ sia n. Allo stesso modo possiamo vedere gli Y_i della codimensione $codim_X Y$, come varietà di dimensione $i + dim\ Y$ tale che $n + dim\ Y = dim\ X$, quindi $n = dim\ X - dim\ Y$.*

Esempio 3.7. La dimensione di $\mathbb{A}$ è 1, questo perché ogni polinomio in K ammette un numero finito di radici, quindi, dato che $\mathbb{A}$ è un insieme di cardinalità infinita, dato che è algebricamente chiuso, non può essere unione di due sottovarietà di $\mathbb{A}$.

Finiamo il capitolo con questo risultato e con qualche osservazione finale.

Proposizione 3.8 (Proprietà della dimensione). *Siano X e Y due varietà affini irriducibili e non vuote.*

1. *Abbiamo che $dim\ X \times Y = dim\ X + dim\ Y$, In particolare si ha che $\mathbb{A}^n = n$.*

2. *Se $Y \subseteq X$ abbiamo che $dim\ X = dim\ Y + codim_X Y$. In particolare, $codim_X\{a\} = dim\ X$ per ogni $a \in X$.*

3. *Se $f \in A(X)$ è un polinomio non nullo, allora ogni componente irriducibile di $V(f)$ ha codimensione 1 in X (quindi ha come dimensione $dim\ X - 1$).*

Esempio 3.9. Sia $V(x_2 - x_1^2) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, come mostrato in figura 3.1 (solo la parte reale). Ci aspettiamo che :

1. X sia irriducibile per la proposizione 3.2, dato che $\mathbb{C}[x_1, x_2]/(x_2 - x_1^2) \cong \mathbb{C}[x_1]$, che è un dominio.

2. X abbia dimensione 1 per la proposizione 3.10, dato che $\mathbb{C}^2$ ha dimensione 2.

Finiamo con un'importante definizione riguardante la dimensione

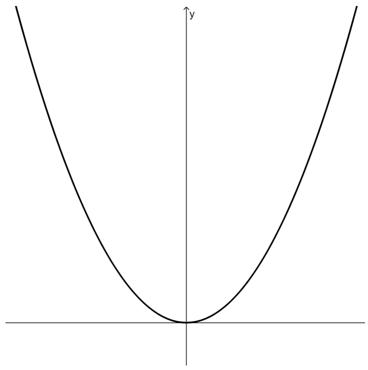

Figura 3.1: $x_2 - x_1^2$

Definizione 3.10 (Dimensione pura di uno spazio Noetheriano)**.**

1. *Uno spazio topologico Noetheriano X è detto di* ***dimensione pura*** *n se ogni componente irriducibile di X ha dimensione n.*
2. *Una varietà affine è chiamata ...*
   (a) ***curva affine*** *se è di dimensione pura* 1
   (b) ***superficie affine*** *se è di dimensione pura* 2
   (c) ***iperpiano affine*** *se è la sottovarietà di una varietà affine X e se è di dimensione pura dim $X - 1$.*

Capitolo 4

Fascio delle funzioni regolari

Nei capitoli precedenti abbiamo definito le varietà affini, mostrato i legami che hanno con il loro anello delle coordinate e caratterizzato le proprietà geometriche ereditate dalla topologia di Zariski, come la dimensione e l'essere irriducibile. Siamo ora interessati a definire e a studiare funzioni tra varietà affini che ne valorizzino la struttura. Tali funzioni sono definite dalle funzioni regolari, cioè funzioni che localmente assomigliano a rapporti di funzioni polinomiali, che tratteremo in questo capitolo.

Definizione 4.1 (Funzioni regolari). *Sia X una varietà affine e sia U un sottoinsieme aperto di X. Una **funzione regolare** su U è una mappa $\varphi : U \to K$ con la seguente proprietà: Per ogni $a \in U$ esiste un intorno aperto di a, U_a, e due polinomi $f, g \in A(X)$, con $f(x) \neq 0$ e $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ per ogni $x \in U_a$. L'insieme di tutte le funzioni regolari su U sarà denotato come $\mathcal{O}_X(U)$.*

Notazione. Per brevità a volte "$f(x) \neq 0$ e $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ per ogni $x \in U$" sarà abbreviato in "$\varphi = \frac{g_a}{f_a}$".

Definizione 4.2 (K-algebra e omomorfismo tra K-algebre).

1. *Una K**-algebra** è un anello R che è allo stesso tempo un K-spazio vettoriale tale che l'operazione di moltiplicazione è K-bilineare.*

2. *Per K-algebre R e R' un **morfismo** (o K**-algebra omomorfismo**) da R a R' è una mappa $f : R \to R'$ che è allo stesso tempo un omomorfismo tra anelli e una mappa K-lineare.*

Osservazione 4.1 ($\mathcal{O}_X(U)$ come K-algebra). *L'insieme $\mathcal{O}_X(U)$, con le usuali operazioni definite punto per punto, è un anello commutativo con unità. In più, dato che una funzione regolare moltiplicata per uno scalare di K è ancora una funzione regolare, abbiamo che è anche un K-spazio vettoriale.*

Mostriamo un esempio di funzione regolare per far vedere come assomiglino localmente ai polinomi.

Esempio 4.3. Consideriamo la varietà $X = V(x_1x_4 - x_2x_3) \subseteq \mathbb{A}^4$ e il sottoinsieme aperto

$$U = X \backslash V(x_2, x_4) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X : x_2 \neq 0 \text{ or } x_4 \neq 0\} \subseteq X.$$

Allora

$$\varphi : U \to K, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} & \text{se } x_2 \neq 0 \\ \dfrac{x_3}{x_4} & \text{se } x_4 \neq 0 \end{cases}$$

è una funzione regolare su U: è ben definita dato che l'equazione che definisce X implica che $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$ quando $x_2 \neq 0$ e $x_4 \neq 0$, è anche ovvio che sia localmente un polinomio. Nessuna delle due rappresentazioni può essere utilizzate per rappresentare φ dato che la prima non funziona su $(0, 0, 0, 1) \in U$, mentre la seconda non funziona su $(0, 1, 0, 0) \in U$.

Lemma 4.4 (Luoghi degli zeri di funzioni regolari sono chiusi)**.** *Sia U un sottoinsieme aperto di una varietà affine X, e sia $\varphi \in \mathcal{O}_X(U)$ una funzione regolare su U. Allora*

$$V(\varphi) = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}$$

è chiuso in U.

Dimostrazione. Per definizione di funzione regolare, per ogni $a \in U$ esiste un intorno aperto U_a in U dove $\varphi = \frac{g_a}{f_a}$, per qualche $f_a, g_a \in A(X)$, con f_a che non si annulla su U_a. Quindi l'insieme

$$\{x \in U : \varphi(x) \neq 0\} = U_a \backslash V(g_a)$$

è aperto in X. Allora dato che $\bigcup_{a \in U} U_a \backslash V(g_a) = U \backslash V(\varphi)$ è aperto, perché unioni di aperti, $V(\varphi)$ è un chiuso. □

Le funzioni regolari, come abbiamo visto nell'esempio precedente, possono non avere una descrizione globale. Ma nel caso degli aperti distinti le cose cambiano.

Definizione 4.5 (Sottoinsiemi aperti distinti)**.** *Siano X una varietà affine e $f \in A(X)$ una funzione polinomiale su X. Allora chiamiamo*

$$D(f) = X \backslash V(f)$$

sottoinsieme aperto distinto *di X.*

Osservazione 4.2. *Gli aperti distinti di una varietà affine X si comportano bene con le intersezioni e le unioni:*

1. *Per ogni $f, g \in A(X)$ si ha che $D(f) \cap D(g) = D(fg)$*

2. *Ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$ è unione finita di sottoinsiemi aperti distinti: Se $U \subseteq X$ è un sottoinsieme aperto allora $V := X \backslash U = V(f_1, ..., f_r)$, con $f_1, ..., f_r \in A(X)$, quindi $V = V(f_1) \cap ... \cap V(f_r)$. Facendo il complementare di tutto otteniamo $U = D(f_1) \cup ... \cup D(f_r)$.*

Vediamo come le funzioni regolari si comportano sugli aperti distinti.

Proposizione 4.6 (Funzioni regolari sugli aperti distinti)**.** *Sia X una varietà affine, e sia $f \in A(X)$. Allora*

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \left\{ \frac{g}{f^n} : g \in A(X), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

In particolare, se $f = 1$ si ha che $\mathcal{O}_X(X) = A(X)$, cioè le funzioni regolari su tutto X sono esattamente le funzioni polinomiali.

Dimostrazione. Dimostriamo che sono uguali facendo vedere che uno è incluso nell'altro. L'inclusione verso sinistra è ovvia: Ogni funzione della forma $\frac{g}{f^n}$ con $g \in A(X)$ e $n \in \mathbb{N}$ è una funzione regolare su $D(f)$. Per l'inclusione verso destra, sia $\varphi : D(f) \to K$ una funzione regolare. Per definizione abbiamo per ogni $a \in D(f)$ una rappresentazione locale $\varphi = \frac{g_a}{f_a}$ per qualche $g_a, f_a \in A(X)$, valida su un intorno aperto di a in $D(f)$. A meno di restringere l'intorno aperto, possiamo ipotizzare che esso sia un aperto distinto $D(h_a)$, con $h_a \in A(X)$. Non solo, possiamo cambiare la rappresentazione di φ rimpiazzando g_a e f_a con $g_a h_a$ e $f_a h_a$ (che non cambia il valore di φ sull'intorno) per assumere che entrambi si annullino su $V(h_a)$. Per come abbiamo modificato φ, il denominatore non si annulla su $D(h_a)$ e si annulla si su $V(h_a)$, allora h_a e f_a hanno lo stesso luogo degli zeri e quindi possiamo assumere che $h_a = f_a$. Come conseguenza si ha che

$$g_a f_b = g_b f_a \text{ per ogni } a, b \in D(f) :$$

Le due funzione combaciano su $D(h_a) \cap D(h_b)$ dato che $\varphi = \frac{g_a}{f_a} = \frac{g_b}{f_b}$, e sono nulle altrimenti per costruzione, infatti se $x \in V(h_a)$ abbiamo $g_a(x) = f_a(x) = 0$ mentre se $x \in V(h_b)$ abbiamo $g_b(x) = f_b(x) = 0$. L'unione di tutti questi intorni ricopre tutto $D(f) = \bigcup_{a \in D(f)} D(f_a)$. Facendo il complementare di tutto otteniamo

$$V(f) = \bigcap_{a \in D(f)} V(f_a) = V(\{f_a : a \in D(f)\}),$$

e per il teorema degli zeri,

$$f \in I(V(f)) = I(V(\{f_a : a \in D(f)\})) = \sqrt{(\{f_a : a \in D(f)\})}.$$

Questo significa che $f^n = \sum_a k_a f_a$ per $n \in \mathbb{N}$, $k_a \in A(X)$ e per un numero finito di $a \in D(f)$. Definiamo $g := \sum_a k_a g_a$ e facciamo vedere che $\varphi = \frac{g}{f^n}$ su tutto $D(f)$: Per tutti i $b \in D(f)$ abbiamo che $\varphi = \frac{g_b}{f_b}$ e

$$g f_b = \sum_a k_a g_a f_b = \sum_a k_a g_b f_a = g_b f^n$$

su $D(f_b)$. Dato che i $D(f_b)$ ricoprono $D(f)$ abbiamo la tesi. □

Quindi le funzioni regolari su di un sottoinsieme aperto distinto possono essere rappresentate globalmente da un rapporto di polinomi, a differenza dell'esempio 4.3. Esse possono essere pensate come elementi di una localizzazione di $A(X)$. Il seguente risultato ci mostra un legame tra $\mathcal{O}_X(D(f))$, con $f \in A(X)$ e una localizzazione di $A(X)$.

Lemma 4.7 (Funzioni regolari come localizzazioni)**.** *Sia X una varietà affine e sia $f \in A(X)$. Allora $\mathcal{O}_X(D(f))$ è isomorfo (come K-algebra) all'anello localizzato $A(X)_f$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che

$$A(X)_f \to \mathcal{O}_X(D(f)), \frac{g}{f^n} \mapsto \frac{g}{f^n}$$

è un omomorfismo di K-algebre. Questa funzione manda funzioni di $\mathcal{O}_X(D(f))$ in rapporti di polinomi in $A(X)_f$. Innanzitutto dimostriamo che è ben definita: se $\frac{g}{f^n} = \frac{g'}{f^m}$ come frazioni formali nell'anello localizzato $A(X)_f$, allora $f^k(gf^m - g'f^n) = 0$ in $A(X)$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, che implica $gf^m = g'f^n$ e quindi $\frac{g}{f^n} = \frac{g'}{f^m}$ come funzioni su $D(f)$. Si dimostra che è un omomorfismo di K-algebre. L'omomorfismo è suriettivo per la proposizione 4.6, ed è anche iniettivo: se $\frac{g}{f} = 0$ come funzione su $D(f)$, allora deve essere che $g = 0$, quindi che $fg = 0$ su tutto X, che implica $f(g \cdot 1 - 0 \cdot f^n) = 0$ in $A(X)$ e quindi che $\frac{g}{f^n} = \frac{0}{1}$ in $A(X)_f$. □

Esempio 4.8 (Funzioni regolari su $\mathbb{A}^2 \backslash \{0\}$). L'aperto $\mathbb{A}^2 \backslash \{0\} \subseteq \mathbb{A}^2$, non è distinto e si dimostra che $\mathcal{O}_X(\mathbb{A}^2 \backslash \{0\}) = K[x_1, x_2]$. Quindi in generale ci sono più aperti per i quali le funzioni regolari sono soltanto i polinomi

Possiamo finalmente introdurre il concetto di prefascio e fascio che saranno fondamentali per generalizzare il concetto di varietà affine.

Definizione 4.9 (Fascio)**.** *Un* ***prefascio*** *$\mathcal{F}$ (di anelli) su di uno spazio topologico X consiste nel dato di:*

- *per ogni insieme aperto $U \subseteq X$ un anello $\mathcal{F}(U)$,*
- *per ogni inclusione $U \subseteq V$ di insiemi aperti in X un omomorfismo di anelli $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ chiamato mappa di restrizione.*

Tale che

- $\mathcal{F}(\{\}) = 0$ *(anello banale),*
- $\rho_{U,U}$ *è la mappa identità su* $\mathcal{F}(U)$*, per tutti gli* U*,*
- *per ogni inclusione* $U \subseteq V \subseteq W$ *di insiemi aperti in* X *abbiamo* $\rho_{W,U} = \rho_{V,U} \circ \rho_{W,V}$

Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ *sono chiamati* ***sezioni*** *di* $\mathcal{F}$ *su* U *e la mappa di restrizione è indicata* $\varphi \mapsto \varphi|_U$*.*
Un prefascio $\mathcal{F}$ *è chiamato* ***fascio*** *(di anelli) se soddisfa la seguente proprietà di incollamento: se* $U \subseteq X$ *è un sottoinsieme aperto,* $\{U_i : i \in I\}$ *un arbitrario ricoprimento aperto di* U *e* $\varphi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ *sezioni per ogni* $i \in I$ *tali che* $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$ *per ogni* $i, j \in I$*, allora esiste ed è unica* $\varphi \in \mathcal{F}(U)$ *tale che* $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ *per ogni* $i \in I$*.*

Esempio 4.10.

1. Sia X una varietà affine. Allora l'anello $\mathcal{O}_X(U)$ delle funzioni regolari su di un sottoinsieme aperto $U \subseteq X$, insieme all'usuale restrizione di funzioni, forma un fascio $\mathcal{O}_X$ su X.

2. Ugualmente, se $X = \mathbb{R}^n$ e

$$\mathcal{F}(U) = \{\varphi : U \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$$

   con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, allora abbiamo un fascio $\mathcal{F}$ su $\mathbb{R}^n$.

3. Mentre, se $X = \mathbb{R}^n$ e

$$\mathcal{F}(U) = \{\varphi : U \to \mathbb{R} \text{ costante}\}$$

   abbiamo solo un prefascio e non un fascio, dato che la proprietà di incollamento non è verificata nel caso in cui U è un sottoinsieme aperto sconnesso con due componenti connesse, infatti se $U = U_1 \cup U_2$ ed $\varphi_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ e $\varphi_2 \in \mathcal{F}(U_2)$, sono due funzioni costanti con due valori distinti, sull'intersezione, che è vuota, le due funzioni coincidono banalmente, ma non esista una funzione costante su U che che sia uguale a φ_1 su U_1 e φ_2 su U_2.

Gli aperti U di uno spazio topologico X sono a loro volta degli spazi topologici, grazie alla topologia indotta. Se su X vi è associato un (pre)fascio allora riusciamo ad associare anche ad U un (pre)fascio.

Definizione 4.11 (Restrizioni di (pre)fasci)**.** *Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su di uno spazio topologico X, e sia $U \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. La* ***restrizione*** *di $\mathcal{F}$ su U è definita come il prefascio $\mathcal{F}|_U$ su U con*

$$\mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$$

per ogni $V \subseteq U$ sottoinsieme aperto. Le mappe di restrizione sono quelle di $\mathcal{F}$. Nota che se $\mathcal{F}$ è un fascio allora lo è anche $\mathcal{F}|_U$.

Costruzione(spiga di un (pre)fascio). Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su di uno spazio topologico X. Fissiamo un punto $a \in X$ e considerate le coppie (U, φ) dove U è un intorno aperto di a e $\varphi \in \mathcal{F}(U)$. Diciamo che due coppie (U, φ) e (U', φ') sono in relazione se esiste un aperto $V \subseteq U \cap U'$ e $\varphi|_V = \varphi|_V$ (è una relazione di equivalenza). L'insieme delle coppie modulo questa relazione di equivalenza è chiamato **spiga** $\mathcal{F}_a$ di $\mathcal{F}$ in a, ed è un anello. Gli elementi di $\mathcal{F}_a$ sono chiamati **germi** di $\mathcal{F}$ in a.
Finiamo con un risultato che mette in relazione la spiga di un fascio con una localizzazione di $A(X)$.

Lemma 4.12 (Germi di una funzione regolare come localizzazione)**.** *Sia a un punto di uno spazio affine X e sia $S = \{f \in A(X) : f(a) \neq 0\}$. Allora la spiga $\mathcal{O}_{X,a}$ di $\mathcal{O}_X$ in a è isomorfa (come K-algebra) all'anello localizzato*

$$S^{-1}A(X) = \left\{ \frac{g}{f} : f, g \in A(X), f(a) \neq 0 \right\}.$$

Esso è chiamato ***anello locale*** *di X in a.*

Capitolo 5

Morfismi

In questo capitolo definiremo i morfismi tra varietà affini, cioè funzioni particolari che ne preservano le proprietà algebrico-geometriche.

Definizione 5.1 (Spazi anellati)**.**

1. *Uno* ***spazio anellato*** *è uno spazio topologico X dotato di un fascio di anelli. Il fascio verrà sempre denotato come $\mathcal{O}_X$ e chiamato* ***fascio di struttura*** *di uno spazio anellato.*

2. *Una varietà affine verrà sempre considerata come uno spazio anellato. Il suo fascio delle funzioni regolari è il fascio di struttura.*

3. *Un sottoinsieme aperto U di uno spazio anellato X sarà sempre considerato come uno spazio anellato con $\mathcal{O}_X|_U$ come fascio di struttura.*

Le mappe di restrizione di un fascio $\mathcal{F}$ qualsiasi possono non essere delle funzioni, ma noi non tratteremo questo caso. Dato che dobbiamo lavorare con varietà affini, o meglio spazi che li assomigliano, avremo bisogno di funzioni a valori in K, quindi per noi

i fasci sono fasci di funzioni a valori in K

Definizione 5.2 (Morfismi di spazi anellati)**.** *Siano X e Y due spazi anellati e sia $f : X \to Y$ una mappa tra spazi anellati.*

1. *Per ogni mappa $\varphi : U \to K$ da un sottoinsieme aperto U di Y in K denotiamo la composizione $\varphi \circ f : f^{-1}(U) \to K$ con $f^*\varphi$ e la chiameremo* ***pull back*** *di φ da f.*

2. *La mappa f è chiamata morfismo (di spazi anellati) se è continua e se per tutti i sottoinsiemi $U \subseteq Y$ e $\varphi \in \mathcal{O}_Y(U)$ si h che $f^*\varphi \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$. Possiamo vedere il pull back come un omomorfismo tra K-algebre:*

$$f^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)), \varphi \mapsto f^*\varphi.$$

3. *Diciamo che f è* ***isomorfismo*** *(di spazi anellati) se f è un morfismo invertibile e f^{-1} è un morfismo.*

I morfismi e gli isomorfismi di (sottoinsiemi aperti di) varietà affini sono morfismi e isomorfismi tra spazi anellati.

Osservazione 5.1. *Per f è necessario essere continua così abbiamo la certezza che $f^{-1}(U)$ sia un aperto.*

Osservazione 5.2 (Proprietà dei morfismi)**.**

1. *Composizioni di morfismi sono morfismi.*

2. *Restrizioni di morfismi sono morfismi: Se $f : X \to Y$ è un morfismo tra spazi anellati e $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ sono aperti tali che $f(U) \subseteq V$ allora la mappa di restrizione $f|_U : U \to V$ è un morfismo.*

Lemma 5.3 (Proprietà di incollamento per i morfismi)**.** *Sia $f : X \to Y$ una mappa tra spazi anellati. Assumiamo che esista un ricoprimento aperto $\{U_i : i \in I\}$ di X tale che le restrizioni $f|_{U_i} : U_i \to Y$ siano morfismi. Allora f è un morfismo.*

Dimostrazione. Dobbiamo controllare due cose:

1. Che la mappa f sia continua: Sia $V \subseteq Y$ un sottoinsieme aperto. Allora

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap f^{-1}(V)) = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}(V).$$

   Dato che le mappe $f|_{U_i}$ sono dei morfismi per ipotesi, abbiamo che gli insiemi $(f|_{U_i})^{-1}(V)$ sono degli aperti in U_i, quindi anche in X. Allora $f^{-1}(V)$ è aperto in X, quindi f è continua.

2. E che la mappa mandi sezioni di $\mathcal{O}_Y$ in sezioni di $\mathcal{O}_X$: Sia $V \subseteq Y$ un sottoinsieme aperto e $\varphi \in \mathcal{O}_Y(V)$. Allora $(f^*\varphi)|_{U_i \cap f^{-1}(V)} = (f|_{U_i \cap f^{-1}(V)})^*\varphi \in \mathcal{O}_X(U_i \cap f^{-1}(V))$ dato che $f|_{U_i}$ è un morfismo. Per la proprietà di incollamento delle funzioni regolari, abbiamo che $f^*\varphi \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

□

In analisi una funzione vettoriale è differenziabile se e solo se lo è ogni componente. Similmente ciò si verifica per i morfismi tra varietà affini.

Proposizione 5.4 (Morfismi tra varietà affini)**.** *Sia U un sottoinsieme aperto di una varietà affine X e sia $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ un'altra varietà affine. Allora i morfismi $f : U \to Y$ sono esattamente le mappe della forma*

$$f = (\varphi_1, ..., \varphi_n) : U \to Y, x \mapsto (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$$

con $\varphi_i \in \mathcal{O}_X(U)$ per ogni $i = \{1, ..., n\}$. In particolare, i morfismi da U a $\mathbb{A}^1$ sono esattamente le funzioni regolari $\mathcal{O}_X(U)$.

Dimostrazione. Ipotizziamo che $f : U \to Y$ sia un morfismo. Per $i = \{1, ..., n\}$ l'i-esima funzione coordinata y_i su $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ è chiaramente regolare, e quindi $\varphi_i := f^* y_i \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(Y)) = \mathcal{O}_X(U)$ per definizione. Ma questa è anche l'i-esima componente di f, quindi abbiamo $f = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$.
Al contrario, sia $f = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ con $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathcal{O}_X(U)$ e $f(U) \subseteq Y$. Innanzitutto f è continua : Sia Z un qualsiasi sottoinsieme chiuso di Y. Allora Z è della forma $V(g_1, ..., g_m)$ per qualche $g_1, ..., g_m \in A(Y)$, e

$$f^{-1} = \{x \in U : g_i(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) = 0 \text{ per tutti gli } i \in \{1, ..., m\}\}.$$

Ma le funzioni $x \mapsto g_i(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ sono regolari su U, questo perché localmente le φ_i, per ogni i, sono quozienti di polinomi, quindi le funzioni $x \mapsto g_i(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ localmente sono quozienti di polinomi dato che si tratta di composizione di polinomi con rapporti di polinomi. Allora $f^{-1}(Z)$ è chiuso in U per il lemma 4.4, quindi f è continua.
Ugualmente, se $\varphi \in \mathcal{O}_Y(W)$ è una funzione regolare su qualche insieme aperto $W \subseteq Y$ allora

$$f^*\varphi = \varphi \circ f : f^{-1}(W) \to K, x \mapsto \varphi(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$$

è regolare per lo stesso motivo di prima, localmente le $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ sono quozienti di polinomi, quindi $\varphi(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ è localmente quoziente di polinomi perché è composizione di rapporti di polinomi con rapporti di polinomi. $\square$

Come al solito c'è un forte legame tra la geometria e l'algebra nella geometria algebrica. Gli oggetti geometrici vengono riformulati in oggetti algebrici e viceversa. Per i morfismi tra varietà affini vale il seguente risultato.

Corollario 5.5. *Siano X e Y due varietà affini. Allora vi è una corrispondenza biunivoca*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{morfismi } X \to Y\} & \longleftrightarrow & \{\textit{omomorfismi di } K\textit{-algebre } A(Y) \to A(X)\} \\ f & \mapsto & f^*. \end{array}$$

In particolare, gli isomorfismi di varietà affini corrispondono esattamente agli isomorfismi di K-algebre.

Grazie alla proposizione 5.4 si riesce a dimostrare la seguente proposizione, conosciuta sotto il nome di proprietà universale del prodotto.

Proposizione 5.6 (Proprietà universale del prodotto)**.** *Siano X e Y due varietà affini, e siano $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ i due morfismi di proiezione dal prodotto ad uno dei due fattori. Allora per ogni varietà affine Z e due morfismi $f_X : Z \to X$ e $f_Y : Z \to Y$ esiste ed è unico il morfismo $f : Z \to X \times Y$ tale che $f_X = \pi_X \circ f$ e $f_Y = \pi_Y \circ f$.*

Gli spazi anellati sono stati introdotti sia per definire i morfismi che per generalizzare il concetto di varietà affine. Infatti d'ora in avanti quando parleremo di varietà affini non ci riferiremo più solo al luogo degli zeri di famiglie di polinomi ma ad una classe di spazi anellati.

Definizione 5.7. *Una **varietà affine** è uno spazio anellato che è isomorfo ad un insieme del tipo $V(S) \subseteq \mathbb{A}^n$, con $S \subseteq K[x_1, ..., x_n]$.*

Questa definizione amplia il concetto di varietà affine. Si riesce anche a definire un anello delle coordinate su X, ponendo $A(X) = \mathcal{O}_X(X)$.

Proposizione 5.8 (I sottoinsiemi aperti distinti sono delle varietà affini)**.** *Sia X una varietà affine, e sia $f \in A(X)$. Il sottoinsieme aperto distinto $D(f)$ è una varietà affine; il suo anello delle coordinate $A(D(f))$ è la localizzazione $A(X)_f$.*

Capitolo 6

Varietà

Introduciamo il concetto di varietà. Esso sarà fondamentale per lo sviluppo dell'intera teoria e ci permetterà di generalizzare il concetto di varietà affine. Come in analisi le varietà lisce sono spazi che localmente assomigliano a uno spazio euclideo così le varietà sono spazi topologici che localmente assomigliano alle varietà affini.

Definizione 6.1 (Prevarietà)**.** *Una **prevarietà** è uno spazio anellato X dotato di un ricoprimento aperto finito di varietà affini. Morfismi di prevarietà sono semplicemente i morfismi di spazi anellati. Le sezioni di $\mathcal{O}_X(U)$, con $U \subseteq X$ aperto, sono chiamate **funzioni regolari**.*

Esempio 6.2. Ogni varietà affine è una prevarietà. In generale, ogni aperto di una varietà affine è una prevarietà, dato che è ricoperto da aperti distinti che a loro volta sono varietà affini per la proposizione 5.8.

Dalle prevarietà riusciamo a costruire altre prevarietà incollandole, come mostra la seguente costruzione.

Costruzione(incollamento di due prevarietà). Siano X_1 e X_2 due prevarietà, e siano $U_{1,2} \subseteq X$ e $U_{2,1} \subseteq X$ due sottoinsiemi aperti non vuoti. Sia $f : U_{1,2} \to U_{2,1}$ un isomorfismo. Possiamo costruire la varietà X *incollando* X_1 e X_2 lungo f:

- X è l'insieme $X_1 \cup X_2$ modulo la relazione di equivalenza data da: a equivalente a b se e solo se $b = f(a)$, per tutti gli $a \in U_{1,2}$, o $b = a$, per tutti gli $a \in X_1 \cup X_2$. Nota che vi sono le due immersioni naturali $i_1 : X_1 \to X$ e $i_2 : X_2 \to X$.

- Come spazio topologico, chiamiamo aperto $U \subseteq X$ se $i_1^{-1}(U) \subseteq X_1$ e $i_2^{-1}(U) \subseteq X_2$ sono aperti.

- Definiamo il fascio di struttura $\mathcal{O}_X$ come

$$\mathcal{O}_X(U) = \{\varphi : U \to K : i_1^*\varphi \in \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(U)) \text{ e } i_2^*\varphi \in \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(U))\}$$

per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$.

L'immagine di i_1 e i_2 sono due aperti di X isomorfi a X_1 e X_2. Dato che X_1 e X_2 sono ricoperti da sottoinsiemi aperti affini, cioè sottoinsiemi aperti che sono varietà affini, si ha che X è una prevarietà. Il processo può essere generalizzato a un numero arbitrario di prevarietà.
Diamo qualche esempio di prevarietà, ottenute incollando varietà affini semplici.

Esempio 6.3. Siano $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1$ e $U_{1,2} = U_{2,1} = \mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$. Consideriamo due morfismi:

1. Sia $f : U_{1,2} \to U_{2,1}, x \mapsto \frac{1}{x}$. Per costruzione, la linea affine $i_1(X_1)$ è un insieme aperto di X. $X \backslash i_1(X_1) = i_2(X_2) \backslash i_2(U_{2,1})$, (le prossime volte indicheremo $i_2(X_2)$ con X_2 e $i_1(X_1)$ con X_1) è un singolo punto che corrisponde allo 0 in X_2 e quindi a "$\infty = \frac{1}{0}$" nelle coordinate di X_1. Possiamo pensare allo spazio X come $\mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$, quindi ad una specie di "compattificazione".

2. Sia $f : U_{1,2} \to U_{2,1}$, $x \mapsto x$, la mappa identità. Lo spazio X ottenuto incollando X_1 e X_2 lungo f è mostrato qui sotto e prende il nome di " linea affine col doppio zero", figura 6.1.

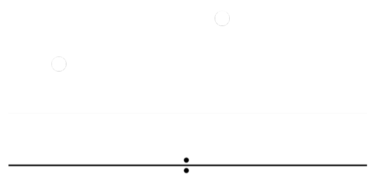

Figura 6.1: linea affine col doppio zero

L'ultimo è uno spazio particolare che non prenderemo in esame; infatti con il concetto di varietà escluderemo proprio queste circostanze scomode.
Per tanto ci chiediamo: data una prevarietà, un suo qualsiasi sottoinsieme eredita una struttura di prevarietà? Con la seguente costruzione faremo vedere come aperti, chiusi e aperti intersecati con chiusi conservano una struttura di prevarietà.
Costruzione(sottoprevarietà aperte, chiuse e localmente chiuse)
Sia X una prevarietà.

1. Sia $U \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. Allora U è a sua volta una prevarietà (come al solito il fascio di struttura $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$): Dato che X può essere ricoperto da aperti affini anche U può essere ricoperto da aperti affini.
   Chiamiamo U **sottoprevarietà aperta** di X.

2. La situazione è un po' più complicata per un sottoinsieme chiuso $Y \subseteq X$: un sottoinsieme aperto U di Y non è in generale un aperto di X. Definiamo, allora, il fascio di struttura $\mathcal{O}_Y$ come

$$\mathcal{O}_Y(U) := \{\varphi : U \to K : \text{ per tutti gli } a \in U \text{ esiste un intorno aperto } V \text{ di } a \in X \\ \text{e } \phi \in \mathcal{O}_X(V) \text{ con } \varphi = \phi \text{ su } U \cap V\}$$

   Per la natura locale di questa definizione è ovvio che $\mathcal{O}_Y$ è un fascio. Chiamiamo Y **sottovarietà chiusa** di X.

3. Se $U \subseteq X$ è un aperto di X e $Y \subseteq X$ è un chiuso di X, allora $U \cap Y$ è un chiuso in U e un aperto in Y. Possiamo donare ad $U \cap Y$ una struttura di prevarietà grazie alla prima e alla seconda costruzione, non importa la scelta. Intersezioni di sottoprevarietà aperte e chiuse sono chiamate **sottoprevarietà localmente chiuse**.

E' possibile definire la varietà prodotto, ma la costruzione è impegnativa. L'idea è quella di considerare l'incollamento di tutti i prodotti degli aperti affini.

Definizione 6.4 (Prodotto di prevarietà)**.** *Siano X e Y due prevarietà. Un* ***prodotto*** *di X e Y è una terna composta da una prevarietà P e due morfismi $\pi_X : P \to X$ e $\pi_Y : P \to Y$ che soddisfano la seguente proprietà universale: dati due morfismi $f_X : Z \to X$ e $f_Y Z \to Y$, con Z prevarietà qualsiasi, allora esiste ed è unico il morfismo $f : Z \to P$ tale che $\pi_X \circ f = f_X$ e $\pi_Y \circ f = f_Y$.*

Questo vuol dire che dare un morfismo al prodotto P è lo stesso che dare un morfismo ad ognuno dei fattori X e Y.

Proposizione 6.5 (Esistenza e unicità dei prodotti)**.** *Siano X e Y due prevarietà, allora esiste il loro prodotto. In più, questo prodotto, con i morfismi $\pi_X : P \to X$ e $\pi_Y : P \to Y$, è unico a meno di isomorfismi: Se P' con $\pi'_X : P' \to X$ e $\pi'_Y : P' \to Y$ è un altro prodotto allora esiste un unico isomorfismo $f : P \to P'$ tale che $\pi_X \circ f = \pi'_X$ e $\pi_Y \circ f = \pi'_Y$. Denoteremo questo prodotto semplicemente come $X \times Y$.*

Dimostrazione. Le due prevarietà X e Y sono ricoperte dalle famiglie di aperti affini $\{U_i : i \in I\}$ e $\{V_j : j \in J\}$ rispettivamente. Consideriamo le prevarietà $U_i \times V_j$ per ogni $i \in I$ e $j \in J$ (sono delle prevarietà perché sono delle varietà affini) e incolliamole: incolliamo $U_i \times V_j$ ad $U_{i'} \times V_{j'}$ lungo la mappa identità (che è un morfismo) sull'aperto comune $(U_i \cap U_{i'}) \times (V_j \cap V_{j'})$. Lo spazio risultante P è in biezione con $X \times Y$. In più, grazie al lemma 5.3 possiamo incollare i morfismi di proiezione affini $U_i \times V_j \to U_i$ e

$U_i \times V_j \to V_j$ per avere $\pi_X : P \to X$ e $\pi_Y : P \to Y$.
Non abbiamo finito, dobbiamo controllare che il nostro spazio sia effettivamente un prodotto: Se $f_X : P \to X$ e $f_Y : Z \to Y$ sono due morfismi, allora l'unico modo per avere $\pi_X \circ f = f_X$ e $\pi_Y \circ f = f_Y$ è di definire $f : Z \to P$ come $f(z) = (f_X(z), f_Y(z))$ (P lo abbiamo identificato con $X \times Y$).
Per il lemma 5.3, possiamo controllare che f sia un morfismo restringendoci agli aperti affini che ricoprono Z. Se ricopriamo Z con gli aperti $f_X^{-}(U_i) \cap f_Y^{-1}(V_j)$ per tutti gli $i \in I$ e $j \in J$, e questi aperti a loro volta con aperti affini, possiamo assumere che ogni aperto affine del nostro ricoprimento aperto di Z sia mappato in un singolo aperto affine $U_i \times V_j$. Ma dopo questa restrizione al caso affine per la proposizione 5.6 abbiamo che f è un morfismo.
Per mostrare l'unicità, assumiamo che P' con $\pi'_X : P' \to X$ e $\pi'_Y : P' \to Y$ sia un altro prodotto. Per la proprietà universale di P applicata ai morfismi $\pi'_X : P' \to X$ e $\pi'_Y : P' \to Y$, abbiamo un solo morfismo $f : P' \to P$ con $\pi_X \circ f = \pi'_X$ e $\pi_Y \circ f = \pi'_Y$. Invertendo i ruoli dei due prodotti, otteniamo che esiste un unico morfismo $g : P \to P'$ tale che $\pi'_X \circ g = \pi_X$ e $\pi'_Y \circ g = \pi_Y$. Dato che

$$\pi_X \circ (f \circ g) = \pi'_X \circ g = \pi_X$$
$$\pi_Y \circ (f \circ g) = \pi'_Y \circ g = \pi_Y$$

e

$$\pi_X \circ \mathrm{id}_P = \pi_X$$
$$\pi_Y \circ \mathrm{id}_P = \pi_Y$$

Per l'unicità del prodotto si ha che $f \circ g = \mathrm{id}_P$. Nello stesso modo si dimostra che $g \circ f = \mathrm{id}_{P'}$, quindi f è un isomorfismo. □

Osservazione 6.1. *La nostra costruzione dello spazio prodotto è consistente: siano X e Y due prevarietà, e siano $X' \subseteq X$ e $Y' \subseteq Y$ due sottoprevarietà chiuse. Abbiamo due strutture di prevarietà su $X' \times Y'$: la struttura di sottoprevarietà chiusa di $X' \times Y'$ in $X \times Y$, e quella di prodotto di prevarietà. Come aspettato le due costruzioni coincidono o meglio, la mappa "identità" è un morfismo.*

Possiamo finalmente introdurre il concetto di varietà considerato che abbiamo definito il prodotto tra prevarietà. Quello che si vuole fare è imporre una condizione alle prevarietà così da escludere spazi come la retta col doppio zero.

Definizione 6.6 (Varietà).

1. *Una prevarietà X è chiamata **varietà** se la **diagonale***

$$\Delta_X := \{(x, x) : x \in X\}$$

è chiusa in $X \times X$.

2. *Una varietà di dimensione pura 1 è chiamata **curva**.*

3. *Una varietà di dimensione pura 2 è chiamata **superficie**.*

4. *Se X è uno spazio di dimensione pura e Y è una sottovarietà di dimensione pura di X con $\dim Y = \dim X - 1$ diciamo che Y è una **ipersuperficie** in X.*

Terminiamo con questi due ultimi risultati.

Lemma 6.7.

1. *Le varietà affini sono varietà.*

2. *Le sottoprevarieta aperte, chiuse e localmente chiuse sono varieta. Le chiameremo semplicemente **sottovarieta aperte, chiuse** e **localmente chiuse**.*

Proposizione 6.8 (proprietà delle varietà)**.** *Siano $f, g : X \to Y$ morfismi di prevarietà, e sia Y una prevarietà:*

1. *Il **grafico** $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ è chiuso in $X \times Y$.*

2. *L'insieme $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X.*

Capitolo 7

Varietà proiettive

Nello scorso capitolo abbiamo parlato delle prevarietà, spazi che localmente assomigliano a varietà affini, per poi arrivare a definire le varietà, cioè prevarietà che hanno la diagonale chiusa nel prodotto. In questo capitolo definiremo una classe nuova di varietà: le varietà proiettive.

Definizione 7.1 (Spazi proiettivi)**.** *Definiamo l'n-esimo* ***spazio proiettivo*** *su K, denotato come $\mathbb{P}^n_K$ o semplicemente $\mathbb{P}^n$, come*

$$\mathbb{P}^n_K := (K^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

con la relazione di equivalenza

$$(x_0, ..., x_n) \sim (y_0, ..., y_n) \text{ se e solo se } x_i = \lambda y_i \text{ per ogni } \lambda \in K^* \text{ e per ogni } i \in \{0, ..., n\}.$$

Osservazione 7.1. *$\mathbb{P}^n$ può essere descritto come la famiglia di tutti i sottospazi vettoriali di dimensione 1 di K^{n+1}.*

Osservazione 7.2 (coordinate omogenee)**.** *Di solito la classe $[(x_0, ..., x_n)] \in \mathbb{P}^n$ viene indicata $[x_0 : ... : x_n]$ o $(x_0 : ... : x_n)$. Noi utilizzeremo la seconda. Gli x_i, per ogni $i \in \{0, ..., n\}$, vengono chiamati* ***coordinate omogenee****. Importante è notare che preso un punto $x \in \mathbb{P}^n$ almeno una delle coordinate omogenee di x è non nulla.*

Osservazione 7.3 (Varietà affini in $\mathbb{P}^n$)**.** *Consideriamo la mappa*

$$f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n, (x_1, ..., x_n) \mapsto (1 : x_1 : ... : x_n).$$

La mappa è ovviamente iniettiva, allora vi è una biezione con l'immagine $U_0 = \{(x_0 : ... : x_n) : x_0 \neq 0\}$. L'inversa sarà

$$f^{-1} : U_0 \to \mathbb{A}^n, (x_0 : ... : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Possiamo quindi considerare $\mathbb{A}^n$ come un sottoinsieme di $\mathbb{P}^n$. Le coordinate $(\frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0})$ di un punto $(x_0 : ... : x_n) \in U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ sono chiamate ***coordinate affine****.*

Osservazione 7.4 (Polinomi omogenei)**.** *Vogliamo fare ciò che abbiam fatto con le varietà affini, cioè definire il luogo degli zeri di una famiglia di polinomi, ma in questo caso c'è un problema. Consideriamo il polinomio $f = x_1^2 - x_0 \in K[x_0, x_1]$, si ha che $f(1,1) = 0$ ma che $f(-1,-1) \neq 0$, anche se $(1,1)$ e $(-1,-1)$ appartengono alla stessa classe! Quindi non ha senso considerare qualsiasi polinomio in $K[x_0, ..., x_n]$. Per ovviare al problema considereremo i polinomi omogenei, cioè polinomi che hanno tutti i monomi dello stesso grado. Si dice che $f \in K[x_0, ..., x_n]$ è omogeneo di grado d anche quando:*

$$f(\lambda x_0, ..., \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, ..., x_n) \text{ per ogni } \lambda \in K^*$$

Definizione 7.2 (Anelli e K-algebre graduate)**.**

1. *Un* ***anello graduato*** *è un anello R per il quale esiste per ogni $d \in \mathbb{N}$ un sottogruppo (additivo) $R_d \subseteq R$, tale che:*
   (a) *Ogni elemento $f \in R$ ha una decomposizione unica $\sum_{d \in \mathbb{N}} f_d$, con $f_d \in R_d$ per tutti i $d \in \mathbb{N}$ e solo un numero finito di f_d sono non nulli.*
   (b) *Per ogni $d, e \in \mathbb{N}$, $f \in R_d$ e $g \in R_e$, si ha $fg \in R_{d+e}$. Per $f \in R \backslash \{0\}$ il più grande $d \in \mathbb{N}$, con $f_d \neq 0$, nella decomposizione $\sum_{d \in \mathbb{N}} f_d$ è chiamato* ***grado*** *$\deg f$ di f. Gli elementi di $R_d \backslash \{0\}$ sono detti* ***omogenei*** *(di grado d). Chiamiamo $\sum_{d \in \mathbb{N}} f_d$* ***decomposizione omogenea*** *di f.*
   (c) *Se R è anche una K-algebra, diciamo che è una* ***K-algebra graduata*** *se $\lambda f \in R_d$ per ogni $d \in \mathbb{N}$ e $f \in R_d$.*

Definizione 7.3 (Ideali omogenei)**.** *Un ideale di un anello graduato è detto* ***omogeneo*** *se è generato da elementi omogenei.*

Lemma 7.4 (Proprietà degli ideali omogenei)**.** *Siano I e J due ideali di un anello graduato R.*

1. *L'ideale I è omogeneo se e solo se per ogni $f \in I$, con decomposizione omogenea $\sum_{d \in \mathbb{N}} f_d$, si ha che f_d appartiene a I.*
2. *Se I e J sono omogenei allora lo sono anche $I + J$, IJ, $I \cap J$, $\sqrt{I}$.*
3. *Se I è omogeneo allora il quoziente R/I è un anello graduato.*

Definizione 7.5 (varietà proiettive e i suoi ideali)**.**

1. *Sia $S \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ un insieme di polinomi omogenei. Allora il* ***luogo degli zeri (proiettivo)*** *di S è definito come*

$$V(S) := \{x \in \mathbb{P}^n : f(x) = 0 \textit{ per ogni } f \in S\}.$$

   Sottoinsiemi di $\mathbb{P}^n$ di questa forma sono chiamati ***varietà proiettive****.*

2. *Per un ideale omogeneo $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ poniamo*

$$V(I) := \{x \in \mathbb{P}^n : f(x) = 0 \textit{ per ogni } f \in I\}.$$

3. *Se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ definiamo il suo ideale come*

$$I(X) := (\{f \in K[x_0, ..., x_n] \textit{ omogeneo } : f(x) = 0 \textit{ per ogni } x \in X\}).$$

   I polinomi omogenei che si annullano su X non formano un ideale, quindi dobbiamo necessariamente prendere l'ideale generato da essi

Per non confonderci, gli operatori del caso affine li indicheremo mettendo al pedice una a, $V(\cdot) = V_a(\cdot)$ e $I(\cdot) = I_a(\cdot)$, mentre gli operatori nel caso proiettivo li indicheremo mettendo al pedice una p, $V(\cdot) = V_p(\cdot)$ e $I(\cdot) = I_p(\cdot)$.

Esempio 7.6.

1. Come nel caso affine, l'insieme vuoto $\{\} = V_p(1)$ e l'intero spazio $\mathbb{P}^n = V_p(0)$ sono varietà proiettive.

2. Se $f_1, ..., f_r \in K[x_0, ..., x_n]$ sono polinomi lineare omogenei allora $V_p(f_1, ..., f_r) \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva. Le varietà proiettive di questa forma sono chiamate **sottospazi lineari** di $\mathbb{P}^n$.

Le varietà proiettive sono legate ad una classe particolare di varietà affini.

Definizione 7.7 (Coni)**.** *Sia $\pi : \mathbb{A}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^n, (x_0, ..., x_n) \mapsto (x_0 : ... : x_n)$.*

1. *Una varietà affine $X \subseteq \mathbb{A}^n$ è chiamata* ***cono*** *se $0 \in X$ e $\lambda x \in X$ per ogni $\lambda \in K^*$ e $x \in X$.*

2. *Per un cono $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiamiamo*

$$\mathbb{P}(X) := \pi(X \backslash \{0\}) = \{(x_0 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n : (x_0, ..., x_n) \in X\}$$

   la ***proiettivizzazione*** *di X.*

3. *Per una varietà proiettiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$ chiamiamo*

$$C(X) := \{0\} \cup \pi^{-1}(X) = \{0\} \cup \{(x_0, ..., x_n) : (x_0 : ... : x_n) \in X\}$$

*il **cono** su X.*

Osservazione 7.5 (Coni e ideali omogenei)**.** *Se $S \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ è un sottoinsieme di polinomi omogenei con un luogo degli zeri non vuoto allora $V_a(S)$ è un cono in $\mathbb{A}^{n+1}$. L'ideale $I(X)$ di un cono $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ è omogeneo.*

Osservazione 7.6 (Coni se e solo se varietà proiettive)**.** *Sia $S \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ un sottoinsieme di polinomi omogenei con un luogo degli zeri non vuoto in $\mathbb{A}^{n+1}$. Allora $V_a(S)$ è un cono, per l'osservazione 7.5, e per costruzione abbiamo*

$$\mathbb{P}(V_a(S)) = V_p(S)$$

e

$$C(V_p(S)) = V_a(S).$$

Non solo, vi è proprio una corrispondenza biunivoca tra coni e varietà proiettive

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{coni in } \mathbb{A}^{n+1}\} & \longleftrightarrow & \{\textit{varietà proiettive in } \mathbb{P}^n\} \\ X & \longmapsto & \mathbb{P}(X) \\ C(X) & \longleftarrow & X. \end{array}$$

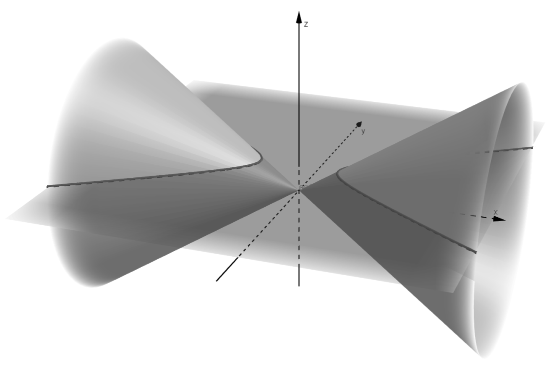

Figura 7.1: cono

Costruzione(Versione relativa del luogo degli zeri e dei suoi ideali). Sia $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva e, come nel caso affine, definiamo

$$S(Y) := K[x_0, ..., x_n]/I_p(Y)$$

e lo chiamiamo **anello delle coordinate omogenee** di Y. La condizione $f(x) = 0$ ha ancora senso, allora possiamo definire

$$V_Y(I) := \{x \in Y : f(x) = 0 \text{ per ogni } f \in I\} \text{ con } I \text{ ideale omogeneo di } S(Y).$$

e

$$I_Y(X) := (\{f \in S(Y) \text{ omogeneo } : f(x) = 0 \text{ per ogni } x \in X\}) \text{ con } X \subseteq Y.$$

Sottoinsiemi di Y della forma $V_Y(I)$, con $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ ideale omogeneo, sono chiamti **sottovarietà proiettive** di Y.

Osservazione 7.7. *Sia Y una varietà proiettiva. Allora:*

1. *(Teorema di Hilbert) Ogni ideale omogeneo di $S(Y)$ può essere generato da un numero finito di elementi.*
2. *Gli operatori $V_Y(\cdot)$ e $I_Y(\cdot)$ invertono le inclusioni. Abbiamo che $X = V_Y(I_Y(X))$ per ogni sottovarietà $X \subseteq Y$, e $J \subseteq I_Y(V_Y(J))$ per ogni ideale omogeneo $J \subseteq S(Y)$.*
3. *L'ideale $I_Y(X)$ di una sottovarietà $X \subseteq Y$ è radicale.*
4. *Per 3, l'ideale $I_p(X) \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ è radicale. Si ha che $V_a(I_p(Y)) = C(Y)$ e quindi che $I_p(Y) = I_a(C(Y))$. Allora $S(Y) = A(C(Y))$.*

Dobbiamo ancora esaminare un risultato del caso affine: il teorema degli zeri di Hilbert, anche se incontreremo delle difficoltà.

Osservazione 7.8 (Ideale irrilevante)**.** *Sia $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ un varietà proiettiva non vuota, e sia*

$$I_0 := ([x_0], ..., [x_n]) \subseteq S(Y).$$

L'ideale I_0 è omogeneo e radicale; il suo luogo degli zeri è vuoto dato che non esiste $(0 : ... : 0)$. Allora

$$I_Y(V_Y(I_0)) = I_Y(\{\}) = S(Y),$$

ma non a $\sqrt{I_0} = I_0$. Inoltre I_0 non può essere l'ideale di una varietà proiettiva. Se fosse $I_0 = I_Y(X)$, per qualche $X \subseteq Y$, questo implicherebbe che $X = V_Y(I_Y(X)) = V_Y(I_0)) = \{\}$, in contraddizione al fatto che $I_Y(\{\}) = S(Y)$.

Questo è l'unico caso in cui la versione proiettiva del teorema degli zeri di Hilbert fallisce, quindi per ovviare al problema lo escludiamo.

Proposizione 7.8 (Il teorema degli zeri proiettivo)**.** *Sia Y una varietà proiettiva non vuota e sia $J \subseteq S(Y)$ un ideale omogeneo tale che il suo radicale $\sqrt{J}$ non sia l'ideale irrilevante. Allora $I_p(V_p(J)) = \sqrt{J}$. In particolare, vi è una corrispondenza biunivoca*

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\textit{sottovarietà proiettive di } Y\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\textit{ideali radicali omogenei in } S(Y) \\ \textit{non uguali all'ideale irrilevante}\end{array}\right\} \\
X & \longmapsto & I_p(X) \\
V_p(J) & \longleftarrow\!\shortmid & J.
\end{array}$$

Osservazione 7.9. *Gli operatori $V_p(\cdot)$ e $I_p(\cdot)$ godono di alcune proprietà:*

1. *Per una famiglia $\{S_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di $S(X)$ abbiamo che $\bigcap_{i\in I} V_p(S_i) = V_p(\bigcup_{i\in I} S_i)$, e per ogni coppia di insiemi $S_1, S_2 \subseteq S(X)$ abbiamo che $V_p(S_1) \cup V_p(S_2) = V_p(S_1 S_2)$.*

2. *Se $J_1, J_2 \subseteq S(X)$ sono due ideali omogenei allora*

$$V_p(J_1) \cap V_p(J_2) = V_p(J_1 + J_2) \text{ e } V_p(J_1) \cup V_p(J_2) = V_p(J_1 J_2).$$

3. *Per ogni sottoinsieme Y_1, Y_2 di una varietà proiettiva X abbiamo che $I_p(Y_1 \cup Y_2) = I_p(Y_1) \cap I_p(Y_2)$.*

Allora, come nel caso affine, possiamo definire una topologia su $\mathbb{P}^n$.

Definizione 7.9. *La **topologia di Zariski** su di una varietà proiettiva X è la topologia dove i chiusi sono esattamente le sottovarietà proiettive di X.*

Utilizzeremo sempre questa topologia sugli spazi proiettivi. Se X è una varietà proiettiva e $Y \subseteq X$ è una sua sottovarietà, allora la topologia di sottospazio di Y coincide con quella di Zariski.

Definizione 7.10.

1. *Sia*

$$f = \sum_{i_i,\dots,i_n\in\mathbb{N}} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x^{i_n}$$

*un polinomio, non nullo, di grado d. Definiamo la sua **omogenizzazione** come*

$$\begin{aligned} f^h &:= x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0}\right) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_n\in\mathbb{N}} a_{i_1,\dots,i_n} x_0^{d-i_1-\dots-i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} \in K[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

2. *L'**omogenizzazione** di un ideale $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ è definito come l'ideale I^h in $K[x_0, \dots, x_n]$ generato da tutti f^h per $f \in I$.*

Osservazione 7.10. *Nell'osservazione 7.3, abbiamo trovato un sottoinsieme (aperto) di $\mathbb{P}^n$ in biiezione con $\mathbb{A}^n$, U_0, tramite*

$$F : \mathbb{A}^n \to U_0, (x_1, ..., x_n) \mapsto (1 : x_1 : ... : x_n).$$

1. *Se $X = V_p(S) \cap U_0$ è chiuso nella topologia indotta, con $S \subseteq K[x_0, ..., x_n]$, allora $X' = V(f(1, \cdot) : f \in S) \subseteq \mathbb{A}^n$ è un chiuso di $\mathbb{A}^n$.*
2. *$X = V(S) \subseteq \mathbb{A}^n$ è un chiuso di $\mathbb{A}^n$, con $S \subseteq K[x_0, ..., x_n]$, allora $X' = V_p(f^h : f \in S) \cap U_0$ è un chiuso nella topologia di sottospazio di U_0.*

F è quindi un omeomorfismo.

Osservazione 7.11. *Si dimostra che lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ ha dimensione n.*

Concludiamo questo capitolo con un risultato sulla chiusura.

Proposizione 7.11. *Sia $I \subseteq K[x_1, ..., x_n]$ un ideale. Consideriamo il suo luogo degli zeri affine $X = V_a(I) \subseteq \mathbb{A}^n$, e la sua chiusura $\overline{X}$ in $\mathbb{P}^n$.*

1. *Abbiamo che $\overline{X} = V_p(I^h)$.*
2. *Se $I = (f)$ è un ideale principale allora $\overline{X} = V_p(f^h)$.*

Capitolo 8

Fascio delle funzioni regolari proiettive

Dobbiamo rendere gli spazi proiettivi degli spazi anellati e per farlo dobbiamo munire X, varietà proiettiva, di una fascio di struttura. Per nostra sfortuna l'immagine di $x \in X$ per una qualsiasi funzione $f \in S(X)$ non è ben definita, dato che $f(\lambda x) = \lambda^{degf} f(x)$. $K[x_0, ..., x_n]$ è un anello graduato, allora anche $S(X)$ lo è per ogni varietà proiettiva X. Presi $f, g \in S(X)_d$, si ha che $\frac{f(\lambda x)}{g(\lambda x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$, per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda \in K^*$. Allora ha senso la seguente definizione.

Definizione 8.1 (Funzioni regolari su spazi proietti)**.** *Sia U un sottoinsieme aperto di una varietà proiettiva X. Una **funzione regolare** su U è una mappa $\phi : U \to K$ con la seguente proprietà: Per ogni $a \in U$ esistono $d \in \mathbb{N}$, $f, g \in S(X)_d$ ed $a \in U_a \subseteq U$, aperto di U, tale che $f(x) \neq 0$ e $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, per ogni $x \in U_a$.*

Come fatto prima definiamo $O_X(U)$ come l'insieme delle funzioni regolari da U in K, che si dimostra essere un anello. O_X forma una fascio di struttura su X.

Proposizione 8.2 (Le varietà proiettive sono prevarietà)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva. Allora*

$$U_i = \{(x_0 : ... : x_n) \in X : x_i \neq 0\} \subseteq X$$

è una varietà affine per ogni $i \in \{0, ..., n\}$.

Dimostrazione. Per simmetria basta mostrarlo solo per $i = 0$. Sia $X = V_p(h_1, ..., h_r)$ con $h_1, ..., h_r$ polinomi omogenei in $K[x_0, ..., x_n]$ e imponiamo $g_j(x_1, ..., x_n) = h_j(1, x_1, ..., x_n)$ per ogni $j \in \{1, ..., r\}$. Se $Y = V_a(g_1, ..., g_r)$ abbiamo che

$$F : Y \to U_0, (x_1, ..., x_n) \mapsto (1 : x_1, ..., x_n)$$

è un isomorfismo con inversa

$$F^{-1}P : U_0 \to Y, (x_0, ..., x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Per costruzione sono mappe ben definite, una l'inversa dell'altra. Sono anche continue per quanto detto nell'osservazione 7.10. Dobbiamo solo controllare se il pull back di funzioni è una funzione regolare: una funzione regolare su U_0 è localmente un rapporto di polinomi omogenei, composta con F rimane un rapporto di polinomi, localmente, quindi è regolare. Per l'inversa si dimostra in modo analogo. Se composta con una funzione regolare di Y, che localmente è un rapporto di polinomi, essa dà ancora origine a un rapporto di polinomi, localmente, quindi è regolare. □

Dato che abbiamo dimostrato che le varietà proiettive sono delle prevarietà, proviamo a vedere come sono fatti alcuni dei loro morfismi.

Lemma 8.3. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva e siano $f_0, ..., f_m \in S(X)$ elementi omogenei dello stesso grado. Allora sull'aperto $U := X \backslash V(f_1, ..., f_m)$ questi elementi definiscono un morfismo*

$$f : U \to \mathbb{P}^m, x \mapsto (f_0(x), ..., f_m(x)).$$

Dimostrazione. Notiamo che f è ben posta. Per definizione di U l'immagine di un punto non può essere mai $(0 : ... : 0)$; se riscaliamo le coordinate omogenee $x_0, ..., x_n$ di $x \in U$ otteniamo

$$(f_0(\lambda x_0 : ... : \lambda x_n) : ... : f_m(\lambda x_0 : ... : \lambda x_n))$$

$$= (\lambda^d f_0(x_0 : ... : x_n) : ... : \lambda^d f_m(x_0 : ... : x_n))$$

$$= (f_0(x_0 : ... : x_n) : ... : f_m(x_0 : ... : x_n))$$

dove d il grado comune dei $f_1, ..., f_m$. Per controllare che f sia un morfismo usiamo la proprietà di incollamento. Sia $\{V_i : i \in 1, ..., m\}$ il ricoprimento aperto affine di $\mathbb{P}^m$, con $V_i = \{(y_0 : ... : y_m) : y_i \neq 0\}$ per ogni $i \in \{0, ..., m\}$. Allora il sottoinsieme aperto $U_i := f^{-1}(V_i) = \{x \in X : f_i(x) \neq 0\}$ ricopre U e nelle sue coordinate affini su V_i la mappa $f|_{U_i}$ è data da quoziente di polinomi $\frac{f_i}{f_j}$ per $j = 0, ..., m$ con $i \neq j$, che sono funzioni regolari su U_i. Quindi $f|_{U_i}$ è un morfismo per la proposizione 5.4, allora f è un morfismo. □

Esempio 8.4. Sia $A \in GL_{n+1}(K)$ una matrice invertibile. Allora $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n, x \mapsto Ax$ è un morfismo con inversa $f^{-1} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n, x \mapsto A^{-1}x$, e quindi un isomorfismo. Queste mappe prendono il nome di **automorfismi proiettivi** di $\mathbb{P}^n$.

Costruzione(immersione di Segre). Consideriamo $\mathbb{P}^m$ con coordinate omogenee $x_0, ..., x_m$ e $\mathbb{P}^n$ con coordinate omogenee $y_0, ..., y_n$. Imponiamo $N = (m + 1)(n + 1) - 1$ e sia $\mathbb{P}^N$

lo spazio proiettivo con le coordinare omogenee indicate $z_{i,j}$ per $0 \leq i \leq m$ e $0 \leq j \leq n$. Allora vi è la mappa

$$f : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$$

data da $z_{i.j} = x_i y_j$ per ogni i, j. Essa soddisfa la seguente proprietà:

Proposizione 8.5. *Sia $f : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ come nella costruzione precedente. Allora:*

1. *L'immagine $X = f(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ è la varietà proiettiva:*

$$X = V_p(z_{i,j}z_{k,l} - z_{i,l}z_{k,j} : 0 \leq i, k \leq m, 0 \leq j, l \leq n).$$

2. *La mappa $f : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to X$ è un isomorfismo.*

In particolare, $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \cong X$ è una varietà proiettiva. L'isomorfismo f si chiama ***immersione di Segre****, le coordinate $z_{0,0}, ..., z_{m,n}$ sono chiamate* ***coordinate di Segre****.*

Dimostrazione.

1. È ovvio che i punti di $f(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ soddisfano l'equazione. Invece, consideriamo un punto $z \in \mathbb{P}^N$ con coordinate omogenee $z_{0,0}, ..., z_{m,n}$ che soddisfa la data equazione. Almeno uno delle coordinate deve essere non nulla, senza perdita di generalità ipotizziamo che sia $z_{0,0}$. Passiamo alle coordinate affini imponendo $z_{0,0} = 1$. Abbiamo che $z_{i,j} = z_{i,0}z_{0,j}$ per ogni $i = 0, ..., m$ e $j = 0, ..., n$. Quindi imponendo $x_i = z_{i,0}$ e $y_i = z_{j,0}$ otteniamo un punto di $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ che viene mappato in z da f.

2. Continuando con la notazione di prima, sia $z \in X$ un punto con $z_{0,0} = 1$. Se $f(x, y) = z$ per qualche $(x, y) \in \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, ne segue che $x_0 \neq 0$ e che $y_0 \neq 0$, quindi possiamo passare alle coordinate affine e ipotizzare che $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$. Ne segue che $x_i = z_{i,0}$ e $y_i = z_{j,0}$ per ogni i e j, quindi f è iniettiva, quindi biettiva. Lo stesso calcolo mostra che f e f^{-1} sono date, localmente nelle coordinare affini, da mappe polinomiali. Quindi f è un isomorfismo.

□

Corollario 8.6. *Ogni varietà proiettiva è una varietà.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che ogni varietà proiettiva è una prevarietà. Allora rimane sono da provare che $\mathbb{P}^n$ che la diagonale $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ è chiusa in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Possiamo descrivere la diagonale come

$$\Delta_{\mathbb{P}^n} = \{((x_0 : ... : x_n), (y_0 : ... : y_n)) : x_i y_j - x_j y_i = 0 \text{ per ogni } i, j\}$$

dato che l'equazione implica che la matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & ... & x_n \\ y_0 & y_1 & ... & y_n \end{pmatrix}$$

abbia massimo rango 1, quindi che $(x_0 : ... : x_n) = (y_0 : ... : y_n)$. In particolare segue che $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ è chiuso dato che è il luogo degli zeri dei polinomi lineari omogenee $z_{i,j} - z_{j,i}$ nelle coordinate di Segre. $\square$

Capitolo 9

Varietà lisce

Introduciamo in questo capito il concetto di spazio tangente che sarà necessario per poi definire le varietà lisce.

Definizione 9.1. *Sia a un punto di una varietà X. Scegliendo un intorno di a e assumendo che $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e che $a = 0$ è l'origine. Allora*

$$T_a X := V(f_1 : f \in I(X)) \subseteq \mathbb{A}^n$$

è chiamato ***spazio tangente*** *di X in a, dove $f_1 \in K[x_1, ..., x_n]$ indica il termina lineare di un polinomio $f \in K[x_1, ..., x_n]$.*

Possiamo considerare $T_a X$ come una varietà astratta o come una sottovarietà di $\mathbb{A}$.

Lemma 9.2. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine contenente l'origine. In più, denotiamo con $M := ([x_0], ..., [x_n]) = I(0) \subseteq A(X)$ l'ideale dell'origine in X. Allora vi è un naturale isomorfismo tra spazi vettoriali*

$$M/M^2 \cong Hom_K(T_0 X, K).$$

Definizione 9.3. *Sia X una varietà.*

1. *Un punto $a \in X$ è chiamato* ***liscio, regolare****, o* ***non-singolare*** *se $codim_X\{a\} = dim T_a X$. In caso contrario è chiamato punto* ***singolare*** *di X.*

2. *Se X ha un punto singolare diciamo che X è singolare. In caso contrario chiamiamo X liscia, regolare o non singolare.*

Capitolo 10

Polinomi di Hilbert e Teorema di Bézout

Siamo giunti ad uno dei risultati più importanti della geometria algebrica, il Teorema di Bézout, obiettivo della mia tesi. Con esso riusciremo a quantificare il numero di intersezioni tra una curva e un iperpiano in un generico spazio proiettivo e soprattutto, nel caso di due curve planari generate rispettivamente da f e g in $K[x_0, ..., x_n]$, dimostreremo il legame che c'è tra il loro numero di intersezione e i gradi dei due polinomio.

Definizione 10.1 (Funzioni di Hilbert)**.**

1. *Sia $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideale omogeneo. Allora $K[x_0, ..., x_n]/I$ è una K-algebra graduata finito-dimensionale. Possiamo definire la funzione*

$$h_I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, d \mapsto dim_K K[x_0, ..., x_n]_d / I_d.$$

   *Essa è chiamata **funzione di Hilbert** di I.*

2. *Per una varietà proiettiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$ imponiamo $h_X := h_{I(X)}$, quindi*

$$h_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, d \mapsto dim_K S(X)_d,$$

   dove $S(X) = K[x_0, ..., x_n]/I(X)$ è l'anello delle coordinate di X. Chiamiamo h_X la funzione di Hilbert di X.

Osservazione 10.1. *Gli automorfismi proiettivi, come quelli dell'esempio 8.4, non modificano la funzione di Hilbert: una matrice invertibile corrisponde ad un automorfismo da $\mathbb{P}^n$ in $\mathbb{P}^n$, che può essere esteso ad un isomorfismo da $\mathbb{A}^{n+1}$ a $\mathbb{A}^{n+1}$, quindi ad un isomorfismo da $K[x_0, ..., x_n]$ a $K[x_0, ..., x_n]$ di K-algebre. Questo isomorfismo rispetta la gradazione, quindi ogni ideale ha la stessa funzione di Hilbert dell'immagine.*

Esempio 10.2.

1. La funzione di Hilbert di $\mathbb{P}^n$ è data da $h_{\mathbb{P}^n}(d) = K[x_0, ..., x_n]_d = \binom{n+d}{d}$ per $d \in \mathbb{N}$.

2. Sia $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideale omogeneo con $V_p(I) = \{\}$. Allora $\sqrt{I} = (x_0, ..., x_n)$ o $\sqrt{I} = (1)$, per il teorema degli zeri di Hilbert proiettivo. In entrambi i casi abbiamo che $x_i^{k_i} \in I$ per un opportuno $k_i \in \mathbb{N}$, per ogni i. Questo significa che tutti i monomi di grado almeno $k := k_0 + \cdots + k_n$ sono contenuti in I. Quindi $I_d = K[x_0, ..., x_n]_d$ per ogni $d \geq k$, o in altre parole

$$h_I(d) = 0 \text{ per quasi ogni } d \in \mathbb{N},$$

dove "per quasi ogni" si intende per tutti i numeri naturali tranne un numero finito.

3. Sia $X = \{a\} \subseteq \mathbb{P}^n$ un punto singolo. Per calcolare la sua funzione di Hilbert possiamo ipotizzare che $a = (1 : 0 : ... : 0)$, grazie all'osservazione 10.1, allora $I(a) = (x_1, ..., x_n)$. Allora $S(X) = K[x_0, ..., x_n]/I(a) \cong K[x_0]$, e quindi

$$h_X(d) = 1 \text{ per quasi ogni } d \in \mathbb{N}.$$

Definizione 10.3. *Siano $f : U \to V$ e $g : V \to W$ due mappe lineari di spazi vettoriali su K. Ipotizziamo che f sia iniettiva, g suriettiva e che $Imf = Kerg$. Di solito si riassume dicendo che*

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

è una successione esatta.

Lemma 10.4. *Siano $f : U \to V$ e $g : V \to W$ due mappe lineari di spazi vettoriali su K.*

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

è una successione esatta. Allora $dim_K V = dim_K U + dim_K W$.

Dimostrazione.

$$\dim_K V = \dim_K ker(g) + \dim_K Im(g) = \dim_K Im(f) + \dim_K W = \dim_K U + \dim_K W.$$

□

Proposizione 10.5. *Siano $I, J \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ due ideali omogenei, allora*

$$h_{I \cap J} + h_{I+J} = h_I + h_J$$

Dimostrazione. Sia $R = K[x_0, ..., x_n]$, è facile dimostrare che

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & R/(I\cap J) & \xrightarrow{f} & R/I\times R/J & \xrightarrow{g} & R/(I+J) \quad \to 0 \\ & & [f] & \longmapsto & ([f],[f]) & & \\ & & & & ([f],[g]) & \longmapsto & [f]-[g] \end{array}$$

è una successione esatta. Prendendo la parte di grado d e applicando il lemma 10.4 si ha la tesi. □

Esempio 10.6. Siano X e Y due varietà proiettive disgiunte in $\mathbb{P}^n$. Allora $I(X)\cap I(Y) = I(X\cup Y)$ e il luogo degli zeri di $I(X)+I(Y)$ è vuoto dato che $V(I(X)+I(Y)) = V(I(X))\cap V(I(Y)) = X\cap Y = \{\}$, quindi la sua funzione di Hilbert è nulla quasi dappertutto per l'esempio 10.2 (2). Per la proposizione 10.5 abbiamo

$$h_{X\cup Y}(d) = h_X(d) + h_Y(d) \text{ per quasi ogni } d \in \mathbb{N}.$$

In particolare, questo vuol dire, grazie all'esempio 10.2 (3), che se $X = \{a_1, ..., a_r\}$ allora si ha

$$h_X(d) = r \text{ per quasi ogni } d \in \mathbb{N}.$$

Lemma 10.7. *Sia $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideale omogeneo e sia $f \in K[x_0, ..., x_n]$ un polinomio omogeneo di grado d. Ipotizziamo che esista un $d_0 \in \mathbb{N}$ con la seguente proprietà:*

$$\textit{Per ogni polinomio omogeneo } g \in K[x_0, ..., x_n] \textit{ di grado almeno } d_0$$

$$\textit{con } fg \in I \textit{ abbiamo } g \in I.$$

Allora $h_{I+(f)}(d) = h_I(d) - h_I(d-e)$ per quasi ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sia $R = K[x_0, ..., x_n]$. Esiste una successione esatta

$$0 \to R_{d-e}/I_{d-e} \xrightarrow{f} R_d/I_d \to R_d/(I+(f))_d \to 0$$

per ogni d tali che $d - e \geq d_0$. La seconda mappa è la proiezione al quoziente ed è suriettiva, il suo ker è esattamente l'immagine della prima mappa. L'iniettività è una conseguenza diretta dell'ipotesi. La tesi segue dal lemma 10.4. □

Osservazione 10.2 (Interpretazione geometrica)**.** *Vogliamo analizzare il significato geometrico dell'assunzione $fg \in I$ allora $g \in I$. Sia X una varietà proiettiva e sia $I = I(X)$ il suo ideale radicale. Consideriamo la decomposizione in componenti irriducibili $X = X_1 \cup ... \cup X_r$, allora si ha che $I(X) = I(X_1) \cap ... \cap I(X_r)$. Dimostriamo che se f non si annulla in nessuna delle componenti irriducibili allora f soddisfa la proprietà precedente. Infatti, se f è non nullo nel dominio $S(X_i)$ per ogni $i \in \{1, ..., r\}$, allora $fg = 0 \in S(X_i)$ implica che $g = 0 \in S(X_i)$, quindi che $g \in I$.*

Se I non è radicale si può comunque fare un discorso simile ma abbiamo bisogno della cosiddetta decomposizione primaria di I.

Definizione 10.8 (Decomposizione primaria)**.** *Sia $I \subseteq K[x_o, ..., x_n]$ un ideale. Allora esista una decomposizione*

$$I = I_1 \cap ... \cap I_r$$

in ideali primari $I_1, ..., I_r$, cioè se $gf \in I_i$ implica che $g \in I_i$ or $f \in \sqrt{I_i}$ per ogni i e per ogni polinomio $f, g \in K[x_0, ..., x_n]$.

Dalla seguente decomposizione segue che il luogo degli zeri $V_a(I_i)$ sono irriducibili: per dimostrarlo proviamo che $K[x_0, ..., x_n]/\sqrt{I_i}$ è un dominio. Siano f e g due polinomio tali che $gf \in \sqrt{I_i}$. Allora $g^k f^k \in I_i$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Ma questo implica che $g^k \in I_i$ o $f^k \in \sqrt{I_i}$, dato che I_i è primario, quindi che $g \in \sqrt{I_i}$ o che $f \in \sqrt{\sqrt{I_i}} = \sqrt{I_i}$.

Osservazione 10.3. *Usando questa decomposizione si può dimostrare che per un ideale omogeneo $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$, con un cambiamento lineare di coordinate omogenee, si possa assumere che $f = x_0$. Infatti assumiamo che g sia un polinomio omogeneo tale che $gx_0 \in I_i$ per ogni i. Distinguiamo due casi:*

1. *Se $V_a(I_i) \subseteq \{0\}$ allora $\sqrt{I_i} \supseteq (x_0, ..., x_n)$ per il teorema degli zeri. Allora $K[x_0, ..., x_n]_d \subseteq I_i$ per un certo d sufficientemente grande, lo abbiamo visto negli scorsi esempi, che significa che $g \in I_i$, se il grado di g è sufficientemente grande.*

2. *Grazie alla scomposizione si ha che*

$$V_a(I) = V_a(I_i) \cup \cdots \cup V_a(I_r).$$

Per il punto 1 si ha che ogni componente irriducibile di $V_a(I)$ è contenuta in uno dei $V_a(I_i)$.

3. *Se $V_a(I_i) \nsubseteq \{0\}$ con un cambiamento lineare di coordinate omogenee possiamo ipotizzare che $V_a(I_i)$ non sia contenuto nell'ipersuperficie $V_a(x_0)$. Allora x_0 non è identicamente nullo su $V_a(I_i)$, quindi $x_0 \notin I_a(V_a(I_i)) = \sqrt{I_i}$, Dato che I_i è primario, concludiamo che $g \in I_i$.*

Abbiamo visto che la funzione di Hilbert, per d sufficientemente grande, ci dice quante sono i punti di intersezioni tra due varietà che non condividono componenti irriducibili. Con la seguente proposizione, invece, faremo vedere come, sempre per d sufficientemente grande, la funzione di Hilbert h_I sia un polinomio in $\mathbb{Q}[d]$, inoltre dimostreremo un'importante proprietà del coefficiente di testa.

Proposizione 10.9 (Polinomi di Hilbert)**.** *Sia $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideale omogeneo. Allora esiste un unico polinomio $\chi_I \in \mathbb{Q}[d]$ tale che $\chi_I(d) = h_I(d)$ per quasi ogni $d \in \mathbb{N}$. In più,*

1. *Il grado di χ_I è $m :=$ dim $V_p(I)$.*
2. *Se $V_p(I) \neq \{\}$, il coefficiente di testa di χ_I è $\frac{1}{m!}$ per un intero positivo.*

Il polinomio χ_I è chiamato ***polinomio di Hilbert*** *di I. Per una varietà proiettiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$ imponiamo $\chi_X := \chi_{I(X)}$.*

Dimostrazione. Il polinomio è unico perché deve passare per un numero infinito di punti fissati, quindi dimostriamo solo l'esistenza di χ_I per induzione su $m = \dim V_p(I)$. Il passo base segue dall'esempio 10.1 (2): Per $V_p(I) = \{\}$ otteniamo che χ_I è il polinomio nullo. Allora ipotizziamo che $V_p(I) \neq \{\}$. Per un cambiamento lineare di coordinate omogenee, che non cambia il valore della funzione di Hilbert, possiamo assumere che il polinomio x_0 non sia identicamente nullo su nessuna delle componenti irriducibili di $V_p(I)$. Allora $\dim V_p(I + (x_0)) \leq m-1$, e quindi per induzione su m abbiamo che $d \mapsto h_{(I+(x_0))}(d)$ è un polinomio di grado al massimo $m-1$ per d sufficientemente grande. Usiamo $\binom{d}{0}, ..., \binom{d}{m-1}$ come base per lo spazio dei polinomi in d di grado minore o uguale di $m-1$, quindi esistono $c_1, ..., c_{m-1} \in \mathbb{Q}$ tale che

$$h_{I+(x_0)}(d) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i \binom{d}{i} \text{ per quasi ogni } d \in \mathbb{N}.$$

Per l'osservazione 10.3 possiamo applicare il lemma 10.7, sia allora $f = x_0$ e

$$h_I(d) - h_I(d-1) = h_{I+(x_0)}(d) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i \binom{d}{i} \text{ per quasi ogni } d \in \mathbb{N}.$$

Dimostreremo per induzione su d che esiste una costante $c \in \mathbb{Q}$ tale che

$$h_i(d) = c + \sum_{i=0}^{m-1} c_i \binom{d+1}{i+1} \text{ per quasi ogni d} \in \mathbb{N}.$$

Il passo baso è banale, dato che per un solo d esiste tale $c \in \mathbb{Q}$ che rende vera l'uguaglianza. Per i d più grandi invece

$$h_I(d+1) = h_I(d) + \sum_{i=0}^{m-1} c_i \binom{d+1}{i} = c + \sum_{i=0}^{m-1} \left(\binom{d+1}{i+1} + \binom{d+1}{i} \right) = c + \sum_{i=0}^{m-1} c_i \binom{d+2}{i+1}.$$

Dato che il membro di destra è un polinomio in d (di grado al massimo m) abbiamo proviamo l'esistenza di χ_I. Mentre, se $V_p(I) \neq \{\}$ dimostriamo che il coefficienti di testa di χ_I è $\frac{1}{m!}$ per un intero positivo, così finiremo di dimostrare tutto. Lo facciamo per induzione su m.

1. $m = 0$: In questo caso χ_I è una costante, ed è chiaramente un intero non negativo, dato che per definizione è la dimensione di $K[x_0, ..., x_n]_d/I_d$ per d sufficientemente grande. Non può essere zero, perché in caso contrario $I_d = K[x_0, ..., x_n]_d$ per un qualche d, che implicherebbe $x_i^d \in I_d$, per ogni i, quindi $V_p(I) = \{\}$.

2. $m > 0$: In questo caso $V_p(I)$ ha una componente irriducibile di dimensione m (e nessuna di dimensione maggiore). In questa componente il luogo degli zeri di x_0 ha dimensione $m-1$. Allora dim $V_p(I + (x_0)) = m - 1$, e quindi per induzione $\chi_{I+(x_0)}$ è un polinomio di grado $m-1$ e $(m-1)!$ per il coefficiente di testa è un intero positivo. Questo coefficiente è c_{m-1}, che è anche $m!$ per il coefficiente di testa di χ_I.

□

Definizione 10.10 (Grado)**.** *Sia $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideale omogeneo con luogo degli zeri proiettivo non vuoto, sia $m = dimV_p(I)$. Allora $m!$ per il coefficiente di testa di χ_I, che è positivo, è chiamato* ***grado*** *deg I di I*
Per una varietà proiettiva X, il grado è definito come deg X := deg $I(X)$.

Esempio 10.11.

1. Il grado di $\mathbb{P}^n$ è $n!$ per il coefficiente di $dim_K K[x_0, ..., x_n]_d = \binom{n+d}{d}$, quindi deg $\mathbb{P}^n = 1$. Per l'esempio 10.2 (3), il grado di un singolo punto è 1. In generale, se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è uno spazio lineare allora il suo anello delle coordinate è isomorfo a un anello dei polinomi, quindi deg $X = 1$.

2. Sia $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideale omogeneo con il luogo degli zeri finito, $V(I) = \{a_1, ..., a_r\}$. Allora $\chi_{\sqrt{I}} = r$. Ma $\sqrt{I} \supset I$ che implica $\chi_I \geq \chi_{\sqrt{I}}$, quindi
$$\text{deg} I = \chi_I \geq \chi_{\sqrt{I}} = r$$

Proposizione 10.12 (Teorema di Bézout)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva di dimensione almeno 1, e sia $f \in K[x_0, ..., x_n]$ un polinomio omogeneo che non è identicamente nullo su nessuna delle componenti irriducibili di X. Allora*
$$deg(I(X) + (f)) = degX \cdot degf.$$

Dimostrazione. Sia $m = \dim X$. Per definizione, il polinomio di Hilbert di X è dato da
$$\chi_X(d) = \frac{\text{deg} X}{m!} d^m + a d^{m-1} + (\text{termini di grado inferiore a } m-1)$$

per qualche $a \in \mathbb{Q}$. Per l'osservazione 10.8 e il lemma 10.7 abbiamo che, ponendo $e :=$ deg f

$$\begin{aligned}\chi_{I(X)+(f)}(d) =& \chi_X(d) - \chi_X(d-e) \\ =& \frac{degX}{m!}(d^m - (d-e)^m) + a(d^{m-1} - (d-e)^{m-1}) + \text{ (termini di grado inferiore)} \\ =& \frac{edegX}{(m-1)!}d^{m-1} + \text{ (termini di grado inferiore).}\end{aligned}$$

Questo significa per definizione che deg $(I(X)+(f)) = e$ deg $X =$ deg $f\cdot$ deg X. $\square$

Esempio 10.13. Sia $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideale principale. Allora il teorema di Bézout insieme all'esempio 10.11 (1)

$$\text{deg}I = \text{deg}((0) + (f)) = \text{deg}\mathbb{P}^n \cdot \text{deg}f = \text{deg}f.$$

Corollario 10.14 (Teorema di Bézout per le curve)**.**

1. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una curva e sia $f \in K[x_0, ..., x_n]$ un polinomio omogeneo che non è identicamente nullo su nessuna delle componenti irriducibili di X. Allora*

$$|X \cap V(f)| \leq degX \cdot degf.$$

2. *Siano X e Y due curve in $\mathbb{P}^2$ senza componenti irriducibili in comune, allora*

$$|X \cap Y| \leq degX \cdot degY.$$

Dimostrazione.

1. Dato che $I(X) + (f)$ è l'ideale di $X \cap V(f)$, la tesi segue dal teorema di Bézout.
2. Si applica il teorema di Bézout a un polinomio f che genera $I(Y)$, si conclude con l'esempio 10.14.

$\square$

Proviamo a dare una "versione locale" del teorema di Bézout. Quello che faremo è introdurre il concetto di molteplicità che farà sì che le disuguaglianza nel precedente risultato diventino delle uguaglianze.

Osservazione 10.4. *Sia $I \subseteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideale omogeneo con dim $V_p(I) = 0$. Ipotizziamo di aver scelto delle coordinate tali che tutti i punti in $V_p(I)$ abbiano la coordinata x_0 non nulla. Allora*

$$degI = \chi_I = dim_K K[x_1, ..., x_n]/J,$$

dove $J = \{f(1, x_1, ..., x_n) : f \in I\} \subseteq K[x_1, ..., x_n]$.

Lemma 10.15. *Sia $J \subseteq K[x_1, ..., x_n]$ un ideale con un luogo degli zeri affine $V_a(J) = \{a_1, ..., a_r\}$. Allora*

$$K[x_1, ..., x_n]/J \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_1}/J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_r}/J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_r},$$

dove $J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_i}$ denota l'ideale in $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_i}$ generato da tutti gli elementi $\frac{f}{1} \in J$.

Dimostrazione. Consideriamo la decomposizione primaria di J. Si ha che $J = J_1 \cap \cdots \cap J_r$ per qualche ideali $J_1, ..., J_r$ con $V_a(J_i) = \{a_i\}$ per ogni $i \in \{1, ..., r\}$. Notiamo che $J_i\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a_j}$ è tutto $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_j}$, per $i \neq j$, dato che $a_j \notin V_a(J_i)$ esisterà un polinomio in J_i che non si annulla in a_j, quindi esiste il suo inverso. Allora è sufficiente provare che

$$K[x_1, ..., x_n]/J \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_1}/J_1\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_r}/J_r\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_r}.$$

Lo faremo vedere mostrando che l'omomorfismo tra K-algebre

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_1}/J_1\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_r}/J_r\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_r}, [f] \mapsto ([f], ..., [f])$$

è biettivo.

- φ è iniettivo: Sia f un polinomio tale che $\varphi([f]) = 0$. Allora f appartiene a $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a_i}$, per ogni $i \in \{1, ..., r\}$, quindi $\frac{f}{1} = \frac{g_i}{f_i}$ per qualche g_i, f_i con $g_i \in J_i$ e $f_i \in K[x_1, ..., x_n]$ tale che $f(a_i) \neq 0$. Questo significa che $h_i(f_if - g_i) = 0$ per qualche h_i con $h_i(a_i) \neq 0$, e quindi che $g_if_if \in J_i$. Ma $h_if_i \notin I(a_i)$, ciò significa che $h_if_i \notin \sqrt{J_i}$, e quindi che $f \in J_i$ dato che J_i è primario. Questo vale per ogni i, allora $f \in I$, quindi $[f] = 0$ in $K[x_1, ..., x_n]/J$.

- φ è suriettiva: Per simmetria dei fattori è sufficiente provare che $(1, 0, ..., 0) \in Im\varphi$. Dato che $V(J_1 + J_i) = \{a_1\} \cap \{a_i\} = \{\}$ per ogni $i > 1$, allora $1 \in \sqrt{J_1 + J_i}$, quindi $1 \in J_1 + J_i$. Esistono $b_i \in J_1$ e $c_i \in J_i$, tali che $b_i + c_i = 1$ e $c_i \equiv 0 \mod J_i$ e $c_i \equiv 1 \mod J_1$. Quindi il prodotto $c_2 \cdot \cdots \cdot c_r$ ha immagine $(1, 0, ..., 0)$.

□

Possiamo definire la molteplicità.

Definizione 10.16 (Molteplicità)**.**

1. *Sia $I \subseteq K[x_1, ..., x_n]$ un ideale omogeneo con un luogo degli zeri proiettivo finito e sia $a \in \mathbb{P}^n$. Scelta una carta affine di $\mathbb{P}^n$ contenente a, e sia J il suo corrispondente ideale affine. Allora*

$$mult_a(I) := dim_K\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n.a}/J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}$$

è chiamata ***molteplicità*** *di I in a.*

2. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ un curva proiettiva e sia $a \in X$ un punto. Per un polinomio omogeneo $f \in K[x_0, ..., x_n]$ non identicamente nullo su nessuna delle componenti irriducibili di X, il numero*

$$mult_a(X, f) := mult_a(I(X) + (f))$$

*è chiamato **molteplicità** di f in a. Si nota che f dipende solo dalla classe modulo $I(X)$. Useremo anche $mult_a(f)$ per indicare la molteplicità di f in a.*
*Se $n = 2$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^2$ è un'altra curva che non condivide nessuna componente irriducibile con X, la **molteplicità di intersezione** di X e Y in a è definita come*

$$mult_a(X, Y) := mult_a(I(X) + I(Y)).$$

Osservazione 10.5 (Proprietà della molteplicità)**.** *Notiamo che $1 \notin J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}$ se e solo se $a \in V_p(I)$. Segue che $mult_a(I) \geq 1$ se e solo se $a \in V_p(I)$. Mentre $mult(X, Y) \geq 1$ se e solo se $a \in X \cap Y$.*

Osservazione 10.6 (molteplicità di intersezione di f in a)**.** *È utile esprimere la molteplicità della definizione 10.16 (2) in termini di anelli locali. Scegliamo la carta affine $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ di $\mathbb{P}^n$ che contenente a. Per abuso di notazione, se $f \in K[x_0, ..., x_n]$ è un polinomio omogeneo, indicheremo ancora con f il polinomio ottenuto impostando $x_i = 1$, ed anche il suo quoziente nell'anello locale $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}$. Allora la definizione 10.16 può essere riformula come:*

1. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una curva, e sia $f \in K[x_0, ..., x_n]$ un polinomio omogeneo che non è identicamente nullo su nessuna delle componenti irriducibili di X. Denotiamo con $U = X \cap \mathbb{A}^n$ la parte affine di X nella carte scelta, e sia $J = I(U)$ il suo ideale. La molteplicità di f in $a \in \mathbb{P}^n$ è uguale a $dim_K \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}/(J + (f))\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}$. Si può dimostrare che $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}/J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a} \cong \mathcal{O}_{X,a}$, allora*

$$mult_a(X, f) = dim_K \mathcal{O}_{X,a}/(f).$$

2. *Per due curve $X, Y \subset \mathbb{P}^2$ senza componenti irriducibili in comune e ideali $I(X) = (f)$ e $I(Y) = (g)$ la loro molteplicità di intersezione è*

$$mult_a(X, Y) = dim_K \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,a}/(f, g),$$

o

$$mult_a(X, Y) = dim_K \mathcal{O}_{X,a}/(g) = dim_K \mathcal{O}_{Y,a}/(f).$$

Corollario 10.17.

1. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una curva e sia $f \in K[x_0, ..., x_n]$ un polinomio omogeneo che non è identicamente nullo su nessuna delle componenti irriducibili di X. Allora*

$$\sum_{a \in X \cap V(f)} mult_a(X, f) = degX \cdot degf.$$

2. *Per due curve X e Y in $\mathbb{P}^2$ senza componenti irriducibili in comune abbiamo*

$$\sum_{a \in X \cap Y} mult_a(X, Y) = degX \cdot degY.$$

Dimostrazione.

1. Dal Teorema di Bézout, dall'osservazione 10.4, dal lemma 10.15 e la definizione di molteplicità, tutti applicati all'ideale $I(X) + (f)$, abbiamo

$$\deg(I(X) + (f)) = \sum_{a \in X \cap V(f)} mult_a(X, f)$$

2. Per il punto precedente e dal fatto che $\deg Y = \deg g$

□

Termiano con un risultato utile per le applicazioni.

Osservazione 10.7. *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{A}^2$ due curve affine contenenti l'origine. Inoltre, siano $I(X) = (f)$ e $I(Y) = (g)$ i loro ideali. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *$dim_K \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f, g) = 1$, cioè la molteplicità di intersezione di X e Y è 1.*

2. *X e Y sono regolari in 0 e hanno spazi tangenti distinti.*

Capitolo 11

Applicazioni del Teorema di Bézout

Quest'ultimo capitolo della tesi lo dedicheremo all'osservazione di alcune applicazione del teorema di Bézout.

Proposizione 11.1. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^3$ una curva che non è contenuta in nessun sottospazio lineare proprio di $\mathbb{P}^3$. Se deg X è un numero primo, allora $I(X)$ non può essere generato da due elementi.*

Dimostrazione. Per assurdo ipotizziamo che $I(X) = (f, g)$, con f, g due polinomi omogenei in $K[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Chiaramente, g non è identicamente nulla su nessuna delle componente irriducibile di $V(f)$, dato che in caso contrario dim$V(f, g) = 2$. Per la proposizione 10.12

$$degX = deg((f) + (g)) = deg(f) \cdot degg = degf \cdot degg.$$

Dato che deg X è un numero primo, allora uno dei due deve far 1, quindi uno dei due deve essere un polinomio lineare. Così si avrebbe X contenuto in un sottospazio lineare proprio di $\mathbb{P}^3$, assurdo □

Proposizione 11.2. *Ogni isomorfismo $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ è lineare, cioè è della forma $f(x) = Ax$ con $A \in GL_{n+1}(K)$.*

Dimostrazione. Sia $H \subseteq \mathbb{P}^n$ un iperpiano e sia $L \subseteq \mathbb{P}^n$ un linea non contenuta in H. Chiaramente, l'intersezione $L \cap H$ consiste di un solo punto con molteplicità 1 (cioè $I(L)+I(H)$ ha molteplicità 1). Dato che f è un isomorfismo, $f(H)$ e $f(L)$ devono essere un iperpiano e una curva rispettivamente che si intersecano in un punto con molteplicità 1. Per la versione locale del teorema di Bézout deg $f(L)\cdot$ deg $f(H) = 1$. Questo è possibile soltanto se deg $f(H) = 1$. In altre parole f manda iperpiani in iperpiani. Componendo f con un opportuno automorfismo proiettivo, possiamo ipotizzare che f

mappi $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \backslash V(x_0)$ in se stesso. Passando alle coordinate affine si ha che $f^{-1}(V(x_i)) = V(f^* x_i)$, quindi uno spazio lineare per tutti gli i, quindi $f^* x_i$ deve essere una potenza di un polinomio lineare. Ma $f^* : K[x_0, ..., x_n] \to K[x_0, ..., x_n]$ è un isomorfismo, quindi manda polinomi irriducibili in polinomi irriducibili. Allora $f^* x_i$ è lineare per ogni i, quindi f è lineare in $\mathbb{A}^n$, quindi in $\mathbb{P}^n$. $\square$

Proposizione 11.3. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^2$ una curva irriducibile di grado d. Allora X ha al massimo $\binom{d-1}{2}$ punti singolari.*

Dimostrazione. Una curva piana di grado 1 è una linea, che isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Una curva di grado 2 è ancora isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Quindi in tutti e due i casi abbiamo che le curve non hanno punti singolari. Allora è sufficiente provare il teorema per $d \geq 3$. Per assurdo ipotizziamo esistano $a_1, ..., a_{\binom{d-1}{2}+1}$ di X. In più, prendiamo $d-3$ punti distinti $b_1, ..., b_{d-3}$ di X, cosi da avere in tutto

$$\binom{d-1}{2} + 1 + d - 3 = \binom{d}{2} - 1$$

punti totali. Lo spazio $K[x_0, x_1, x_2]_{d-2}$ dei polinomi omogenei di grado $d-2$ in tre variabili è uno spazio vettoriale di dimensione $\binom{d}{2}$, con i coefficienti dei polinomi come coordinate. La condizione per un polinomio di passare per un punto è chiaramente lineare e omogenea. Un sistema di $\binom{d}{2} - 1$ equazioni lineari in uno spazio lineare di dimensione $\binom{d}{2}$ ha per forza una soluzione non banale, allora esiste un polinomio non nullo $f \in K[x_0, x_1, x_2]$ che si annulla in tutti gli a_i e b_j. La curva $Y = V(f)$ ha grado al massimo $d-2$ e passa per questi punti. Notiamo che X e Y non possono avere componenti irriducibili in comune dato che X è irriducibile e di grado maggiore di Y. Per il teorema di Bézout X e Y si possono intersecare in un numero massimo di punto $\deg X \cdot \deg Y = d(d-2)$, contati con molteplicità. Ma la molteplicità di intersezione è maggiore o uguale di 2 dato che X è singolare. Allora i punti di intersezione contati con la loro molteplicità è maggiore o uguale a

$$2 \cdot \left(\binom{d-1}{2} + 1 \right) + (d-3) = d(d+2) + 1 > d(d+2),$$

che è un assurdo. $\square$

Bibliografia

[1] A. Gathmann *Algebraic Geometry*, Class Notes TU Kaiserslautern (2014).

[2] Karen E. Smith, Lauri Kahanpää, Pekka Kekäläinen, William Traves, *An Invitation to Algebraic Geometry*, Universitext (UTX) (2000).

[3] Herstein I. N. *Algebra*, Editori Riuniti, university press (2010)

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare la mia famiglia per avermi sostenuto e aver creduto sempre in me. Ringrazio i miei amici che hanno fatto sì che questi ultimi tre anni siano stati i più belli di tutta la mia vita, anche se pieni di difficoltà.