Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Oltre il misconcetto di equiprobabilità: l'approccio trialogico all'apprendimento della probabilità nella scuola secondaria di primo grado

Tesi in Didattica e Pedagogia Speciale

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
Manuela Fabbri

Correlatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
Elena Bandini

Candidata:
Francesca Penna

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione **2**

1 L'approccio trialogico all'apprendimento **3**

1.1 La scuola delle competenze 3

1.2 Il modello dell'approccio trialogico dell'apprendimento 7

1.3 I design principles del TLA 10

1.3.1 La produzione di artefatti secondo il metodo trialogico . . 10

1.3.2 La relazione tra individuo e comunità 11

1.3.3 Avanzamento della conoscenza e miglioramento continuo . 13

1.3.4 Favorire la riflessione e la trasformazione tra diverse forme di conoscenza e tra diverse pratiche 14

1.3.5 Lavorare su oggetti reali e condivisi, ibridando le pratiche . 15

1.3.6 Le tecnologie nel Trialogico 16

2 Il calcolo della probabilità **18**

2.1 Il concetto di probabilità 18

2.2 L'approccio assiomatico 20

2.2.1 L'equiprobabilità 23

2.2.2 La probabilità condizionata 26

3 L'apprendimento della probabilità **33**

3.1 I misconcetti nell'apprendimento della probabilità 33

3.2 L'insegnamento della probabilità in Italia 35

3.2.1 Linee guide ministeriali 35

3.2.2 La probabilità nell'editoria scolastica italiana per la secondaria di I grado 37
3.2.3 Un'indagine sulla scuola secondaria di I grado 41

4 La sperimentazione in aula 46
4.1 Struttura del progetto 48
4.2 L'approccio assiomatico alla probabilità 52
4.2.1 Classe seconda 52
4.2.2 Classe terza 60
4.3 L'applicazione dei design principles del TLA 64

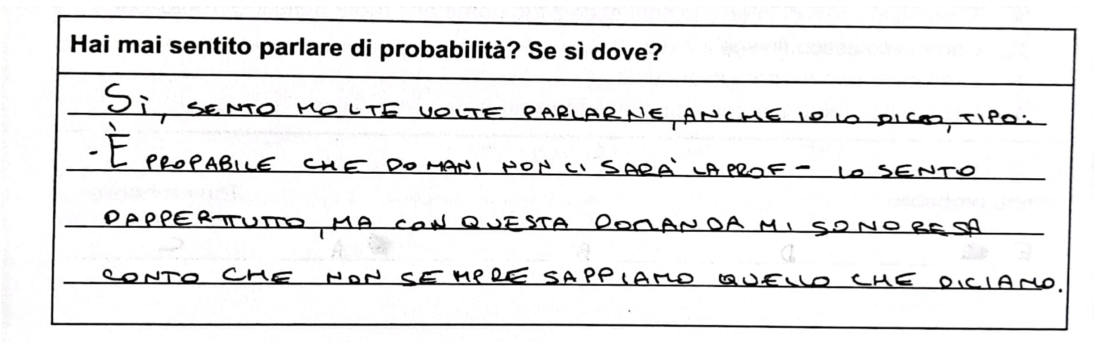
5 Analisi dei dati della sperimentazione 70
5.1 Riflessioni educative 70
5.2 Analisi dati dei questionari di probabilità 75
5.3 Analisi dati dei questionari di autovalutazione 100
5.4 La produzione degli artefatti 120

Conclusioni 123

Appendice 126
All.1: Questionario di autovalutazione in entrata 126
All.2: Questionario di autovalutazione in uscita 135
All.3: Questionario conoscenze di base probabilità 146
All.4: Questionario probabilità in uscita 149
All.5: Questionario lavoro di gruppo 152
All.6: Materiali classe seconda 157
All.6a: Materiali prima attività 157
All.6b: Materiali seconda attività 164
All.6c: Materiali terza attività 168
All.7: Materiali classe terza 171
All.7a: Materiali prima attività 171
All.7b: Materiali seconda attività 178

Bibliografia **182**

Introduzione


Hai mai sentito parlare di probabilità? Se sì dove?

SÌ, SENTO MOLTE VOLTE PARLARNE, ANCHE IO LO DICO, TIPO:
- È PROPABILE CHE DOMANI NON CI SARÀ LA PROF - LO SENTO
DAPPERTUTTO, MA CON QUESTA DOMANDA MI SONO RESA
CONTO CHE NON SEMPRE SAPPIAMO QUELLO CHE DICIAMO.

La seguente risposta, estratta da un questionario somministrato durante la ricerca descritta nei *capitoli 4 e 5* di questa tesi, proviene da uno studente del secondo anno di scuola secondaria di I grado. Essa cattura efficacemente l'essenza del calcolo delle probabilità nella vita quotidiana degli studenti e sottolinea una lacuna significativa: nonostante la frequente menzione di 'probabilità', spesso manca una comprensione teorica solida che possa essere applicata concretamente.

Il calcolo delle probabilità, nonostante sia uno dei concetti matematici più pervasivi nel quotidiano, riceve scarsa attenzione nell'insegnamento della matematica nelle scuole italiane. Le scelte didattiche, sia nei libri di testo che nelle strategie degli insegnanti, tendono a generare misconcetti tra gli studenti. Inoltre, l'approccio tradizionale all'insegnamento spesso relega lo studio della probabilità a un ruolo marginale, solitamente introdotto solo a partire dal terzo anno di scuola secondaria di I grado.

Nell'ambito di questa ricerca, si è condotto uno studio, illustrato nel *capitolo 3*, per analizzare le modalità con cui il calcolo delle probabilità viene presentato nei libri di testo della scuola secondaria di I grado e nelle metodologie didattiche degli insegnanti. L'indagine si propone di determinare se il misconcetto di equiprobabilità derivi dalle pratiche didattiche o sia piuttosto un riflesso del pensiero probabilistico intuitivo degli alunni. L'esame dei dati suggerisce che la trattazione della probabilità, sia nei manuali scolastici sia nell'insegnamento, avviene prevalentemente attraverso l'approccio classico, il che potrebbe contribuire alla formazione di misconcetti tra gli studenti.

Per condurre un'analisi approfondita, è stata realizzata una sperimentazione con studenti di due classi dell'Istituto Comprensivo 21 di Bologna, una del secondo anno e una del terzo. L'obiettivo era esplorare il calcolo delle probabilità attraverso un approccio assiomatico, che verrà dettagliato nel *capitolo 3*.
Considerando, come precedentemente sottolineato, che il calcolo delle probabilità è una branca della matematica strettamente connessa alla realtà quotidiana, è stato introdotto agli studenti seguendo l'approccio trialogico all'apprendimento, un approccio pedagogico descritto nel *capitolo 1*. Questo metodo pone l'accento sull'interazione dinamica tra tre componenti fondamentali: l'apprendimento individuale, la collaborazione tra pari e l'interazione con la comunità in cui sono inseriti.
L'obiettivo dell'approccio trialogico, in questa sperimentazione, è stato quello di favorire un apprendimento profondo e significativo, nel quale gli studenti sono stati incoraggiati a elaborare e applicare le conoscenze matematiche acquisite, attraverso un processo di dialogo costruttivo e l'uso efficace delle tecnologie, permettendo così di trasformare le intuizioni probabilistiche quotidiane in una solida comprensione formale. La creazione di un artefatto finale, inoltre, ha consentito di concretizzare l'apprendimento, collegando i concetti teorici del calcolo delle probabilità con la vita reale degli studenti e aumentando la loro consapevolezza.

Capitolo 1

L'approccio trialogico all'apprendimento

1.1 La scuola delle competenze

Il concetto di competenza ha assunto un ruolo sempre più importante nell'educazione e nella formazione. Secondo Michele Pellerey,

> "*le competenze indicano la comprovata capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e/o personale; le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia.*"

La Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio sul Quadro europeo delle qualifiche e dei titoli per l'apprendimento permanente (EQF) del 22 maggio 2017 definisce tre termini chiave per comprendere il concetto di competenza:

- **Conoscenze**. Le conoscenze sono il risultato dell'assimilazione di informazioni attraverso l'apprendimento. Sono l'insieme dei fatti, principi, teorie e pratiche, relative a un settore di studio o lavoro.

- **Abilità**. Le abilità sono la capacità di applicare conoscenze per portare a termine compiti e risolvere problemi.

- **Competenze**. Le competenze sono la capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e/o personale.

L'apprendimento scolastico è spesso criticato per la sua eccessiva attenzione alle conoscenze e alle abilità generali, che non sono sempre sufficienti per affrontare le sfide della vita reale. La sfida per l'apprendimento scolastico è quella di promuovere lo sviluppo di competenze specifiche e legate alla situazione, che siano utili agli studenti nella loro vita quotidiana.
Si parla, in questo contesto, di transizione da "scuola delle conoscenze" a "scuola delle competenze". Questo passaggio rappresenta un cambiamento significativo nell'approccio all'istruzione.

- La scuola delle conoscenze si concentra sulla trasmissione e memorizzazione di informazioni.

- La scuola delle competenze mette l'accento sullo sviluppo di abilità pratiche e sulla capacità di applicare le conoscenze acquisite.

Questo cambiamento mira a preparare gli studenti per le sfide del mondo reale e per il mercato del lavoro, promuovendo l'apprendimento attivo, la risoluzione dei problemi e la collaborazione.
Molte istituzioni educative stanno rivedendo i loro programmi per integrare in modo più efficace lo sviluppo di competenze pratiche e trasversali al fine di preparare gli studenti per un futuro in continua evoluzione. Questa trasformazione riflette le crescenti esigenze della società e del mondo lavorativo che richiedono individui in grado di adattarsi a nuove situazioni, pensare in modo critico e risolvere problemi complessi. Per rispondere a queste esigenze, la scuola deve ripensare il proprio approccio all'apprendimento. In particolare, è necessario:

- Incoraggiare il lavoro di gruppo, che è fondamentale per lo sviluppo delle competenze sociali e collaborative, che sono sempre più richieste nel mondo del lavoro. Per incoraggiare il lavoro di gruppo, gli insegnanti possono organizzare attività di gruppo, progetti collaborativi e simulazioni.

- Insegnare l'utilizzo di strumenti e artefatti, che sono ormai parte integrante della nostra vita. La scuola deve preparare gli studenti ad utilizzarli in modo efficace. Per insegnare l'utilizzo di strumenti e artefatti, gli insegnanti possono utilizzare la tecnologia in classe e fornire agli studenti opportunità di sperimentare con diversi strumenti.

- Collegare i concetti astratti alla realtà. Gli studenti devono essere in grado di applicare le conoscenze acquisite in classe alla vita reale. Gli insegnanti possono utilizzare casi di studio, simulazioni e attività pratiche.

L'Organizzazione Mondiale della Sanità nel 1993 ha definito le Life skills education in schools, ossia le competenze personali e sociali che consentono alle persone di affrontare in modo efficace le sfide della vita quotidiana.

- Capacità di leggere dentro se stessi (autocoscienza)
- Capacità di riconoscere le proprie emozioni e quelle degli altri (gestione delle
- emozioni)
- Capacità di governare le tensioni (gestione dello stress)
- Capacità di analizzare e valutare le situazioni (senso critico)
- Capacità di prendere decisioni
- Capacità di risolvere problemi (creatività)
- Capacità di affrontare in modo flessibile ogni genere di situazioni
- Capacità di esprimersi efficacemente
- Capacità di comprendere gli altri (empatia)
- Capacità di integrare e relazionarsi con gli altri in modo positivo

Inoltre, nel maggio 2018, il Consiglio dell'Unione Europea ha aggiornato la raccomandazione sulle competenze chiave per l'apprendimento permanente. Queste competenze sono essenziali per l'empowerment personale, l'occupabilità, l'inclusione sociale e la cittadinanza attiva in un mondo in rapido cambiamento. Le competenze chiave sono riportate di seguito

i. **Competenza alfabetica funzionale.** Abilità di comprensione e espressione efficace attraverso la lettura e la scrittura

ii. **Competenza multilinguistica.** Capacità di utilizzare diverse lingue per comunicare e comprendere

iii. **Competenza matematica e competenze in scienza, tecnologia e ingegneria** Abilità di applicare il pensiero matematico e scientifico

iv. **Competenza digitale.** Utilizzo consapevole e critico delle tecnologie digitali per l'informazione, la comunicazione e la risoluzione di problemi

v. **Competenza personale, sociale e capacità di imparare ad imparare.** Abilità di gestire il proprio apprendimento e relazioni con gli altri in contesti sociali e lavorativi

vi. **Competenza in materia di cittadinanza.** Capacità di agire come cittadini responsabili e partecipare pienamente alla vita civica

vii. **Spirito di iniziativa e imprenditorialità.** Abilità di agire su idee e opportunità per produrre valore per gli altri

viii. **Consapevolezza ed espressione culturale.** Apprezzamento e espressione di idee e esperienze attraverso una varietà di media e contesti

È necessario che anche la valutazione sia ripensata nella dinamica di questa transizione. La valutazione delle competenze è un processo complesso e articolato, che richiede l'utilizzo di strumenti e metodi diversi. Rifacendosi alla prospettiva trifocale di Pellerey, per valutare le competenze in modo efficace, è necessario utilizzare una prospettiva che tenga conto delle seguenti dimensioni:

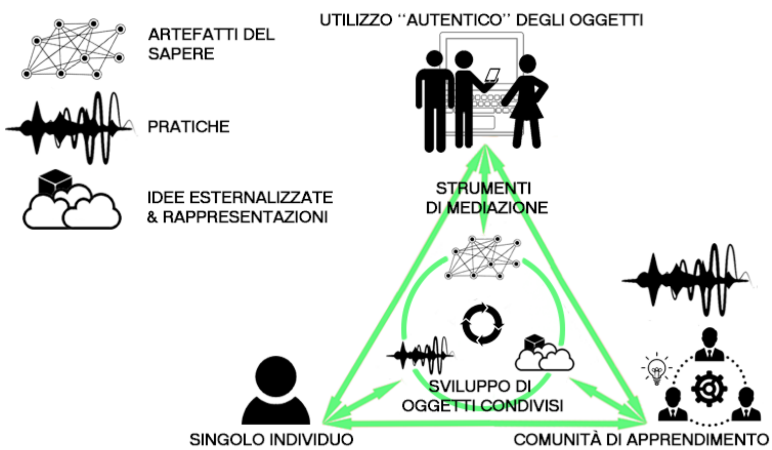
- La dimensione soggettiva, che riguarda il punto di vista del soggetto stesso sulla propria competenza. Può essere valutata attraverso strumenti di autovalutazione, come il diario di bordo o questionari di autovalutazione.

- La dimensione intersoggettiva, che riguarda il punto di vista di altri soggetti che interagiscono con il soggetto in questione. Può essere valutata attraverso strumenti di osservazione e valutazione, come questionari e interviste.

- La dimensione oggettiva, che riguarda le evidenze osservabili che attestano la prestazione dello studente e i suoi risultati in rapporto al compito affidato. Può essere valutata attraverso strumenti di analisi delle prestazioni, come prove di verifica o realizzazione di manufatti o prodotti.

1.2 Il modello dell'approccio trialogico dell'apprendimento

L'approccio trialogico all'apprendimento si colloca in modo significativo nel passaggio dalla scuola delle conoscenze alla scuola delle competenze. Questo approccio, definito anche come TLA (Trialogical Learning Approach), presentato nel Decreto del Ministro dell'Istruzione del 30 aprile 2021, n.147, propone un modello pedagogico didattico incentrato sull'apprendimento collaborativo finalizzato alla creazione di oggetti concreti utili alla comunità. L'obiettivo dell'approccio trialogico è quello di integrare l'approccio individuale (monologico) e l'approccio sociale (dialogico) dell'apprendimento attraverso l'uso di un terzo elemento: la produzione collaborativa di artefatti di conoscenza.



Questo modello sottolinea l'importanza dell'apprendimento collaborativo, fornendo indicazioni pratiche per favorire la collaborazione, come l'organizzazione dei

gruppi, l'assegnazione di ruoli e l'uso di tecniche specifiche. Inoltre, promuove la valutazione che tiene conto sia delle prestazioni individuali che di quelle di gruppo.
Questi principi trovano il loro fondamento nel pensiero di alcuni autori precedenti, tra cui:

- John Dewey, uno dei più importanti filosofi dell'educazione del XX secolo, sosteneva che l'apprendimento è un processo attivo e costruttivo. Secondo Dewey, gli studenti imparano meglio quando sono coinvolti in attività che richiedono di pensare e riflettere, e di fare collegamenti tra le diverse conoscenze. Dewey ha sottolineato l'importanza del "fare" nell'apprendimento. Secondo lui, il fare è un modo naturale per gli studenti di imparare, perché è un modo per loro di sperimentare il mondo e di sviluppare la propria comprensione.

- Jerome Bruner, un altro importante filosofo dell'educazione del XX secolo, ha sostenuto che la conoscenza è costruita dall'individuo attraverso l'esperienza. Secondo Bruner, la conoscenza è qualcosa che deve essere resa concreta, "esternalizzata", in prodotti concreti, come progetti, disegni, testi o altro. Bruner ha sottolineato l'importanza dei prodotti concreti nell'apprendimento. Secondo lui, i prodotti concreti aiutano gli studenti a sviluppare un senso di comunità, motivazione e orientamento verso il risultato.

- Jean Lave e Etienne Wenger hanno sviluppato la teoria della Comunità di Pratiche per descrivere il modo in cui le persone imparano attraverso la partecipazione a una comunità. Secondo Lave e Wenger, l'apprendimento è un processo sociale che avviene attraverso la partecipazione a una comunità di pratiche. Lave e Wenger hanno sottolineato l'importanza della partecipazione nell'apprendimento. Secondo loro, la partecipazione è un modo per gli studenti di sviluppare la propria identità e di costruire la propria competenza.

- Marlene Scardamalia e Carl Bereiter hanno sviluppato la teoria della Comunità di Conoscenza per descrivere il modo in cui le persone imparano

> attraverso la co-costruzione della conoscenza. Secondo Scardamalia e Bereiter, l'apprendimento è un processo collaborativo che avviene attraverso la co-costruzione della conoscenza. Scardamalia e Bereiter hanno sottolineato l'importanza della co-costruzione della conoscenza nell'apprendimento. Secondo loro, la co-costruzione della conoscenza è un modo per gli studenti di sviluppare la propria competenza e di contribuire alla costruzione della conoscenza.

L'approccio trialogico all'apprendimento si inserisce, inoltre, nel contesto dell'era digitale, che ha trasformato in maniera significativa la società contemporanea, influenzando l'ambiente scolastico e l'approccio all'educazione. La trasformazione digitale ha imposto un cambiamento radicale nei metodi educativi e nelle pratiche didattiche, per renderli compatibili con le nuove tecnologie e con i cambiamenti culturali in corso.

La necessità di reinterpretare i nuovi scenari educativi e di rivedere i modelli pedagogici è emersa come una priorità per migliorare le performance della scuola come comunità educante. Questo implica un passaggio da un approccio tradizionale e unidirezionale a uno più collaborativo e situato, sfruttando le potenzialità offerte dalle tecnologie digitali per arricchire l'esperienza di apprendimento. Preparare gli studenti per il futuro implica non solo fornire loro conoscenze e competenze, ma anche incoraggiare lo sviluppo di capacità di analisi critica, risoluzione dei problemi e adattabilità alle nuove sfide. La scuola deve essere in grado di anticipare le esigenze del mondo in costante evoluzione, preparando gli studenti per lavori che potrebbero non esistere ancora, ma che richiederanno competenze e abilità nuove e innovative. L'uso delle tecnologie digitali è fondamentale per favorire la collaborazione, la comunicazione e la trasformazione delle idee in qualcosa di concreto, elementi centrali nell'approccio trialogico

I design principles forniscono le linee guida per la progettazione pedagogica. Questi principi sono sei e offrono un'ancoraggio teorico solido e linee guida precise, ma sufficientemente generali da poter essere personalizzate e adattate in base all'esperienza, agli interessi e ai bisogni dei singoli docenti. I design principles sono:

i. la produzione di artefatti secondo il metodo trialogico;

ii. la relazione tra individuo e comunità;

iii. avanzamento della conoscenza e miglioramento continuo;

iv. favorire la riflessione e la trasformazione tra diverse forme di conoscenza e tra diverse pratiche;

v. lavorare su oggetti reali e condivisi, ibridando le pratiche;

vi. le tecnologie nel Trialogico.

1.3 I design principles del TLA

1.3.1 La produzione di artefatti secondo il metodo trialogico

Il primo principio della didattica per oggetti è quello di costruire un oggetto condiviso, attorno al quale viene strutturata l'intera attività didattica. Questo oggetto deve avere una reale e concreta utilità, essere funzionale alla comunità, e permettere esternalizzare gli sforzi di creazione di conoscenza. La dichiarazione che tutte le attività didattiche devono convergere verso la realizzazione di oggetti condivisi non è in sé innovativa, in quanto la didattica per oggetti si è da tempo affacciata nel contesto educativo. Molti docenti orientano il loro intervento alla costruzione di oggetti di diverso tipo, richiedendo agli studenti di preparare, per esempio, cartelloni su un dato argomento, prodotti multimediali, oggetti concreti di diversa natura e complessità. Tuttavia, la proposta trialogica di una didattica per oggetti è innovativa nel suo definire in modo molto specifico le caratteristiche dell'oggetto da costruire ponendo l'accento sulla sua utilità per la comunità.
L'oggetto deve avere uno scopo significativo, come risolvere un problema o soddisfare un bisogno, e deve essere in grado di integrare i contenuti didattici. Inoltre, deve essere interessante e motivante, costituendo una sfida adeguata per gli studenti. Infine, è importante che l'oggetto sia definito dagli studenti stessi in

collaborazione con i docenti, inclusa la fase di costruzione. Questo principio mira a promuovere un apprendimento attivo e coinvolgente, consentendo agli studenti di sviluppare conoscenze e competenze attraverso la creazione di un oggetto concreto e significativo.

Gli artefatti costruiti dagli studenti possono essere variegati e includere progetti, presentazioni, modelli, simulazioni, opere multimediali, documenti di ricerca, o qualsiasi altro manufatto che rappresenti la concretizzazione delle conoscenze acquisite e che sia utile per la comunità di riferimento.

Alcuni esempi di artefatti che potrebbero essere costruiti dagli studenti mediate l'attuazione dell'approccio trialogico all'apprendimento

- in una classe di storia, gli studenti potrebbero creare una presentazione multimediale sulla storia della loro città;
- in una classe di lingua straniera, gli studenti potrebbero creare un videogioco che insegni agli altri a parlare la lingua straniera;
- in una classe di educazione civica, gli studenti potrebbero sviluppare nuove regole per la loro scuola;
- in una classe di educazione alimentare, gli studenti potrebbero creare un'organizzazione per promuovere la sana alimentazione.

1.3.2 La relazione tra individuo e comunità

L'apprendimento collaborativo è il cuore dell'approccio trialogico. Il docente guida gli studenti nella creazione di un oggetto significativo, stimolandoli a sperimentare competenze socio-relazionali connesse.

Lavorando in gruppo, gli studenti possono sperimentare:

- **Autonomia, senso di responsabilità, resilienza**: gli studenti devono imparare a lavorare in modo autonomo, assumendosi le proprie responsabilità e affrontando le sfide.

- **Pensiero critico e metacognizione**: gli studenti devono imparare a pensare criticamente, valutando le informazioni e le proprie idee. Devono anche imparare a riflettere sul proprio processo di apprendimento.

- **Gestione del tempo**: gli studenti devono imparare a gestire il proprio tempo in modo efficiente, suddividendo le attività e rispettando le scadenze.

- **Problem solving**: gli studenti devono imparare a risolvere i problemi in modo collaborativo, condividendo le proprie idee e lavorando insieme per trovare soluzioni.

- **Competenze sociali**: gli studenti devono imparare a comunicare in modo efficace, a collaborare con gli altri e a risolvere i conflitti in modo costruttivo.

Le competenze sociali non sono innate e non si possono sviluppare semplicemente invitando gli studenti a dividersi in gruppo. Imparare a collaborare richiede allenamento, esperienze ripetute e forte strutturazione didattica. Perché l'apprendimento collaborativo sia efficace, è importante che gli studenti siano in grado di lavorare insieme in modo armonico e responsabile. Per questo, gli insegnanti devono creare le condizioni favorevoli per lo sviluppo di queste competenze.

Esistono diverse tecniche e strategie che possono essere utilizzate per facilitare l'apprendimento collaborativo. Alcune delle più comuni sono:

- **Brainstorming**: questa tecnica è utile per generare idee creative e innovative. I membri del gruppo si riuniscono per discutere un argomento e proporre idee. Non è importante che le idee siano valide o meno, l'importante è che vengano espresse. In seguito, il gruppo può valutare le idee e scegliere quelle da sviluppare.

- **Discussione**: questa tecnica è utile per esplorare e approfondire argomenti complessi. I membri del gruppo si riuniscono per discutere un argomento, condividendo le proprie conoscenze e opinioni. La discussione può essere guidata da un docente o dagli studenti stessi.

- **Jigsaw**: questa tecnica è utile per dividere un argomento in sotto-topic e per consentire a ciascun studente di diventare esperto di un sotto-topic specifico. I membri del gruppo vengono divisi in gruppi più piccoli, ognuno dei quali si concentra su un sotto-topic. In seguito, i membri dei diversi gruppi si riuniscono per condividere le proprie conoscenze e completare un compito comune.

1.3.3 Avanzamento della conoscenza e miglioramento continuo

Gli studenti devono essere educati al concetto di miglioramento continuo, sempre possibile. La critica costruttiva è uno strumento prezioso per l'apprendimento. Può aiutare gli studenti a identificare le aree in cui possono migliorare e a sviluppare nuove prospettive.

L'approccio trialogico pone l'accento su questi aspetti, che ritiene fondamentali per l'apprendimento.

- **Attività di medio-lungo periodo.** Le attività di medio-lungo periodo consentono agli studenti di approfondire un argomento nel tempo e di apportare miglioramenti progressivi. In un'ottica trialogica, queste attività possono essere progettate in modo da favorire la collaborazione e la riflessione. Ad esempio, gli studenti possono essere invitati a lavorare insieme a progetti complessi, che richiedono la condivisione di idee e competenze. In questo modo, gli studenti possono imparare a collaborare efficacemente e a riflettere sul proprio lavoro e su quello degli altri.

- **Prodotti intermedi e bozze da rivedere.** I prodotti intermedi e le bozze da rivedere forniscono agli studenti l'opportunità di ricevere feedback e apportare modifiche, in modo da migliorare il proprio lavoro. In un'ottica trialogica, questi prodotti possono essere condivisi con altri studenti, che possono fornire feedback costruttivi. Ad esempio, gli studenti possono essere invitati a creare un diario di bordo, in cui riflettono sul proprio apprendimento e sul proprio contributo al lavoro di gruppo. Questo diario può essere condiviso con gli altri studenti, che possono fornire feedback sul lavoro del singolo studente e sul gruppo.

- **Autovalutazione e monitoraggio reciproco.** L'autovalutazione e il monitoraggio reciproco consentono agli studenti di riflettere sul proprio lavoro e di identificare le aree di miglioramento. In un'ottica trialogica, questi processi possono essere integrati, in modo da favorire la collaborazione e l'apprendimento reciproco. Ad esempio, gli studenti possono essere invitati a valutare il proprio lavoro e quello degli altri, utilizzando strumenti di valutazione. Questo processo può essere facilitato dal docente, che può fornire indicazioni e supporto.

1.3.4 Favorire la riflessione e la trasformazione tra diverse forme di conoscenza e tra diverse pratiche

L'approccio trialogico all'apprendimento si basa sul concetto che l'apprendimento è un processo attivo e costruttivo, in cui gli studenti costruiscono la propria conoscenza interagendo con il mondo che li circonda. Questo processo coinvolge diversi aspetti, tra cui la trasformazione e la riflessione.

La trasformazione si riferisce al passaggio da una forma di conoscenza a un'altra, oppure dalla conoscenza teorica-concettuale alla conoscenza pratica. La trasformazione può avvenire in diversi modi, ad esempio applicando la conoscenza teorica a situazioni concrete, trasformando la conoscenza implicita in conoscenza esplicita, o combinando diverse forme di conoscenza.

La riflessione, invece, è il processo di pensare a ciò che si è appreso, per comprenderlo e integrarlo nella propria esperienza. La riflessione può essere stimolata attraverso diverse attività, come il brainstorming, la discussione, la scrittura creativa e l'analisi critica.

Entrambi questi aspetti sono importanti per lo sviluppo e la creatività degli studenti. La trasformazione consente agli studenti di acquisire nuove conoscenze e competenze, di migliorare la comprensione del mondo e di sviluppare la capacità di applicare le conoscenze a situazioni nuove. La riflessione, invece, consente agli studenti di comprendere meglio ciò che hanno appreso, di identificare le proprie idee e di generare nuove idee.

L'approccio trialogico promuove la trasformazione e la riflessione attraverso:

- **Pluralità delle forme di conoscenza**: l'approccio trialogico sostiene che l'apprendimento non si limita all'acquisizione di conoscenze dichiarative, ma coinvolge anche la conoscenza procedurale, la conoscenza tacita e la conoscenza implicita. Questo significa che gli studenti hanno l'opportunità di acquisire conoscenze in diversi modi, attraverso diverse attività e formati.

- **Diversità dei formati**: l'approccio trialogico utilizza una varietà di formati, come testi, immagini, video, esperienze pratiche, ecc. Questo consente agli studenti di imparare in modo attivo e coinvolgente, e di sviluppare diverse competenze.

- **Interazione tra gli studenti e con il mondo che li circonda**: l'approccio trialogico promuove l'interazione tra gli studenti e con il mondo che li circonda. Questo consente agli studenti di condividere le proprie conoscenze e idee, e di costruire nuove prospettive.

Una delle modalità per favorire la riflessione nell'approccio trialogico è la materializzazione delle conoscenze. Questo significa che gli studenti devono essere incoraggiati a produrre oggetti concreti che rappresentano le conoscenze che stanno acquisendo. Questi oggetti possono essere di qualsiasi tipo, come testi, immagini, video, oggetti fisici, ecc.

1.3.5 Lavorare su oggetti reali e condivisi, ibridando le pratiche

L'approccio trialogico all'apprendimento promuove l'ibridazione di pratiche e artefatti in situazioni collaborative. Questa ibridazione è possibile grazie alla condivisione di conoscenze, competenze e pratiche provenienti da diversi settori e contesti lavorativi.

- L'ibridazione delle pratiche è favorita da diversi fattori, tra cui:

- **Progetti interdisciplinari o extra-scolastici**: questi progetti consentono agli studenti di collaborare con persone provenienti da diversi contesti e di acquisire nuove conoscenze e competenze. Ad esempio, un gruppo di studenti di ingegneria, architettura e design potrebbe collaborare alla progettazione di un nuovo parco urbano.

- **Committenti esterni cui è destinato l'oggetto**: avere un committente esterno fornisce agli studenti un'occasione concreta per applicare le conoscenze e competenze acquisite. Ad esempio, un gruppo di studenti di marketing potrebbe collaborare con un'azienda locale per creare una campagna pubblicitaria.

- **Interventi di esperti durante il processo**: gli esperti possono fornire agli studenti conoscenze e competenze specifiche, contribuendo all'ibridazione delle pratiche. Ad esempio, un gruppo di studenti di informatica potrebbe collaborare con un programmatore professionista per sviluppare un'applicazione.

1.3.6 Le tecnologie nel Trialogico

L'integrazione delle tecnologie digitali nella scuola è una scelta obbligata, in quanto esse rappresentano una parte fondamentale e imprescindibile della nostra cultura. Le tecnologie digitali hanno trasformato il modo in cui ci informiamo e comunichiamo con gli altri. Per questo motivo, la scuola ha il compito di educare i giovani a un uso consapevole e positivo degli strumenti che la nostra cultura mette a disposizione.

Le tecnologie digitali possono anche svolgere un ruolo importante come mediatori della conoscenza, facilitando i processi di apprendimento e gli altri principi di questo modello teorico. In particolare, le tecnologie digitali possono aiutare i processi di costruzione di conoscenza in vari modi, ad esempio:

- Presentando attività e materiali di apprendimento stimolanti e interattivi, che suscitano l'interesse e la curiosità degli studenti.

- Fornendo strumenti di aiuto alla ricerca e all'interpretazione delle informazioni, che sviluppano le capacità cognitive degli studenti.

- Creando opportunità di collaborazione e condivisione, che incoraggiano l'apprendimento attivo e la costruzione di conoscenze collettive.
- Dando accesso a risorse e competenze di esperti, che orientano gli studenti nel percorso di apprendimento.

In aggiunta, le tecnologie digitali possono offrire strumenti di mediazione personalizzabili, che si adattano alle diverse necessità degli studenti e del contesto educativo. Questo principio sottolinea l'importanza di prevedere tecnologie adeguate e diversificate, selezionando quelle più idonee per raggiungere gli obiettivi prefissati e che siano coerenti con la cultura del contesto. Questa scelta favorirà lo sviluppo delle competenze digitali degli studenti, sostenendo una visione delle tecnologie finalizzata a scopi educativi.
Ad esempio, una piattaforma di e-learning che offre corsi personalizzati in base alle esigenze degli studenti può essere un'opzione adatta per un contesto scolastico in cui si desidera personalizzare l'apprendimento. Un social network per studenti che consente loro di condividere idee e informazioni e di collaborare a progetti comuni può essere un'opzione adatta per un contesto scolastico in cui si desidera favorire la collaborazione e la condivisione. Un'applicazione di realtà virtuale che consente agli studenti di visitare siti storici o di sperimentare fenomeni scientifici può essere un'opzione adatta per un contesto scolastico in cui si desidera rendere l'apprendimento più coinvolgente.

Capitolo 2

Il calcolo della probabilità

2.1 Il concetto di probabilità

> "La teoria delle probabilità non è altro che il tentativo del genere umano di comprendere l'incertezza dell'universo, di definire l'indefinibile."[A.D. ACZEL]

L'uomo è abituato a vivere in un mondo di incertezza, e per questo è portato a fare previsioni sulla base delle proprie conoscenze. Le diverse situazioni richiederanno previsioni diverse, a seconda delle informazioni disponibili. Ad esempio, in una situazione in cui si deve decidere se uscire o meno con la pioggia, la previsione sarà basata sulle previsioni meteo. In una situazione in cui si deve decidere se investire in una determinata azienda, la previsione sarà basata sulle informazioni finanziarie dell'azienda.
La probabilità è un concetto che può sembrare intuitivo, ma in realtà è complesso e non esiste una definizione che sia valida in tutte le situazioni. Interrogarsi circa cosa sia la probabilità è infatti una questione filosofica, più che matematica. Ciò che invece è di dominio della matematica sono le regole del calcolo delle probabilità che sono oggettive e quindi indipendenti dal vissuto del singolo individuo.

La teoria della probabilità è una disciplina fondamentale che si occupa di quantificare l'incertezza e l'aleatorietà degli eventi. Questa teoria ha radici anti-

che, risalenti al Rinascimento, quando i matematici iniziarono a studiare i giochi d'azzardo e a cercare di comprendere le probabilità associate a essi. Tuttavia, è nel XVII secolo che la teoria della probabilità inizia a prendere forma, con importanti contributi da parte di matematici come Blaise Pascal e Pierre de Fermat, che hanno risolto il problema della ripartizione della posta.
Successivamente, Christiaan Huygens pubblicò il De ratiociniis in ludo aleae, un trattato che gettò le basi della teoria delle probabilità.
La teoria della probabilità ha subito un'ulteriore evoluzione nel corso del tempo, con importanti contributi da parte di matematici come Pierre-Simon Laplace e Andrej Kolmogorov. Laplace ha sviluppato una visione deterministica della probabilità, considerandola come una misura dell'ignoranza umana, mentre Kolmogorov ha fornito un'assiomatizzazione rigorosa della teoria, stabilendo le basi per l'approccio moderno alla probabilità.

La teoria della probabilità si presta a diverse interpretazioni, tra cui l'interpretazione frequentista, che considera la probabilità come la frequenza limite di un evento in un numero infinito di prove, e l'interpretazione soggettivista, che considera la probabilità come una misura del grado di credenza di un individuo. Inoltre, l'interpretazione bayesiana della probabilità si basa sull'uso di conoscenze a priori per aggiornare le probabilità in base alle nuove evidenze.
La formalizzazione della teoria della probabilità da parte di Kolmogorov ha contribuito a rendere la probabilità una disciplina matematica rigorosa, consentendo l'applicazione della teoria a una vasta gamma di campi, tra cui la statistica, l'economia, la fisica e molte altre discipline scientifiche.
Nonostante i notevoli progressi compiuti nella formalizzazione della teoria della probabilità, rimangono ancora controversie e dibattiti riguardo a questioni fondamentali, come la natura dell'incertezza e la validità delle diverse interpretazioni della probabilità. Tuttavia, la teoria della probabilità continua a essere uno strumento essenziale per la comprensione del mondo e per la presa di decisioni informate in molte aree della conoscenza umana.

2.2 L'approccio assiomatico

Kolmogorov nella sua opera *Foundation of the Theory of Probability* del 1933 scriveva:

> "La teoria delle probabilità, essendo una disciplina matematica, può e deve essere sviluppata a partire da assiomi, esattamente come la geometria e l'algebra. Ciò significa che, dopo aver definito gli elementi che debbono essere studiati e le loro relazioni fondamentali, e aver enunciato gli assiomi che regolano il comportamento di queste relazioni, l'ulteriore sviluppo deve essere basato in modo esclusivo su questi assiomi, indipendentemente dall'usuale significato concreto di questi elementi e di queste relazioni."

L'approccio assiomatico si basa su:

- l'individuazione degli enti primitivi della teoria della probabilità, ossia *evento*, *esperimento aleatorio* e *probabilità*;
- l'enunciazione degli assiomi di probabilità;
- la formulazione dei teoremi dimostrati a partire dagli assiomi.

Con *esperimento aleatorio* si indica ogni atto o processo, che ha luogo spontaneamente o che è intenzionalmente realizzato, del quale non si conosce con certezza il risultato, ma che sia ripetibile.
Un *esito* è un ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio.

Definizione 2.2.1. Si consideri un esperimento casuale. Si definisce *spazio campionario*, e lo si indica generalmente con Ω, un insieme che contiene tutti i possibili risultati dell'esperimento aleatorio.
Un generico elemento di Ω è chiamato esito e si indica con ω.

Lo spazio campionario contiene quindi la totalità degli esiti possibili dell'esperimento casuale e non è unico. Inoltre lo spazio campionario può essere discreto (finito o numerabile) o continuo. Nel caso in cui sia finito di cardinalità $n \in \mathbb{N}$, Ω sarà indicato nel seguente modo

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}.$$

Esempio 2.2.2. Si consideri l'esperimento casuale che consiste nel lancio di un dado a sei facce. Si consideri l'affermazione "esce un numero maggiore uguale di 4". Uno spazio campionario naturale sarà

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e l'affermazione sarà vera se si verificano gli esiti 4, 5, 6, cioè sarà vera se si verifica uno degli esiti del sottoinsieme A di Ω dato da

$$A = \{4, 5, 6\}.$$

Definizione 2.2.3. Si definisce *evento* ogni sottoinsieme dello spazio campionario Ω.

Osservazione 2.2.4. Un evento può essere indistintamente inteso come un sottoinsime o un'affermazione relativa all'esperimento.

Nell'esempio precedente l'affermazione "esce un numero maggiore uguale di 4"e il sottoinsieme A di Ω rappresentano il medesimo evento.
Si noti che un evento non coincide in generale con un esito $\omega \in \Omega$. Può avvenire però che un evento sia verificato per un sottoinsieme di Ω che contiene un solo elemento. In quel caso si parla di *evento elementare*. Altri due casi limite si verificano se l'evento coincide con tutto Ω (*evento certo*), o se l'evento coincide con l'insieme vuoto (*evento impossibile*).

Definiti gli eventi come insiemi, le operazioni tra gli eventi si riconducono alle operazioni tra insiemi, ossia unione, intersezione, complementazione, inclusione, uguaglianza, ognuna delle quali restituisce un evento dello spazio campionario. D'altra parte, se guardiamo agli eventi come affermazioni, possiamo utilizzare i connettivi logici.
Dati due eventi A e B, allora si ha ciò che segue:

- l'intersezione $A \cap B$ coincide con il connettivo logico di congiunzione A *e* B, che equivale all'evento "Tutti e due gli eventi A e B si verificano contemporaneamente ";
- l'unione $A \cup B$ coincide con il connettivo logico di disgiunzione A *o* B, che equivale all'evento "Almeno uno degli eventi A e B si verifica ";
- la complementazione A^c coincide con il connettivo logico di negazione *non* A che equivale all'evento "A non si verifica";
- l'inclusione $A \subset B$ coincide con il connettivo logico di implicazione $A \Rightarrow B$ che equivale all'evento "Ogni volta che A è verificato, anche B lo sarà";
- l'uguaglianza $A = B$ coincide con il connettivo logico di doppia implicazione $A \iff B$ che equivale all'evento "L'evento A è verificato se e solo se lo è B".

Sono riportati di seguito gli assiomi di probabilità nel caso in cui Ω sia finito.

Definizione 2.2.5 (Assiomi di probabilità)**.** Si consideri un esperimento casuale. Sia Ω uno spazio campionario finito e siano ω_i con $i = 1, 2, .., n$ gli esiti dell'esperimento casuale.

(i) Ad ogni ω_i è assegnato un numero $\mathbb{P}(\omega_i)$ che verifica
$$0 \leq \mathbb{P}(\omega_i) \leq 1.$$
Tale numero $\mathbb{P}(\omega_i)$ si chiama probabilità dell'esito ω_i.

(ii) Vale l'identità
$$\mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2) + ... + \mathbb{P}(\omega_n) = 1.$$

(iii) La probabilità di un qualunque evento A, indicata con $\mathbb{P}(A)$, è la somma delle probabilità degli esiti che la compongono. Se $A = \emptyset$, allora si pone
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Definizione 2.2.6. La coppia $(\Omega, \mathbb{P})$ si chiama spazio di probabilità.

Il seguente teorema è conseguenza diretta degli assiomi di probabilità.

Teorema 2.2.7. *Sia* $(\Omega, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità. Si hanno le seguenti proprietà.*

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(ii) Se $A_1, A_2, ..., A_n$ *sono tra loro disgiunti, allora*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

(iii) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(iv) Se $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(v) Per ciascun evento A*, si ha* $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

2.2.1 L'equiprobabilità

I problemi di conteggio nel calcolo delle probabilità si riferiscono alla determinazione del numero di esiti favorevoli e totali in un dato contesto, al fine di calcolare la probabilità di un evento. Questi problemi coinvolgono spesso l'uso di tecniche combinatorie, come le disposizioni, le permutazioni e le combinazioni, per contare in modo accurato gli esiti desiderati.
Ad esempio, nel caso del lancio di due dadi, i problemi di conteggio possono riguardare il calcolo del numero di modi in cui si ottiene una determinata somma o una particolare combinazione di risultati.
I problemi di conteggio sono strettamente legati alla formula di Laplace, che è un metodo per calcolare la probabilità in uno spazio campionario equiprobabile. Tuttavia, è importante notare che la formula di Laplace presuppone l'equiprobabilità di tutti gli esiti, il che non sempre si verifica in situazioni reali. Pertanto, l'uso corretto delle tecniche di conteggio e la valutazione di equiprobabilità sono cruciali per un calcolo accurato delle probabilità in contesti reali e complessi.

Teorema 2.2.8. *Sia dato* Ω *finito di dimensione* n*, e sia* $\mathbb{P}$ *una probabilità di tipo uniforme, cioè che soddisfa* $\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\omega_j)$ *per ogni* $i, j = 1, ..., n$.

Dato un evento A, vale la Formula di Laplace:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{numero\ di\ casi\ favorevoli}{numero\ di\ casi\ possibili}. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Sia $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Sia $A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}$.
Dall'ipotesi $\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\omega_j)$ per ogni $i, j = 1, ..., n$ e dall'assioma ivi *Definizione 2.2.5-(i)* segue il sistema di n equazioni in n incognite

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) \\ \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) \\ \dots \\ \mathbb{P}(\omega_{n-1}) = \mathbb{P}(\omega_n) \\ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\omega_i) = 1. \end{cases}$$

Si ottiene dalla risoluzione del sistema che

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Dal risultato appena ottenuto segue che

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{numero\ di\ casi\ favorevoli}{numero\ di\ casi\ possibili}.$$

□

Esempio 2.2.9. Si consideri un'urna contenente 5 palline numerate, di cui 3 palline bianche e 2 palline rosse e l'esperimento aleatorio "Pesco una pallina dall'urna". Si indichi con R_i, $i = 1, 2, 3$, l'esito corrispondente a pescare una pallina rossa e con B_j, $j = 1, 2$, l'esito corrispondente a pescare una pallina bianca. Si consideri l'evento A="Viene pescata una pallina rossa". Lo spazio campionario sarà $\Omega = \{R_1, R_2, R_3, B_1, B_2\}$. Vale

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_3) = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2).$$

Inoltre, dall'assioma ivi *Definizione 2.2.5-(ii)*, la somma delle probabilità degli esiti dell'esperimento casuale deve essere uguale a 1, quindi deve valere

$$\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2) + \mathbb{P}(R_3) + \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = 1.$$

Imporre che le due condizioni siano entrambe verificate equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2) \\ \mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_3) \\ \mathbb{P}(R_3) = \mathbb{P}(B_!) \\ \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) \\ \mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2) + \mathbb{P}(R_3) + \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = 1. \end{cases}$$

Si ottiene

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_3) = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{5},$$

quindi in particolare la probabilità dell'evento A sarà

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2) + \mathbb{P}(R_3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Si ritrova così la formula di Laplace, applicata al caso in cui il numero di casi possibile è 5 e il numero di casi favorevoli è 3.

L'equiprobabilità è una nozione utile, ma non sempre è applicabile a casi reali. Infatti, è spesso impossibile garantire che tutti i possibili esiti di un esperimento aleatorio abbiano la stessa probabilità di verificarsi.
Ad esempio, un dado perfettamente bilanciato dovrebbe avere la stessa probabilità di atterrare su qualsiasi faccia. Tuttavia, un dado reale potrebbe essere leggermente sbilanciato, il che renderebbe l'uscita di alcune facce più probabili di altre.
Inoltre in contesti più complessi, come nel calcolo delle probabilità condizionate o nel campo della statistica, l'equiprobabilità potrebbe non essere applicabile.

2.2.2 La probabilità condizionata

La probabilità condizionata è un concetto fondamentale nella teoria della probabilità. Intuitivamente è la probabilità che un evento A si verifichi dato che un altro evento B si è già verificato.

Definizione 2.2.10. La probabilità condizionata di un evento A dato un evento B, tale che $\mathbb{P}(B) > 0$, si denota con $\mathbb{P}(A|B)$, e si definisce come:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{2.2}$$

Esempio 2.2.11. Si consideri un dado a sei facce bilanciato. Si vuole calcolare la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a 3 sapendo che è uscito un numero pari.
Lo spazio di probabilità Ω naturale per il lancio di un dado a sei facce è $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
L'evento A è l'evento che esca un numero maggiore o uguale a tre, quindi $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
L'evento B è l'evento che esca un numero pari, quindi $B = \{2, 4, 6\}$.
Si vuole trovare la probabilità $\mathbb{P}(A|B)$, che è la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a tre sapendo che è uscito un numero pari. Può essere calcolata usando la formula:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Quindi, si deve trovare $\mathbb{P}(A \cap B)$, che è la probabilità che esca un numero che sia sia pari che maggiore o uguale a tre. I numeri che soddisfano entrambe queste condizioni sono 4 e 6. Quindi, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Inoltre, $\mathbb{P}(B)$ è la probabilità che esca un numero pari, che è $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Sostituendo questi valori nella formula della probabilità condizionata si ottiene:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Quindi, la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a tre sapendo che è uscito un numero pari è $\frac{2}{3}$.

Esempio 2.2.12. Si consideri un dado truccato a quattro facce tale che la probabilità che esca uno è il doppio della probabilità che esca due, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca tre, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca quattro. Si vuole calcolare la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a 3 sapendo che è uscito un numero pari.
Lo spazio di probabilità Ω naturale per il lancio di un dado a quattro facce è $\{1, 2, 3, 4\}$.
Sia p la probabilità che esca quattro. Allora la probabilità che esca tre è $2p$, la probabilità che esca due è $4p$ e la probabilità che esca uno è $8p$.
Dato che la somma delle probabilità di tutti gli esiti possibili deve essere 1, si ha che $8p + 4p + 2p + p = 1$. Risolvendo questa equazione si trova che $p = \frac{1}{15}$.
Quindi, le probabilità degli esiti sono le seguenti:

- $\mathbb{P}(1) = 8p = \frac{8}{15}$,
- $\mathbb{P}(2) = 4p = \frac{4}{15}$,
- $\mathbb{P}(3) = 2p = \frac{2}{15}$,
- $\mathbb{P}(4) = p = \frac{1}{15}$.

L'evento A è l'evento che esca un numero maggiore o uguale a tre, quindi $A = \{3, 4\}$.
L'evento B è l'evento che esca un numero pari, quindi $B = \{2, 4\}$.
Si vuole trovare la probabilità $\mathbb{P}(A|B)$, che è la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a tre sapendo che è uscito un numero pari. Può essere calcolata usando la formula:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Quindi, si deve trovare $\mathbb{P}(A \cap B)$, che è la probabilità che esca un numero che sia sia pari che maggiore o uguale a tre. L'unico numero che soddisfa entrambe queste condizioni è 4. Quindi, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(4) = \frac{1}{15}$.
Inoltre, $\mathbb{P}(B)$ è la probabilità che esca un numero pari, che è $\mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) =$

$\frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$.
Sostituendo questi valori nella formula della probabilità condizionata si ottiene:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}.$$

Quindi, la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a tre sapendo che è uscito un numero pari è $\frac{1}{5}$.

Osservazione 2.2.13. Si può esprimere a parole la formula che definisce $\mathbb{P}(A|B)$ dicendo che la probabilità condizionata di A dato B è pari al rapporto tra la probabilità dei "veri" casi favorevoli e la probabilità dei "veri" casi possibili:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\text{probabilità dei "veri" casi favorevoli}}{\text{probabilità dei "veri" casi possibili}}.$$

Nel caso in cui Ω sia finito e gli esiti siano equiprobabili, dunque $\mathbb{P}$ è uniforme, allora $\mathbb{P}(A|B)$ è pari al rapporto tra i "veri" casi favorevoli e i "veri" casi possibili:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{n^\circ \text{ dei "veri" casi favorevoli}}{n^\circ \text{ dei "veri" casi possibili}}.$$

Si applica di seguito questa osservazione agli esempi 2.2.11 e 2.2.12.

Esempio 2.2.11

L'evento A è l'evento che esca un numero maggiore o uguale a tre, quindi $A = \{3, 4, 5, 6\}$. L'evento B è l'evento che esca un numero pari, quindi $B = \{2, 4, 6\}$.
Dato che si è verificato B, cioè è uscito un numero pari, i "veri" casi possibili sono 2, 4, 6; dunque i "veri" casi favorevoli sono 4 e 6. Utilizzando la formula "veri" casi favorevoli/ "veri" casi possibili, si ottiene

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{2}{3}.$$

Esempio 2.2.12

lL'evento A è l'evento che esca un numero maggiore o uguale a tre, quindi $A = \{3, 4\}$. L'evento B è l'evento che esca un numero pari, quindi $B = \{2, 4\}$.
Dato che si è verificato B, i "veri" casi possibili sono 2 e 4; dunque c'è un solo "vero" caso favorevole che è 4. Utilizzando la formula rapporta tra la probabilità dei "veri" casi favorevoli e la probabilità dei "veri" casi possibili, si ottiene

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(4)}{\mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4)} = \frac{1}{5}.$$

La probabilità condizionata è anch'essa una probabilità, definita per tutti i sottoinsiemi dello spazio campionario Ω. Essa possiede tutte le proprietà di una probabilità, come affermato nel seguente teorema, la cui dimostrazione segue direttamente dalla definizione di probabilità condizionata.

Teorema 2.2.14. *Sia B un evento tale che $\mathbb{P}(B) > 0$. Valgono le seguenti proprietà.*

i. *Per ciascun esito ω_i, la probabilità condizionata verifica $0 \leq \mathbb{P}(\omega_i|B) \leq 1$. Più in generale, per ciascun evento A, vale che $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$.*

ii. $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$ *e* $\mathbb{P}(\emptyset|B) = 0$.

iii. *Additività: se A_1 e A_2 sono disgiunti allora $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$. Più in generale, se $A_1, \ldots, A_n$ sono tra loro disgiunti allora $\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n|B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i|B)$.*

iv. $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

v. *Monotonia: se $A_1 \subset A_2$, allora $\mathbb{P}(A_1|B) \leq \mathbb{P}(A_2|B)$.*

Teorema 2.2.15. *Siano dati due eventi A e B con $\mathbb{P}(B) > 0$. Allora, vale la regola della catena (o formula della probabilità composta):*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B).$$

In generale, dati n eventi $A_1, A_2, ..., A_n$ con $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) > 0$, è valida la regola della catena:

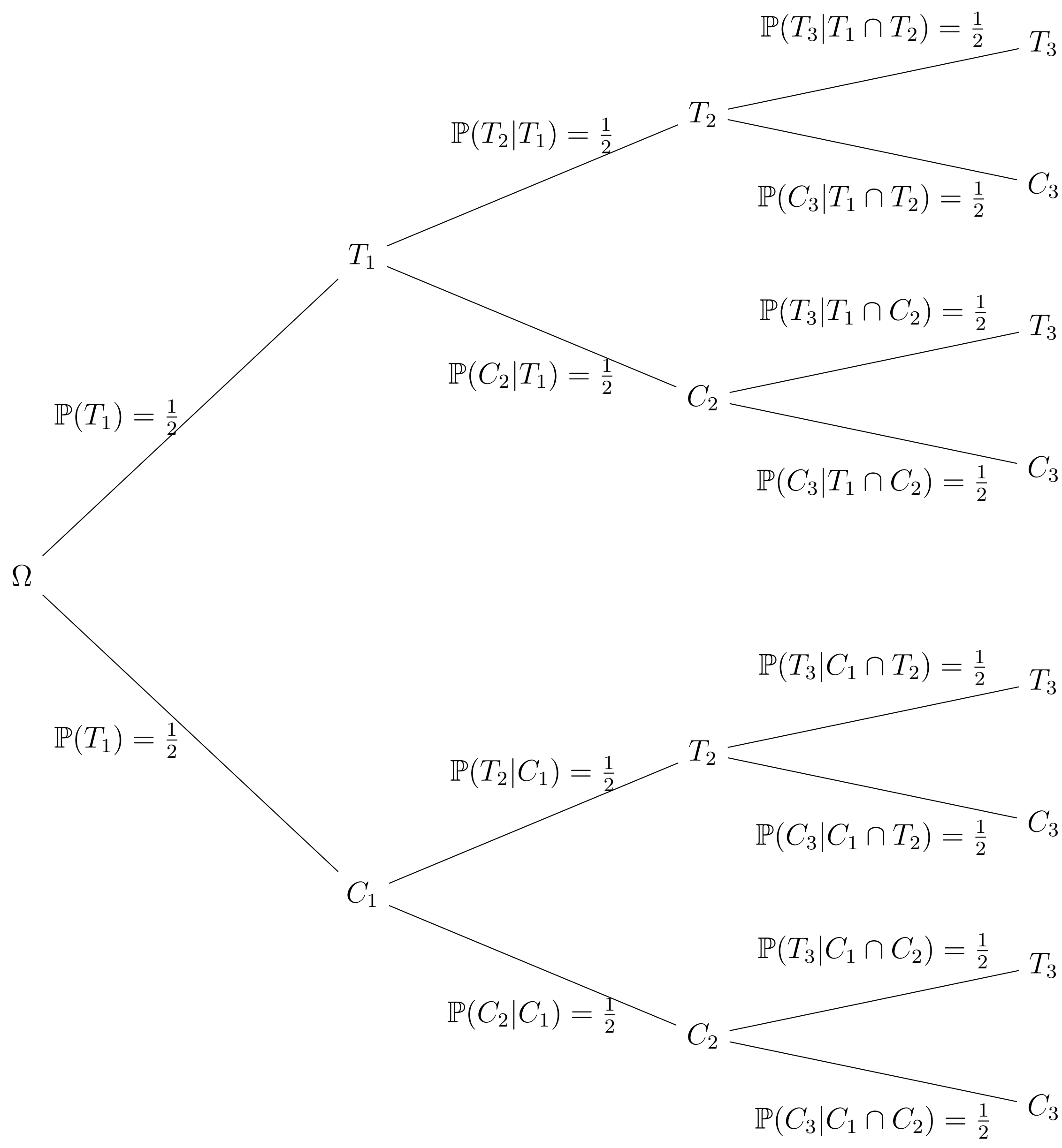
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_{n-1}...A_2A_1).$$

Nella risoluzione di problemi in cui si usa la probabilità condizionata, uno strumento molto utile è il *diagramma ad albero*. Un diagramma ad albero è uno strumento grafico utilizzato per visualizzare le probabilità condizionate note di un esperimento. Ogni nodo dell'albero rappresenta un evento e ogni ramo una probabilità condizionata. Inoltre, da ogni nodo dell'albero esce una partizione di Ω, ovvero un insieme di eventi disgiunti la cui unione dà Ω (e dunque la cui somma delle probabilità è 1).

Esempio 2.2.16. Si consideri l'esperimento di lanciare una moneta non truccata per tre volte. Ogni lancio ha due esiti possibili: può uscire testa (T) o croce (C). Si considerino gli eventi che si riferiscono ai singoli lanci:

- T_i = "esce testa all'i-esimo lancio"
- C_i = "esce croce all'i-esimo lancio"

con i = 1, 2, 3.
Si può rappresentare questo esperimento con un diagramma ad albero:



Per calcolare la probabilità che esca testa 3 volte, si può utilizzare la regola della catena. La probabilità che esca testa nel primo, secondo e terzo lancio è data da

$$\mathbb{P}(T_3 \cap T_2 \cap T_1) = \mathbb{P}(T_3|T_2 \cap T_1)\mathbb{P}(T_2|T_1)\mathbb{P}(T_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Esempio 2.2.17 (Dilemma di Monty Hall)**.** Un giocatore che partecipa a un gioco a premi deve scegliere fra tre porte. Dietro a una porta c'è un'automobile, mentre dietro alle altre ci sono solo delle capre. Il giocatore sceglie, per esempio, la porta n° 1, e il presentatore, che sa dove si trova l'automobile, apre un'altra porta, dietro a cui c'è una capra. A questo punto, al giocatore viene data la possibilità di scegliere tra il restare fedele alla porta n° 1 o il passare all'altra.

Cosa conviene fare al giocatore?

(a) Restare fedele alla porta n° 1.

(b) Passare all'altra porta.

Soluzione

L'automobile potrebbe essere dietro alla porta n° 1, n° 2 oppure n° 3. Ci sono dunque tre eventi possibili:

- H_1 = "l'automobile si trova dietro alla porta n° 1",
- H_2 = "l'automobile si trova dietro alla porta n° 2",
- H_3 = "l'automobile si trova dietro alla porta n° 3".

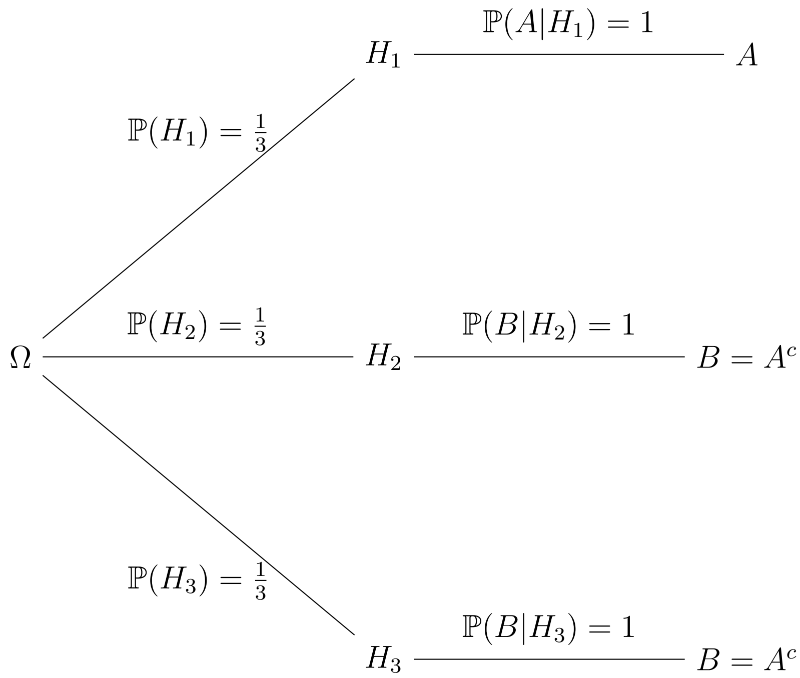
Si suppone che gli eventi H_1, H_2, H_3, siano equiprobabili. Quindi

$$\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = \mathbb{P}(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Si introducono inoltre i due eventi seguenti:

- A = "vinci restando fedele alla porta n° 1",
- B = "vinci passando all'altra porta".

Il diagramma che descrive l'esperimento aleatorio è il seguente:



Si ha quindi

$$A = H_1, \quad B = H_2 \cup H_3.$$

La strategia migliore è quella che ha probabilità maggiore. Si deve dunque calcolare $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$. Si ha che per la formula delle probabilità totali

$$P(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{3}$$

e

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(B|H_3)\mathbb{P}(H_3) = \frac{2}{3}.$$

In conclusione, poiché $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$, conviene sempre passare all'altra porta.

Capitolo 3

L'apprendimento della probabilità

3.1 I misconcetti nell'apprendimento della probabilità

Gli errori sono un elemento fondamentale nel processo di apprendimento e lo sono in particolare nell'apprendimento della matematica. Quando però gli errori sono sistematici, la causa dell'errore potrebbe essere dovuta a misconcezioni.
Con la parola misconcetto si intende una convinzione specifica scorretta.

> "Le convinzioni specifiche scorrette («misconceptions») sulla matematica sono quelle responsabili di errori, che si presentano in forme e contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite, di cui il soggetto non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile." [Rosetta Zan]

Le misconcezioni possono essere classificate in due tipi: evitabili e inevitabili.

- Le misconcezioni evitabili sono quelle che possono essere evitate attraverso un'attenta progettazione dell'insegnamento. Ad esempio, se un insegnante mostra sempre la stessa rappresentazione di un oggetto, è probabile che gli studenti sviluppino una comprensione errata di quel concetto.

- Le misconcezioni inevitabili sono quelle che sono intrinseche alla natura del concetto da insegnare. Ad esempio, quando si introduce il concetto di prodotto nella scuola primaria, è inevitabile che gli studenti sviluppino il misconcetto che il prodotto sia sempre maggiore dei singoli fattori. In questo caso, l'insegnante può cercare di ridurre l'impatto di questa misconcezione, ma non può evitarla.

Nel processo di apprendimento del calcolo delle probabilità, emergono diversi misconcetti che possono influenzare la comprensione degli studenti.

- Uno dei principali misconcetti riguarda la rappresentatività, ovvero la tendenza a pensare che la probabilità di un evento dipenda da quanto questo sia rappresentativo della popolazione. Ad esempio, gli studenti potrebbero credere che un evento sia più probabile solo perché sembra più tipico o comune, senza considerare il calcolo delle probabilità.

- Un altro misconcetto comune è legato all'equiprobabilità, cioè l'idea che tutti gli eventi siano considerati equiprobabili. Gli studenti potrebbero avere difficoltà nel comprendere che la probabilità di diversi eventi può variare a seconda delle circostanze e delle condizioni specifiche dell'esperimento.

- Un altro aspetto problematico è rappresentato dalla memoria positiva/negativa, conosciuta anche come "gambler's fallacy". Questo misconcetto si manifesta quando gli studenti credono che, in una serie di esperimenti indipendenti, un evento diventi più (o meno) probabile solo perché non si è verificato da molto tempo. Questo può portare a un'errata comprensione della natura casuale degli eventi e delle probabilità.

Affrontare questi misconcetti richiede un approccio pedagogico mirato che metta in luce tali pregiudizi intuitivi e fornisca agli studenti l'opportunità di sperimentare attivamente. Inoltre, è importante incoraggiare gli studenti a pensare in modo critico, a mettere in discussione le proprie intuizioni e a sviluppare una comprensione più approfondita delle basi matematiche della probabilità.
Questa indagine si concentrerà sul misconcetto di equiprobabilità nell'apprendimento del calcolo delle probabilità nella scuola secondaria di I grado.

3.2 L'insegnamento della probabilità in Italia

3.2.1 Linee guide ministeriali

Guardando alle linee guida ministeriali nella scuola primaria si legge:

> "**Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria**.
> Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza.
> **Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria.**
> In situazioni concrete, di una coppia di eventi, intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi egualmente probabili."

Nella scuola primaria si inizia a parlare quindi di eventi probabili, ma non vi è un riferimento esplicito alla nozione di probabilità.
Se guardiamo invece alla scuola secondaria di I grado, si legge nelle indicazioni ministeriali:

> "**Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di I grado.**
> Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi,...) si orienta con valutazioni di probabilità.
> **Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di I grado.**
> In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti. Riconoscere coppie di eventi complementari, incompatibili, indipendenti."

Il concetto viene poi ripreso e formalizzato nella scuola secondaria di II grado, infatti se si guarda alle Indicazioni Nazionali si legge

"*La conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica.*

Obiettivi di apprendimento: dati e previsioni.

- Primo biennio: egli apprenderà la nozione di probabilità con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica. Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.
- Secondo biennio: studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio. In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.
- Quinto anno: lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson). In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con le altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi."

Si noti come in nessun caso si faccia riferimento esplicito al modo in cui il concetto di probabilità debba essere introdotto.

Per fare un'analisi più mirata e andare ad analizzare se il misconcetto di equiprobabilità dipenda dalle scelte didattiche o meno, nella presente tesi sono state condotte

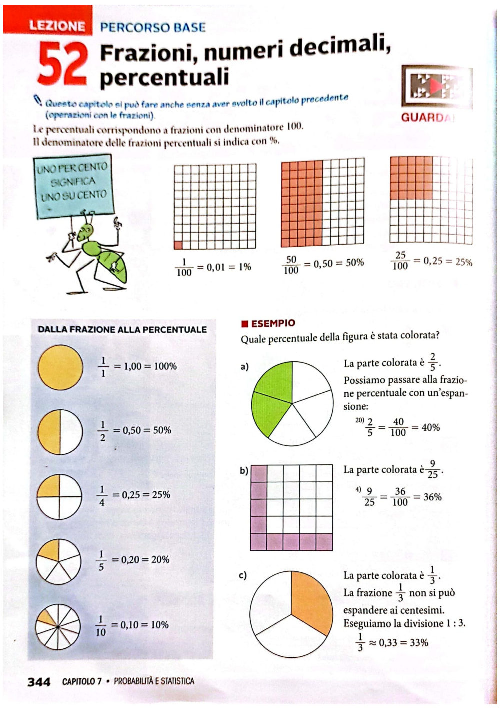
- un'indagine circa il modo in cui questa viene introdotta nei libri di testo che sono maggiormente utilizzati;
- un'indagine su un campione di docenti della scuola secondaria di I grado.

3.2.2 La probabilità nell'editoria scolastica italiana per la secondaria di I grado

L'analisi dei libri di testo può aiutare a comprendere come venga introdotto il concetto di probabilità nella scuola secondaria di I grado. Un campione di libri di testo di diversi editori sarà analizzato per garantire una rappresentatività dell'offerta editoriale. I risultati dell'analisi possono essere utili per identificare eventuali problemi o lacune nell'insegnamento della probabilità.

C. Bertinetto, A. Metiäinen, J. Paasonen, E. Voutilainen, *Contaci*, Zanichelli

La probabilità viene affrontata per la prima volta in questo libro dedicato al primo anno della scuola secondaria di I grado, nel capitolo 7, dal titolo *Probabilità e Statistica*. Di seguito è riportata la prima pagina del capitolo in cui è presente un riepilogo che mette in relazione frazioni, numeri decimali e percentuali.


LEZIONE PERCORSO BASE

52 Frazioni, numeri decimali, percentuali

GUARDA

Questo capitolo si può fare anche senza aver svolto il capitolo precedente (operazioni con le frazioni).

Le percentuali corrispondono a frazioni con denominatore 100.
Il denominatore delle frazioni percentuali si indica con %.

UNO PER CENTO SIGNIFICA UNO SU CENTO

$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\%$ $\frac{50}{100} = 0{,}50 = 50\%$ $\frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\%$

DALLA FRAZIONE ALLA PERCENTUALE

$\frac{1}{1} = 1{,}00 = 100\%$

$\frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%$

$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

$\frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%$

$\frac{1}{10} = 0{,}10 = 10\%$

■ ESEMPIO

Quale percentuale della figura è stata colorata?

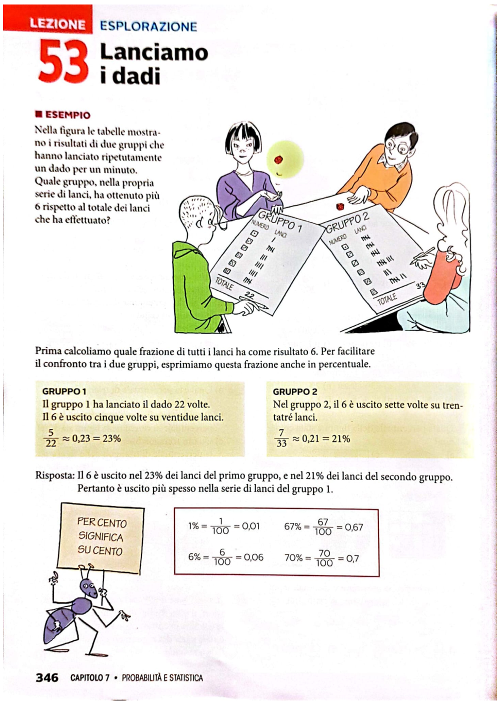
a) La parte colorata è $\frac{2}{5}$.
Possiamo passare alla frazione percentuale con un'espansione:
$^{20)}\ \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%$

b) La parte colorata è $\frac{9}{25}$.
$^{4)}\ \frac{9}{25} = \frac{36}{100} = 36\%$

c) La parte colorata è $\frac{1}{3}$.
La frazione $\frac{1}{3}$ non si può espandere ai centesimi.
Eseguiamo la divisione 1 : 3.
$\frac{1}{3} \approx 0{,}33 = 33\%$

344 CAPITOLO 7 • PROBABILITÀ E STATISTICA

Nella seconda pagina si richiama un esempio che può essere familiare agli studenti, cioè il lancio dei dadi. Negli esempi proposti non si fa riferimento alla probabilità, ma si calcolano frequenze relative e frequenze percentuali.


LEZIONE ESPLORAZIONE

53 Lanciamo i dadi

ESEMPIO

Nella figura le tabelle mostrano i risultati di due gruppi che hanno lanciato ripetutamente un dado per un minuto. Quale gruppo, nella propria serie di lanci, ha ottenuto più 6 rispetto al totale dei lanci che ha effettuato?

Prima calcoliamo quale frazione di tutti i lanci ha come risultato 6. Per facilitare il confronto tra i due gruppi, esprimiamo questa frazione anche in percentuale.

GRUPPO 1
Il gruppo 1 ha lanciato il dado 22 volte.
Il 6 è uscito cinque volte su ventidue lanci.
$\frac{5}{22} \approx 0{,}23 = 23\%$

GRUPPO 2
Nel gruppo 2, il 6 è uscito sette volte su trentatré lanci.
$\frac{7}{33} \approx 0{,}21 = 21\%$

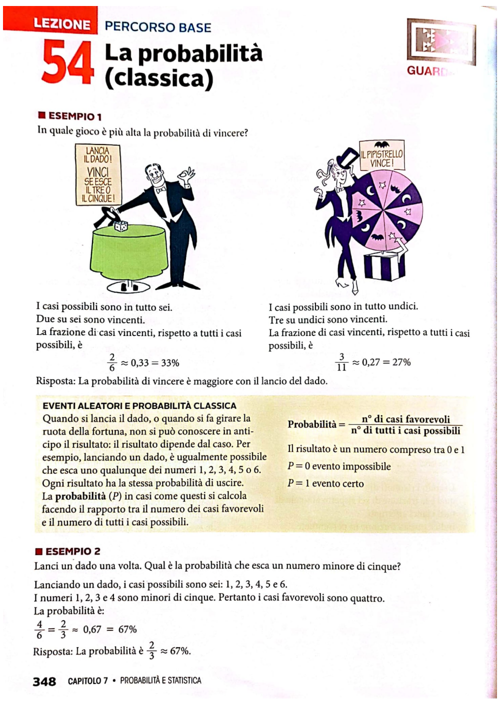
Risposta: Il 6 è uscito nel 23% dei lanci del primo gruppo, e nel 21% dei lanci del secondo gruppo.
Pertanto è uscito più spesso nella serie di lanci del gruppo 1.

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$ $\quad 67\% = \frac{67}{100} = 0{,}67$

$6\% = \frac{6}{100} = 0{,}06$ $\quad 70\% = \frac{70}{100} = 0{,}7$

346 CAPITOLO 7 • PROBABILITÀ E STATISTICA

Nella terza pagina si introduce il concetto di probabilità limitandosi a fornire la formula di Laplace. Si parla in questo caso di "probabilità classica". Nelle pagine successive invece si passa ad introdurre le basi della statistica.


LEZIONE PERCORSO BASE

54 La probabilità (classica)

GUARD

ESEMPIO 1

In quale gioco è più alta la probabilità di vincere?

I casi possibili sono in tutto sei.
Due su sei sono vincenti.
La frazione di casi vincenti, rispetto a tutti i casi possibili, è

$$\frac{2}{6} \approx 0{,}33 = 33\%$$

I casi possibili sono in tutto undici.
Tre su undici sono vincenti.
La frazione di casi vincenti, rispetto a tutti i casi possibili, è

$$\frac{3}{11} \approx 0{,}27 = 27\%$$

Risposta: La probabilità di vincere è maggiore con il lancio del dado.

EVENTI ALEATORI E PROBABILITÀ CLASSICA

Quando si lancia il dado, o quando si fa girare la ruota della fortuna, non si può conoscere in anticipo il risultato: il risultato dipende dal caso. Per esempio, lanciando un dado, è ugualmente possibile che esca uno qualunque dei numeri 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Ogni risultato ha la stessa probabilità di uscire. La **probabilità** (P) in casi come questi si calcola facendo il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero di tutti i casi possibili.

$$\textbf{Probabilità} = \frac{\textbf{n° di casi favorevoli}}{\textbf{n° di tutti i casi possibili}}$$

Il risultato è un numero compreso tra 0 e 1

$P = 0$ evento impossibile

$P = 1$ evento certo

ESEMPIO 2

Lanci un dado una volta. Qual è la probabilità che esca un numero minore di cinque?

Lanciando un dado, i casi possibili sono sei: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
I numeri 1, 2, 3 e 4 sono minori di cinque. Pertanto i casi favorevoli sono quattro.
La probabilità è:

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67 = 67\%$

Risposta: La probabilità è $\frac{2}{3} \approx 67\%$.

348 CAPITOLO 7 • PROBABILITÀ E STATISTICA

A. Montemurro, *Tutto chiaro!*, De Agostini

La probabilità è presentata nel testo del libro di testo attraverso un esempio di estrazione di palline colorate da un'urna. Il testo introduce poi la formula di Laplace per calcolare la probabilità.

A6. 1 SAPERE

LA PROBABILITÀ MATEMATICA DI UN EVENTO CASUALE

Le palline nell'urna

Supponiamo che in un'urna ci siano 6 palline azzurre e 4 palline gialle, indistinguibili al tatto.
In questa lezione cercheremo di rispondere alle seguenti domande:

- Qual è la probabilità che, estraendo una pallina a caso, questa sia azzurra?
- Qual è la probabilità che, estraendo una pallina a caso, questa sia gialla?

Casi favorevoli e casi possibili

Chiaramente l'estrazione di una pallina azzurra o di una gialla è un evento **casuale** o **aleatorio**: non possiamo prevedere se ne estrarremo una azzurra o una gialla.
Possiamo però intuire che è più *probabile* estrarre una pallina azzurra che una gialla perché le prime sono in numero maggiore!

La parola "aleatorio" deriva dal latino *alea*, che significa "dado". Sono eventi aleatori l'estrazione dei numeri della tombola, l'uscita di "testa" o "croce" nel lancio di una moneta, ...

Se indichiamo un evento casuale con una lettera maiuscola dell'alfabeto, per esempio con E, diremo che i **casi favorevoli** al verificarsi dell'evento E_1: "estrazione di una pallina azzurra" sono 6, mentre i casi favorevoli al verificarsi dell'evento E_2: "estrazione di una pallina gialla" sono 4.

I **casi possibili** sono 10 perché 10 sono le palline contenute nell'urna, che sono tutte estraibili in modo ugualmente possibile in quanto non sono "truccate".

Quindi, la probabilità che si verifichi l'evento E_1 è:

6 su 10, cioè $\frac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$

Le palline azzurre sono 6, quindi i casi favorevoli al verificarsi dell'evento "estrazione di una pallina azzurra" sono 6.

Le palline in totale sono 10 e tutte le estrazioni sono ugualmente possibili.

e la probabilità che si verifichi l'evento E_2 è:

4 su 10, cioè $\frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\%$

Le palline gialle sono 4, quindi i casi favorevoli al verificarsi dell'evento "estrazione di una pallina gialla" sono 4.

Le palline in totale sono 10 e tutte le estrazioni sono ugualmente possibili.

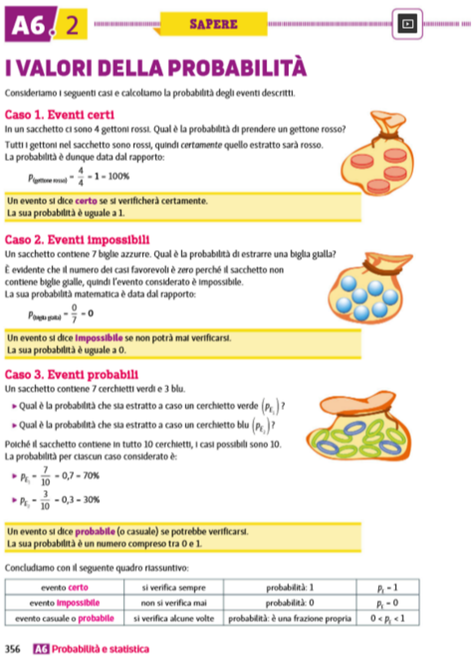
Formula della probabilità matematica

La **probabilità matematica** p_E di un evento casuale E è il rapporto tra il numero f dei casi favorevoli al verificarsi di E e il numero n di tutti i casi ugualmente possibili.

In simboli: $p_E = \frac{\text{numero casi favorevoli all'evento } E}{\text{numero casi possibili}} = \frac{f}{n}$

354 A6 Probabilità e statistica

Nella pagina successiva il testo discute i valori della probabilità degli eventi certi, degli eventi impossibili e degli eventi probabili.



A6. 2 SAPERE

I VALORI DELLA PROBABILITÀ

Consideriamo i seguenti casi e calcoliamo la probabilità degli eventi descritti.

Caso 1. Eventi certi

In un sacchetto ci sono 4 gettoni rossi. Qual è la probabilità di prendere un gettone rosso?
Tutti i gettoni nel sacchetto sono rossi, quindi *certamente* quello estratto sarà rosso.
La probabilità è dunque data dal rapporto:

$p_{(\text{gettone rosso})} = \frac{4}{4} = 1 = 100\%$

Un evento si dice **certo** se si verificherà certamente.
La sua probabilità è uguale a 1.

Caso 2. Eventi impossibili

Un sacchetto contiene 7 biglie azzurre. Qual è la probabilità di estrarre una biglia gialla?
È evidente che il numero dei casi favorevoli è *zero* perché il sacchetto non contiene biglie gialle, quindi l'evento considerato è impossibile.
La sua probabilità matematica è data dal rapporto:

$p_{(\text{biglia gialla})} = \frac{0}{7} = 0$

Un evento si dice **impossibile** se non potrà mai verificarsi.
La sua probabilità è uguale a 0.

Caso 3. Eventi probabili

Un sacchetto contiene 7 cerchietti verdi e 3 blu.

- Qual è la probabilità che sia estratto a caso un cerchietto verde (p_{E_1})?
- Qual è la probabilità che sia estratto a caso un cerchietto blu (p_{E_2})?

Poiché il sacchetto contiene in tutto 10 cerchietti, i casi possibili sono 10.
La probabilità per ciascun caso considerato è:

- $p_{E_1} = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$
- $p_{E_2} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$

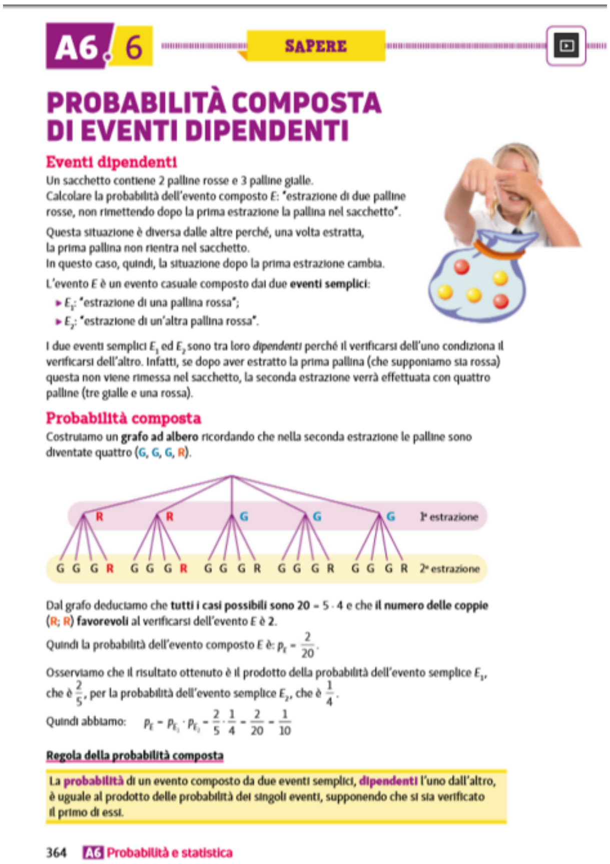
Un evento si dice **probabile** (o casuale) se potrebbe verificarsi.
La sua probabilità è un numero compreso tra 0 e 1.

Concludiamo con il seguente quadro riassuntivo:

evento **certo**	si verifica sempre	probabilità: 1	$p_E = 1$
evento **impossibile**	non si verifica mai	probabilità: 0	$p_E = 0$
evento casuale o **probabile**	si verifica alcune volte	probabilità: è una frazione propria	$0 < p_E < 1$

356 A6 Probabilità e statistica

Nella terza e quarta pagina si discute la probabilità totale di eventi incompatibili e incompatibili.
Successivamente si presenta la probabilità condizionata e il suo calcolo mediante i diagrammi ad albero, l’approccio proposto tuttavia è quantomeno forviante. Infatti, nonostante nella prima pagine del testo sia proposta la definizione cosiddetta classica, per il calcolo della probabilità condizionata viene introdotta la regola della probabilità composta. Questo crea una discrepanza, poiché la definizione classica non può essere applicata direttamente allo spazio campionario dell’esperimento proposto. Si parte tuttavia ancora dalla definizione classica considerando implicitamente un sottoinsieme dello spazio campionario originale, ovvero identificando i “veri”casi possibili e i “veri”casi favorevoli. Inoltre, ancora una volta, non si tiene conto del fatto che in generale non ci si può ricondurre ad un problema di conteggio perché non sempre si può utilizzare la probabilità uniforme.


A6.6 SAPERE

PROBABILITÀ COMPOSTA DI EVENTI DIPENDENTI

Eventi dipendenti

Un sacchetto contiene 2 palline rosse e 3 palline gialle.
Calcolare la probabilità dell’evento composto E: “estrazione di due palline rosse, non rimettendo dopo la prima estrazione la pallina nel sacchetto”.

Questa situazione è diversa dalle altre perché, una volta estratta, la prima pallina non rientra nel sacchetto.
In questo caso, quindi, la situazione dopo la prima estrazione cambia.

L’evento E è un evento casuale composto dai due **eventi semplici**:
- E_1: “estrazione di una pallina rossa”;
- E_2: “estrazione di un’altra pallina rossa”.

I due eventi semplici E_1 ed E_2 sono tra loro *dipendenti* perché il verificarsi dell’uno condiziona il verificarsi dell’altro. Infatti, se dopo aver estratto la prima pallina (che supponiamo sia rossa) questa non viene rimessa nel sacchetto, la seconda estrazione verrà effettuata con quattro palline (tre gialle e una rossa).

Probabilità composta

Costruiamo un **grafo ad albero** ricordando che nella seconda estrazione le palline sono diventate quattro (G, G, G, R).

Dal grafo deduciamo che **tutti i casi possibili sono 20** = 5 · 4 e che **il numero delle coppie** (R; R) **favorevoli** al verificarsi dell’evento E è **2**.

Quindi la probabilità dell’evento composto E è: $p_E = \frac{2}{20}$.

Osserviamo che il risultato ottenuto è il prodotto della probabilità dell’evento semplice E_1, che è $\frac{2}{5}$, per la probabilità dell’evento semplice E_2, che è $\frac{1}{4}$.

Quindi abbiamo: $p_E = p_{E_1} \cdot p_{E_2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Regola della probabilità composta

La **probabilità** di un evento composto da due eventi semplici, **dipendenti** l’uno dall’altro, è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi, supponendo che si sia verificato il primo di essi.

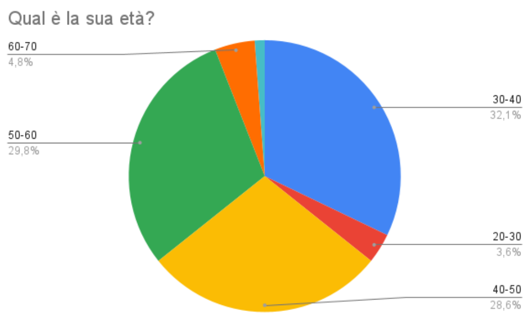
364 A6 Probabilità e statistica

3.2.3 Un'indagine sulla scuola secondaria di I grado

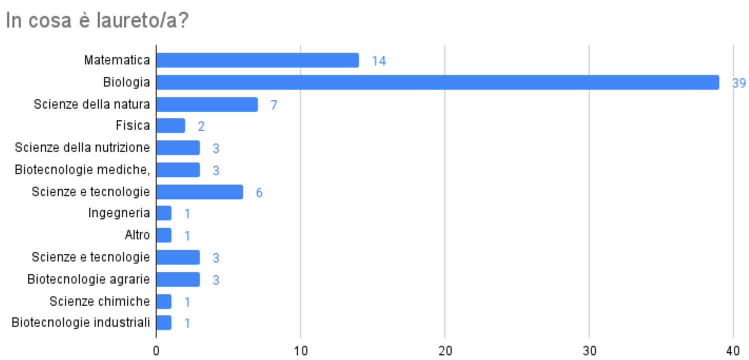
Per comprendere come gli insegnanti di matematica della scuola secondaria di I grado introducono il concetto di probabilità ai loro studenti, è stato proposto loro un questionario anonimo.

Il campione raggiunto consiste in 84 insegnanti di matematica della scuola secondaria di I grado. Il questionario è stato proposto su diverse piattaforme ai docenti, che hanno compilato il questionario su base volontaria. Le domande principali riguardano la formazione degli insegnanti e l'approccio che utilizzano nell'insegnamento della probabilità.

Il diagramma a torta mostra che le fasce d'età 30-40 anni, 40-50 anni e 50-60 anni degli insegnati sono ripartite pressoché in egual modo. Le fasce d'età meno rappresentate dal campione sono quelle tra i 20 e i 30 anni e quelle tra i 60 e gli 80 anni.

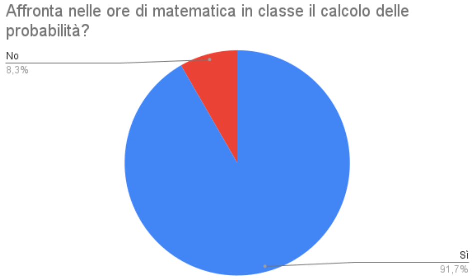


Solo il 16,7 % Del campione considerato è laureato in matematica. La laurea con frequenza percentuale maggiore è quella in biologia (46,4%).

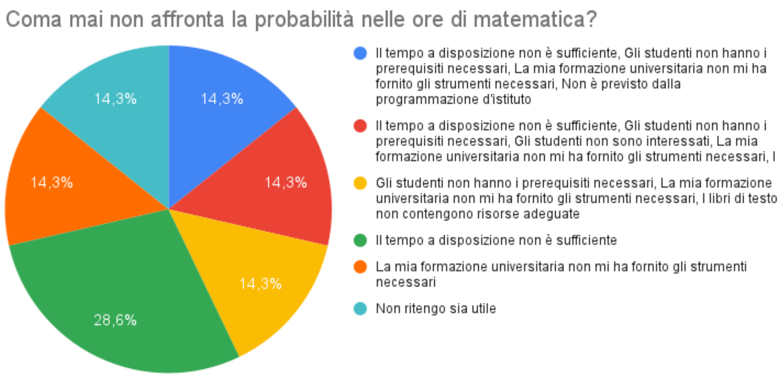


Il 100% degli insegnanti laureati in matematica sostiene di aver frequentato un corso di probabilità durante il percorso universitario. Analizzando invece le risposte degli altri insegnanti, si evince che più delle metà dei soggetti non ha frequentato un corso di probabilità durante il percorso universitario. Di seguito è riportato il grafico delle risposte del campione, ad esclusione dei laureati in matematica.

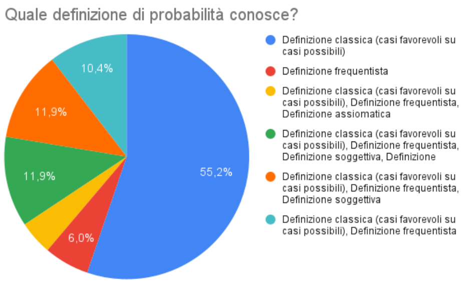
Per quanto riguardo l'insegnamento, il 91,7% affronta nelle ore di lezioni il calcolo delle probabilità.



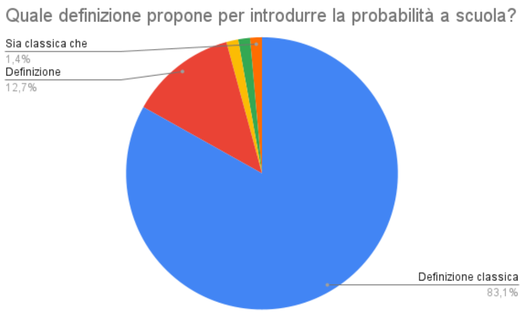
A coloro che non spiegano in classe il calcolo delle probabilità (8,3%) è stato chiesto il motivo di tale scelta. Di seguito sono riportate le ragioni che hanno spiegato.



Il questionario, da questo punto in poi, si è rivolto esclusivamente agli insegnanti che affrontano il calcolo delle probabilità durante le ore di lezione. Ai 77 docenti del campione rimasti è stato chiesto quale definizione di probabilità conoscessero. È emerso che più della metà del campione conosce solo la cosiddetta definizione classica.



Non stupisce, quindi, che alla domanda "Quale definizione propone per introdurre la probabilità a scuola?", l'83,1% del campione abbia risposto "definizione classica". Segue con il 12,7 % la risposta "definizione frequentista".



Le motivazioni circa il perché gli insegnanti introducano il calcolo delle probabilità a scuola utilizzando la definizione classica possono essere riassunte come segue.

- La semplicità e l'immediatezza della definizione classica sono considerate fattori importanti per la comprensione degli studenti. Questa motivazione è la più frequente, e viene espressa in diverse varianti: "è la più semplice", "è più intuitiva", "è più legata al concreto", "è più vicino alla realtà".

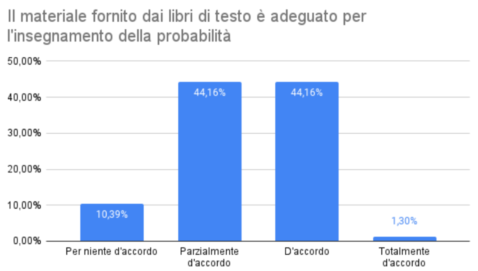
- La definizione classica è considerata più adatta per la fascia di età degli studenti della scuola secondaria di I grado. Questa motivazione è espressa in termini di maturità cognitiva degli studenti: "ancora troppo piccoli gli studenti", "è più adatta per questa età".

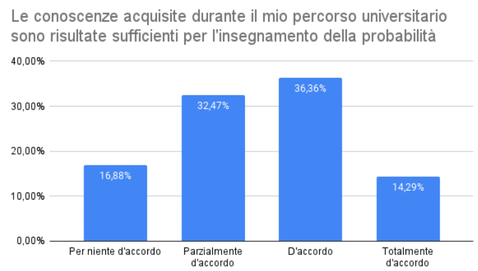
- La definizione classica è quella più presente sui libri di testo e nelle prove Invalsi. Questa motivazione è legata a considerazioni di praticità e di materiali a disposizione: "è quella che propone il libro di testo", "è quella più richiesta nelle prove Invalsi".

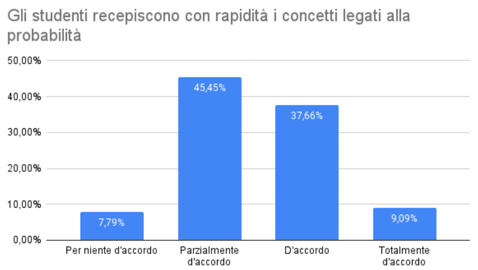
È stato infine chiesto ai docenti quanto fossero d'accordo con le seguenti frasi.

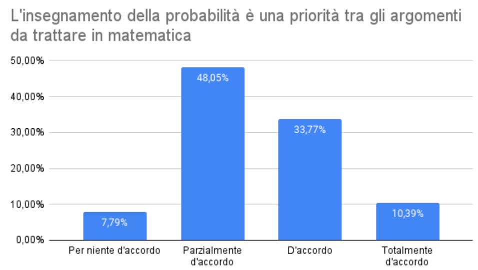
- Le conoscenze acquisite durante il mio percorso universitario sono risultate sufficienti per l'insegnamento della probabilità.
- Gli studenti recepiscono con rapidità i concetti legati alla probabilità.
- L'insegnamento della probabilità è una priorità tra gli argomenti da trattare in matematica.
- Il materiale fornito dai libri di testo è adeguato per l'insegnamento della probabilità.

Sono riportate di seguito le risposte.









Emerge che solo l'1,3% degli insegnanti ritiene che il materiale fornito dai libri di testo sia totalmente adeguato per l'insegnamento della probabilità, che solo il 14,29% ritiene che la formazione universitaria ricevuta sia totalmente adeguata e solo il 7,79% ritiene che gli studenti non fatichino ad apprendere il calcolo delle probabilità. Questo fa sì che solo il 10,39% degli insegnanti ritenga il calcolo delle probabilità totalmente prioritario tra gli argomenti di matematica da trattare nella scuola secondaria di I grado.
In conclusione, dai dati del campione emerge che la maggior parte degli insegnanti di matematica affronta il calcolo delle probabilità durante le lezioni, anche se buona parte non ha ricevuto la formazione necessaria e reputa i materiali a disposizione non adeguati. La definizione classica della probabilità è preferita dagli insegnanti per la sua semplicità e immediatezza, nonché per la sua presenza nei libri di testo e nelle prove Invalsi. Solo una minoranza degli insegnanti conosce la definizione assiomatica.
In sintesi, i dati indicano la necessità di valutare e migliorare la formazione degli insegnanti e le risorse disponibili per garantire un insegnamento efficace della probabilità nella scuola secondaria di I grado in Italia e per evitare misconcetti legati alla probabilità.

Quindi, secondo quanto emerso dall'indagine sull'editoria scolastica e l'indagine sul campione di docenti, il misconcetto di equiprobabilità sembra essere una diretta conseguenza delle scelte didattiche.

Capitolo 4

La sperimentazione in aula

Il presente capitolo descrive un percorso didattico sperimentale, progettato per la scuola secondaria di I grado, con l'obiettivo di

- applicare l'approccio trialogico all'apprendimento in ambito matematico;
- proporre un metodo alternativo per introdurre il concetto di probabilità, svincolandosi dalla cosiddetta definizione classica.

Il percorso è stato sperimentato in due classi, entrambe composte da 25 studenti ciascuna, dell'Istituto Comprensivo 21 di Bologna, sotto la supervisione della Prof.ssa Daniela Leone, titolare della cattedra di matematica e scienze.
Al fine di determinare l'approccio più idoneo per la sperimentazione didattica, è stata condotta una fase di osservazione preliminare nelle classi seconda e terza durante le normali lezioni di matematica tenute dalla docente. In accordo con la professoressa, l'osservazione ha incluso l'intero gruppo classe e ha avuto lo scopo di valutare il comportamento generale degli studenti, il clima di classe e l'atteggiamento nei confronti dell'apprendimento della matematica.
I risultati dell'osservazione hanno rivelato differenze significative tra le due classi.

- Nella classe seconda, si è riscontrata una difficoltà generale di concentrazione, con comportamenti che includevano mancanza di rispetto verso le insegnanti e difficoltà a rimanere seduti e attenti. L'analisi più dettagliata, ottenuta attraverso confronti con piccoli gruppi di studenti, ha confermato una situazione complessa, caratterizzata dalla presenza di due fazioni: da un lato, gli studenti che non riscontravano particolari difficoltà di apprendimento in matematica, frustrati da lezioni percepite come troppo semplici; dall'altro, gli studenti con maggiori difficoltà, che si sentivano sopraffatti dal ritmo delle lezioni e esclusi dai compagni più abili. La classe seconda ha mostrato una netta divisione e un clima di classe teso, con problemi interni evidenti. Questa situazione ha richiesto un intervento didattico mirato a migliorare l'integrazione e la collaborazione tra gli studenti.

- Al contrario, la classe terza ha dimostrato una maggiore coesione. Le osservazioni e i confronti con piccoli gruppi hanno rivelato una classe più attenta e partecipativa, con studenti impegnati nel dialogo con l'insegnante e pronti a chiedere chiarimenti. La divisione tra studenti con e senza difficoltà in matematica era presente ma allineata alle dinamiche tipiche di una classe di scuola secondaria di I grado.

In seguito alle osservazioni condotte, si è deciso, in accordo con la docente, di adottare strategie didattiche differenziate per le classi seconda e terza, al fine di rispondere in modo mirato alle esigenze e alle dinamiche rilevate.

- **Focus sul "gioco"per la classe seconda.** Per la classe seconda, dove la collaborazione e l'integrazione tra studenti rappresentavano le sfide principali, si è scelto di introdurre un approccio ludico. Le attività progettate avevano l'obiettivo di stimolare l'interazione tra gli studenti, superando le barriere create dalle diverse fazioni emerse durante l'osservazione. Il gioco è stato utilizzato come strumento per avvicinare gli studenti alla matematica in un contesto familiare, affrontando anche i fattori affettivi che influenzavano negativamente l'apprendimento.

- **Focus sulle tecnologie per la classe terza.** Per la classe terza, che aveva dimostrato maggiore disciplina e capacità di collaborazione, si è optato per un percorso che si focalizzasse sull'uso delle tecnologie. Questo approccio ha permesso di sfruttare le competenze pregresse degli studenti nell'utilizzo di strumenti digitali, evitando così un onere formativo aggiuntivo. Il progetto prevedeva attività sia in aula, incentrate su discussione e apprendimento collaborativo della matematica, sia extra-aula, dove l'uso delle tecnologie giocava un ruolo chiave.

4.1 Struttura del progetto

Il percorso didattico è stato implementato durante un periodo di circa quattro settimane di lezione, intercorrenti tra i mesi di maggio e giugno 2023, nell'ambito delle ore curriculari di matematica. La scelta di interrompere temporaneamente la trattazione degli argomenti di matematica previsti dal programma è stata deliberatamente assunta dalla docente per consentire agli studenti di focalizzare completamente la propria attenzione sul percorso in oggetto, favorendo così una migliore assimilazione e consolidamento dei concetti e delle competenze acquisite. L'interruzione temporanea del programma di matematica è stata motivata da una serie di considerazioni di seguito riportate.

- **Complessità del percorso.** Il percorso didattico in oggetto presentava una struttura articolata e richiedeva un impegno considerevole da parte degli studenti. La focalizzazione completa sul percorso permetteva di dedicare il tempo necessario all'apprendimento e alla pratica delle nuove conoscenze e competenze.

- **Specificità del tema.** Il tema del calcolo delle probabilità rappresentava un argomento nuovo per gli studenti che hanno partecipato al percorso. L'interruzione del programma di matematica permetteva di evitare una sovrapposizione di contenuti, favorendo una migliore comprensione del tema in esame.

- **Obiettivi del percorso.** L'obiettivo del percorso non era solo quello di trasmettere conoscenze teoriche, ma anche di sviluppare negli studenti una serie di competenze trasversali.

In entrambe le classi il percorso è stato articolato nelle fasi riportate di seguito.

(i) **Questionario di autovalutazione in entrata.** Agli studenti è stato somministrato un questionario anonimo volto a sondare la loro percezione del clima classe, l'esperienza pregressa con i lavori di gruppo e individuali (*All.1: Questionario di autovalutazione in entrata*).

(ii) **Questionario conoscenze di base di probabilità.** Considerato che nessuna delle due classi aveva affrontato il tema del calcolo delle probabilità durante le lezioni di matematica, è stato somministrato un questionario per valutare il livello di conoscenza degli studenti. Il questionario includeva domande volte ad accertare la familiarità degli studenti con il concetto di probabilità e valutare la capacità degli studenti di associare una probabilità ad eventi specifici (*All.3: Questionario conoscenze di base probabilità*).

(iii) **Divisioni in gruppi.** Gli studenti sono stati divisi in gruppi eterogenei tenendo conto delle dinamiche sociali osservate durante la fase di osservazione preliminare.

(iv) **Attività**: all'interno di ciascuna classe sono state proposte attività volte all'apprendimento del concetto di probabilità mediante l'approccio assiomatico. Le attività differivano tra le due classi in base alle specificità emerse durante la fase di osservazione. I dettagli e le spiegazioni relative alle attività sono riportati nel *paragrafo 4.2* (*All.6: materiali classe seconda*, *All.7: Materiali classe terza*).

(v) **Questionario lavoro di gruppo.** Al termine della prima attività, ogni gruppo ha compilato un questionario anonimo, finalizzato alla valutazione del lavoro di gruppo (*All.5: Questionario lavoro di gruppo*).

(vi) **Questionario probabilità in uscita.** Al termine del percorso, agli studenti di entrambe le classi è stato somministrato un questionario individuale composto da 10 quesiti per valutare l'acquisizione delle conoscenze affrontate durante il percorso relative al calcolo della probabilità (*All.4: Questionario probabilità in uscita*).

(vii) **Questionario di autovalutazione in uscita.** Il questionario sulle competenze in entrata è stato riproposto al termine del percorso per valutare eventuali cambiamenti nelle competenze sociali degli studenti. Inoltre, è stata aggiunta una sezione specifica per raccogliere la loro opinione sul percorso didattico proposto (*All.2: Questionario di autovalutazione in uscita*).

La somministrazione dei questionari di autovalutazione e quello relativo ai lavori di gruppo ha richiesto un tempo di circa 20 minuti per ciascun questionario.
I questionari di verifica finale sulle conoscenze di probabilità hanno avuto una durata di un'ora ciascuno.
Le attività proposte hanno richiesto tempi di svolgimento variabili, generalmente superiori a una singola giornata di lezione. La complessità delle attività e la necessità di favorire un apprendimento profondo e collaborativo all'interno dei gruppi hanno reso necessario dedicare più giornate al completamento di ciascuna attività.
Lo svolgimento del percorso didattico, inoltre, è stato interrotto a causa dell'alluvione che ha colpito l'Emilia-Romagna nel 2023. L'emergenza ha comportato la chiusura delle scuole del territorio per alcuni giorni, interrompendo le attività didattiche in corso. Al termine dell'emergenza, è stato necessario del tempo aggiuntivo per riprendere le attività e riconnettere gli studenti agli argomenti teorici affrontati. La sospensione del percorso ha infatti comportato un rischio di disorientamento a parte degli studenti. Per facilitare la ripresa del percorso, sono state proposte attività di ripasso e di consolidamento degli argomenti teorici già affrontati. La ripresa delle attività ha richiesto un impegno supplementare, ma ha consentito di completare il percorso con successo.

Nella pagine successive, si procederà ad una descrizione dettagliata della struttura delle attività svolte nelle classi seconda e terza, evidenziando le specificità e le peculiarità di ciascun percorso didattico. Di seguito è riportata la scheda progettuale della sperimentazione.

Titolo	Oltre il misconcetto di equiprobabilità: l'approccio trialogico all'apprendimento della probabilità nella scuola secondaria di primo grado.
Disciplina	Matematica
Argomento	Introduzione al calcolo delle probabilità mediante la definizione assiomatica.
Traguardi di sviluppo di competenze	Calcolare la probabilità matematica di un evento, sviluppo di competenze trasversali.
Obiettivi specifici	Fornire agli studenti una solida comprensione del calcolo delle probabilità, evitadando il misconcetto di equiprobabilità.
Materiali/strumenti	Schede, slides online, chromebook, tecnologie specifiche per la progettazione di dadi 3D.
Spazi e tempi	La sperimentazione è stata condotta durante le ore disciplinari di matematica per un periodo di quattro settimane.
Descrizione attività didattica	Gli studenti hanno lavorato in gruppi su due percorsi diversi, entrambi incentrati sul calcolo delle probabilità a partire da casi specifici. Hanno utilizzato vari materiali e tecnologie per supportare il loro apprendimento.
Valutazione formativa	Monitoraggio continuo dei progressi degli studenti durante le attività di gruppo e le discussioni, implementazione di un questionario di autovalutazione.
Valutazione finale	Un questionario individuale in uscita riguardante i contenuti del corso.

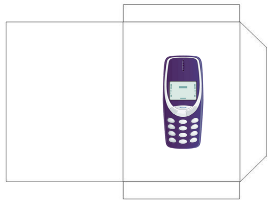
4.2 L'approccio assiomatico alla probabilità

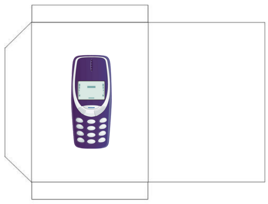
4.2.1 Classe seconda

Tenendo conto delle considerazioni emerse della fase di osservazione della classe seconda, descritta precedentemente, il percorso didattico per questa classe è stato focalizzato sul dilemma di Monty Hall, descritto formalmente nell'esempio 2.2.17, riadattato ad un contesto più vicino al vissuto degli studenti. L'adozione del dilemma di Monty Hall come strumento didattico mira a facilitare l'apprendimento del calcolo delle probabilità attraverso l'approccio assiomatico. Questo permette di evitare il misconcetto di equiprobabilità, nonostante gli eventi in questione siano equiprobabili. La scelta di questo approccio è motivata dalla constatazione che la definizione classica di probabilità, basata sul rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, non può essere applicata direttamente allo spazio campionario dell'esperimento. Invece, deve essere applicata a un sottoinsieme dello spazio campionario, così come descritto nel sottoparagrafo 2.2.2. Sebbene fosse possibile proporre agli studenti un caso in cui la probabilità non fosse uniforme, la decisione di proporre un caso di eventi equiprobabili è stata presa per non sovraccaricare gli studenti con un problema che fosse oltre le loro capacità. Questo approccio ha permesso agli studenti di apprendere il calcolo delle probabilità in modo più gestibile. Sono di seguito discusse nel dettaglio le attività proposte alla classe seconda e maggiori dettagli riguardo il modo in cui è stato scelto di riadattare il dilemma di Monty Hall.

Attività 1

Agli studenti è stata presentata una versione semplificata del dilemma di Monty Hall, con tre scatole al posto delle tre porte. Due scatole contenevano un Nokia e la terza un iPhone. L'obiettivo del gioco era indovinare la scatola contenente l'iPhone. Il contenuto delle scatole era ignoto ad ognuno degli studenti che ha partecipato alla simulazione. Inoltre, a diferenza del gioco originale alla base del Dilemma di Monty Hall, non è stato richiesto al giocatore di cambiare la sua scelta durante la simulazione.





Gli studenti hanno lavorato in gruppi di 4, simulando il gioco più volte per ottenere una stima sperimentale della probabilità di vincita. All'interno di ogni gruppo, due coppie di studenti simulavano il gioco con tre scatole disegnate, annotando il numero di tentativi e di vittorie. I dati raccolti da ciascuna coppia sono stati sommati a quelli dell'interno del gruppo e poi sono stati sommati il numero di vittorie e il numero di tentativi dell'intera classe.

GRUPPO	Numero di tentativi	Numero di vittorie
matematica4321	50	24
i 4 del san saverio	40	16
Fantastici 5	63	15
matematica1234	37	18
apayai	48	28
geomate	56	26
TOTALE	294	127

Dati raccolti

I dati ottenuti sono stati utilizzati da ogni gruppo per compilare la scheda presente nell'*All. 6a: Materiali prima attività*. Le prime due domande della scheda richiedevano agli studenti di stimare la probabilità di vincita e di perdita, basandosi sul loro concetto intuitivo di probabilità e sui dati ottenuti.

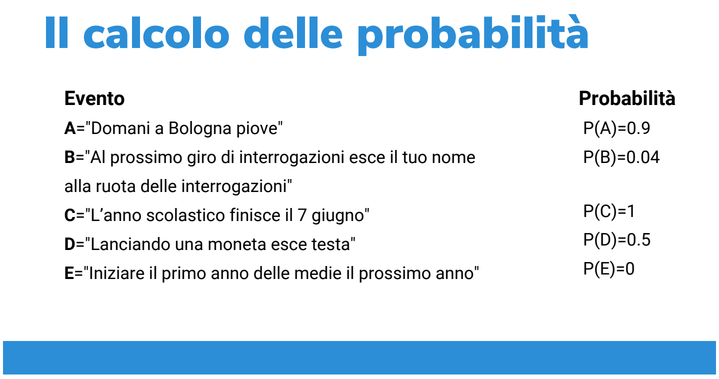
Sono state proposte successivamente quattro varianti del gioco originale, con differenti combinazioni di Nokia e iPhone nelle scatole:

- 3 scatole con 3 iPhone
- 3 scatole con 3 Nokia
- 4 scatole con 3 Nokia e 1 iPhone
- 5 scatole con 3 Nokia e 2 iPhone

Per ciascuna variante, gli studenti dovevano stimare la probabilità di vincita e di perdita.
L'ultima domanda della scheda invitava gli studenti a trarre conclusioni generali sull'apprendimento del calcolo delle probabilità: "*Ripensando a tutti i casi proposti, che conclusioni riuscite a trarre riguardo il calcolo delle probabilità?*"

Attività 2

La seconda attività del percorso didattico ha rappresentato il momento di introduzione formale al calcolo delle probabilità per gli studenti. L'obiettivo principale era di fornire loro una solida base concettuale, utilizzando un linguaggio rigoroso e preciso, pur mantenendo un approccio accessibile e coinvolgente.

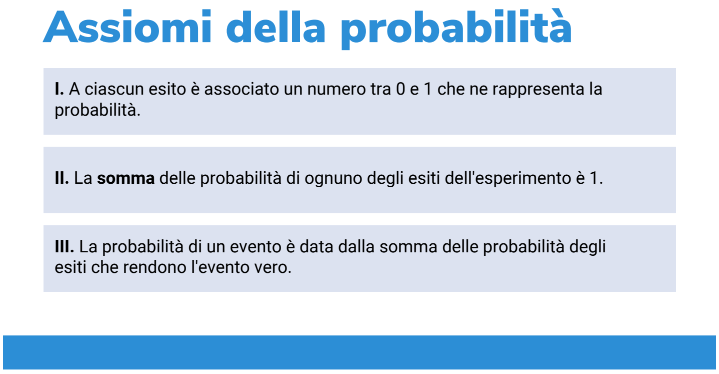

Il calcolo delle probabilità

Evento	Probabilità
A="Domani a Bologna piove"	P(A)=0.9
B="Al prossimo giro di interrogazioni esce il tuo nome alla ruota delle interrogazioni"	P(B)=0.04
C="L'anno scolastico finisce il 7 giugno"	P(C)=1
D="Lanciando una moneta esce testa"	P(D)=0.5
E="Iniziare il primo anno delle medie il prossimo anno"	P(E)=0

Sono stati introdotti i seguenti concetti:

- esperimento aleatorio;
- esito di un esperimento aleatorio;

- evento;
- assiomi della probabilità.



Per facilitare la comprensione dei concetti teorici, sono stati proposti esempi concreti e pertinenti, attingendo dalle esperienze quotidiane degli studenti. La spiegazione frontale è stata intervallata da momenti di discussione in gruppo e con l'intera classe, favorendo la partecipazione attiva e il confronto costruttivo.
Al termine della fase di spiegazione, è stata proposta un'attività di verifica e consolidamento delle conoscenze acquisite (*All. 6b: Materiali seconda attività*). Agli studenti è stata fornita una scheda con il riassunto dei concetti introdotti e una serie di domande volte a testare la loro capacità di applicare gli assiomi della probabilità a diverse situazioni concrete. Segue un estratto delle slides presentate agli studenti. In particolare, sono stati proposti diversi eventi, per i quali sono state calcolate le probabilità corrispondenti. Una discussione più dettagliata sugli eventi proposti e le relative probabilità sarà presentata nel *paragrafo 5.2*.
Sono di seguito riportate le domande proposte agli studenti.

- Verifica usando gli assiomi che, lanciando un dado a 6 facce perfettamente bilanciato, la probabilità che esca ognuna delle facce sia 1/6.
- Se lanciamo un dado perfettamente bilanciato a 4 facce, qual è la probabilità che esca una delle facce ?
- Supponiamo di avere un dado truccato a 4 facce per cui valga che: la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, la probabilità

che esca 2 è il doppio della probabilità che esca 3, la probabilità che esca 3 è il doppio della probabilità che esca 4. Calcolare la probabilità di uscita di ognuna delle facce.

Agli studenti è stato chiesto di svolgere l'attività in gruppo, collaborando per trovare le soluzioni ai quesiti proposti e compilando la scheda fornita. La scelta del lavoro di gruppo ha favorito lo sviluppo di competenze collaborative e di "problem solving", oltre a rafforzare la comprensione dei concetti attraverso la condivisione e il confronto di idee e strategie.
Al termine di ogni sessione di discussione, ciascun gruppo ha completato la scheda, rispondendo alla domanda proposta. Successivamente, i risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli degli altri gruppi, favorendo un dibattito collettivo sulle possibili strategie di risoluzione. L'insegnante ha svolto un ruolo di facilitatore, garantendo al contempo agli studenti ampia libertà di espressione e di confronto.

Attività 3

La terza attività del percorso didattico ha proposto agli studenti una simulazione del dilemma di Monty Hall, riprendendo la struttura della prima attività.

Fasi della simulazione:

- Gli studenti vengono divisi in coppie e assumono a turno il ruolo di fattorino e di concorrente.

- Il fattorino conosce il contenuto di ogni scatola, mentre il concorrente non lo conosce.
- Il concorrente sceglie una scatola.
- Il fattorino apre una delle due scatole non scelte dal concorrente, mostrando un Nokia.
- Il fattorino chiede al concorrente se desidera cambiare la sua scelta iniziale.
- Il concorrente decide se mantenere la sua scelta iniziale o se cambiare scatola.
- Il risultato della simulazione viene annotato sulla scheda di gioco.

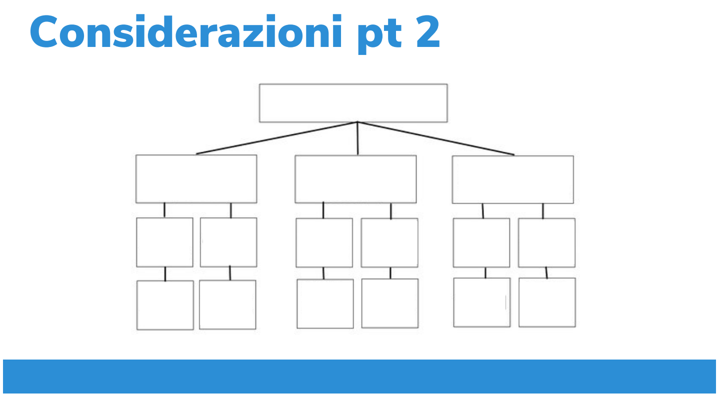
Agli studenti è stato richiesto di ripetere la simulazione il maggior numero di volte possibile. L'obiettivo era di ottenere un campione di dati sufficientemente ampio per poter stimare la probabilità di vincita con un buon grado di accuratezza.
Per favorire una comprensione completa del gioco e delle sue implicazioni, è stato chiesto agli studenti di ricoprire entrambi i ruoli, alternandosi tra fattorino e concorrente, ripetendo lo stesso ruolo il maggior numero di volte di fila. In questo modo, ogni studente ha potuto sperimentare in prima persona le diverse strategie di gioco e le relative probabilità di successo.
Analogamente alla prima attività, gli studenti hanno annotato il numero di tentativi e di vittorie di ciascuna coppia. Successivamente, i dati di tutte le coppie sono stati sommati per ottenere un risultato complessivo per l'intera classe.

GRUPPO	Numero di tentativi	Numero di cambi	Numero di vittorie
matematica4321	22	18	15
i 4 del san saverio	30	12	12
Fantastici 5	36	17	16
matematica1234	10	2	8
apayai	25	15	17
geomate	40	17	26
TOTALE	163	81	94

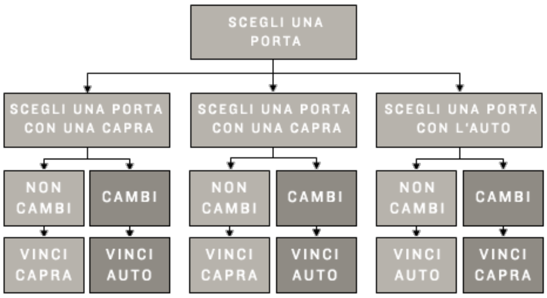
Dati raccolti

Al termine della simulazione, i gruppi sono stati invitati a un momento di riflessione collettiva sui dati raccolti (*All. 6c: Materiali terza attività*). L'obiettivo era di analizzare i risultati ottenuti, confrontando le diverse strategie adottate e le relative implicazioni in termini di probabilità di vincita. In particolare, è stato chiesto a ciascun gruppo di descrivere la strategia utilizzata per vincere e di esprimere un parere sull'opportunità di cambiare la scelta iniziale della scatola. Dopo aver discusso internamente, ogni gruppo ha avuto modo di presentare le proprie conclusioni all'intera classe.
Solo in seguito a questa fase di analisi e confronto, è stato svelato agli studenti che l'attività svolta era una variante del dilemma di Monty Hall. La versione originale del problema è stata presentata e discussa, sottolineandone l'appartenenza del problema al campo del calcolo delle probabilità.
Guidati dallo schema presente di seguito, gli studenti hanno esaminato le diverse opzioni possibili in base alla scelta di cambiare o mantenere la propria decisione iniziale. L'obiettivo era di comprendere a fondo le implicazioni di ciascuna scelta in termini di probabilità di successo. L'analisi delle opzioni è stata svolta in un contesto di discussione intergruppo, favorendo la collaborazione e lo scambio di idee. I risultati sono stati annotati sullo schema, fornendo una rappresentazione visiva e sintetica delle diverse possibilità.

Infine, è stato chiesto agli studenti di calcolare la probabilità di vincere e di perdere nel caso di cambio della scelta iniziale. Al termine della discussione, ogni gruppo ha esposto all'intera classe le conclusioni raggiunte, illustrando il ragionamento seguito e le relative implicazioni. L'insegnante ha assunto, durante la discussione finale, il ruolo di facilitatore e di guida. In particolare, ha utilizzato



Schema proposto



Schema compilato

le risposte degli studenti come punto di partenza per un'analisi collettiva del problema, valorizzando le diverse posizioni degli studenti e orientandoli infine verso la soluzione del problema.

Attività 4

L'ultima attività del percorso didattico ha avuto come fulcro la creazione di un artefatto: una rivisitazione personale del gioco alla base del dilemma di Monty Hall.

Gli studenti, suddivisi in gruppi, hanno lavorato alla realizzazione di una nuova versione del gioco per ciascun team. La consegna prevedeva la massima libertà nella scelta degli strumenti: da materiali reperibili online alla creazione fisica del gioco.

Oltre al gioco in sé, ad ogni gruppo è stato chiesto di redigere un manuale di istruzioni chiaro e completo, che ne spiegasse le regole e il funzionamento.

Infine, ogni gruppo ha presentato alla classe l'artefatto creato, illustrando le proprie scelte progettuali e le caratteristiche del gioco.

4.2.2 Classe terza

Mentre gli alunni di seconda hanno studiato le probabilità attraverso il dilemma di Monty Hall, gli alunni di terza hanno imparato a conoscere i dadi truccati e a distinguerli da quelli normali. La scelta di proporre alla classe terza un percorso sul funzionamento dei dadi truccati è stata dettata dalla loro familiarità con le tecnologie utilizzate per la modellizzazione 3D. Queste ultime saranno descritte in questo paragrafo (*Attività 3*) e nel *paragrafo 4.3*. Questo ha permesso di sfruttare le conoscenze pregresse degli studenti per facilitare l'apprendimento di nuovi concetti. Le attività proposte alla classe terza erano più complesse di quelle proposte alla classe seconda e hanno richiesto un tempo di svolgimento maggiore. Per questo motivo, il numero di attività è stato ridotto a tre, pur garantendo un percorso didattico completo e significativo.

Attività 1

L'attività proposta agli studenti si è articolata in diverse fasi, volte a esplorare il concetto di probabilità attraverso il lancio di dadi non truccati. Ogni studente è stato associato a un numero presente nell'elenco della classe. A ciascuna faccia del dado sono stati associati 4 studenti.

1 dado e 4 interrogazioni

Faccia del dado	Interrogati
1	1, 2, 3, 4
2	5, 6, 7, 8
3	9, 10, 11, 12
4	13, 14, 15, 16
5	17, 18, 19, 20
6	21, 22, 23, 24

Pt 1

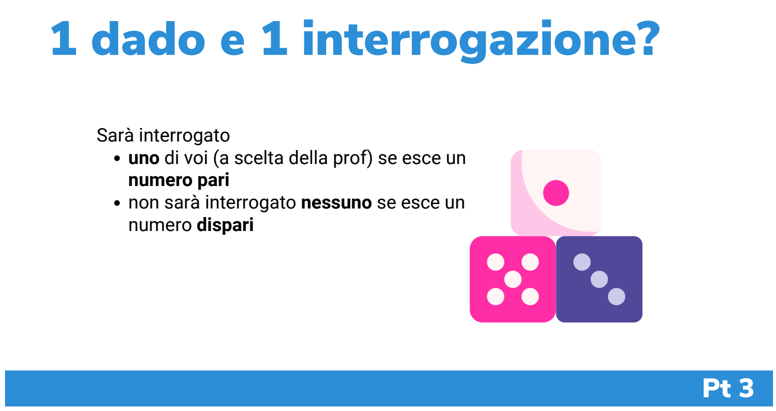
Due studenti per gruppo hanno lanciato a turni i dadi, annotando sulla scheda attività il numero di tentativi e il numero di uscite per ciascuna faccia. I dati di ogni gruppo sono stati sommati a quelli dell'intera classe per ottenere un valore di probabilità per ogni faccia che potesse essere una approssimazione del valore 0.16.

GRUPPO	numero di lanci	numero di 1	numero di 2	numero di 3	numero di 4	numero di 5	numero di 6
Pioppi Spumeggianti	150	23	27	21	27	27	25
Pappagallini	167	23	22	29	26	28	39
I guaglioni	103	11	23	17	19	18	15
I feffotti	156	27	24	23	25	26	26
Denim	143	19	25	17	30	28	24
Palla da basket	100	21	16	17	17	15	14
TOTALE	819	124	137	124	144	142	143

Dati raccolti

Al termine della fase di raccolta dati, gli studenti hanno discusso sulla probabilità che venissero interrogati i primi 4 studenti dell'elenco, i successivi 4 e così via. Sono state poi proposte varianti del gioco, che hanno modificato le regole di assegnazione dell'interrogazione in base al numero ottenuto dal lancio del dado.

- Se esce un numero pari, uno studente a scelta della professoressa viene interrogato.
- Se esce un numero dispari, nessuno viene interrogato.



Per esplorare l'influenza del tipo di dado sulla probabilità, è stato chiesto agli studenti di ragionare su diversi casi riportati di seguito. Per questa prima fase sono stati introdotti esclusivamente dadi non truccati per permettere agli studenti di familiarizzare con vari esempi di dadi che presentano caratteristiche diverse. Gli esempi proposti comprendevano:

- dado a 6 facce bilanciato;
- dado a 6 facce bilanciato con 1 su ciascuna delle facce;
- dado a 6 facce bilanciato con 6 su ciascuna delle facce;
- dado a 8 facce bilanciato;
- dado a 10 facce bilanciato.

Questa attività preliminare ha costituito una fasi di passaggio per il lavoro successivo, presentato nell'attività 3, in cui gli studenti sono stati chiamati a comprendere la differenza tra i dadi truccati e non truccati.
Considerando ognuno dei casi proposti, è stato chiesto agli studenti di rispondere alle seguenti domande.

- Qual è la probabilità che uno di voi venga interrogato?
- Qual è la probabilità che nessuno venga interrogato?

Nella fase conclusiva, gli studenti sono stati invitati a trarre conclusioni sul calcolo delle probabilità in base a tutti i casi proposti prima in gruppi e poi in uno spazio di discussione tra l'intera classe.

Attività 2

Durante la seconda attività del percorso didattico è stato introdotto formalmente il calcolo delle probabilità agli studenti. Sono stati definiti concetti chiave come esperimento aleatorio, evento e assiomi della probabilità, utilizzando un linguaggio rigoroso ma accessibile. Esempi concreti e discussioni di gruppo hanno facilitato la comprensione. Un'attività di verifica con domande su dadi a 6 facce, 4 facce. In particolare, la seconda attività della classe terza ha seguito la stessa struttura della seconda attività della classe seconda, più nel dettaglio presentata nel *sottoparagrafo 4.2.1*.

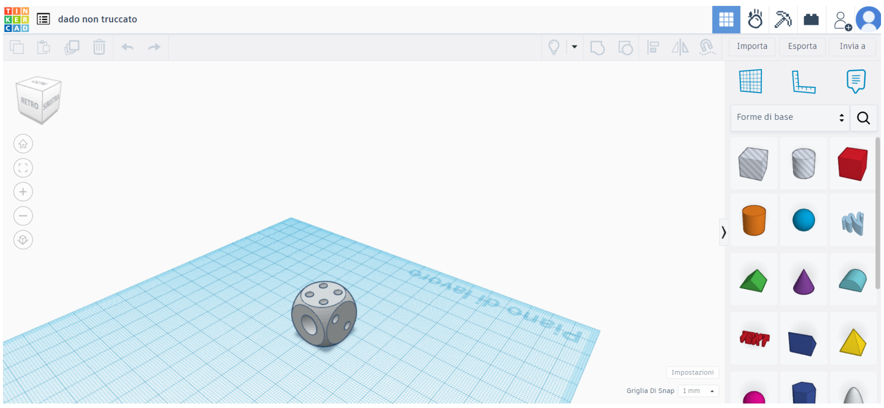
Attività 3

La terza attività del percorso didattico si è focalizzata sulla creazione di un artefatto: un dado truccato e un dado non truccato. Questa fase ha richiesto il tempo maggiore, articolandosi in più giornate e avvalendosi di diversi strumenti tecnologici.

L'attività è iniziata con una discussione in classe volta a chiarire la differenza tra un dado truccato e uno non truccato. Ci si è soffermati sulle possibili differenze strutturali che possono influenzare la probabilità di caduta su una specifica faccia.

A seguito di questa discussione iniziale, ogni gruppo è stato incaricato di progettare, utilizzando la piattaforma online Tinkercad, due dadi: uno truccato e uno non truccato. I dadi progettati sarebbero stati poi stampati con la stampante 3D della scuola.

Inizialmente, gli studenti hanno svolto dei tentativi individuali di progettazione online di dadi truccati e non truccati. Successivamente, all'interno di ciascun gruppo, le diverse idee sono state messe a confronto e utilizzate per la progettazione di un dado truccato e uno non truccato.



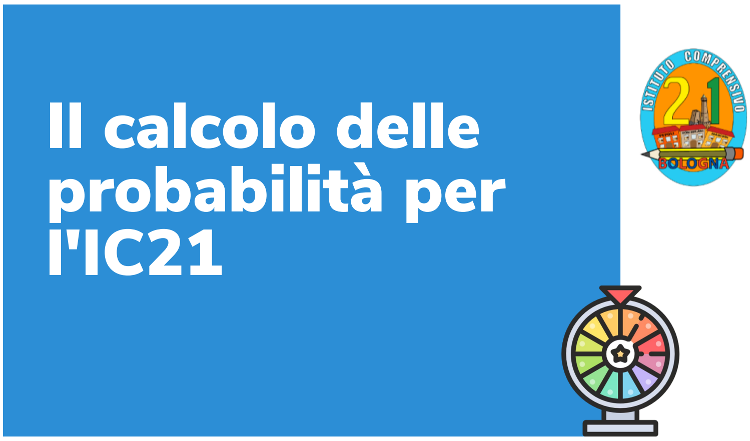
Infine, ogni gruppo ha preparato una presentazione in cui ha illustrato il processo di progettazione dei propri dadi, evidenziando le caratteristiche strutturali che ne determinavano il comportamento.

4.3 L'applicazione dei design principles del TLA

Nel seguente paragrafo viene descritto come sono stati applicati i design principles dell'approcciato trialogico in questa sperimentazione didattica.

La produzione di artefatti secondo il metodo trialogico

Agli studenti delle classi seconda e terza è stato chiesto di progettare e realizzare artefatti per l'apprendimento del calcolo delle probabilità. In considerazione dei due percorsi proposti alle due classi, sono stati progettati due artefatti distinti, precedentemente presentati sinteticamente nei *sottoparagrafi 4.2.1* (Attività 4) e *4.2.2* (Attività 3).



- **Classe seconda**: è stata richiesta la progettazione di una nuova versione del gioco che sta alla base del dilemma di Monty Hall, è stata richiesta la redazione di istruzioni che ne spiegassero il funzionamento ed è stata fornita loro libertà di scelta nella modalità di realizzazione: digitale (es. software, video) o non digitale (es. materiali cartacei).

- **Classe terza**: è stata richiesta la progettazione e realizzazione di dadi truccati e non truccati mediante una stampante 3D. Anche in questo caso è stata richiesta la redazione di istruzioni per l'utilizzo dei dadi. Agli studenti è stata concessa ampia autonomia sia nella progettazione dei dadi che nella creazione delle istruzioni.

Entrambi gli artefatti avevano l'obiettivo di creare risorse utili per la comunità scolastica, in particolare per gli studenti degli anni successivi dell'IC21 di Bologna. L'idea era di realizzare artefatti che facilitassero l'apprendimento del calcolo delle probabilità, tenendo conto del percorso didattico svolto e delle esigenze degli studenti futuri.

La relazione tra individuo e comunità

Per stimolare lo sviluppo di competenze sociali negli studenti, si sono realizzate tutte le attività in gruppo. In ogni classe sono stati formati 6 gruppi. La composizione dei gruppi è stata attentamente studiata per assicurare l'omogeneità, considerando fattori come la facilità di socializzazione dei singoli, le dinamiche relazionali nella classe e la propensione all'apprendimento della matematica.
In ogni gruppo si sono distribuiti 4 ruoli specifici.

- **Controllore del tempo**: incaricato di far rispettare le tempistiche stabilite per le attività, che variavano da 10 a 30 minuti a seconda della complessità.
- **Sintetizzatore**: responsabile della raccolta di tutti i dati e della risposta a tutte le domande formulate.
- **Relatore**: preposto alla presentazione dei risultati raggiunti dal gruppo.
- **Scettico**: delegato a mettere in discussione le idee proposte, incentivando un approccio critico e riflessivo, e a confrontarsi con le opinioni degli altri gruppi.

Si è data agli studenti l'autonomia di scegliere il nome del gruppo e di distribuire i ruoli ai propri componenti, in modo da favorire il senso di appartenenza e la motivazione. La distribuzione di ruoli ben definiti ha avuto la finalità di garantire a ogni membro del gruppo responsabilità specifiche, in modo da evitare fenomeni di dipendenza o di esclusione. Inoltre, ha avuto lo scopo di incentivare la partecipazione attiva di tutti gli studenti al processo di apprendimento, stimolando l'interazione e il dialogo e di agevolare il conseguimento degli obiettivi prefissati, monitorando il lavoro di gruppo.

In ogni attività, i gruppi sono stati sollecitati a creare spazi di discussione per favorire la condivisione di idee e la collaborazione tra i membri. Al termine di ogni fase di discussione di gruppo, il relatore aveva il compito di presentare le conclusioni raggiunte. Inoltre, al termine di ogni attività, si sono organizzati momenti di discussione collettiva in classe, mirati alla sintesi delle diverse proposte e alla elaborazione di conclusioni condivise. L'insegnante ha svolto il ruolo di facilitatore in queste attività di discussione collettiva, fornendo feedback, chiarimenti e approfondimenti.

Avanzamento della conoscenza e miglioramento continuo

Al fine di mettere gli studenti nella condizione di analizzare l'avanzamento della conoscenza e garantire un miglioramento continuo, si è richiesto agli studenti di compilare questionari di autovalutazione e di valutazione dell'operato degli altri studenti.
A tale scopo si è chiesto agli studenti di compilare un questionario anonimo di autovalutazione in entrata (*All. 1: Questionario di autovalutazione in entrata*), al fine di comprendere la situazione della classe. Il questionario si focalizza sul clima della classe, sui lavori di gruppo e sul lavoro individuale. Lo scopo del questionario è valutare le competenze trasversali degli studenti, la capacità di collaborazione e di gestione dei lavori di gruppo, nonché la consapevolezza e l'autonomia nello studio individuale.
Al termine della prima attività si è chiesto agli studenti di compilare un questionario anonimo riguardante il lavoro di gruppo svolto fino a quel momento durante la sperimentazione didattica (*All. 5: Questionario lavoro di gruppo*). Il questionario si concentra sull'analisi del lavoro di gruppo, richiedendo ai partecipanti di valutare diversi aspetti. Le macro aree esaminate includono il raggiungimento degli obiettivi, l'ascolto delle proposte, la partecipazione di tutti i membri, la natura costruttiva delle discussioni, la presa di decisioni basata sui dati raccolti e il rispetto delle regole. Inoltre, il questionario mira a valutare il rispetto dei compiti specifici assegnati a ciascun membro del gruppo. Il questionario, oltre a essere di valutazione del lavoro dei singoli membri, funge anche da autovalutazio-

ne. Infatti, per garantire l'anonimato delle risposte, si è chiesto agli studenti di valutare l'operato di ogni singolo membro del gruppo, compreso il proprio.
Il questionario iniziale è stato riproposto agli studenti alla fine del percorso per confrontare i dati in entrata e i dati in uscita riguardo il ruolo che il progetto avesse avuto sul clima di classe, i lavori di gruppo e i lavori individuali(*All. 2: Questionario di autovalutazione in uscita*). L'unica variante tra i due questionari, consiste nell'aggiunta di una sezione riguardo il livello di gradimento da parte degli studenti nella partecipazione alla sperimentazione.

Favorire la riflessione e la trasformazione tra diverse forme di conoscenza e tra diverse pratiche

Il percorso didattico si articolava in diverse attività, ognuna delle quali ha richiesto agli studenti di utilizzare e sviluppare diversi tipi di conoscenza, come la conoscenza procedurale, la conoscenza tacita e la conoscenza esplicita.

- La conoscenza procedurale si riferisce alle abilità e alle competenze che gli studenti devono acquisire per svolgere le attività proposte, come il calcolo della probabilità, la realizzazione degli artefatti e la presentazione dei risultati.
- La conoscenza tacita si riferisce alla conoscenza che gli studenti hanno già sul concetto di probabilità e che non è facilmente esprimibile o trasferibile, ma che si basa sull'esperienza personale, sull'intuizione e sulla cultura.
- La conoscenza esplicita si riferisce alla conoscenza che gli studenti devono apprendere sul concetto di probabilità.

Inoltre, In entrambi i percorsi, agli studenti è stato proposto di utilizzare diversi formati anche per comunicare la loro conoscenza, attraverso la presentazione del loro artefatto alla classe e alla comunità di apprendimento, ad esempio una presentazione multimediale, un video, un poster, un ebook, un sito web, un gioco, ecc.

Lavorare su oggetti reali e condivisi, ibridando le pratiche

Il progetto è stato presentato agli studenti nell'ambito delle ore curriculari di matematica, ma ha implicato una svolta rispetto ai percorsi che erano stati precedentemente seguiti dal punto di vista disciplinare. Per evidenziare la peculiarità del percorso è stato comunicato agli studenti che erano stati selezionati per una sperimentazione che sarebbe stata poi oggetto di analisi in questa tesi di laurea. Quindi è stato annunciato loro che il percorso avveniva sotto la supervisione, oltre che della loro insegnante, di una figura per loro nuova che li ha resi consapevoli durante la prima lezione della specificità del progetto. È stato sottolineato loro il valore del percorso ai fini della redazione di questa tesi e, soprattutto, il ruolo del loro prodotto per l'apprendimento della probabilità per classi successive del loro istituto comprensivo.

Le tecnologie nel Trialogico

Le tecnologie hanno avuto un ruolo fondamentale in tutte le attività svolte dagli studenti.

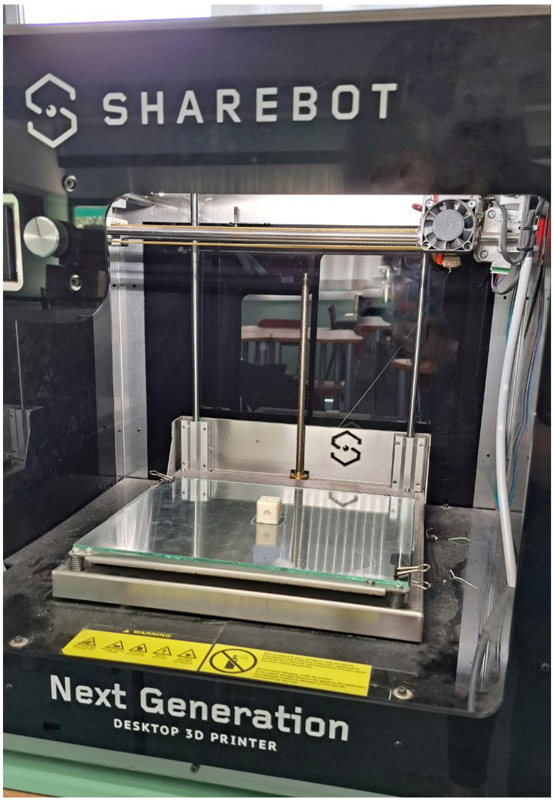
- Per valutare le competenze acquisite, sono stati somministrati dei questionari tramite google moduli, una piattaforma online che consente di creare e gestire sondaggi e quiz.

- In ogni attività, gli studenti hanno potuto usufruire di due chromebook per gruppo, dei computer portatili che utilizzano il sistema operativo Chrome OS e che permettono di accedere a diversi servizi web.

- Tra questi, gli studenti hanno utilizzato google sheet e google drive, due applicazioni che consentono di creare, modificare e condividere fogli di calcolo e documenti online.

- Inoltre, gli studenti hanno avuto accesso in qualsiasi momento alla piattaforma classroom, un ambiente virtuale di apprendimento che facilita la comunicazione e la collaborazione tra docenti e studenti. Attraverso classroom, gli studenti hanno potuto visualizzare le slides per fornire loro istruzioni e/o per consultare materiali teorici riguardanti il calcolo delle probabilità.

- Gli studenti della classe terza hanno avuto anche l'opportunità di utilizzare la piattaforma online thinkercad e la stampante 3D della scuola. Thinkercad è un software di modellazione 3D che consente di progettare e realizzare oggetti tridimensionali in modo semplice e intuitivo. Tuttavia, per motivi di sicurezza legati alle regole dell'istituto comprensivo, la stampante 3D è stata utilizzata esclusivamente dalla docente e gli studenti sono stati coinvolti solo nel processo di supervisione della stampa.



Capitolo 5

Analisi dei dati della sperimentazione

In questo capitolo si presenterà l'analisi delle risposte fornite dal campione di studenti ai questionari somministrati nel corso della sperimentazione. Per tutelare la privacy dei partecipanti, si utilizzerà il termine studente in forma neutra, senza specificare il genere di appartenenza.

5.1 Riflessioni educative

Questo paragrafo si dedica alle conclusioni derivanti dall'analisi della sperimentazione condotta nelle classi coinvolte, mettendo in luce i risultati ottenuti e le differenze rilevate tra le due classi. Si discuterà in particolare l'efficacia dell'utilizzo dell'approccio assiomatico nell'insegnamento della probabilità nella scuola secondaria di primo grado e dell'applicazione dell'approccio trialogico all'apprendimento.

Nei paragrafi successivi, verrà fornita un'analisi dettagliata dei questionari somministrati, sia quelli relativi alla probabilità che quelli relativi all'autovalutazione del clima di classe, dei lavori di gruppi e dei lavori individuali.

Percorsi a confronto

Nel corso della progettazione della sperimentazione didattica, è stato necessario per la classe seconda considerare le problematiche segnalate dagli studenti in relazione all'apprendimento della matematica e ai conflitti interni alla classe. Nella classe terza, la fase preliminare ha evidenziato la necessità di un percorso didattico che tenesse conto delle esperienze pregresse degli studenti, i quali non avevano manifestato particolari difficoltà con la matematica o con il clima di classe.
Nonostante ciò, l'implementazione della sperimentazione ha rivelato differenze significative tra le due classi.

- Nella classe seconda, è stato rilevante osservare la serietà con cui gli studenti hanno compilato il primo questionario di autovalutazione, che rifletteva il clima di classe, la capacità di lavorare in gruppo e individualmente. Questo spazio è stato per loro fondamentale per esprimere e documentare problematiche a loro care, che desideravano fossero risolte. Inoltre, sebbene nella fase iniziale della sperimentazione la classe seconda abbia incontrato alcune difficoltà, dovute alla mancanza di dimestichezza con i lavori in gruppo e con gli spazi di discussione, gli studenti hanno dimostrato serietà e impegno una volta superata questa fase. Hanno partecipato attivamente sia nei gruppi sia nel gruppo classe, compilando correttamente tutte le schede delle attività proposte e chiedendo supporto quando necessario.

- Nella classe terza, invece, è stato osservato un comportamento differente. Il questionario di autovalutazione in entrata non è stato preso altrettanto seriamente come nella classe seconda. Gli studenti si sono dimostrati più pronti alla sperimentazione e al lavoro di gruppo, ma hanno mostrato una maggiore tendenza ad arrendersi, pur riuscendo a completare adeguatamente le attività proposte.

L'analisi dei questionari di probabilità somministrati al termine del percorso didattico, nonché il confronto tra i questionari di autovalutazione in entrata e in uscita per entrambe le classi, ha confermato le tendenze osservate durante la sperimentazione. In particolare, è emerso che la percentuale di risposte corrette ai quesiti di probabilità è risultata simile tra la classe seconda e la classe terza. Un dato di rilievo è rappresentato dalla percentuale di "risposte assenti", ovvero quelle domande lasciate in bianco dagli studenti. Si è osservato che nella classe terza tale percentuale è stata superiore rispetto alla classe seconda. Di seguito si riporta la tabella che illustra il confronto delle risposte fornite al questionario di uscita per le due classi.

Risultati del questionario in uscita di probabilità

Quesito	**Risposte Corrette**		**Risposte Assenti**	
	Classe Seconda	**Classe Terza**	**Classe Seconda**	**Classe Terza**
1	82%	47%	0%	5%
2	71%	84%	6%	10%
3	76%	78%	12%	16%
4	88%	95%	0%	0%
5	88%	100%	0%	0%
6	71%	63%	6%	11%

L'analisi comparativa dei questionari di autovalutazione somministrati agli studenti all'inizio e al termine della sperimentazione didattica ha confermato le osservazioni effettuate durante il progetto.

- I dati raccolti dai questionari di autovalutazione indicano che gli studenti della classe seconda hanno percepito un miglioramento nel clima di classe e hanno identificato aree di miglioramento sia all'inizio sia al termine della sperimentazione. Questo suggerisce che il progetto ha avuto un impatto positivo, migliorando sia la collaborazione di gruppo sia le competenze individuali.

- D'altro canto, i questionari di autovalutazione della classe terza rivelano un clima di classe meno sereno, contrariamente a quanto dichiarato dagli studenti nella fase preliminare. I risultati evidenziano che non ci sono stati miglioramenti significativi tra l'inizio e la conclusione della sperimentazione, mantenendo invariate le aree problematiche.

Nonostante ciò, il percorso di probabilità è stato ben accolto da entrambe le classi, che lo hanno trovato formativo e interessante. Tuttavia, mentre gli studenti della classe seconda hanno valorizzato gli aspetti collaborativi e di discussione come punti di forza della sperimentazione, quelli della classe terza hanno focalizzato l'attenzione sull'apprendimento della matematica, senza fornire feedback costruttivi per possibili miglioramenti.

Oltre il misconcetto di equiprobabilità

Dall'analisi preliminare del questionario sulla probabilità, emerge che gli studenti, pur non avendo ricevuto un insegnamento formale sul calcolo delle probabilità, si trovano regolarmente a confrontarsi con situazioni quotidiane in cui il concetto di probabilità è presente. Hanno sviluppato un'intuizione di base che associa la probabilità alla possibilità che un evento si verifichi, spesso espressa in termini percentuali. Tuttavia, risulta evidente una difficoltà nel collocare la probabilità all'interno del dominio matematico, percependola piuttosto come un concetto applicato piuttosto che teorico. Interessante è l'osservazione che, quando invitati a calcolare intuitivamente la probabilità di determinati eventi, gli studenti mostrano una comprensione implicita della distinzione tra situazioni in cui è applicabile la definizione classica di probabilità e quelle in cui non lo è. In particolare, sembrano riconoscere intuitivamente i casi di equiprobabilità e quelli in cui tale assunzione non è valida.

L'analisi dei questionari in uscita di probabilità ha confermato il successo della sperimentazione. I risultati indicano che una percentuale significativa di studenti, superiore alla metà per ciascuna classe, ha fornito risposte corrette, attestando l'efficacia dell'approccio assiomatico nell'apprendimento della probabilità nella scuola secondaria di primo grado.

È stato osservato che l'approccio assiomatico non ha introdotto una complessità eccessiva; al contrario, gli studenti hanno dimostrato di poter assimilare e appli-

care i concetti chiave con competenza. In particolare, si è notato l'assenza del misconcetto di equiprobabilità tra gli studenti, suggerendo che l'approccio assiomatico è un metodo efficace per evitare che si presenti e che questo dipende dalle strategie didattiche adottate.
Inoltre, la scelta di classi con livelli di preparazione iniziali diversi ha mostrato che l'approccio assiomatico è versatile e adattabile, risultando efficace in contesti eterogenei. Sebbene problemi logistici abbiano impedito l'inclusione di una classe prima nella sperimentazione, i dati raccolti offrono prospettive promettenti per l'estensione dell'approccio anche a questo livello.

Si propone, quindi, di adottare l'approccio assiomatico all'insegnamento della probabilità a partire dalla scuola secondaria di I grado e per quella di gradi successivi, come strategia per introdurre il calcolo della probabilità e prevenire il misconcetto di equiprobabilità.

5.2 Analisi dati dei questionari di probabilità

Questionario conoscenze di base di probabilità

Prima di avviare la sperimentazione, si è ritenuto opportuno valutare le conoscenze pregresse degli studenti sul concetto di probabilità e le sue applicazioni in diversi contesti. A tal fine, si è somministrato un questionario, riportato nell'*All. 3: Conoscenze di base di probabilità*, volte a indagare i concetti e le intuizioni che gli studenti avevano maturato sul calcolo delle probabilità, in relazione alle loro esperienze di vita quotidiana e ai contesti in cui avevano incontrato tale concetto. Il questionario è stato compilato da 22 studenti su 25 in entrambe le classi. L'analisi delle risposte ha evidenziato risultati simili tra le due classi, per cui si è proceduto ad un'analisi comune, evidenziando eventuali differenze significative tra la classe seconda e la classe terza.
Prima di presentare l'analisi delle risposte al questionario, si rende necessario precisare le esperienze disciplinari pregresse delle due classi coinvolte nella sperimentazione. In nessuna delle due classi era stato trattato il tema del calcolo delle probabilità durante le ore di matematica prima dell'avvio della sperimentazione. Tuttavia, nella classe terza, gli studenti avevano affrontato alcuni esercizi relativi alle leggi di Mendel nell'ambito della disciplina delle scienze, che richiedevano il calcolo della probabilità di manifestazione di caratteri ereditari in determinati incroci. Questo può aver influito sulle conoscenze e le intuizioni degli studenti della classe terza rispetto a quelli della classe seconda, come si vedrà nell'analisi.

La prima domanda del questionario chiedeva agli studenti se avessero mai sentito parlare di probabilità e, in caso affermativo, dove. Tutti gli studenti hanno risposto di aver già sentito parlare di probabilità nella vita quotidiana. Gli studenti hanno menzionato i seguenti esempi di contesti in cui hanno incontrato il concetto di probabilità:

- YouTube/TV;
- meteo;
- scuola;

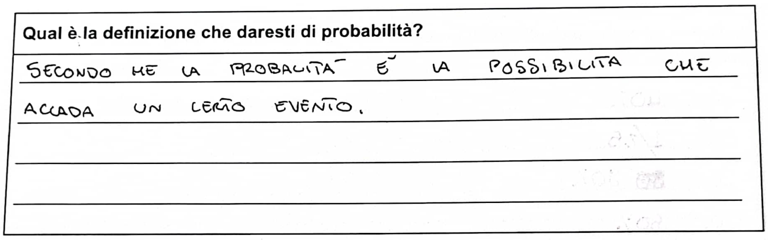
- sport.

Queste risposte indicano che gli studenti hanno avuto diversi contatti con il concetto di probabilità, sia in ambito scolastico che extra-scolastico, e ne riconoscono la rilevanza in diversi ambiti.

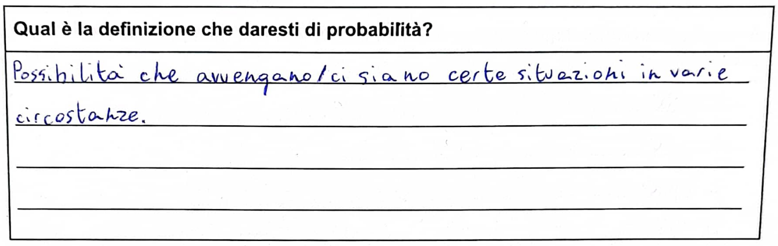
La seconda domanda del questionario chiedeva agli studenti di fornire una definizione di probabilità. Si possono distinguere due macro aree maggiormente menzionate per fornire una definizione di probabilità:

- gli studenti hanno associato la probabilità alla valutazione dell'incertezza, usando termini come "possibilità", "possibile"o "probabile";
- gli studenti hanno associato la probabilità alla percentuale.

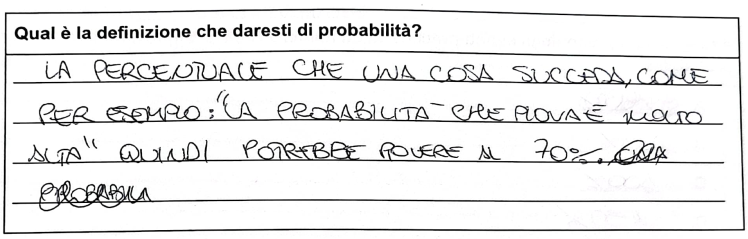
Sono di seguito riportati esempi di risposta di 4 studenti che rientrano nelle due macro categorie evidenziate.


Qual è la definizione che daresti di probabilità?

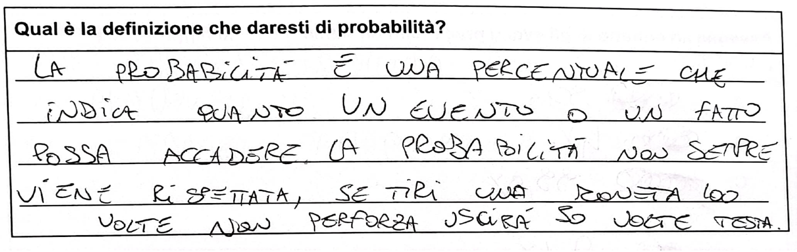
SECONDO ME LA PROBALITÀ È LA POSSIBILITÀ CHE ACCADA UN CERTO EVENTO.


Qual è la definizione che daresti di probabilità?

Possibilità che avvengano/ci siano certe situazioni in varie circostanze.

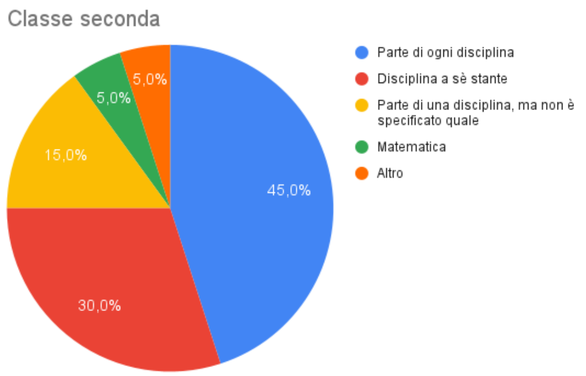

Qual è la definizione che daresti di probabilità?

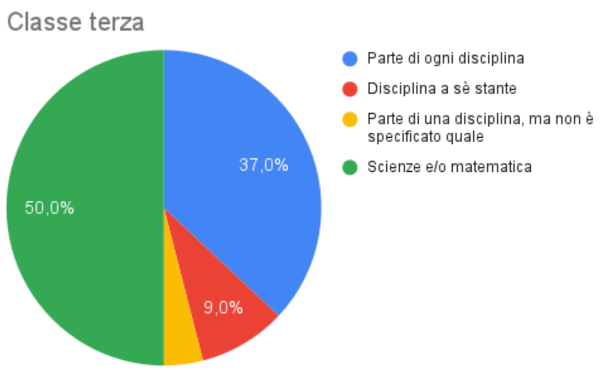
LA PERCENTUALE CHE UNA COSA SUCCEDA, COME PER ESEMPIO: "LA PROBABILITÀ CHE PIOVA È MOLTO ALTA" QUINDI POTREBBE PIOVERE AL 70%.


Qual è la definizione che daresti di probabilità?

LA PROBABILITÀ È UNA PERCENTUALE CHE INDICA QUANTO UN EVENTO O UN FATTO POSSA ACCADERE. LA PROBABILITÀ NON SEMPRE VIENE RISPETTATA, SE TIRI UNA MONETA 100 VOLTE NON PERFORZA USCIRÀ 50 VOLTE TESTA.

È stato chiesto poi agli studenti di esprimere il loro punto di vista sulla collocazione disciplinare della probabilità, ovvero se la considerassero parte di una delle materie che studiano a scuola o una materia a sé stante. Le risposte degli studenti sono state le seguenti.





L'analisi delle risposte alla domanda ha evidenziato la diversità di opinioni degli studenti sulla collocazione disciplinare della probabilità. Si è osservato inoltre come il percorso di scienze svolto dalla classe terza abbia influito sulle concezioni degli studenti di tale classe. Infatti, gli studenti di terza non hanno riconosciuto la probabilità come parte della matematica, ma l'hanno associata sia alla matematica che alle scienze, forse a causa della continuità didattica tra le due materie, insegnate dalla stessa docente nella scuola secondaria di I grado. Al contrario, gli studenti di seconda hanno mostrato una maggiore tendenza a considerare la probabilità come una materia a parte, non riconducibile ad alcuna delle materie studiate a scuola. Tuttavia, in entrambe le classi, si è riscontrato un numero significativo di studenti che ha attribuito alla probabilità un carattere trasversale e applicativo, riferendola ad ogni materia, confondendo così la disciplina con le sue applicazioni. Per approfondire le concezioni degli studenti che hanno ricondotto la probabilità ad ogni materia, si riportano di seguito alcune delle loro risposte.

Pensi che la probabilità possa essere ricondotta ad una delle materie che studi a scuola o pensi che costituisca una materia a sé stante?

La probabilità secondo me è parte di ~~tutte~~ quasi tutte le materie e le scienze. Ad esempio la riscontriamo in geografia con le previsioni geologiche, in economia con gli andamenti delle borse e anche in matematica in problemi di statistiche.

Pensi che la probabilità possa essere ricondotta ad una delle materie che studi a scuola o pensi che costituisca una materia a sé stante?

SECONDO ME LA PROBABILITÁ POSSA ESSERE RICONDOTTA A TUTTE LE MATERIE PERCHÉ ES. PIÚ UN ALUNNO STUDIA PIÚ A PROBABILITÁ DI OTTENERE BUONI RISULTATI (QUESTO NON É UN DATO SEMPRE CERTO, PERCHÉ ES. SIA IL METODO DI STUDIARE O ALTRI FATTORI POSSONO CAMBIARNE IL RISULTATO)

Pensi che la probabilità possa essere ricondotta ad una delle materie che studi a scuola o pensi che costituisca una materia a sé stante?

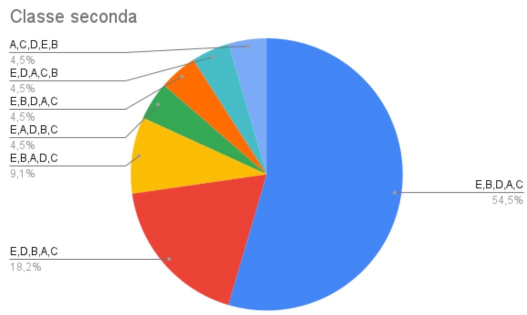
Per me la probabilità può essere ricondotta in tutte le materie anche senza essere specificata perché c'é sempre.

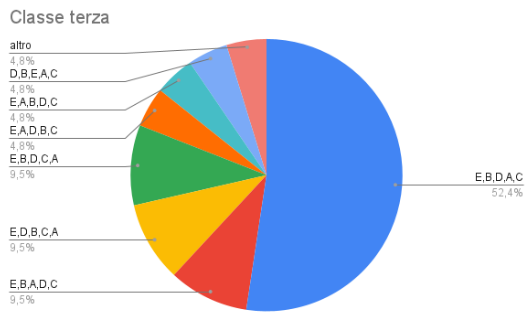
Pensi che la probabilità possa essere ricondotta ad una delle materie che studi a scuola o pensi che costituisca una materia a sé stante?
PENSO CHE LA PROBABILITÀ POSSA ESSERE RICONDOTTA A PIÙ MATERIE, TIPO SE SEI BRAVO IN DUE MATERIE DIVERSE HAI LA STESSA PROBABILITÀ DI PRENDERE UN BEL VOTO, O SE SI STUDIA MOLTO C'È PIÙ PROBA-BILITÀ DI PRENDERE UN BEL VOTO E SE SI STUDIA POCO O NON SI STUDIA C'È PIÙ PROBABILITÀ DI PRENDERE UN BRUTTO VOTO

Si proponeva successivamente agli studenti una lista di cinque eventi, chiedendo loro di ordinarli dal meno probabile al più probabile. Gli eventi proposti sono riportatati di seguito.

- A. “Domani a Bologna piove”
- B. “Al prossimo giro di interrogazioni esce il tuo nome alla ruota delle interrogazioni”
- C. “L’anno scolastico finisce il 7 giugno”
- D. “Lanciando una moneta esce testa”
- E. “Iniziare il primo anno delle medie il prossimo anno”

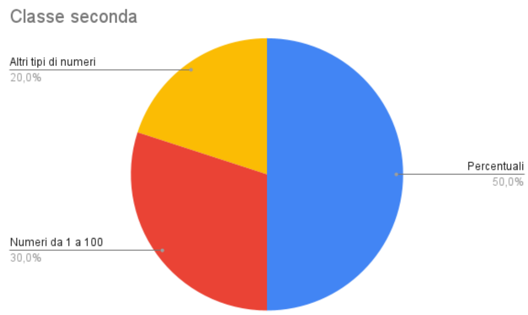
Tra questi eventi, E era l’evento impossibile, in quanto gli studenti erano già al secondo o al terzo anno delle medie, e C era l’evento certo, in quanto la data di fine anno scolastico era già stabilita. L’evento B aveva una probabilità pari a 0.4, considerando che le classi erano composte da 25 studenti ciascuna e che la ruota delle interrogazioni era equiprobabile. Con il termine ruota delle interrogazioni si fa riferimento a uno strumento online che la docente impiega per selezionare casualmente gli studenti da interrogare in classe. L’evento D aveva una probabilità pari a 0.5, in quanto lanciando una moneta equilibrata si ha la stessa possibilità di ottenere testa o croce. L’evento A aveva una probabilità variabile, in quanto dipendeva dalle previsioni meteorologiche. Per tenere conto di questa variabilità, il questionario è stato somministrato in due giorni consecutivi a ridosso dei giorno dell’alluvione in Emilia Romagna. Sono riportate di seguito le risposte degli studenti.

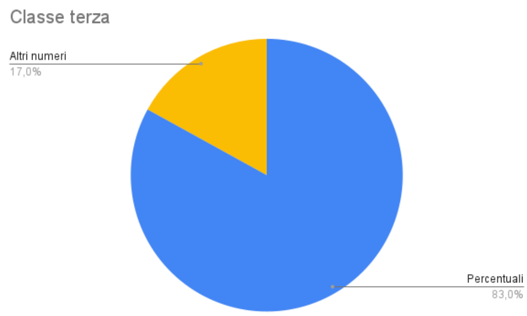




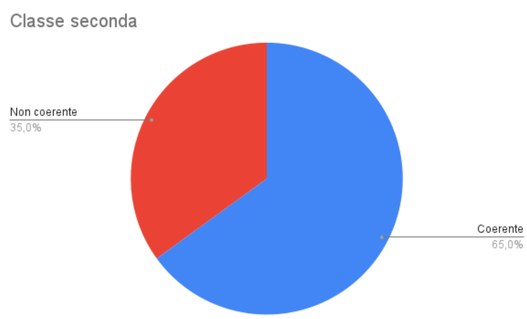
Dall'analisi delle risposte, si può osservare che il 90% degli studenti della classe seconda e il 70% degli studenti della classe terza hanno collocato correttamente l'evento certo e l'evento impossibile, mostrando di aver compreso il significato di questi due estremi della scala delle probabilità. Inoltre più della metà degli studenti delle due classi ha scelto l'ordinamento "E,B,D,A,C ", in modo coerente con la probabilità di pioggia superiore al 50%.

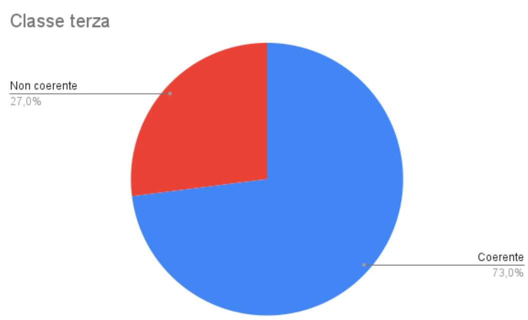
Inoltre, è stato richiesto agli studenti di assegnare ad ognuno degli eventi proposti nella domanda precedente un numero che ne rappresentasse la probabilità. Nella classe seconda, il 50% degli studenti ha usato una percentuale, mentre il 30% ha usato un numero intero compreso tra 1 e 100, probabilmente intendendo una percentuale ma omettendo il simbolo %. Nella classe terza, invece, l'83% degli studenti ha usato una percentuale, mostrando una maggiore uniformità nell'esprimere la probabilità. Questo può essere dovuto al fatto che questi studenti avevano già affrontato alcuni esercizi di probabilità nelle ore di scienze, in cui la probabilità era espressa in percentuale.



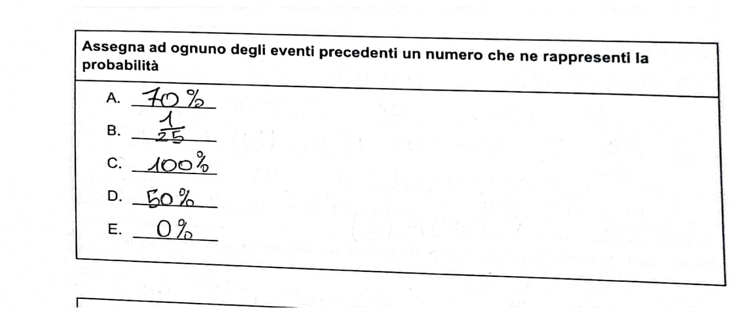


Per verificare la coerenza delle risposte degli studenti alla precedente domanda del questionario, si è confrontato il numero assegnato ad ogni evento con l'ordinamento degli eventi dato nella domanda precedente. Si è considerato coerente il numero assegnato ad un evento se maggiore del numero assegnato agli eventi meno probabili e minore del numero assegnato agli eventi più probabili, secondo l'ordinamento dato. L'analisi ha mostrato che il 65% degli studenti della classe seconda e il 73% degli studenti della classe terza ha assegnato dei numeri coerenti con l'ordinamento degli eventi.



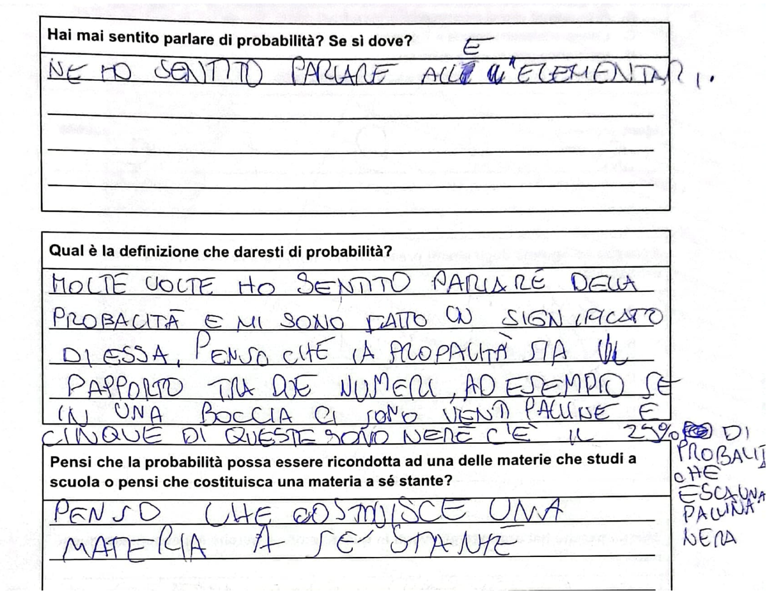


Tra le risposte degli studenti, si è riscontrato un caso particolare di cinque studenti, due appartenenti alla classe seconda e tre alla classe terza, che hanno usato una modalità mista per esprimere la probabilità degli eventi. Questi studenti hanno usato una percentuale per indicare la probabilità degli eventi A, C, D ed E, mentre hanno usato la frazione 1/25 per indicare la probabilità dell'evento B. Questo suggerisce che questi studenti hanno, in maniera intuitiva, applicato la definizione classica nel caso in cui gli esiti dell'esperimento aleatorio sono equiprobabili. È presente di seguito una delle cinque risposte sopra descritte.


Assegna ad ognuno degli eventi precedenti un numero che ne rappresenti la probabilità

A. 70 %
B. $\frac{1}{25}$
C. 100%
D. 50 %
E. 0%

Tra i casi analizzati, si segnala quello di uno studente che ha affermato di aver già incontrato il calcolo delle probabilità nella scuola primaria. La sua concezione di probabilità è stata formulata come un rapporto tra due numeri, forse riferendosi al rapporto tra casi favorevoli e casi possibili che potrebbe essere stata la strategia didattica adottata. Tuttavia, nella soluzione dei quesiti, lo studente ha impiegato soltanto frazioni del tipo $n/10$ con n compreso tra 1 e 9, senza motivare la scelta di tale denominatore. Questa modalità potrebbe evidenziare una limitata comprensione del significato della probabilità e una tendenza a usare procedure meccaniche. Questa ipotesi si basa sulle indagini presentate nel capitolo 3, relative alla editoria scolastica e alle risposte dei docenti al questionario somministrato agli insegnanti, ma non è ovviamente supportata da dati esatti relativi al caso specifico. Si riportano di seguito una parte delle risposte al questionario dello studente in questione.



Hai mai sentito parlare di probabilità? Se sì dove?

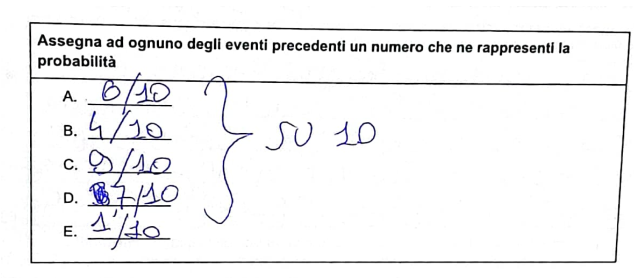
NE HO SENTITO PARLARE ALLE ELEMENTARI.

Qual è la definizione che daresti di probabilità?

MOLTE VOLTE HO SENTITO PARLARE DELLA PROBALITÀ E MI SONO FATTO UN SIGNIFICATO DI ESSA. PENSO CHE LA PROBALITÀ SIA UN RAPPORTO TRA DUE NUMERI, AD ESEMPIO SE IN UNA BOCCIA CI SONO VENTI PALLINE E CINQUE DI QUESTE SONO NERE C'È IL 25% DI PROBALITÀ CHE ESCA UNA PALLINA NERA

Pensi che la probabilità possa essere ricondotta ad una delle materie che studi a scuola o pensi che costituisca una materia a sé stante?

PENSO CHE COSTITUISCE UNA MATERIA A SÉ STANTE



Assegna ad ognuno degli eventi precedenti un numero che ne rappresenti la probabilità

A. 6/10
B. 4/10
C. 0/10
D. 7/10
E. 1/10

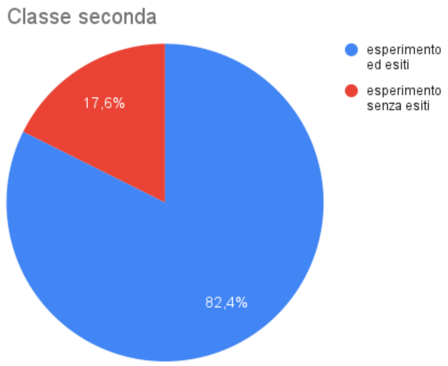
SU 10

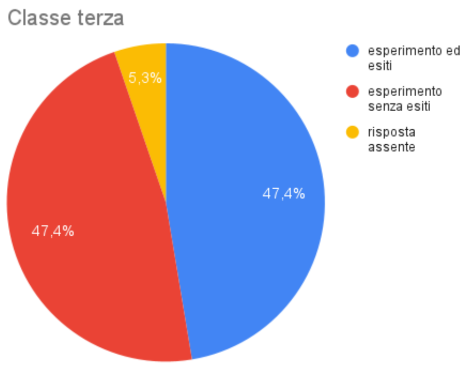
Questionario in uscita di probabilità

Come verifica finale del percorso, è stato somministrato agli studenti un questionario individuale, presente nell'*All.4: Questionario probabilità in uscita*, che riprendeva i concetti chiave trattati durante le attività. Lo scopo del questionario era valutare il livello di padronanza degli studenti sui concetti di esperimento aleatorio, esito ed evento, che erano stati presentati loro. Il questionario prevedeva inoltre quattro esercizi che richiedevano l'applicazione dell'approccio assiomatico alla probabilità, che era stato l'unico insegnato loro durante il percorso. Due di questi esercizi potevano essere risolti anche attraverso l'applicazione della definizione classica, in quanto si trattava di eventi equiprobabili, ma gli altri due richiedevano necessariamente l'uso degli assiomi. L'obiettivo era verificare se la metodologia didattica adottata per l'insegnamento della probabilità avesse consentito agli studenti di acquisire gli strumenti necessari per calcolare la probabilità in diversi contesti, e di evitare così il misconcetto di equiprobabilità.
Il questionario è stato compilato da 17 studenti della classe seconda e 19 studenti della classe terza.

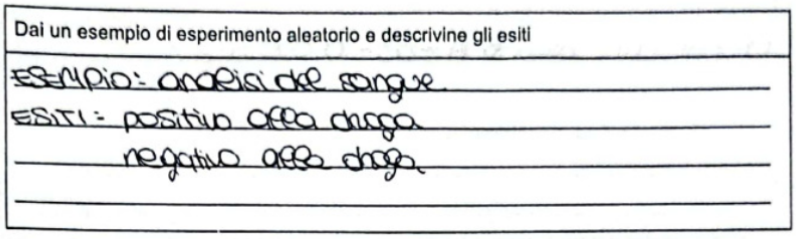
Primo quesito

Quesito: *Dai un esempio di esperimento aleatorio e descrivine gli esiti.*
Per valutare la comprensione degli studenti sul concetto di esperimento aleatorio, si è richiesto loro di fornire un esempio di tale fenomeno e di elencare i possibili esiti. Si è considerata la risposta come completamente corretta se entrambi gli elementi erano presenti, mentre è stato considerata parzialmente corretta se solo l'esempio era corretto, ma gli esiti non erano specificati. In caso di mancata risposta, è stata considerata come risposta assente. I risultati hanno mostrato una differenza significativa tra le due classi: l'82,4% degli studenti della classe seconda ha dato una risposta completamente corretta, mentre solo il 47,4% degli studenti della classe terza ha raggiunto lo stesso livello. Inoltre, il 5% degli studenti della classe terza non ha risposto al quesito, contro lo 0% della classe seconda.

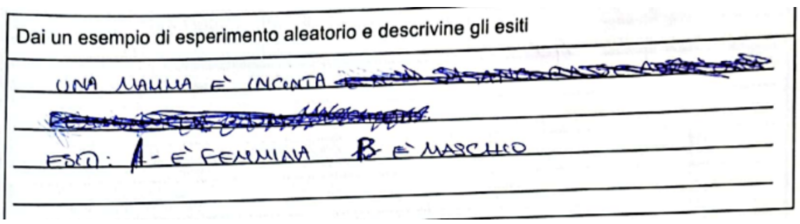




Un'osservazione interessante riguarda la varietà degli esempi forniti dagli studenti: oltre ai casi più noti, come il lancio di un dado o di una moneta, si sono riscontrati esempi originali e pertinenti alla vita reale, che testimoniano una buona capacità di applicare il concetto di esperimento aleatorio a diversi contesti. Se ne riportano di seguito alcuni esempi.

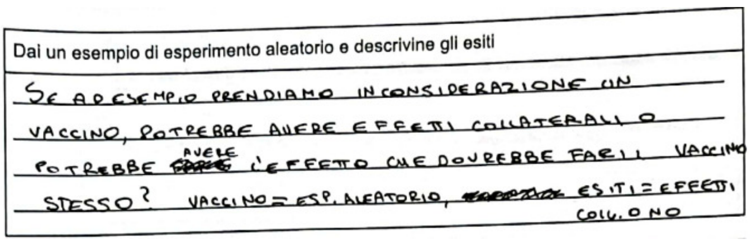

Dai un esempio di esperimento aleatorio e descrivine gli esiti

ESEMPIO: analisi del sangue.
ESITI: positivo alla droga
negativo alla droga

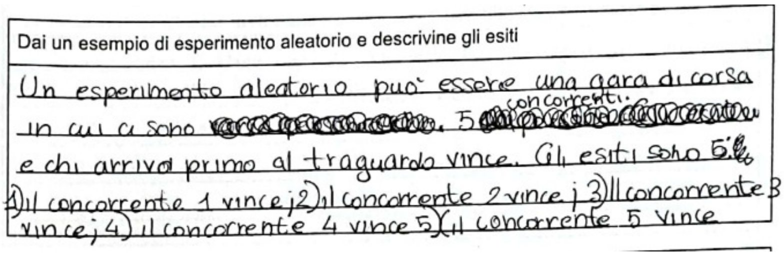

Dai un esempio di esperimento aleatorio e descrivine gli esiti

UNA MAMMA È INCINTA

ESITI: A - È FEMMINA B È MASCHIO


Dai un esempio di esperimento aleatorio e descrivine gli esiti

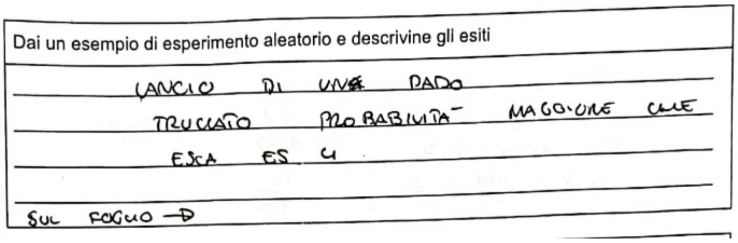
SE AD ESEMPIO PRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE UN
VACCINO, POTREBBE AVERE EFFETTI COLLATERALI O
POTREBBE AVERE L'EFFETTO CHE DOVREBBE FARE IL VACCINO
STESSO? VACCINO = ESP. ALEATORIO, ESITI = EFFETTI COLL. O NO



Dai un esempio di esperimento aleatorio e descrivine gli esiti

Un esperimento aleatorio può essere una gara di corsa in cui ci sono 5 concorrenti. e chi arriva primo al traguardo vince. Gli esiti sono 5: 1) il concorrente 1 vince; 2) il concorrente 2 vince; 3) il concorrente 3 vince; 4) il concorrente 4 vince 5) il concorrente 5 vince

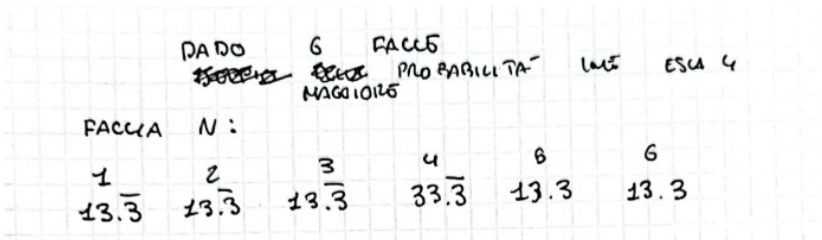
Inoltre, si riporta di seguito il caso di uno studente della classe seconda che ha proposto l'esempio di un dado truccato, specificando il meccanismo e la probabilità di ciascun esito, pur non essendo richiesto dal quesito.



Dai un esempio di esperimento aleatorio e descrivine gli esiti

LANCIO DI UN DADO TRUCCATO PROBABILITA' MAGGIORE CHE ESCA ES 4

SUL FOGLIO →



DADO 6 FACCE
PROBABILITA' MAGGIORE CHE ESCA 4

FACCIA N:

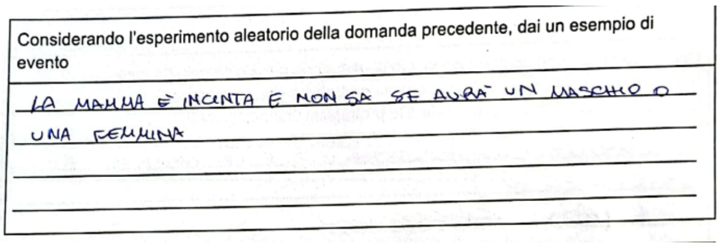
1	2	3	4	5	6
$13.\overline{3}$	$13.\overline{3}$	$13.\overline{3}$	$33.\overline{3}$	13.3	13.3

Secondo quesito

Quesito: *Considerando l'esperimento aleatorio della domanda precedente, dai un esempio di evento.*

Questo quesito richiedeva agli studenti di riuscire a fornire oltre agli esiti un esempio di evento associato all'esperimento aleatorio, un esempio di evento. La risposta è ritenuta corretta se è stato fornito un esempio di evento formulato con un linguaggio appropriato, parzialmente corretta se lo studente non ha utilizzato una formulazione adeguata per descrivere l'evento ma ha fornito un esempio, errata se l'esempio fornito non rappresenta un evento, risposta assente se lo studente non ha risposto al quesito.

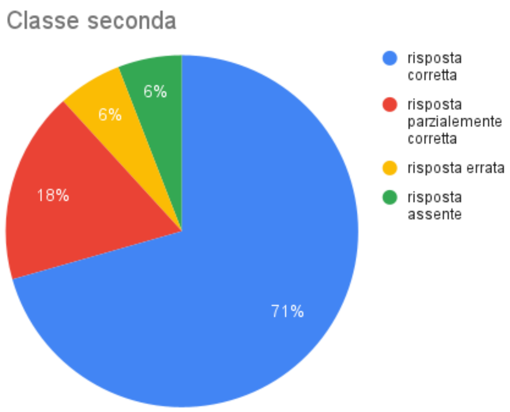
Per illustrare il tipo di risposta che è stata valutata come parziale, si riporta qui di seguito un esempio tratto dalle risposte degli studenti. L'esempio si riferisce a uno degli esperimenti aleatori osservati nella domanda precedente.

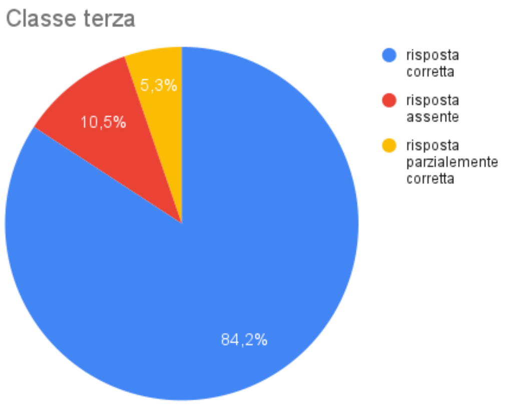

Considerando l'esperimento aleatorio della domanda precedente, dai un esempio di evento

LA MAMMA È INCINTA E NON SA SE AVRÀ UN MASCHIO O UNA FEMMINA

Una formulazione che avrebbe soddisfatto i criteri di correttezza sarebbe stata: A="La mamma è incinta di un maschio".

Si riportano di seguito i grafici relativi alle risposte degli studenti.





Nella classe seconda la maggior parte degli studenti (76,5%) ha dato una risposta corretta al quesito, mentre una minoranza (18%) ha dato una risposta errata. Solo il 6% degli studenti ha dato una risposta parzialmente corretta o assente. Questi dati indicano che gli studenti della classe seconda hanno una buona padronanza del concetto di evento.

Nella classe terza la maggior parte degli studenti (84,2%) ha dato una risposta corretta al quesito, ma una percentuale non trascurabile (10,5%) non ha risposto al quesito. Solo il 5,3% degli studenti ha dato una risposta parzialmente corretta. Questi dati indicano che gli studenti della classe terza hanno una discreta padronanza del concetto di evento, ma alcuni di loro hanno avuto difficoltà a esprimerlo o a comprenderlo.

Terzo quesito

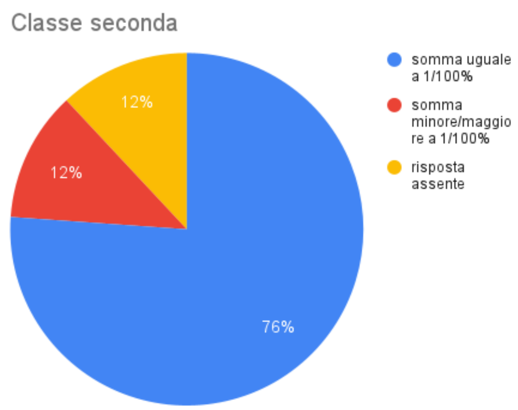
Quesito: *Considera il risultato relativo alla partita di calcio Napoli-Bologna. Assegna ad ognuno degli eventi una probabilità di verificarsi servendoti degli assiomi e spiega come li hai scelti.*

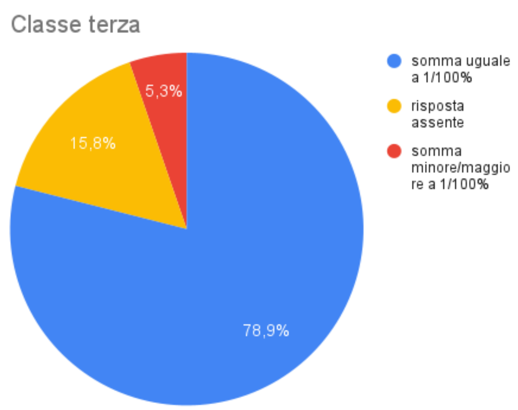
- *A="Vince il Napoli."*
- *B="Vince il Bologna."*
- *C="C'è pareggio."*

Questo quesito intendeva verificare la capacità degli studenti di assegnare la probabilità agli eventi, applicando gli assiomi della probabilità e giustificando le loro scelte. L'evento proposto era un esempio di esperimento aleatorio familiare e riconducibile alla loro quotidianità. L'analisi delle risposte a questo quesito si è basata su due criteri. Il primo era il rispetto degli assiomi. Il secondo era la coerenza e la pertinenza dell'argomentazione utilizzata dagli studenti nell'assegnare la probabilità agli eventi.

Per analizzare come gli studenti hanno assegnato la probabilità agli eventi, si è tenuto conto del rispetto degli assiomi della probabilità. Si è osservato che gli studenti hanno utilizzato sia numeri compresi tra 0 e 1, sia percentuali, per esprimere la probabilità degli eventi. Questo conferma che l'utilizzo delle percentuali è probabilmente la forma più intuitiva e familiare per il loro ragionamento, e che quindi hanno avuto difficoltà ad abituarsi alla forma proposta durante la sperimentazione. Si è considerata la stessa categoria di risposta sia per gli studenti che hanno utilizzato numeri tra 0 e 1, sia per quelli che hanno utilizzato percentuali.

Si è valutata la risposta come corretta se la somma delle probabilità degli eventi era uguale a 1 o al 100%, come errata se la somma era diversa da 1 o dal 100%, come assente se lo studente non ha risposto al quesito. I risultati hanno mostrato una differenza tra le due classi: nella classe seconda, il 76% degli studenti ha dato una risposta corretta, il 12% una risposta errata e il 12% una risposta assente. Nella classe terza, invece, il 78% degli studenti ha dato una risposta corretta, il 5% una risposta errata e il 15% una risposta assente.



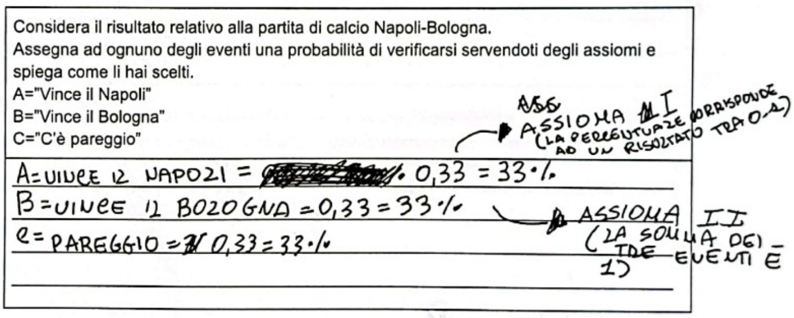


Per analizzare come gli studenti hanno motivato la scelta delle probabilità degli eventi, si sono distinte due categorie di risposte: gli studenti che hanno considerato gli eventi come equiprobabili e gli studenti che non hanno considerato gli eventi come equiprobabili. Per ciascuna categoria, si è valutata la presenza dell'argomentazione fornita dagli studenti.

Classe seconda	Eventi equiprobabili	Eventi non equiprobabili
Con argomentazione	15%	54%
Senza argomentazione	23%	8%

Classe terza	Eventi equiprobabili	Eventi non equiprobabili
Con argomentazione	13%	40%
Senza argomentazione	33%	13%

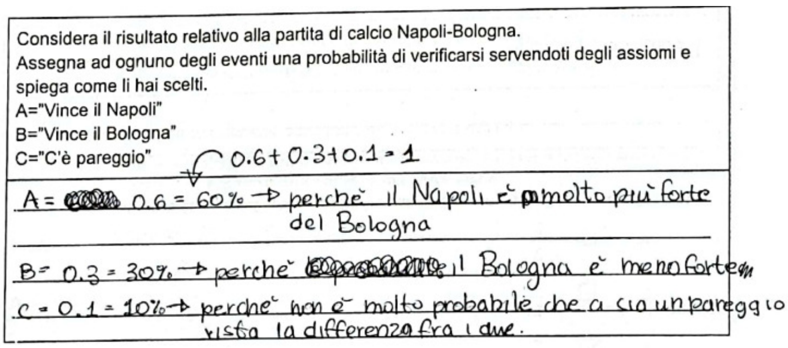
Per analizzare come gli studenti hanno fatto riferimento agli assiomi della probabilità nelle loro risposte, si sono considerate sia le risposte con argomentazione che quelle senza argomentazione. Sono stati selezionati due esempi rappresentativi di ciascuna categoria, uno in cui lo studente ha fatto riferimento agli assiomi senza argomentare la scelta delle probabilità e uno in cui lo studente ha fatto riferimento agli assiomi e ha argomentato la scelta delle probabilità.


Considera il risultato relativo alla partita di calcio Napoli-Bologna.
Assegna ad ognuno degli eventi una probabilità di verificarsi servendoti degli assiomi e spiega come li hai scelti.
A="Vince il Napoli"
B="Vince il Bologna"
C="C'è pareggio"

ASSIOMA I (LA PERCENTUALE CORRISPONDE AD UN RISULTATO TRA 0-1)

A=VINCE IL NAPOLI = 0,33 = 33%
B=VINCE IL BOLOGNA = 0,33 = 33%
C= PAREGGIO = 0,33 = 33%

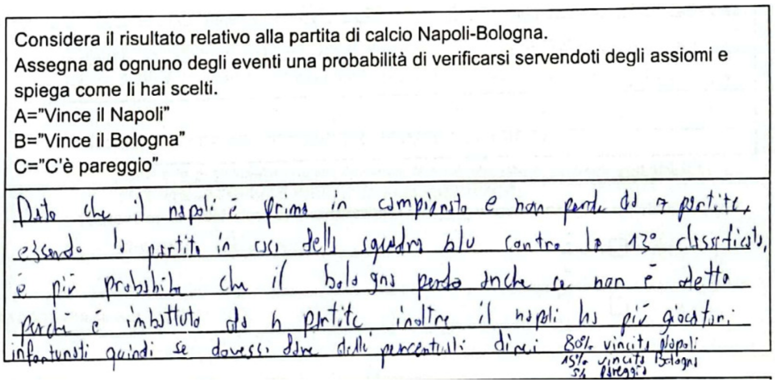
ASSIOMA II (LA SOMMA DEI TRE EVENTI È 1)


Considera il risultato relativo alla partita di calcio Napoli-Bologna.
Assegna ad ognuno degli eventi una probabilità di verificarsi servendoti degli assiomi e spiega come li hai scelti.
A="Vince il Napoli"
B="Vince il Bologna"
C="C'è pareggio"

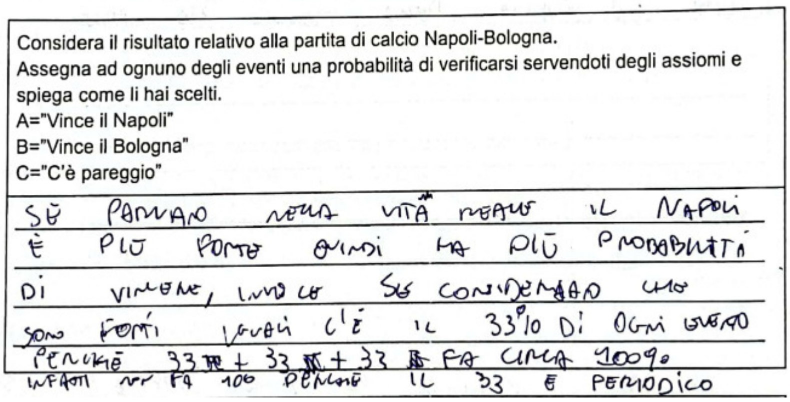
0.6 + 0.3 + 0.1 = 1

A = 0.6 = 60% → perchè il Napoli è molto più forte del Bologna
B = 0.3 = 30% → perchè il Bologna è meno forte
C = 0.1 = 10% → perchè non è molto probabile che ci sia un pareggio vista la differenza fra i due.

Inoltre, gli studenti hanno affrontato l'esercizio basandosi sia sui contenuti appresi riguardo il calcolo delle probabilità, ma anche sulle informazioni più o meno avanzate legate al calcio. Di seguito si presentano alcuni esempi tratti dai questionari degli studenti. Si riportano di seguito alcune delle risposte.


Considera il risultato relativo alla partita di calcio Napoli-Bologna.
Assegna ad ognuno degli eventi una probabilità di verificarsi servendoti degli assiomi e spiega come li hai scelti.
A="Vince il Napoli"
B="Vince il Bologna"
C="C'è pareggio"

Dato che il napoli è primo in campionato e non perde da 7 partite, essendo la partita in casa della squadra blu contro la 13° classificata, è più probabile che il bologna perda anche se non è detto perché è imbattuto da 4 partite inoltre il napoli ha più giocatori infortunati quindi se dovessi dare delle percentuali direi 80% vincita Napoli
15% vincita Bologna
5% pareggio


Considera il risultato relativo alla partita di calcio Napoli-Bologna.
Assegna ad ognuno degli eventi una probabilità di verificarsi servendoti degli assiomi e spiega come li hai scelti.
A="Vince il Napoli"
B="Vince il Bologna"
C="C'è pareggio"

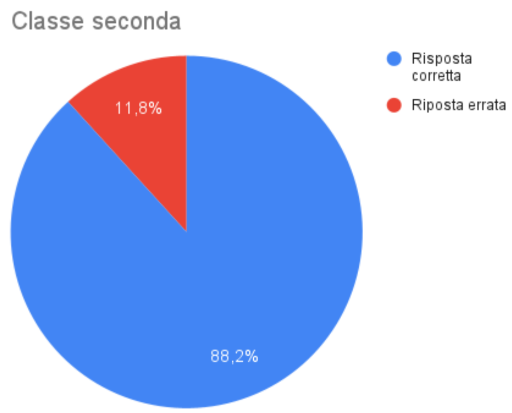
SE PARLIAMO NELLA VITA REALE IL NAPOLI È PIÙ FORTE QUINDI HA PIÙ PROBABILITÀ DI VINCERE, INVECE SE CONSIDERIAMO CHE SONO FORTI UGUALI C'È IL 33% DI OGNI EVENTO PERCHÉ 33% + 33% + 33% FA CIRCA 100% INFATTI NON FA 100 PERCHÉ IL 33 È PERIODICO

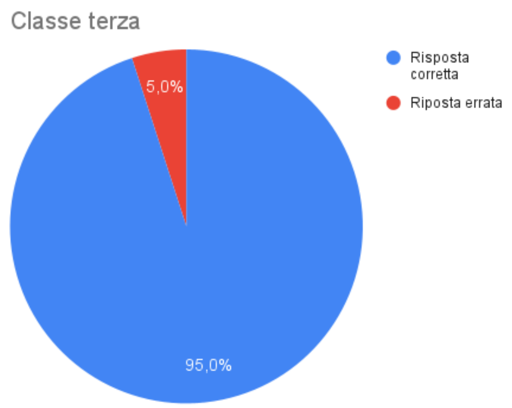
In riferimento all'ultima immagine, si osserva che lo studente ha usato due tipi di ragionamento: uno basato sulla realtà e uno basato sulla matematica. Pur essendo consapevole che una delle due squadre era più forte dell'altra, ha assegnato le probabilità agli eventi in modo indipendente dalle sue conoscenze calcistiche, come se l'esercizio di matematica fosse una categoria a sé stante rispetto alla vita reale.

Quarto quesito

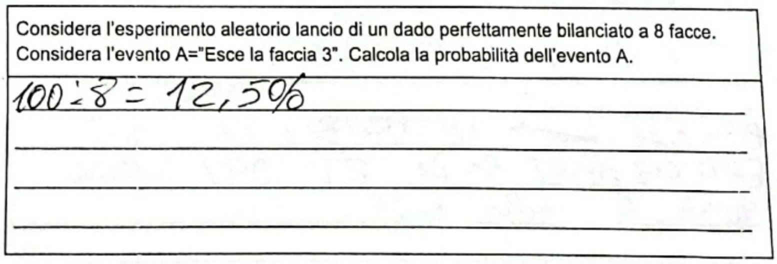
Quesito: *Considera l'esperimento aleatorio lancio di un dado perfettamente bilanciato a 8 facce. Considera l'evento A="Esce la faccia 3". Calcola la probabilità dell'evento A.*

Il quarto quesito riguarda un caso in cui la probabilità dell'evento A può essere determinata sia con la definizione assiomatica, sia con la definizione classica. Infatti, gli eventi sono equiprobabili e il testo chiede agli studenti di calcolare la probabilità supponendo che il dado sia perfettamente bilanciato. La risposta è stata considerata corretta se gli studenti hanno espresso la probabilità nella forma di frazione, come numero compreso tra 0 e 1, o come percentuale. Dai risultati emerge che una percentuale molto elevata di studenti, sia della seconda che della terza classe, ha risolto correttamente il quesito. Se ne riportano di seguito le percentuali.



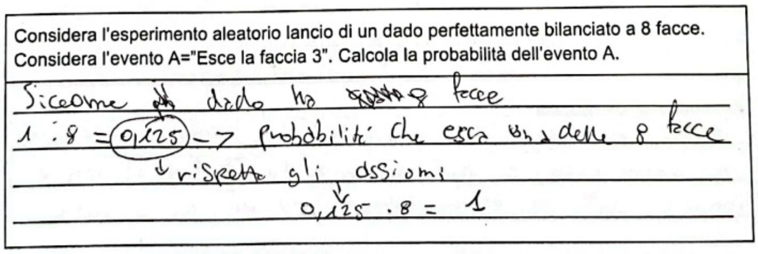


Analizzando le risposte degli studenti, si è osservato che molti di loro hanno adottato una strategia basata sull'equiprobabilità delle facce del dado, interpretando le 8 facce come una totalità, rappresentata sia dal valore intero 1 che dal 100%. Di conseguenza, hanno calcolato la probabilità dell'evento A dividendo 1 o 100% per 8, ottenendo così il risultato corretto. Si ne riportano di seguito due ad esempio del campione.



Considera l'esperimento aleatorio lancio di un dado perfettamente bilanciato a 8 facce.
Considera l'evento A="Esce la faccia 3". Calcola la probabilità dell'evento A.

100 : 8 = 12,5%



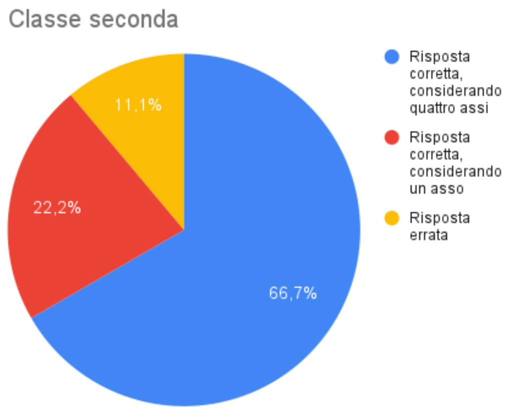
Considera l'esperimento aleatorio lancio di un dado perfettamente bilanciato a 8 facce.
Considera l'evento A="Esce la faccia 3". Calcola la probabilità dell'evento A.

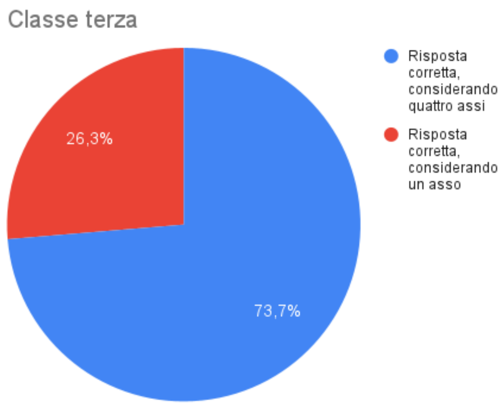
Siccome dado ha 8 facce
1 : 8 = 0,125 -> probabilità che esca una delle 8 facce
rispetta gli assiomi
0,125 · 8 = 1

Quinto quesito

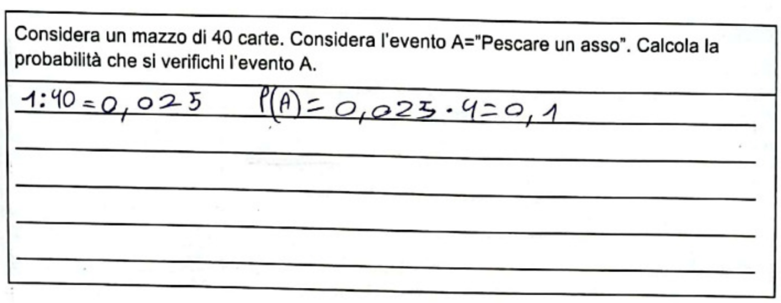
Quesito: *Considera un mazzo di 40 carte. Considera l'evento A="Pescare un asso". Calcola la probabilità che si verifichi l'evento A.*

Per risolvere questo quesito, come per il precedente, è possibile applicare sia la definizione classica di probabilità sia la definizione assiomatica. Tuttavia, si è notato che il quesito presentava un problema di formulazione, in quanto presuppone che gli studenti conoscano il numero di assi presenti in un mazzo di 40 carte. Infatti, durante la somministrazione del quesito, si è riscontrato che alcuni studenti ritenevano che ci fosse un solo asso per mazzo, mentre altri ne consideravano quattro. Per questo motivo, si sono accettate come corrette entrambe le soluzioni: la probabilità di pescare un asso considerando quattro assi nel mazzo, pari a ($\frac{4}{40} = 0.1$) o (10%), e la probabilità di pescare un asso considerando un solo asso nel mazzo, pari a ($\frac{1}{40} = 0.025$) o (2.5%). Nella classe terza, tutti gli studenti hanno fornito la risposta corretta al quesito, mentre nella classe seconda la percentuale di risposte corrette è stata di circa l'89%.





Si presenta di seguito la risposta di uno studente che ha dimostrato una buona padronanza degli assiomi della probabilità della definizione 2.2.4. La correttezza del calcolo e l'uso di una notazione appropriata evidenziano la sua capacità di distinguere tra esito ed evento.

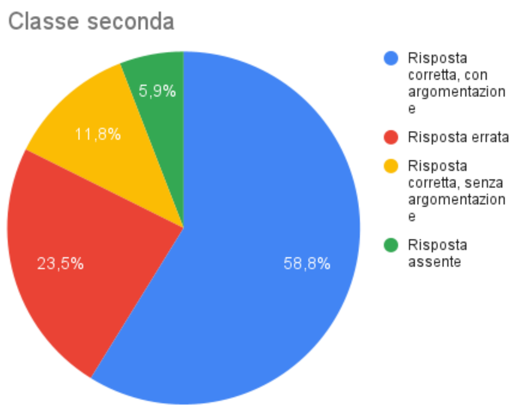


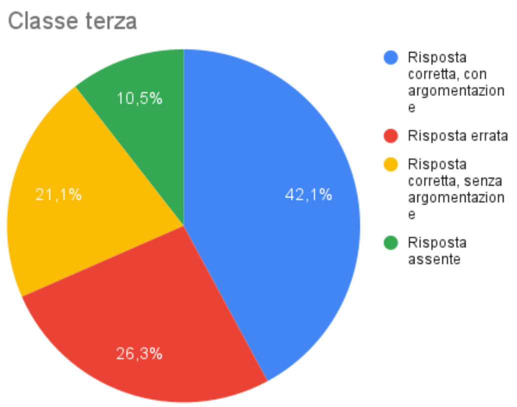
Considera un mazzo di 40 carte. Considera l'evento A="Pescare un asso". Calcola la probabilità che si verifichi l'evento A.

$1:40 = 0{,}025$ $\quad P(A) = 0{,}025 \cdot 4 = 0{,}1$

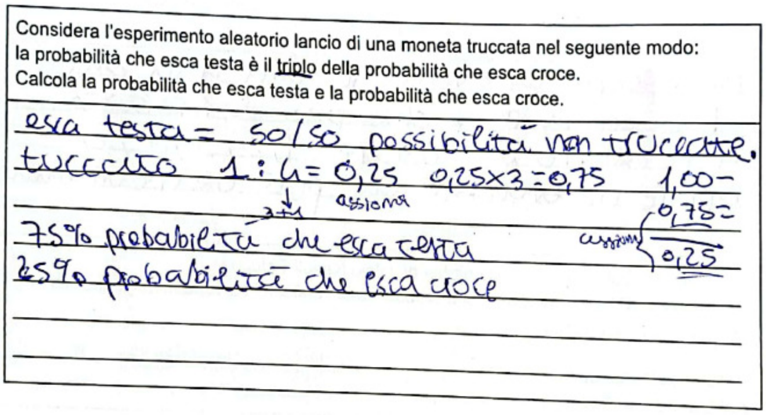
Sesto quesito

Quesito: *Considera l'esperimento aleatorio lancio di una moneta truccata nel seguente modo: la probabilità che esca testa è il triplo della probabilità che esca croce. Calcola la probabilità che esca testa e la probabilità che esca croce.*
Questo problema, a differenza dei precedenti, non può essere risolto utilizzando la definizione classica di probabilità. Questo ha reso l'analisi particolarmente interessante, poiché ha permesso di valutare l'efficacia dell'approccio sperimentale, ovvero se la definizione assiomatica di probabilità è un metodo efficace da adottare nell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di primo grado. Inoltre, ha permesso di osservare se gli studenti, pur non avendo ricevuto una presentazione formale della definizione di probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, fossero comunque inclini ad utilizzarla.
La risposta degli studenti è stata considerata corretta sia se espressa in forma percentuale, sia se espressa come numero compreso tra 0 e 1.

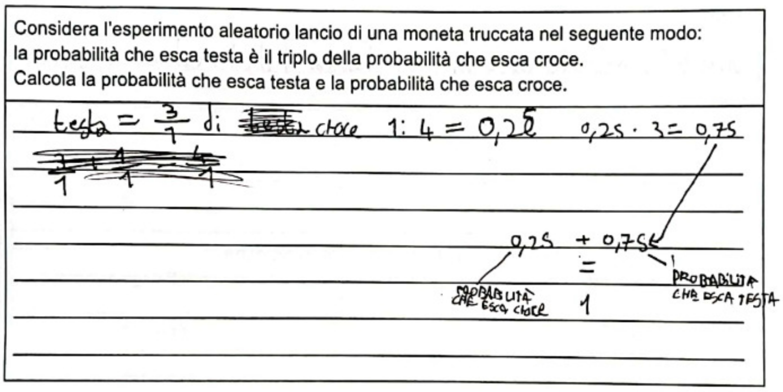




Questo quesito si è rivelato il più difficile da risolvere per gli studenti, tuttavia si è osservato che nella classe seconda il 71% degli studenti ha fornito la risposta corretta, mentre nella classe terza il 63% degli studenti ha fatto lo stesso. In entrambi i casi, si sono considerati sia gli studenti che hanno motivato la propria risposta, sia quelli che non l'hanno fatto. Un altro aspetto interessante da analizzare è che nella classe seconda solo il 5,9% degli studenti non ha risposto al quesito, mentre nella classe terza il 10,5% degli studenti ha fatto altrettanto.
Di seguito, vengono presentati alcuni esempi di soluzioni fornite dagli studenti. È interessante osservare che, nonostante le diverse modalità di ragionamento e di approccio al problema, gli studenti sono riusciti a fornire una risposta corretta. Questo suggerisce che, indipendentemente dal percorso cognitivo intrapreso, gli studenti sono stati in grado di applicare gli assiomi della probabilità.


Considera l'esperimento aleatorio lancio di una moneta truccata nel seguente modo:
la probabilità che esca testa è il triplo della probabilità che esca croce.
Calcola la probabilità che esca testa e la probabilità che esca croce.

esca testa = 50/50 possibilità non truccate.
truccato 1 : 4 = 0,25 0,25x3 = 0,75 1,00 −
3+1 assioma 0,75 =
75% probabilità che esca testa assiomi 0,25
25% probabilità che esca croce


Considera l'esperimento aleatorio lancio di una moneta truccata nel seguente modo:
la probabilità che esca testa è il triplo della probabilità che esca croce.
Calcola la probabilità che esca testa e la probabilità che esca croce.

testa = $\frac{3}{1}$ di ~~testa~~ croce 1 : 4 = 0,25 0,25 · 3 = 0,75
~~$\frac{3}{1} + \frac{1}{1} = \frac{4}{1}$~~
0,25 + 0,75 = 1
PROBABILITÀ CHE ESCA CROCE
PROBABILITÀ CHE ESCA TESTA

Considera l'esperimento aleatorio lancio di una moneta truccata nel seguente modo:
la probabilità che esca testa è il triplo della probabilità che esca croce.
Calcola la probabilità che esca testa e la probabilità che esca croce.

TESTA = OOO → 0,25 × 3 = 0,75
CROCE = O → 0,25
100 : 4 = 25
25 → 0,25

Considera l'esperimento aleatorio lancio di una moneta truccata nel seguente modo:
la probabilità che esca testa è il triplo della probabilità che esca croce.
Calcola la probabilità che esca testa e la probabilità che esca croce.

LA PROBABILITÀ CHE ESCA TESTA È IL
TRIPLO DI CHE ESCA CROCE 100
DIVISO LA PERCENTUALE IN 4
100 : 4 = 25 25% LA PROBABILITÀ CHE ESCA
CROCE E 75% E CHE ESCA TESTA
25 · 3 = 75

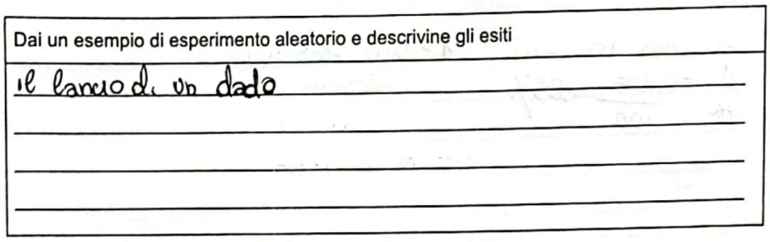
Considera l'esperimento aleatorio lancio di una moneta truccata nel seguente modo:
la probabilità che esca testa è il triplo della probabilità che esca croce.
Calcola la probabilità che esca testa e la probabilità che esca croce.

Visto che la testa ha il triplo della
probabilità della croce allora: P(testa) =
$\frac{3}{4}$ = 0,75 ; P(croce) = $\frac{1}{4}$ = 0,25.
Questo perché le probabilità sono una
il triplo dell'altra quindi il totale
è 1+3 = 4.

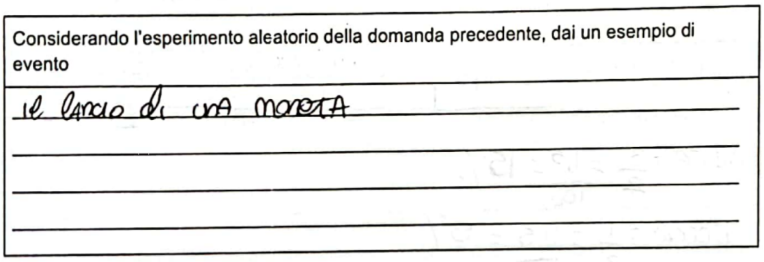
"Questionario di controllo"

Sfortunatamente, durante la fase sperimentale della ricerca, non è stato possibile disporre di una classe di controllo in cui la probabilità venisse presentata agli studenti esclusivamente attraverso la definizione classica, per poi somministrare lo stesso questionario per confrontarne i dati. Nonostante ciò, si è verificato un caso particolare nella classe seconda: uno studente che ha partecipato in minima parte alla sperimentazione in aula a causa delle sue assenze, ma che ha comunque

completato il questionario finale. Nelle sue risposte, lo studente ha fatto riferimento esplico a “casi favorevoli e casi possibili”.
Dopo aver esaminato le risposte dello studente, è stato condotto un confronto con lui, durante il quale ha riferito di aver appreso la probabilità in un corso extrascolastico di supporto alle lezioni in aula, in cui la probabilità era stata spiegata solo attraverso la definizione classica. Questo caso si è rivelato interessante, poiché le risposte di questo studente hanno funzionato come un “questionario di controllo”che ha permesso di confrontare le risposte degli altri studenti, che non erano mai stati esposti alla definizione classica di probabilità, con le sue, che invece aveva affrontato il questionario considerando la definizione classica.
Nel primo e nel secondo quesito, lo studente ha dimostrato una comprensione adeguata del concetto di esperimento aleatorio. Tuttavia, ha incontrato difficoltà nel determinare i possibili esiti dell’esperimento e nel fornire un esempio di evento.

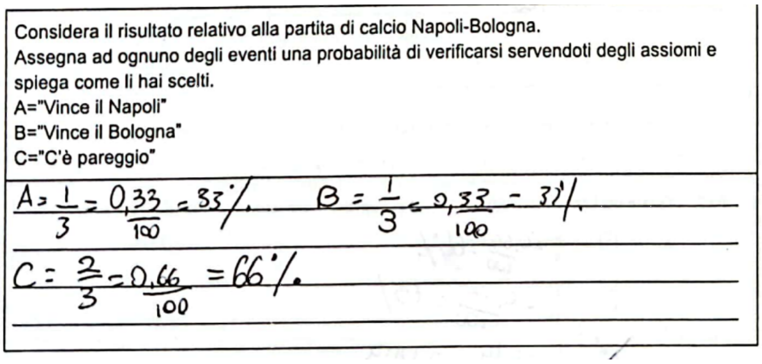

Dai un esempio di esperimento aleatorio e descrivine gli esiti

il lancio di un dado


Considerando l'esperimento aleatorio della domanda precedente, dai un esempio di evento

il lancio di una moneta

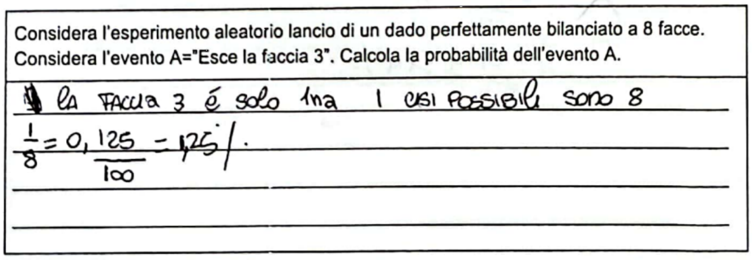
Per quanto riguarda il terzo problema, lo studente non è riuscito a fornire probabilità che rispettassero gli assiomi della definizione 2.2.4. Infatti, nel tentativo di applicare la definizione classica di probabilità, ha assegnato ai vari eventi probabilità tali che la loro somma superasse 1.


Considera il risultato relativo alla partita di calcio Napoli-Bologna.
Assegna ad ognuno degli eventi una probabilità di verificarsi servendoti degli assiomi e spiega come li hai scelti.
A="Vince il Napoli"
B="Vince il Bologna"
C="C'è pareggio"

$A = \frac{1}{3} = \frac{0,33}{100} = 33\%$ $B = \frac{1}{3} = \frac{0,33}{100} = 33\%$

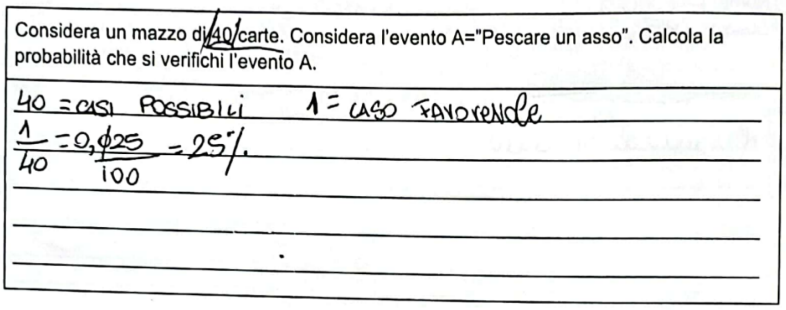
$C: \frac{2}{3} = \frac{0,66}{100} = 66\%$.

Lo studente ha risposto correttamente al quarto e al quinto quesito. Questi erano gli unici problemi in cui era applicabile la definizione classica di probabilità, suggerendo che lo studente ha una solida comprensione di questo concetto.


Considera l'esperimento aleatorio lancio di un dado perfettamente bilanciato a 8 facce.
Considera l'evento A="Esce la faccia 3". Calcola la probabilità dell'evento A.

la faccia 3 é solo 1 ma i casi possibili sono 8

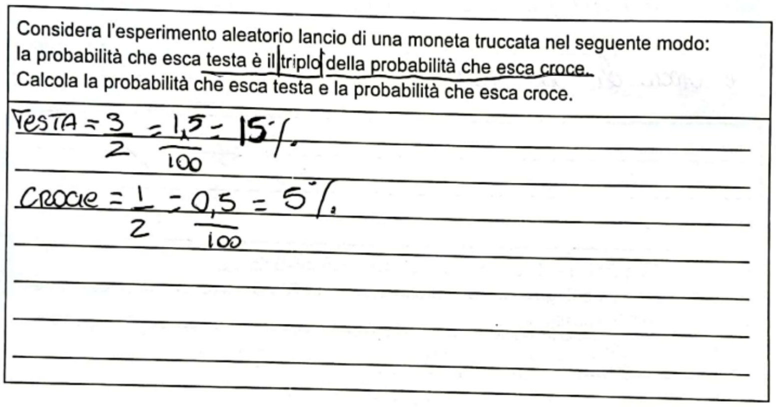
$\frac{1}{8} = \frac{0,125}{100} = 12,5\%$.


Considera un mazzo di 40 carte. Considera l'evento A="Pescare un asso". Calcola la probabilità che si verifichi l'evento A.

40 = casi possibili 1 = caso favorevole

$\frac{1}{40} = \frac{0,025}{100} = 2,5\%$.

Nel sesto quesito sembra che lo studente abbia cercato di applicare la definizione classica di probabilità, considerando due casi possibili, ovvero l'uscita delle due facce della moneta. Tuttavia, nel tentativo di rispettare la condizione che la probabilità di ottenere testa fosse il triplo rispetto a quella di ottenere croce, lo studente ha assegnato alla faccia testa una probabilità di $\frac{3}{2}$ e alla faccia croce una probabilità di $\frac{1}{2}$.


Considera l'esperimento aleatorio lancio di una moneta truccata nel seguente modo:
la probabilità che esca testa è il triplo della probabilità che esca croce.
Calcola la probabilità che esca testa e la probabilità che esca croce.

TESTA $= \frac{3}{2} = \frac{1,5}{100} = 15\%$

CROCE $= \frac{1}{2} = \frac{0,5}{100} = 5\%$

5.3 Analisi dati dei questionari di autovalutazione

In questo paragrafo si analizzeranno i questionari di autovalutazione, compilati dagli studenti all'inizio e alla fine del percorso didattico, presenti nell'*All.1: Questionario di autovalutazione in entrata* e nell'*All.2: Questionario di autovalutazione in uscita.* L'analisi ha riguardato tre macro categorie: clima di classe, lavori di gruppo e lavori individuali.

- **Clima di classe.** Le domande chiedevano agli studenti di indicare quanto spesso si verificavano nella loro classe le situazioni descritte nel questionario, come ad esempio se si aiutavano reciprocamente, se lavoravano bene in gruppo, se c'erano contrasti o litigi, ecc. Le domande erano formulate con una scala di frequenza che andava da "mai" a "sempre". Infine, il questionario chiedeva agli studenti di esprimere i punti di forza e debolezza della loro classe, cioè i lati positivi e negativi che caratterizzavano il loro gruppo-classe.

- **Lavori di gruppo.** Segue una serie di domande strutturate che mirano a valutare la frequenza con cui si verificano determinate situazioni durante i lavori di gruppo. Le situazioni proposte riguardano aspetti chiave della collaborazione, come l'ascolto delle proposte altrui, la capacità di spiegare le proprie idee, la flessibilità nel cambiare opinione, la gestione dei conflitti, l'organizzazione del tempo e la collaborazione per raggiungere un obiettivo comune.

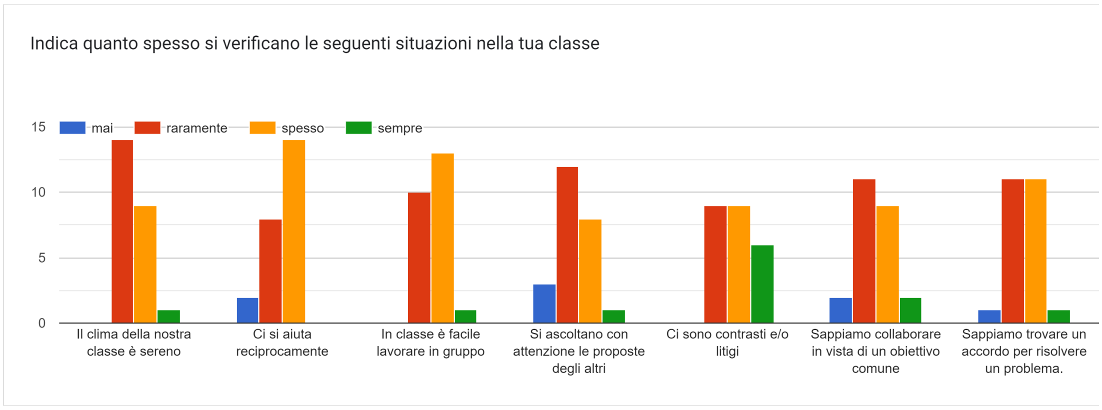
- **Lavori individuali.** La sezione del questionario mira a valutare le competenze personali degli studenti in relazione al loro apprendimento autonomo. Gli studenti sono stati invitati a riflettere sulle loro capacità individuali e a valutarle su una scala da 1 (per niente d'accordo) a 4 (molto d'accordo). Le competenze indagate includono la consapevolezza delle proprie capacità e limiti, la gestione degli strumenti di studio, l'autonomia nella gestione del tempo di studio, il rispetto delle regole, la capacità di portare a termine le consegne assegnate e l'abilità di analizzare e valutare l'affidabilità delle informazioni trovate online.

Per l'analisi di questi dati, si è scelto di presentare separatamente i risultati della classe seconda e della classe terza, in quanto si sono evidenziate delle differenze significative tra le due classi. Poiché i questionari erano identici sia in entrata che in uscita, eccetto per la sezione finale del questionario in uscita dedicata al percorso di probabilità, si è optato per un confronto tra i dati raccolti prima dell'inizio della sperimentazione e quelli ottenuti alla fine della stessa.
Come si è già accennato nel capitolo precedente, a causa dell'alluvione che ha colpito l'Emilia Romagna, i giorni dedicati alla sperimentazione si sono protratti fino alla fine dell'anno scolastico. Di conseguenza, il questionario relativo alle competenze in uscita, somministrato come ultimo questionario agli studenti nell'ultima giornata della sperimentazione, è coinciso con gli ultimi giorni di scuola. Questo ha determinato una ridotta partecipazione degli studenti alla compilazione del questionario, rispetto al numero totale degli studenti della classe.
Inoltre, si specifica che il questionario era anonimo in modo da garantire agli studenti la libertà di esprimere i propri punti di vista.

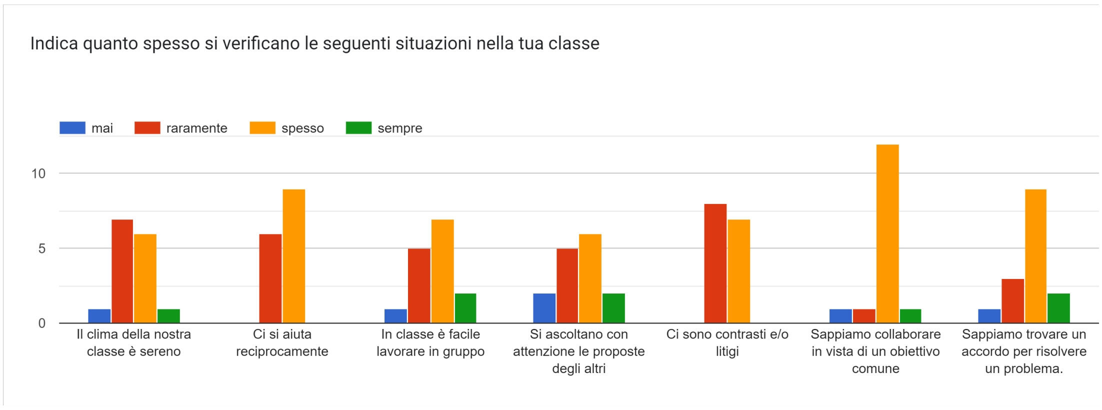
Classe seconda

Per quanto riguarda la classe seconda, il questionario somministrato all'inizio del percorso didattico ha registrato la partecipazione di 24 studenti, mentre il questionario somministrato alla fine del percorso didattico ha ricevuto solo 15 risposte.

Clima di classe



Questionario in entrata



Questionario in uscita

Le domande del questionario miravano a valutare la frequenza di una serie di affermazioni relative al clima di classe. Le risposte sono state analizzate confrontando le percentuali di risposte "spesso" e "sempre" sommate.

In generale, si è osservato un aumento delle percentuali tra il questionario in entrata e quello in uscita, ad eccezione della domanda relativa ai contrasti e litigi, dove, come auspicato, la percentuale è diminuita.

- Più nello specifico, per quanto riguarda la domanda che valuta il clima di classe sereno, prima della sperimentazione il 42% delle risposte degli studenti si attestava tra “spesso” e “sempre”, contro il 47% dopo la sperimentazione.
- Per quanto riguarda il rispetto reciproco, abbiamo il 58% di “spesso” in entrata, contro il 60% di “spesso” in uscita.
- Per la domanda relativa all’ascolto attento, abbiamo il 37% di “spesso” più “sempre” in entrata contro il 63% di “spesso” più “sempre” in uscita.
- Riguardo la facilità di lavorare in gruppo, abbiamo il 50% in entrata contro il 59% in uscita.
- Per quanto riguarda la capacità di collaborare al fine di un obiettivo comune, abbiamo il 45% in entrata contro l’87% in uscita.
- Rispetto alla capacità di trovare un accordo, abbiamo il 49% in entrata contro il 73% in uscita.
- Infine, per quanto riguarda la frequenza con cui avvengono contrasti e litigi, abbiamo il 62% in entrata contro il 46% in uscita.

In conclusione, i dati suggeriscono un miglioramento generale del clima di classe, con un aumento della collaborazione e dell’ascolto reciproco, una maggiore facilità nel lavoro di gruppo e una riduzione dei conflitti. Questi risultati indicano l’efficacia della sperimentazione nel migliorare il clima di classe.
Successivamente è stato chiesto agli studenti di descrivere i punti di forza della classe, prima e dopo la sperimentazione.

- Prima della sperimentazione, gli studenti hanno identificato vari punti di forza, tra cui l’unità e la collaborazione all’interno della classe, l’amicizia. Tuttavia, sono presenti diverse risposte di studenti che sono riusciti ad individuare punti di forza o di studenti che vedono dei punti di forza potenziali.

"*Ci impegniamo abbastanza quando vogliamo*". "*Possiamo essere una classe abbastanza unita.*" "*Se ci impegniamo sappiamo fare le cose*".

- Dopo la sperimentazione, si nota un generale miglioramento nel clima di classe. Gli studenti continuano a sottolineare l'importanza dell'unità e della collaborazione, ma con un maggiore enfasi sulla capacità di aiutarsi a vicenda nei momenti di difficoltà. "*Siamo una classe molto unita e ci piace stare con tutti i compagni. Se qualcuno è in difficoltà viene sempre aiutato*". Inoltre, si evidenzia un aumento della fiducia nelle proprie capacità e un maggiore impegno nel lavoro di gruppo. "*L'entusiasmo nel fare i lavori a gruppi e la praticità*". La libertà di esprimere le proprie opinioni e la varietà di punti di vista presenti in classe sono ancora apprezzate, così come l'amicizia e la capacità di collaborare nonostante le divergenze.

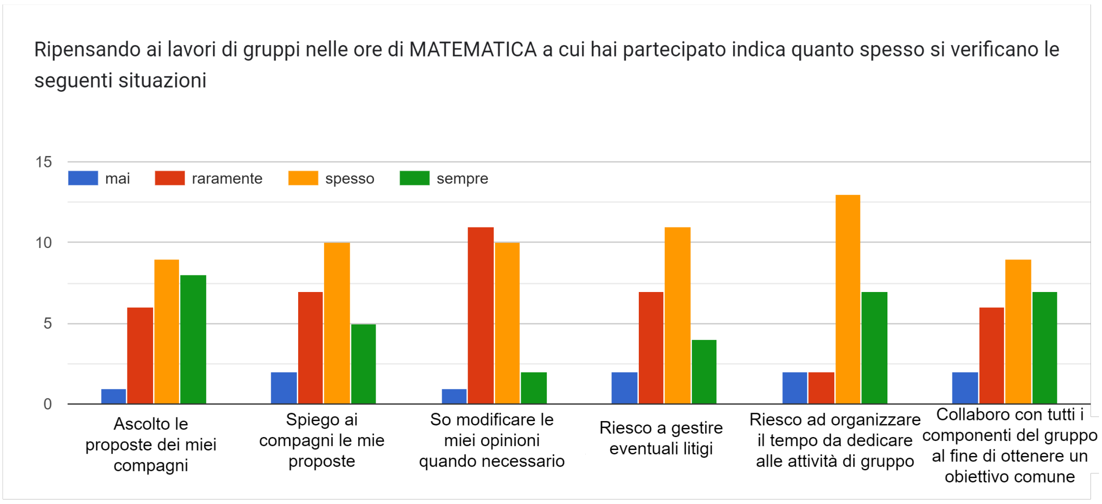
Nell'analisi dei punti di debolezza della classe, prima e dopo la sperimentazione, emergono alcuni cambiamenti significativi.

- Prima della sperimentazione, gli studenti hanno identificato vari punti di debolezza, tra cui la rumorosità e il disordine in classe, la difficoltà nel raggiungere un accordo, la mancanza di rispetto, la mancanza di attenzione e concentrazione, la divisione e la mancanza di inclusione, la mancanza di aiuto reciproco, e la presenza di comportamenti negativi. Si riportano di seguito alcuni esempi di risposta. "*Non ci si aiuta mai, si aiutano solo gli amici, mi è capitato varie volte che chiedessi una cosa sulla chat di classe e non ho ottenuto nessuna risposta poi dopo hanno chiesto altre persone e gli amici gli hanno risposto*". "*Non ci mettiamo quasi mai d'accordo*". "*Alcune volte non siamo molti attenti e facciamo un po' di confusione*".

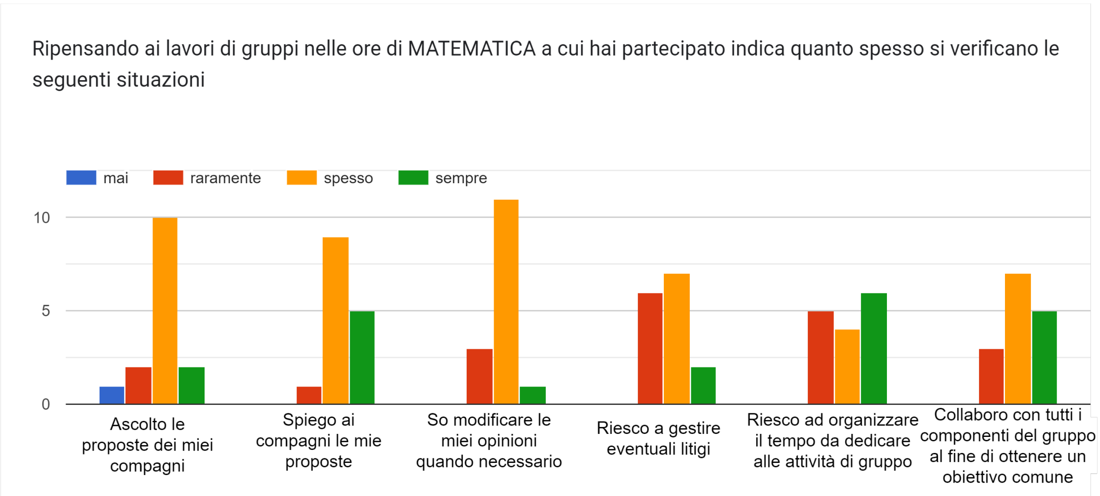
- Dopo la sperimentazione, si nota un cambiamento nella percezione dei punti di debolezza. Gli studenti continuano a sottolineare la rumorosità e il disordine in classe, ma emergono anche nuovi problemi come la competitività eccessiva, e comportamenti negativi come l'egoismo, la mancanza di maturità e la mancanza di responsabilità. Si riportano di seguito alcuni esempi di risposta. "*Alcuni di noi si credono molto più bravi degli altri e* *sminuiscono gli altri". "I punti di debolezza della classe secondo me sono i seguenti: la confusione nella classe durante le lezioni ,che impedisce impedisce lo svolgimento di queste. Anche i litigi che ci sono a volte tra di noi che snoda il legame di corda che c'è tra di noi".*

Questi risultati indicano che, nonostante i miglioramenti, ci sono ancora sfide da affrontare per migliorare ulteriormente il clima di classe.

Lavori di gruppo



Questionario in entrata



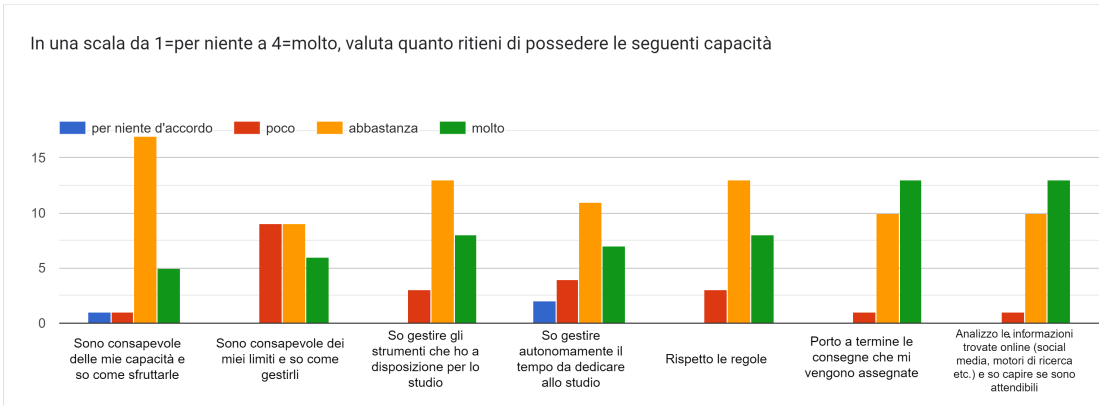
Questionario in uscita

Dall'analisi delle risposte degli studenti relative all'autovalutazione delle loro competenze durante i lavori di gruppo emergono alcuni dati significativi riportati di seguito.

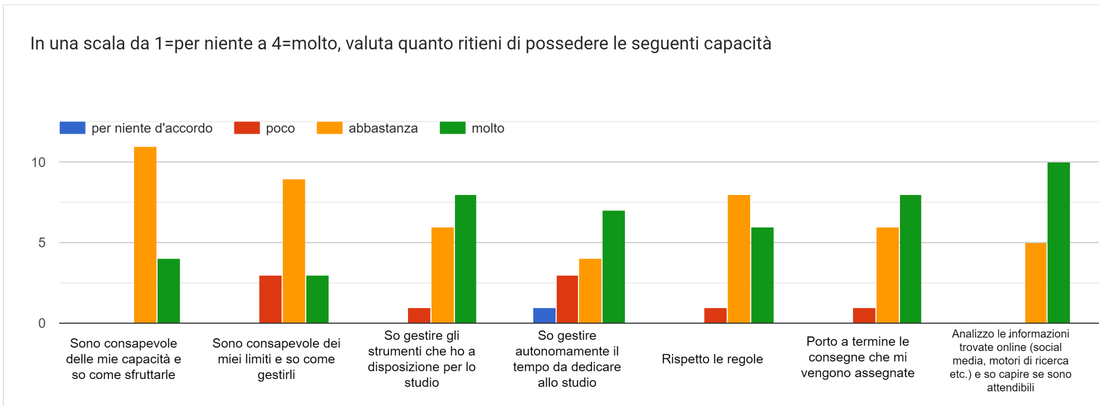
- Riguardo alla capacità di ascoltare le proposte dei membri del gruppo, il 70,8% degli studenti ha risposto "spesso" o "sempre" nel questionario iniziale, percentuale che è aumentata all'80% nel questionario finale.
- Per quanto riguarda la capacità di spiegare le proprie proposte agli altri membri del gruppo, il 62% degli studenti ha risposto "spesso" o "sempre" nel questionario iniziale, percentuale che è salita al 73% nel questionario finale.
- In merito alla capacità di modificare le proprie opinioni, il 50% degli studenti ha risposto "spesso" o "sempre" nel questionario iniziale, mentre nel questionario finale la percentuale è salita all'80%.
- Riguardo alla gestione dei litigi, il 62% degli studenti ha risposto "spesso" o "sempre" nel questionario iniziale, ma questa percentuale è scesa al 59% nel questionario finale.
- Per quanto riguarda la gestione del tempo, l'80% degli studenti ha risposto "spesso" o "sempre" nel questionario iniziale, ma questa percentuale è scesa al 66% nel questionario finale.
- Una delle categorie che ha mostrato la crescita più significativa riguarda la collaborazione per un obiettivo comune, che è passata dal 66% di risposte "spesso" o "sempre" nel questionario iniziale all'80% nel questionario finale.

Questi risultati sembrano coerenti con i cambiamenti osservati nei punti di forza e di debolezza emersi dagli studenti nel confronto tra il questionario iniziale e quello finale. Probabilmente, da un lato, il percorso ha aiutato gli studenti a interagire meglio, a lavorare in modo più efficace per un obiettivo comune, a capire come ascoltare meglio gli altri e come modificare le proprie opinioni. D'altra parte, il lavoro di gruppo ha portato a far emergere maggiormente i conflitti, facendo comprendere agli studenti di avere maggiori difficoltà rispetto a quelle che credevano inizialmente, soprattutto nella gestione del tempo dedicato ai lavori di gruppo.

Lavori individuali



Questionario in entrata



Questionario in uscita

Sono state analizzate le risposte degli studenti relative all'autovalutazione delle loro competenze durante i lavori individuali. I dati raccolti attraverso i questionari somministrati all'inizio e alla fine del corso mostrano un generale miglioramento nelle risposte. Le percentuali considerate di seguito sono la somma della risposta "abbastanza" e "molto.

- La consapevolezza delle proprie capacità è passata dal 90% nel questionario iniziale al 100% nel questionario finale.

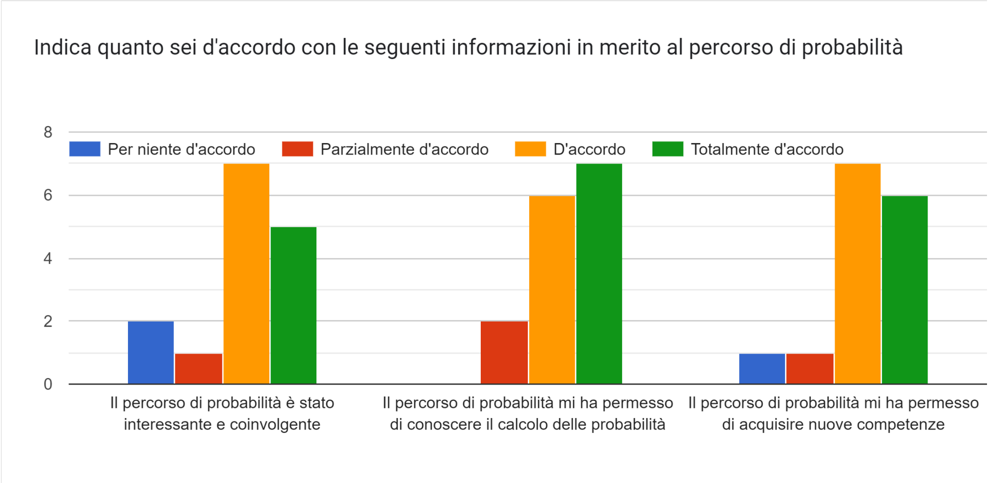
- La consapevolezza dei propri limiti e la capacità di gestirli è aumentata dal 62% al 80%.
- La consapevolezza e l'utilizzo degli strumenti di studio è passata dal 62% al 93%.
- La capacità di gestire autonomamente il tempo dedicato allo studio è leggermente diminuita, passando dal 75% al 72%.
- Il rispetto delle regole è aumentato dall'83% al 93%.
- La capacità di portare a termine le consegne assegnate è rimasta stabile al 93%.
- La capacità di analizzare le informazioni trovate online è aumentata dal 95% al 100%.

Questi risultati sembrano essere in linea con l'obiettivo della sperimentazione, che era incentrata principalmente sui lavori di gruppo piuttosto che su quelli individuali.

Percorso di probabilità

Nel questionario in uscita è stato chiesto agli studenti di descrivere le loro opinioni riguardo la sperimentazione proposta, individuandone i punti di forza e quelli di miglioramento.

- Emerge che l'80% degli studenti esprime un accordo totale o parziale con l'affermazione che il percorso è stato interessante e coinvolgente.
- L'86%, si dichiara d'accordo o totalmente d'accordo con l'idea che il percorso ha permesso loro di approfondire la conoscenza del calcolo delle probabilità.
- Infine, l'87% degli studenti si ritiene d'accordo o totalmente d'accordo con l'affermazione che il percorso ha permesso loro di acquisire nuove competenze.



Questi dati forniscono un feedback positivo sulla validità e l'efficacia del percorso sperimentale proposto.

Le risposte degli studenti al quesito "Qual è l'aspetto che ti è piaciuto di più del percorso di probabilità?" evidenziano diversi aspetti positivi.

- **Lavoro di gruppo.** Molti studenti hanno apprezzato l'opportunità di lavorare in gruppo e di confrontarsi con gli altri. "*La motivazione nel lavorare grazie ai giochi*". "*Secondo me è stata molto coinvolgente l'idea di fare un lavoro a gruppi e avere ognuno un ruolo per essere più organizzati*".

- **Attività pratiche.** Gli studenti hanno trovato interessante e coinvolgente l'uso di attività pratiche, apprezzando il fatto di lavorare in modo diverso rispetto a come sono abituati, con lezioni più attive. "*Mi è piaciuto lavorare in modo differente a come siamo abituati e mi è piaciuto aiutare e collaborare i compagni del mio gruppo.*"

- **Spiegazioni interattive.** Gli studenti hanno trovato utili le spiegazioni interattive e hanno apprezzato la possibilità di capire che lo stesso evento può avere probabilità diverse di accadere in base alla situazione.

Le risposte degli studenti al quesito "Cosa avresti cambiato nel percorso di probabilità?" evidenziano diverse aree di miglioramento

- **Terminologia e esercizi.** Alcuni studenti avrebbero voluto termini più precisi, più esercizi e spiegazioni oltre al gioco di Monty Hall.

- **Ruoli e composizione dei gruppi.** Alcuni studenti avrebbero cambiato i ruoli all'interno dei gruppi o la composizione dei gruppi stessi.

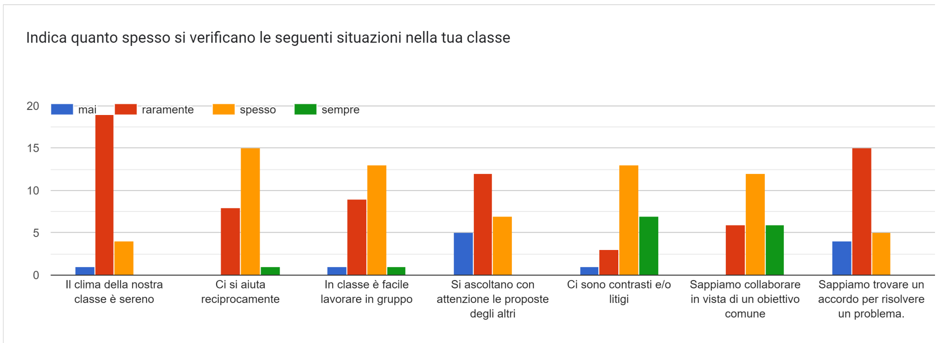
- **Varietà delle attività.** Alcuni studenti avrebbero voluto una maggiore varietà di prove, oltre al gioco del fattorino e dei due nokia e dell'iphone.

Tuttavia, alcuni studenti hanno affermato che non avrebbero cambiato nulla, indicando un generale apprezzamento per il percorso di probabilità.

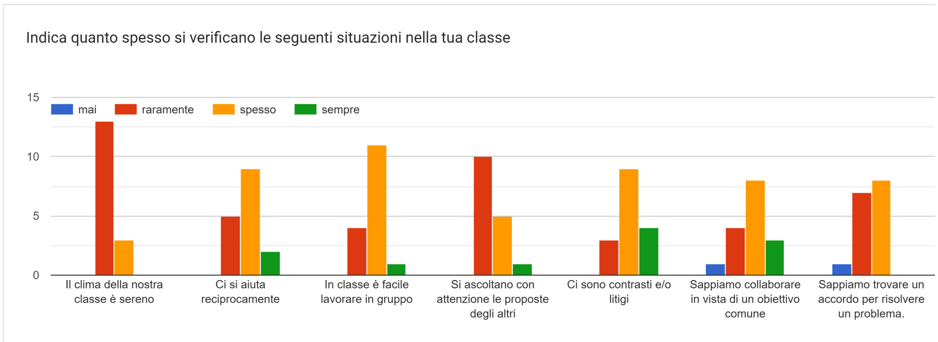
Classe terza

Per quanto riguarda la classe terza, il questionario somministrato all'inizio del percorso didattico ha registrato la partecipazione di 24 studenti, mentre il questionario somministrato alla fine del percorso didattico ha ricevuto solo 16 risposte.

Clima di classe



Questionario in entrata



Questionario in uscita

Si riportano di seguito i risultati emersi dall'analisi delle risposte riguardo il clima di classe.

- Prima della sperimentazione gli studenti hanno descritto il clima di classe come prevalentemente non sereno. La somma delle risposte "raramente" e "mai" è stata dell'85%. Alla fine della sperimentazione la percentuale di risposte "raramente" si attesta al 79%, mentre quella di "mai" è scesa allo 0%. È interessante notare che la percentuale di "spesso" è rimasta pressoché invariata, ma quella di "abbastanza" è stata pari allo 0% sia prima che dopo la sperimentazione.

- Prima della sperimentazione il 70% degli studenti ha segnalato di aiutarsi spesso o sempre. Alla fine della sperimentazione questa percentuale è aumentata al 75%.

- Prima della sperimentazione il 60% ha dichiarato di lavorare spesso o sempre in gruppo. Alla fine della sperimentazione questa percentuale è salita al 75%.

- Prima della Sperimentazione solo il 29% ha segnalato di ascoltare spesso le proposte dei compagni.Alla fine della sperimentazione la percentuale di "spesso" è aumentata al 31%, mentre la percentuale di "sempre" è rimasta allo 0%.

- Le percentuali di risposte "spesso" e "sempre" sono rimaste pressoché invariate sia prima che dopo la sperimentazione riguardo la presenza di contrasti e/o litigi.

- C'è stato un calo nella percentuale di risposte "spesso" alla fine della sperimentazione (68% rispetto al 75% iniziale) riguardo la capacità di collaborare in vista di un obiettivo comune.

- Prima della sperimentazione solo il 20% ha segnalato di trovare spesso un accordo. Alla fine della sperimentazione la percentuale di "spesso" è aumentata al 50%, mentre quella di "sempre" è rimasta allo 0%.

In sintesi, la sperimentazione non ha portato a cambiamenti significativi nel clima di classe, ma ha migliorato le capacità di lavoro in gruppo e di trovare accordi comuni. È possibile che il lavoro di gruppo abbia contribuito a questi risultati, ma è evidente che la sperimentazione non ha modificato radicalmente le dinamiche del gruppo classe.

Riguardo l'analisi delle risposte degli studenti al quesito "Quali sono i punti di forza della tua classe?" prima e dopo il percorso sperimentale sono emersi i seguenti elementi.

- Prima della sperimentazione, gli studenti hanno identificato diversi punti di forza, tra cui la simpatia, l'amicizia, la capacità di collaborare per un obiettivo comune, l'autostima e la volontà di apprendere. "*Se giochiamo ad un gioco che ci interessa sappiamo essere molto bravi e non ci arrabbiamo a vicenda*". Tuttavia, sono emersi anche alcuni aspetti potenzialmente problematici citati dagli studenti tra i punti di forza, come il rumore e le interruzioni durante le lezioni. Inoltre, un numero significativo di studenti ha dichiarato di non essere in grado di individuare punti di forza specifici.

- Dopo la sperimentazione, si osserva una certa evoluzione nelle percezioni dei punti di forza. La collaborazione e la simpatia rimangono tra i punti di forza più citati, ma emergono anche nuovi aspetti positivi, come l'autovalutazione delle competenze e la capacità di condividere le proprie riflessioni. Nonostante ciò, alcune risposte evidenziano ancora la presenza di rumore e disturbo durante le lezioni come un problema persistente, e alcuni studenti continuano a non riuscire ad individuare punti di forza specifici. "*i punti forza della mia classe sono creare confusione.*""*:) non ce li abbiamo.*"

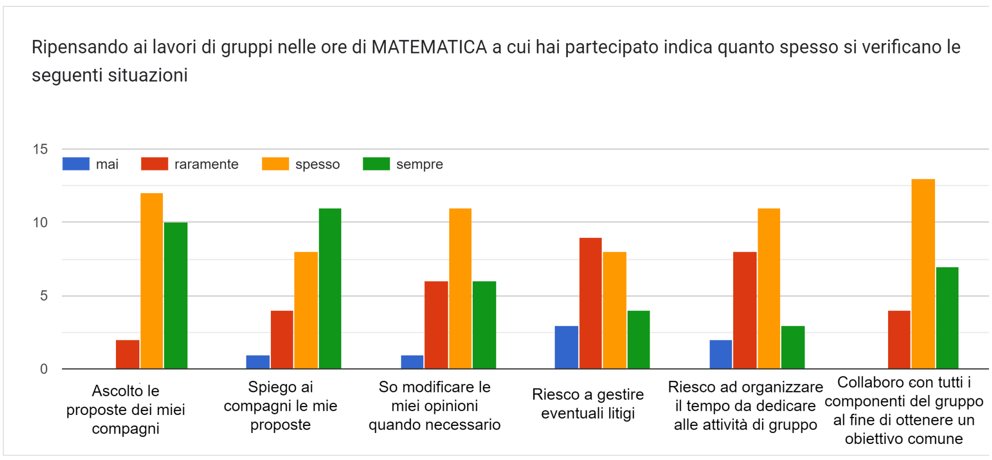
Nell'analisi delle risposte degli studenti al quesito "Quali sono i punti di debolezza della tua classe?" prima e dopo la sperimentazione, emergono alcuni cambiamenti significativi.

- Prima della sperimentazione, gli studenti hanno identificato vari punti di debolezza, tra cui la rumorosità e il disordine in classe, la difficoltà nel raggiungere un accordo, la mancanza di rispetto, la mancanza di attenzione e concentrazione, la divisione e la mancanza di inclusione, la mancanza di aiuto reciproco, e la presenza di comportamenti negativi. "*Il comportamento di alcuni compagni tra cui il mio.*""*TRASFERIREI QUELLI CHE FANNO CASINO IN UN'ALTRA CLASSE.*"

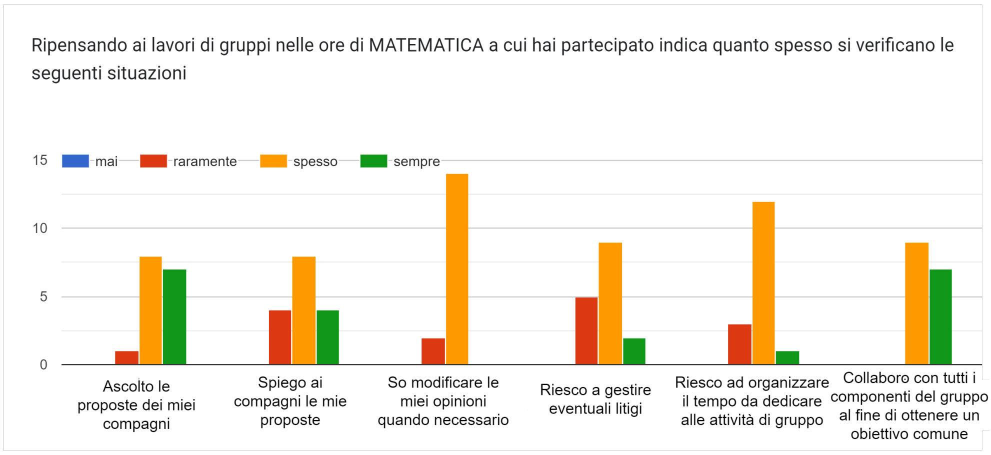
- Dopo la sperimentazione, si nota un cambiamento nelle percezioni dei punti di debolezza. La rumorosità e il disordine in classe rimangono tra i punti di debolezza più citati, ma emergono anche nuovi problemi, come la difficoltà nel raggiungere un accordo quando si vogliono cose diverse, la mancanza di rispetto tra gli studenti stessi, e la mancanza di aiuto reciproco. "*I punti di debolezza sono molti per esempio non sappiamo stare tranquilli, diamo sempre la colpa agli altri litighiamo spesso, raramente ci si aiuta, ecc..*""*Cambierei classe :)=).*"

In confronto alle risposte date prima della sperimentazione, si nota che alcune problematiche, come la rumorosità e la mancanza di rispetto, persistono. Tuttavia, emergono anche nuovi problemi, come la difficoltà nel raggiungere un accordo quando si vogliono cose diverse e la mancanza di aiuto reciproco.

Lavori di gruppo



Questionario in entrata



Questionario in uscita

È stata condotta un'analisi delle risposte degli studenti relative alla loro capacità di lavorare in gruppo, sia prima che dopo la sperimentazione.

- Prima della sperimentazione, la somma delle percentuali di risposte "spesso" e "sempre" relativo alla capacità di ascoltare le proposte dei compagni durante i lavori di gruppo era del 90%, indicando un alto livello di ascolto attivo. Questa percentuale è rimasta invariata anche dopo la sperimentazione.

- Per quanto riguarda la capacità di spiegare le proprie proposte ai compagni, la percentuale di risposte "spesso" e "sempre" era del 75% sia prima che dopo la sperimentazione. È interessante notare che, alla fine della sperimentazione, la percentuale di risposte "mai" è scesa a zero.

- Riguardo alla capacità di modificare le proprie opinioni durante i lavori di gruppo, si è osservato un miglioramento significativo. Prima della sperimentazione, la somma delle percentuali di risposte "spesso" era del 45% e quelle di "sempre" del 25%, mentre alla fine della sperimentazione la percentuale di "spesso" è salita all'87% e quella di "sempre" è scesa allo 0%. Questo suggerisce che la sperimentazione ha potuto aiutare gli studenti a rivalutare la capacità degli studenti di modificare le proprie opinioni.

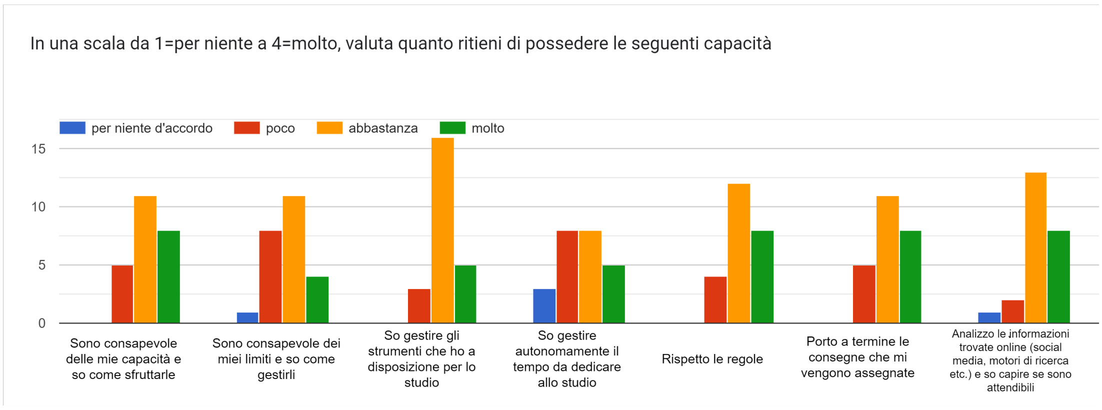
- In merito alla gestione dei conflitti, la somma delle percentuali di risposte "spesso" e "sempre" è passata dal 49% prima della sperimentazione al 68% alla fine, indicando un miglioramento in questa area.

- Per quanto riguarda la capacità di organizzare il proprio tempo durante i lavori di gruppo, la somma delle percentuali di risposte "spesso" e "sempre" è passata dal 57% prima della sperimentazione all'85% alla fine, mostrando un miglioramento significativo.

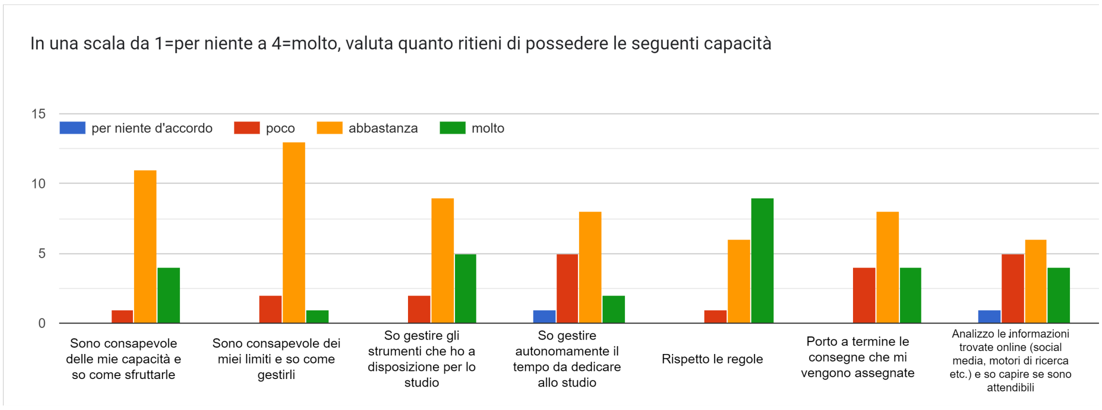
- Infine, riguardo alla capacità di collaborare con i compagni per raggiungere un obiettivo comune, la somma delle percentuali di risposte "spesso" e "sempre" è passata dall'80% prima della sperimentazione al 100% alla fine, indicando un notevole miglioramento.

In conclusione, l'analisi dei dati raccolti rivela che, rispetto ad alcune aree, non si sono osservati miglioramenti significativi. Ad esempio, la capacità di ascoltare le proposte e di spiegare le proprie opinioni è rimasta pressoché invariata. Tuttavia, in altre aree, come la gestione dei conflitti, l'organizzazione del tempo e la collaborazione per un obiettivo comune, si è registrata una crescita piuttosto significativa. In particolare, riguardo alla capacità di modificare le proprie opinioni, è evidente che la percezione degli studenti è cambiata nel corso della sperimentazione. Pertanto, si può concludere che la sperimentazione sembra aver avuto un effetto positivo sulla capacità degli studenti di lavorare in gruppo, contribuendo a migliorare alcune competenze chiave e a modificare la percezione degli studenti rispetto ad altre.

Lavori individuali



Questionario in entrata



Questionario in uscita

Sono riportate di seguito le risposte degli studenti rispetto alle capacità di lavorare individualmente, confrontando i risultati prima e dopo la sperimentazione.

- Prima della sperimentazione, la consapevolezza delle proprie capacità è risultata essere alta, con il 78% degli studenti che ha risposto “abbastanza” o “molto”. Alla fine della sperimentazione, questa percentuale è aumentata al 93%.

- Analogamente, la consapevolezza dei propri limiti e la capacità di gestirli è passata dal 61% all’88%.

- Per quanto riguarda la capacità di gestire gli strumenti per lo studio, la percentuale di risposte “abbastanza” o “molto” è rimasta pressoché invariata, attestandosi all’87% sia prima che dopo la sperimentazione.
- La capacità di gestire il tempo è migliorata, passando dal 53% al 62%.
- Il rispetto delle regole da parte degli studenti è aumentato, con la somma delle percentuali di risposte “abbastanza” o “molto” che è passata dall’83% al 90%.
- Tuttavia, la capacità di portare a termine le consegne è diminuita, passando dall’80% al 75%.
- Infine, la capacità di analizzare le fonti online è diminuita, passando dall’87% al 62%.

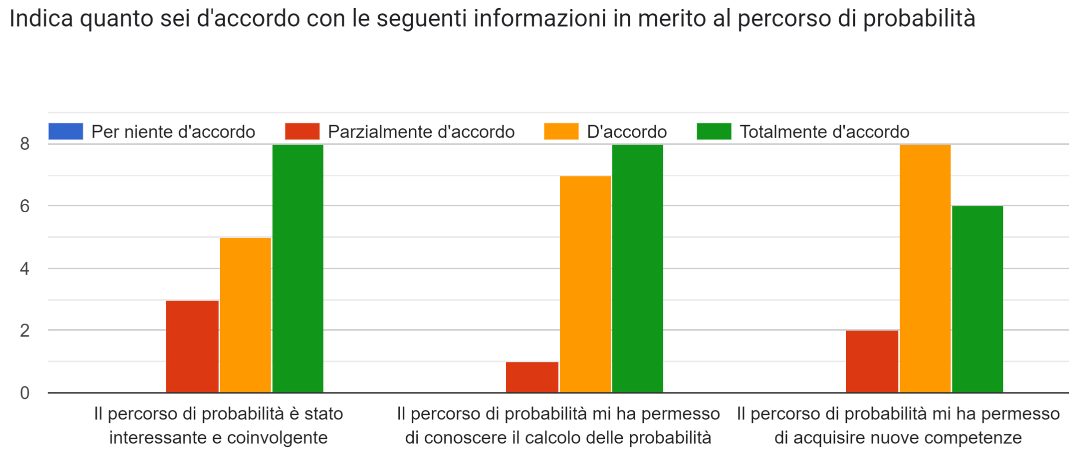
In conclusione, i dati indicano che la sperimentazione ha contribuito allo sviluppo di alcune capacità degli studenti nei lavori individuali, come la consapevolezza delle proprie capacità e dei propri limiti, e la gestione del tempo. Tuttavia, per alcuni aspetti, come la capacità di gestire gli strumenti per lo studio, non si sono osservati cambiamenti significativi. Inoltre, sembra che la sperimentazione abbia portato gli studenti a rivalutare la propria capacità di portare a termine le consegne e di analizzare le fonti online.

Percorso di probabilità

Per valutare il gradimento degli studenti rispetto al percorso di probabilità proposto durante la sperimentazione sono state poste alcune domande agli studenti al termine della sperimentazione.

- Dai risultati dell’indagine emerge che l’80% degli studenti ha ritenuto il percorso interessante e coinvolgente, esprimendo un accordo parziale o totale con questa affermazione.
- Inoltre, il 93% degli studenti ha dichiarato di essere parzialmente o totalmente d’accordo con l’affermazione che il percorso ha permesso loro di conoscere il calcolo delle probabilità.

- Per quanto riguarda lo sviluppo di nuove competenze, l'83% degli studenti si è dichiarato parzialmente o totalmente d'accordo rispetto al fatto che il percorso ha contribuito a questo aspetto.



In conclusione, i dati raccolti indicano un elevato livello di gradimento del percorso di probabilità proposto durante la sperimentazione, sia in termini di interesse e coinvolgimento, sia in termini di acquisizione di conoscenze e competenze.
Dalle risposte degli studenti alla domanda "Qual è l'aspetto che ti è piaciuto di più del percorso di probabilità?" alla fine del questionario, emergono diversi aspetti positivi, riportati di seguito.

- **Lavoro di gruppo.** Molti studenti hanno apprezzato l'opportunità di lavorare in gruppo e di confrontarsi con i membri degli altri gruppi sugli esercizi svolti in classe. *Mi è piaciuto tutto ma in particolare lavorare in gruppo perché magari se non capivo qualcosa potevo chiedere a un membro del gruppo*"

- **Progetto del dado.** Gli studenti hanno trovato interessante e coinvolgente il progetto del dado, in particolare il lancio dei dadi, la registrazione dei dati e l'utilizzo delle tecnologie.. "*La cosa che mi è piaciuta di più è il lavoro su tinkercad* "

- **Applicazione pratica.** Gli studenti hanno apprezzato il fatto che a ogni argomento teorico veniva associata una prova pratica, permettendo loro di applicare concretamente le nozioni teoriche. "*Che lo posso usare [il percorso di probabilità] dappertutto* "

- **Discussione delle idee.** Gli studenti hanno apprezzato le discussioni nate durante le spiegazioni, che hanno stimolato il confronto di idee e la riflessione critica. "*Le idee e discussione nate durante le spiegazioni* "

Nell'analisi delle risposte degli studenti alla domanda "Quali aspetti avresti modificato nel percorso di studio della probabilità?", emerge un dato significativo. La maggior parte degli studenti non ha identificato particolari aree di miglioramento. Tuttavia, una porzione di studenti ha evidenziato delle difficoltà nell'ambito del lavoro di gruppo. Questi studenti hanno espresso insoddisfazione riguardo ai membri del gruppo che gli sono stati assegnati, indicando una preferenza per un eventuale cambio di gruppo.

5.4 La produzione degli artefatti

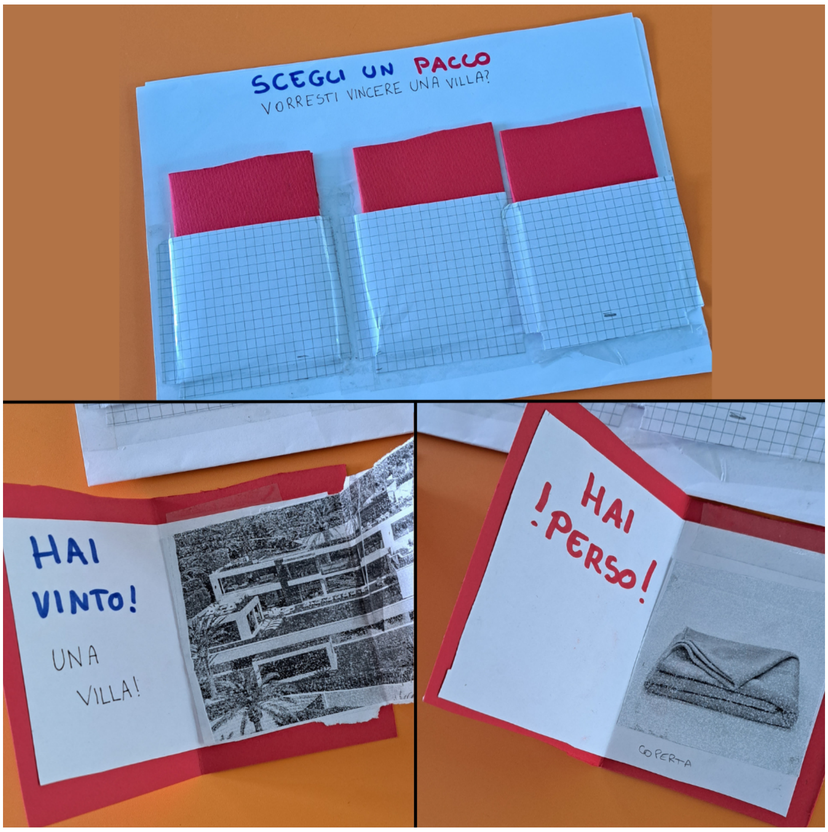
Questo paragrafo ha lo scopo di presentare gli artefatti prodotti dalle due classi coinvolte nella sperimentazione didattica.

Classe seconda

Gli artefatti prodotti dalla classe seconda sono illustrati di seguito. Come anticipato nei paragrafi 4.2.1 e 4.3, agli studenti è stato proposto di ideare una propria versione del Dilemma di Monty Hall, basandosi sulla variante che era stata loro presentata durante la sperimentazione. In aggiunta, gli studenti hanno dovuto fornire delle linee guida che spiegassero le "regole del gioco" della loro versione e che illustrassero il fenomeno probabilistico sotteso al Dilemma di Monty Hall. Ogni gruppo di lavoro ha prodotto un artefatto, scegliendo liberamente la modalità di realizzazione, online o offline. Si osserva che quattro gruppi hanno optato per una presentazione con Google Slides, un gruppo ha realizzato un video e un gruppo ha costruito una versione fisica del gioco. Di seguito si riportano alcuni estratti dei lavori.

Presentazione del primo gruppo

Video del secondo gruppo

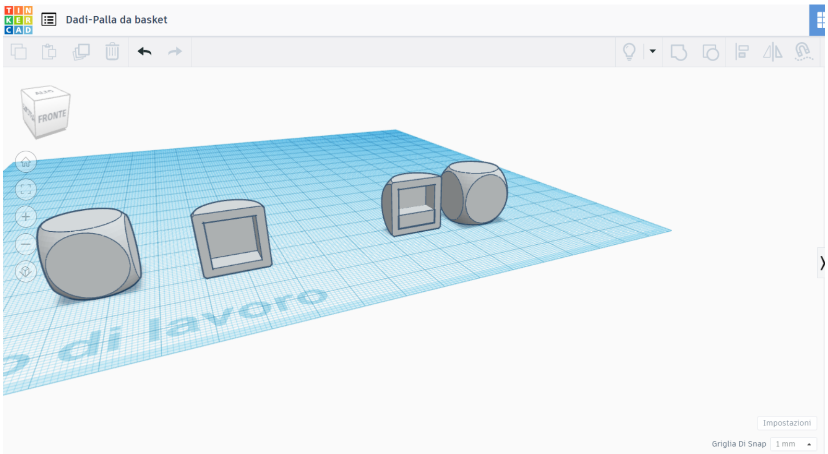


Versione del dilemma di Monty Hall del terzo gruppo

Classe terza

Come illustrato nei paragrafi 4.2.2 e 4.3, agli studenti della classe terza è stata assegnata la sfida di progettare con tinkercad dei dadi truccati e dei dadi non truccati, da stampare successivamente con la stampante 3D della scuola. Ogni dado doveva essere corredato da un documento che ne descrivesse il funzionamento. Gli studenti hanno avuto la possibilità di scegliere la struttura dei dadi e il contenuto delle istruzioni. Di seguito si riportano alcuni estratti dei lavori.

Istruzioni del primo gruppo



Dadi progettati del secondo gruppo

Conclusioni

La ricerca presentata in questa tesi ha esplorato l'insegnamento e l'apprendimento del calcolo delle probabilità nella scuola secondaria di I grado, nello specifico è stata condotta una sperimentazione presso l'Istituto Comprensivo 21 di Bologna.

Nonostante la presenza del calcolo delle probabilità nella vita quotidiana, questo concetto fondamentale riceve scarsa attenzione nell'insegnamento della matematica nelle scuole italiane. L'approccio tradizionale all'insegnamento tende a generare misconcetti tra gli studenti, come confermato dalle indagini condotte su un campione di insegnanti di matematica e su un campione di libri di testo di matematica della scuola secondaria di I grado, entrambe presentate dettagliatamente nel *capitolo 3*.

Emerge che gli insegnanti non hanno la formazione necessaria per l'insegnamento della probabilità, come dimostrato dal fatto che più della metà ha dichiarato di non aver seguito un corso di probabilità durante la propria formazione. Il dato è confermato dal fatto che più della metà del campione di insegnanti dichiara di conoscere solo una delle definizioni di probabilità proposte, la cosiddetta definizione classica. Questo limita la preparazione degli studenti, che quindi imparano il calcolo delle probabilità solo mediante la definizione classica.

Anche l'analisi dei libri di testo conferma questa tendenza. Il calcolo delle probabilità viene presentato come se la definizione classica fosse sempre applicabile. Questo approccio porta a una comprensione errata del calcolo delle probabilità da parte degli studenti.

A partire da questa analisi, è stata avviata una sperimentazione, descritta nel *capitolo 4*, in due classi dell'Istituto Comprensivo 21 di Bologna. L'obiettivo era tentare un approccio diverso rispetto a quello normalmente proposto per introdurre il calcolo delle probabilità. Nello specifico, è stato utilizzato l'approccio assiomatico alla probabilità, combinato con l'approccio trialogico all'apprendimento.

I risultati della sperimentazione, descritti nel *capitolo 5*, indicano che l'approccio assiomatico ha permesso agli studenti di comprendere il calcolo delle probabilità in maniera soddisfacente. Questo dato è stato confermato dal fatto che più della metà degli studenti in ogni classe ha risposto correttamente ai quesiti proposti nel questionario di probabilità somministrato al termine della sperimentazione. Inoltre, la sperimentazione ha dimostrato che l'approccio pedagogico ha avuto un effetto positivo in diversi aspetti, come emerso dai questionari di autovalutazione del clima di classe, dei lavori di gruppo e dei lavori individuali. In particolare, la sperimentazione ha avuto risultati molto soddisfacenti nella classe seconda, che durante la fase preliminare alla sperimentazione aveva mostrato aree problematiche sia riguardo al clima di classe sia riguardo all'apprendimento della matematica. Nonostante le difficoltà incontrate inizialmente, la classe ha dimostrato maggiore serietà in tutte le fasi della sperimentazione.

In conclusione, la sperimentazione condotta in questa ricerca ha evidenziato che l'approccio assiomatico alla probabilità è adeguato per la scuola secondaria di I grado. Questo approccio, non solo non risulta troppo complesso per gli studenti, ma evita anche il presentarsi del misconcetto di equiprobabilità. Si è dimostrato efficace in classi di anni diversi e con diverse difficoltà nell'apprendimento della matematica. L'approccio assiomatico dovrebbe essere introdotto nei libri di testo della scuola secondaria di I grado. Infatti, è proprio in quest'ultima che gli studenti vengono introdotti formalmente al calcolo delle probabilità per la prima volta. Pertanto, è necessario un cambiamento nell'editoria scolastica italiana e, soprattutto, una formazione adeguata dei docenti rispetto ai contenuti del calcolo delle probabilità e ai possibili approcci didattici per evitare la formazione di misconcetti.

Inoltre, l'approccio trialogico si è rivelato molto efficace nell'insegnamento della probabilità. Grazie ai numerosi spazi di discussione durante i lavori di gruppo e alla produzione di artefatti utili alla comunità, questo approccio ha favorito l'apprendimento della probabilità e ha portato a miglioramenti in diversi aspetti delle dinamiche sociali delle due classi coinvolte nella sperimentazione. In particolare, l'approccio trialogico sembra aver avuto un grande successo nella classe seconda, dimostrando di avere le potenzialità per essere applicato efficacemente anche in classi con problematiche interne e tendenze ai conflitti tra gli studenti e con gli insegnanti.

Appendice

All.1: Questionario di autovalutazione in entrata

Questionario di autovalutazione delle proprie competenze (in ingresso)

Cari/e studenti/esse,
questo questionario è ANONIMO e serve ad autovalutare le vostre competenze trasversali all'inizio di questo percorso.
Vi prego di rispondere con spontaneità, in quanto il questionario non rientra in nessuna valutazione e verrà usato solo a scopi statistici di ricerca.
Vi ringrazio molto per la vostra preziosa collaborazione!

* Indica una domanda obbligatoria

1. Inserisci il tuo codice *

La classe

Rispondi alle seguenti domande pensando al clima della tua classe

2. Indica quanto spesso si verificano le seguenti situazioni nella tua classe *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	mai	raramente	spesso	sempre
Il clima della nostra classe è sereno	⬭	⬭	⬭	⬭
Ci si aiuta reciprocamente	⬭	⬭	⬭	⬭
In classe è facile lavorare in gruppo	⬭	⬭	⬭	⬭
Si ascoltano con attenzione le proposte degli altri	⬭	⬭	⬭	⬭
Ci sono contrasti e/o litigi	⬭	⬭	⬭	⬭
Sappiamo collaborare in vista di un obiettivo comune	⬭	⬭	⬭	⬭
Sappiamo trovare un accordo per risolvere un problema.	⬭	⬭	⬭	⬭

3. Quali sono i punti di forza della tua classe? *

4. Quali sono i punti di debolezza della tua classe? *

5. Cosa cambieresti nella tua classe? *

I lavori di gruppo

Rispondi alle seguenti domande ripensando ai lavori di gruppo svolti fino ad ora nelle ore di **MATEMATICA**, **SCIENZE** e nelle **ALTRE MATERIE**.

6. Ripensando ai lavori di gruppi nelle ore di **MATEMATICA** a cui hai partecipato indica quanto spesso si verificano le seguenti situazioni *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	mai	raramente	spesso	sempre
Ascolto le proposte dei miei compagni	⬭	⬭	⬭	⬭
Spiego ai compagni le mie proposte	⬭	⬭	⬭	⬭
So modificare le miei opinioni quando necessario	⬭	⬭	⬭	⬭
Riesco a gestire eventuali litigi	⬭	⬭	⬭	⬭
Riesco ad organizzare il tempo da dedicare alle attività di gruppo	⬭	⬭	⬭	⬭
Collaboro con tutti i componenti del gruppo al fine di ottenere un obiettivo comune	⬭	⬭	⬭	⬭

7. Ripensando ai lavori di gruppi nelle ore di **SCIENZE** a cui hai partecipato indica quanto spesso si verificano le seguenti situazioni *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	mai	raramente	spesso	sempre
Ascolto le proposte dei miei compagni	⬭	⬭	⬭	⬭
Spiego ai compagni le mie proposte	⬭	⬭	⬭	⬭
So modificare le miei opinioni quando necessario	⬭	⬭	⬭	⬭
Riesco a gestire eventuali litigi	⬭	⬭	⬭	⬭
Riesco ad organizzare il tempo da dedicare alle attività di gruppo	⬭	⬭	⬭	⬭
Collaboro con tutti i componenti del gruppo al fine di ottenere un obiettivo comune	⬭	⬭	⬭	⬭

8. Ripensando ai lavori di gruppi nelle ore delle **ALTRE MATERIE** a cui hai partecipato indica quanto spesso si verificano le seguenti situazioni *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	mai	raramente	spesso	sempre
Ascolto le proposte dei miei compagni	⬭	⬭	⬭	⬭
Spiego ai compagni le mie proposte	⬭	⬭	⬭	⬭
So modificare le miei opinioni quando necessario	⬭	⬭	⬭	⬭
Riesco a gestire eventuali litigi	⬭	⬭	⬭	⬭
Riesco ad organizzare il tempo da dedicare alle attività di gruppo	⬭	⬭	⬭	⬭
Collaboro con tutti i componenti del gruppo al fine di ottenere un obiettivo comune	⬭	⬭	⬭	⬭

Lavoro individuale

Rispondi alle seguenti domande pensando ai lavori che ti vengono assegnati individualmente.

9. In una scala da 1=per niente a 4=molto, valuta quanto ritieni di possedere le seguenti capacità *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	per niente d'accordo	poco	abbastanza	molto
Sono consapevole delle mie capacità e so come sfruttarle	⬭	⬭	⬭	⬭
Sono consapevole dei miei limiti e so come gestirli	⬭	⬭	⬭	⬭
So gestire gli strumenti che ho a disposizione per lo studio	⬭	⬭	⬭	⬭
So gestire autonomamente il tempo da dedicare allo studio	⬭	⬭	⬭	⬭
Rispetto le regole	⬭	⬭	⬭	⬭
Porto a termine le consegne che mi vengono assegnate	⬭	⬭	⬭	⬭
Analizzo le informazioni trovate online (social media, motori di ricerca etc.) e so capire se sono attendibili	⬭	⬭	⬭	⬭

All.2: Questionario di autovalutazione in uscita

Questionario di autovalutazione delle proprie competenze (in uscita)

Cari/e studenti/esse,
questo questionario è ANONIMO e serve ad autovalutare le vostre competenze trasversali alla fine di questo percorso.
Vi prego di rispondere con sincetità, in quanto il questionario non rientra in nessuna valutazione e verrà usato solo a scopi statistici di ricerca.
Vi ringrazio molto per la vostra preziosa collaborazione!

* Indica una domanda obbligatoria

1. Inserisci il tuo codice *

La classe

Rispondi alle seguenti domande pensando al clima della tua classe

2. Indica quanto spesso si verificano le seguenti situazioni nella tua classe *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	mai	raramente	spesso	sempre
Il clima della nostra classe è sereno				
Ci si aiuta reciprocamente				
In classe è facile lavorare in gruppo				
Si ascoltano con attenzione le proposte degli altri				
Ci sono contrasti e/o litigi				
Sappiamo collaborare in vista di un obiettivo comune				
Sappiamo trovare un accordo per risolvere un problema.				

3. Quali sono i punti di forza della tua classe? *

4. Quali sono i punti di debolezza della tua classe? *

5. Cosa cambieresti nella tua classe? *

I lavori di gruppo

Rispondi alle seguenti domande ripensando ai lavori di gruppo svolti fino ad ora nelle ore di **MATEMATICA**, **SCIENZE** e nelle **ALTRE MATERIE**.

6. Ripensando ai lavori di gruppi nelle ore di **MATEMATICA** a cui hai partecipato indica quanto spesso si verificano le seguenti situazioni *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	mai	raramente	spesso	sempre
Ascolto le proposte dei miei compagni	⬭	⬭	⬭	⬭
Spiego ai compagni le mie proposte	⬭	⬭	⬭	⬭
So modificare le miei opinioni quando necessario	⬭	⬭	⬭	⬭
Riesco a gestire eventuali litigi	⬭	⬭	⬭	⬭
Riesco ad organizzare il tempo da dedicare alle attività di gruppo	⬭	⬭	⬭	⬭
Collaboro con tutti i componenti del gruppo al fine di ottenere un obiettivo comune	⬭	⬭	⬭	⬭

7. Ripensando ai lavori di gruppi nelle ore di **SCIENZE** a cui hai partecipato indica quanto spesso si verificano le seguenti situazioni *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	mai	raramente	spesso	sempre
Ascolto le proposte dei miei compagni	⬭	⬭	⬭	⬭
Spiego ai compagni le mie proposte	⬭	⬭	⬭	⬭
So modificare le miei opinioni quando necessario	⬭	⬭	⬭	⬭
Riesco a gestire eventuali litigi	⬭	⬭	⬭	⬭
Riesco ad organizzare il tempo da dedicare alle attività di gruppo	⬭	⬭	⬭	⬭
Collaboro con tutti i componenti del gruppo al fine di ottenere un obiettivo comune	⬭	⬭	⬭	⬭

8. Ripensando ai lavori di gruppi nelle ore delle **ALTRE MATERIE** a cui hai partecipato indica quanto spesso si verificano le seguenti situazioni *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	mai	raramente	spesso	sempre
Ascolto le proposte dei miei compagni				
Spiego ai compagni le mie proposte				
So modificare le miei opinioni quando necessario				
Riesco a gestire eventuali litigi				
Riesco ad organizzare il tempo da dedicare alle attività di gruppo				
Collaboro con tutti i componenti del gruppo al fine di ottenere un obiettivo comune				

Lavoro individuale

Rispondi alle seguenti domande pensando ai lavori che ti vengono assegnati individualmente.

9. In una scala da 1=per niente a 4=molto, valuta quanto ritieni di possedere le seguenti capacità *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	per niente d'accordo	poco	abbastanza	molto
Sono consapevole delle mie capacità e so come sfruttarle	⬭	⬭	⬭	⬭
Sono consapevole dei miei limiti e so come gestirli	⬭	⬭	⬭	⬭
So gestire gli strumenti che ho a disposizione per lo studio	⬭	⬭	⬭	⬭
So gestire autonomamente il tempo da dedicare allo studio	⬭	⬭	⬭	⬭
Rispetto le regole	⬭	⬭	⬭	⬭
Porto a termine le consegne che mi vengono assegnate	⬭	⬭	⬭	⬭
Analizzo le informazioni trovate online (social media, motori di ricerca etc.) e so capire se sono attendibili	⬭	⬭	⬭	⬭

Progetto di probabilità

Rispondi alle seguenti domande riferendoti al lavoro riguardo il calcolo delle **probabilità** svolto con la tirocinante **Francesca Penna**.

10. Indica quanto sei d'accordo con le seguenti informazioni in merito al **percorso di probabilità** *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	Per niente d'accordo	Parzialmente d'accordo	D'accordo	Totalmente d'accordo
Il percorso di probabilità è stato interessante e coinvolgente	⬭	⬭	⬭	⬭
Il percorso di probabilità mi ha permesso di conoscere il calcolo delle probabilità	⬭	⬭	⬭	⬭
Il percorso di probabilità mi ha permesso di acquisire nuove competenze	⬭	⬭	⬭	⬭

11. Qual è l'aspetto che ti è piaciuto di più del percorso di probabilità? *

12. Cosa avresti cambiato nel percorso di probabilità? *

13. Trovi che sia stato utile progettare materiale per aiutare gli studenti dei prossimi anni a studiare il calcolo delle probabilità? *

14. Altro da aggiungere?

All.3: Questionario conoscenze di base probabilità

Nome ____________________ Cognome ______________________
Classe ___________ Data _________________

Hai mai sentito parlare di probabilità? Se sì dove?

Qual è la definizione che daresti di probabilità?

Pensi che la probabilità possa essere ricondotta ad una delle materie che studi a scuola o pensi che costituisca una materia a sé stante?

Qual è la definizione che daresti di evento?

Considera i seguenti eventi, ordinali dal più probabile al meno probabile

- **A.** Domani a Bologna piove
- **B.** Al prossimo giro di interrogazioni esce il tuo nome alla ruota delle interrogazioni
- **C.** L'anno scolastico finisce il 7 giugno
- **D.** Lanciando una moneta esce testa
- **E.** Iniziare il primo anno delle medie il prossimo anno

Meno probabile Più probabile

__________ __________ __________ __________ __________

Assegna ad ognuno degli eventi precedenti un numero che ne rappresenti la probabilità

A. ________

B. ________

C. ________

D. ________

E. ________

Spiega perché hai ordinato gli eventi in questo modo e perché hai assegnato questi numeri

All.4: Questionario probabilità in uscita

Nome ____________________ Cognome ______________________
Classe ___________ Data _________________

Dai un esempio di esperimento aleatorio e descrivine gli esiti
____
____
____
____

Considerando l'esperimento aleatorio della domanda precedente, dai un esempio di evento
____
____
____
____

Considera il risultato relativo alla partita di calcio Napoli-Bologna. Assegna ad ognuno degli eventi una probabilità di verificarsi servendoti degli assiomi e spiega come li hai scelti. A="Vince il Napoli" B="Vince il Bologna" C="C'è pareggio"
____
____
____
____

Considera l'esperimento aleatorio lancio di un dado perfettamente bilanciato a 8 facce. Considera l'evento A="Esce la faccia 3". Calcola la probabilità dell'evento A.
____
____
____
____

Considera un mazzo di 40 carte. Considera l'evento A="Pescare un asso". Calcola la probabilità che si verifichi l'evento A.
____

Considera l'esperimento aleatorio lancio di una moneta truccata nel seguente modo: la probabilità che esca testa è il triplo della probabilità che esca croce. Calcola la probabilità che esca testa e la probabilità che esca croce.
____

All.5: Questionario lavoro di gruppo

Primo lavoro di gruppo

Il questionario che stai compilando riguardo il lavoro del tuo gruppo. La risposta è ANONIMA, sentiti libero di esprime le tue opinioni con sincerità riguardo il lavoro dell'intero gruppo e dei singoli componenti.

* Indica una domanda obbligatoria

1. Inserisci il tuo codice *

____

Sezione senza titolo

2. A quale gruppo appartieni? *

Contrassegna solo un ovale.

- Gruppo 1
- Gruppo 2
- Gruppo 3
- Gruppo 4
- Gruppo 5
- Gruppo 6

3. Indica quanto sei d'accordo con le seguenti affermazioni riguardo il lavoro del gruppo *

Contrassegna solo un ovale per riga.

	Per niente d'accordo	Parzialmente d'accordo	D'accordo	Pienamente d'accordo
Abbiamo raggiunto l'obiettivo proposto	⬭	⬭	⬭	⬭
Abbiamo ascoltato le proposte di tutti	⬭	⬭	⬭	⬭
Tutti hanno dato la propria opinione	⬭	⬭	⬭	⬭
Le discussioni all'interno del gruppo sono state costruttive	⬭	⬭	⬭	⬭
Le decisioni sono state prese in base ai dati raccolti	⬭	⬭	⬭	⬭
Le regole sono state rispettate	⬭	⬭	⬭	⬭

4. Cosa si potrebbe migliorare riguardo il lavoro in gruppo? *

5. Indica quanto ognuno ha rispettato i compiti del suo ruolo *
- Il **controllore del tempo** (colui che deve assicurarsi che tutti i tempi siano rispettati)
- Il **sintetizzatore** (colui che ha la responsabilità di assicurarsi che tutte i dati vengano presi e chi si risponda a tutte le domande)
- Il **relatore** (colui che espone i risultati ottenuti)
- Lo **scettico** (colui che mette in discussione le idee proposte)

Contrassegna solo un ovale per riga.

	Per niente rispettati	Parzialmente rispettati	Rispettatati	Totalmente rispetattati
Il controllore del tempo	⬭	⬭	⬭	⬭
Il sintetizzatore	⬭	⬭	⬭	⬭
Il relatore	⬭	⬭	⬭	⬭
Lo scettico	⬭	⬭	⬭	⬭

6. Cosa si potrebbe migliorare riguardo il rispetto dei ruoli? *

7. Altro da aggiungere?

____

____

____

____

____

All.6: Materiali classe seconda

All.6a: Materiali prima attività

Scheda attività pt 1

Concorrente	Fattorino	Scatola scelta dal concorrente	Scatola con premio	Vittoria?
Luca	Maria	2	3	No
Maria	Luca	1	1	Sì

Numero di tentativi	Numero di vittorie

Scheda attività pt 2

Che strategia avete utilizzato per vincere?

Inserisci di seguito i dati ottenuti dall'intera classe

Numero di tentativi	Numero di vittorie

Qual è la probabilità di vincere?

Qual è la probabilità di perdere?

Scheda attività pt 3

Qual è la probabilità di vincere se c'è un iPhone in ogni scatola?

Qual è la probabilità di perdere se c'è un iPhone in ogni scatola?

Qual è la probabilità di vincere se c'è un Nokia in ogni scatola?

Qual è la probabilità di perdere se c'è un Nokia in ogni scatola?

Scheda attività pt 3

Qual è la probabilità di vincere se ci sono 1 iPhone e 3 Nokia?

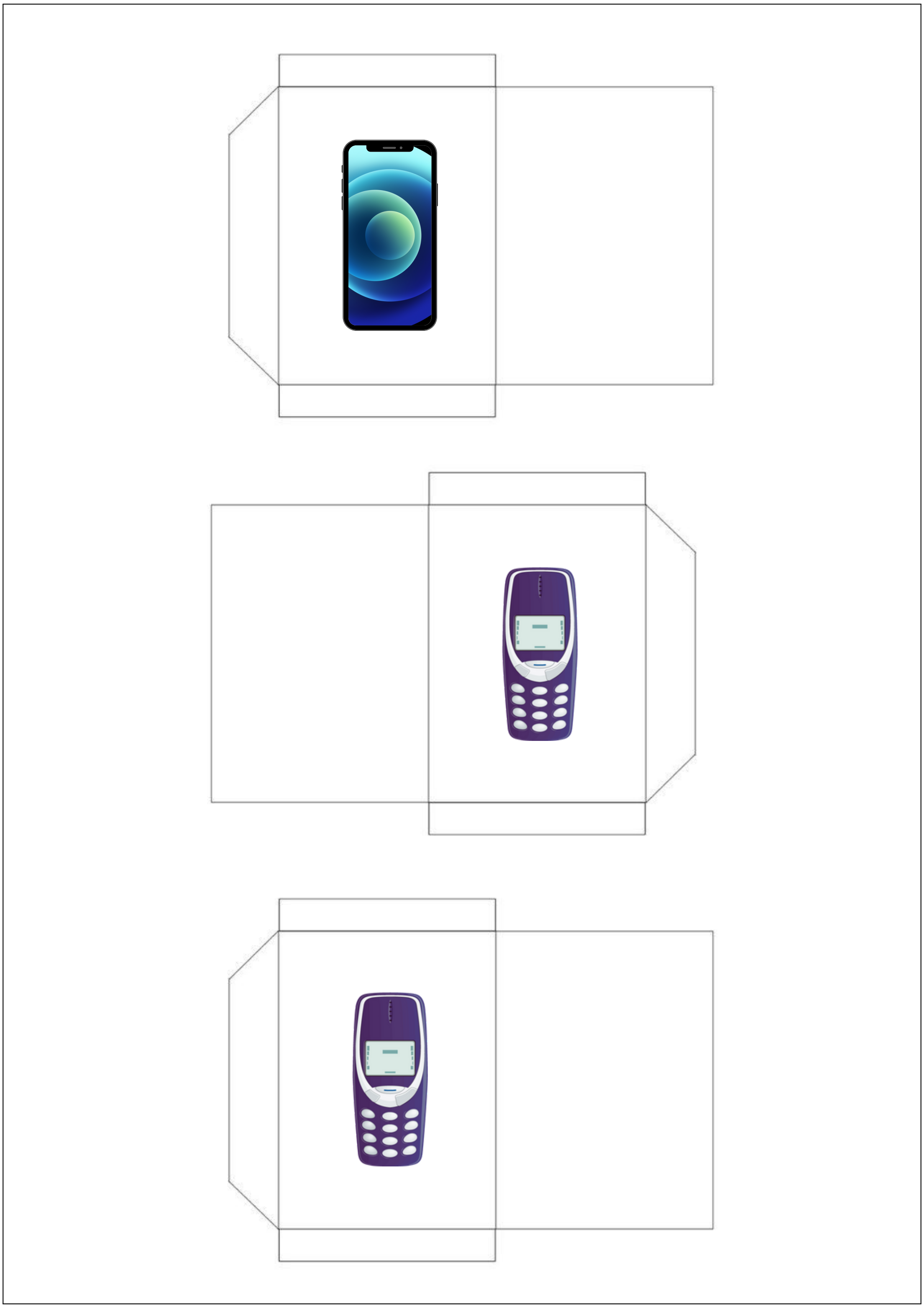
Qual è la probabilità di perdita se ci sono 1 iPhone e 3 Nokia?

Qual è la probabilità di vittoria se ci sono 2 iPhone e 3 Nokia?

Qual è la probabilità di perdere se ci sono 2 iPhone e 3 Nokia?

Scheda attività pt 4

Ripensando a tutti i casi proposti, che conclusioni riesciute a trarre riguardo il calcolo delle probabilità?



All.6b: Materiali seconda attività

Scheda attività

Un **esperimento aleatorio** è un esperimento di cui non conosciamo con certezza il risultato.

Un **esito** è un ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio.

Un **evento** è un'affermazione che riguarda il risultato dell'esperimento aleatorio.

Dopo aver conosciuto l'esito dell'esperimento aleatorio sappiamo dire se l'affermazione è **vero** o **falsa**.

Assiomi della probabilità

I. A ciascun esito è associato un numero tra 0 e 1 che ne rappresenta la probabilità.

II. La **somma** delle probabilità di ognuno degli esiti dell'esperimento è 1.

III. La probabilità di un evento è data dalla somma delle probabilità degli esiti che rendono l'evento vero.

Scheda attività

Verifica usando gli assiomi che la probabilità che esca ognuna delle facce sia 1/6 lanciando un dado a 6 facce perfettamente bilanciato

Qual è la probabilità che esca una delle facce se lanciamo un dado perfettamente bilanciato a 4 facce?

Scheda attività

Supponiamo di avere un dado **truccato** a **4 facce** per cui valga

- la probabilità che esca 1 è il **doppio** della probabilità che esca 2
- la probabilità che esca 2 è il **doppio** della probabilità che esca 3
- la probabilità che esca 3 è il **doppio** della probabilità che esca 4

All.6c: Materiali terza attività

Scheda attività

Regole del gioco

Fattorino

- Conosce il contenuto di ogni scatola

- Dopo che il concorrente avrà scelto, dovrà mostrare una scatola tra quelle non scelte in cui c'è il Nokia

- A quel punto dovrà chiedere al concorrente se vuole cambiare la sua scelta

Concorrente

- Non conosce il contenuto delle scatole

- Dovrà scegliere la scatola in cui pensa sia l'iPhone

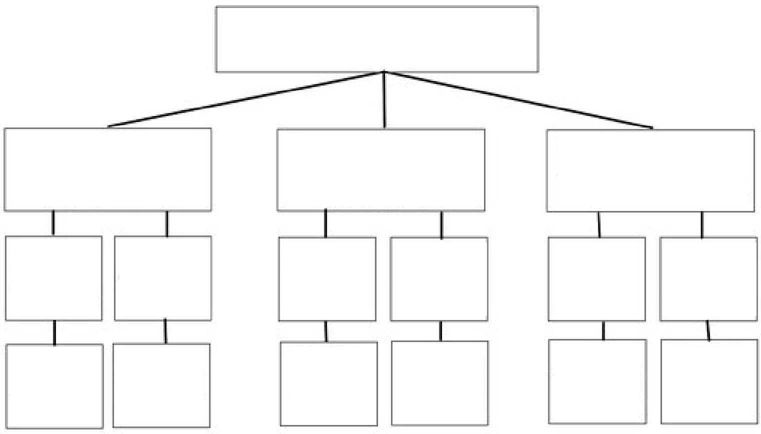
- Dopo che il fattorino gli avrà mostrato la scatola con il nokia, dovrà scegliere se cambiare o meno la sua scelta iniziale

Numero di tentativi	Numero di cambi	Numero di vittorie

Che strategia avete utilizzato per vincere?

È più vantaggioso cambiare o non cambiare?

Scheda attività



Qual è la probabilità di vincere?

Qual è la probabilità di perdere?

All.7: Materiali classe terza

All.7a: Materiali prima attività

Scheda attività pt 1

Nome del gruppo:___________________________

Lancio	Faccia 1	Faccia 2	Faccia 3	Faccia 4	Faccia 5	Faccia 6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						

Numero di lanci	Numero di 1	Numero di 2	Numero di 3	Numero di 4	Numero di 5	Numero di 6

Scheda attività pt 2

Inserisci i dati emersi dai lanci dell'intera classe

Numero di lanci	Numero di 1	Numero di 2	Numero di 3	Numero di 4	Numero di 5	Numero di 6

Qual è la probabilità che siano interrogati 1,2,3,4?

Qual è la probabilità che siano interrogati 5,6,7,8?

Qual è la probabilità che siano interrogati 9,10,11,12?

Qual è la probabilità che siano interrogati 13,14,15,16?

Qual è la probabilità che siano interrogati 17,18,19,20?

Qual è la probabilità che siano interrogati 21,22,23,24?

Scheda attività pt 3

Sarà interrogato

- *uno di voi (a scelta della prof) se esce un numero pari*
- *non sarà interrogato nessuno se esce un numero dispari*

Qual è la probabilità che uno di voi venga interrogato?

Qual è la probabilità che nessuno venga interrogato?

Scheda attività pt 3

Sarà interrogato

- *uno di voi (a scelta della prof) se esce un numero pari*
- *non sarà interrogato nessuno se esce un numero dispari*

Supponiamo che il dado abbia 1 su ogni faccia

Qual è la probabilità che uno di voi venga interrogato?
Qual è la probabilità che nessuno venga interrogato?

Sarà interrogato

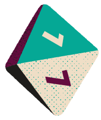
- *uno di voi (a scelta della prof) se esce un numero pari*
- *non sarà interrogato nessuno se esce un numero dispari*

Supponiamo che il dado abbia 6 su ogni faccia

Qual è la probabilità che uno di voi venga interrogato?
Qual è la probabilità che nessuno venga interrogato?

Scheda attività pt 3

Sarà interrogato
- *uno di voi (a scelta della prof) se esce un numero pari*
- *non sarà interrogato nessuno se esce un numero dispari*



Supponiamo che il dado abbia 8 facce

Qual è la probabilità che uno di voi venga interrogato?

Qual è la probabilità che nessuno venga interrogato?

Sarà interrogato
- *uno di voi (a scelta della prof) se esce un numero pari*
- *non sarà interrogato nessuno se esce un numero dispari*

Supponiamo che il dado abbia 10 facce

Qual è la probabilità che uno di voi venga interrogato?

Qual è la probabilità che nessuno venga interrogato?

Scheda attività pt 4

Ripensando a tutti i casi proposti, che conclusioni riuscite a trarre riguardo il calcolo delle probabilità?

All.7b: Materiali seconda attività

Scheda attività

Un **esperimento aleatorio** è un esperimento di cui non conosciamo con certezza il risultato.

Un **esito** è un ipotetico risultato dell’esperimento aleatorio.

Un **evento** è un’affermazione che riguarda il risultato dell’esperimento aleatorio.

Dopo aver conosciuto l'esito dell'esperimento aleatorio sappiamo dire se l'affermazione è **vero** o **falsa**.

Assiomi della probabilità

I. A ciascun esito è associato un numero tra 0 e 1 che ne rappresenta la probabilità.

II. La **somma** delle probabilità di ognuno degli esiti dell'esperimento è 1.

III. La probabilità di un evento è data dalla somma delle probabilità degli esiti che rendono l'evento vero.

Scheda attività

Verifica usando gli assiomi che la probabilità che esca ognuna delle facce sia 1/6 lanciando un dado a 6 facce perfettamente bilanciato

Qual è la probabilità che esca una delle facce se lanciamo un dado perfettamente bilanciato a 4 facce?

Scheda attività

Supponiamo di avere un dado **truccato** a **4 facce** per cui valga

- la probabilità che esca 1 è il **doppio** della probabilità che esca 2
- la probabilità che esca 2 è il **doppio** della probabilità che esca 3
- la probabilità che esca 3 è il **doppio** della probabilità che esca 4

Bibliografia

[1] F. Alcamesi - *Insegnare nell'era digitale*, Culture Digitali, Anno 3 numero 9.

[2] E. Bandini - *Introduzione alla probabilità*, Note del corso di Complementi di Probabilità e Statistica matematica, a.a. 2022/2023.

[3] S. Benvenuti, A. Cattabriga - *Note del corso di Didattica della matematica*, Università degli Studi di Bologna, a.a. 2021/2022.

[4] C. Bertinetto, A. Metiäinen, J. Paasonen, E. Voutilainen, - *Contaci*, Zanichelli, 2019.

[5] A. Buonocore, A. Di Crescenzo, L. M. Ricciardi - *Appunti di probabilità*, Liguori Editore, 2011, Napoli.

[6] M. Castoldi - *Didattica generale*, Mondarori Università, 2015, Milano.

[7] D. Cesareni, M.B. Ligorio, N. Sansone - *Fare e collaborare: l'approccio trialogico nella didattica*, FrancoAngeli, 2018, Milano.

[8] D. Cesareni, M.B. Ligorio, N. Sansone - *Il trialogical Learning Approach per rinnovare la didattica*, TD Tecnologie Didattiche, 24(2), 82-91.

[9] D. Costantini - *I fondamenti storico-filosofici delle discipline statistico-probabilistiche*, Bollati Boringheri, 2004, Torino.

[10] E. De Negri - *Introduzione alla probabilità*, www.dima.unige.it/ denegri/eccellenze/probabilita.pdf.

[11] M. Fabbri - *Note del corso di Didattica e Pedagogia Speciale*, a.a. 2022/2023, Bologna.

[12] A. Montemurro, *Tutto chiaro!*, De Agostini.

[13] A. Nicolae, A. Gimigliano - *Introduzione alla probabilità. Concetti di base.*, Progetto matematica dell'università degli studi di Bologna, www.progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/.

[14] S. Sbaragli, - *Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili"*, 2005.