

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Triennale in Matematica

**TRANSIZIONI DI FASE E
MATRICI ALETORIE**

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PIERLUIGI CONTUCCI

Presentata da:
FEDERICO MENEGAZZO

Correlatore:
Chiar.mo Dott.
FRANCESCO CAMILLI

Anno Accademico 2022-2023

Indice

Introduzione	iii
1 La legge del semicerchio	1
1.1 Utili concetti preliminari	1
1.2 La trasformata di Stieltjes	5
1.3 La legge del semicerchio	12
2 La transizione BBP	27
2.1 Definizioni ed ipotesi	27
2.2 Risultati preliminari	29
2.3 Teorema di transizione di fase dell'autovalore	34
3 Simulazioni computazionali	39
3.1 Simulazione numerica della legge del semicerchio	39
3.2 Simulazione numerica della transizione BBP per le matrici di Wigner	41
3.3 L'ensemble matriciale di Wishart	44
3.4 Simulazione numerica del Teorema 3.1	45
3.5 Simulazione numerica della transizione BBP per le matrici di Wishart	46
4 Conclusioni e prospettive	49
Bibliografia	51

Ringraziamenti

53

Introduzione

Nella prima metà del secolo scorso, il campo della fisica atomica ha conosciuto un notevole sviluppo; tra i nomi dei ricercatori che più contribuirono al suo progresso, sicuramente figura quello del premio Nobel unghero-statunitense Eugene Wigner (1902 - 1995). Uno dei problemi su cui si concentrò, fu lo studio delle interazioni fra protoni e neutroni all'interno di strutture atomiche complesse.

All'epoca, era già noto che certe matrici simmetriche potessero essere utilizzate per descrivere tali interazioni; tuttavia, determinare esplicitamente i coefficienti di queste matrici costituiva una sfida a sé stante, piena di dettagli sconosciuti. Inoltre, anche se fosse stato possibile calcolarli rapidamente, diagonalizzare la matrice, per ottenere ulteriori informazioni cruciali circa la struttura atomica del nucleo, sarebbe stato comunque un processo computazionalmente molto impegnativo.

In questo contesto, Wigner propose un'interpretazione probabilistica del problema: se i coefficienti di queste matrici simmetriche si comportano in modo così complesso da sembrare casuali, sarà possibile sostituirli con variabili aleatorie indipendenti, che rispettino la condizione di simmetria, e studiare la distribuzione degli autovalori della matrice risultante? Nacquero così, le matrici aleatorie di Wigner. Wigner stesso scoprì che se la dimensione n della matrice aleatoria è sufficientemente grande, allora la distribuzione dei suoi autovalori sarà approssimabile (con un grado di precisione sempre maggiore, all'aumentare di n) con una speciale distribuzione, detta "distribuzione a semicerchio" ed il teorema che dimostra questo elegante risultato prenderà il

nome di "legge del semicerchio".

Nel corso del tempo, queste matrici passeranno dall'essere uno strumento esclusivo della fisica teorica, all'avere un numero considerevole di applicazioni negli ambiti più disparati. Eccone un esempio modello.

Supponiamo di avere due amiche Alessia e Barbara, entrambe aspiranti ingegneri elettronici. Un giorno, queste due amiche decidono di costruire due radio e di tentare di trasmettere un vettore di r numeri reali e positivi fra le due. Si incontrano, si posizionano in stanze diverse di un medesimo edificio e Barbara tenta di trasmettere le componenti del vettore alla radio di Alessia. Tuttavia, le due amiche notano subito che la differenza fra i valori inviati da Barbara e quelli ricevuti da Alessia, non solo è significativa, oltretutto pare essere assolutamente aleatoria. E' possibile per Alessia, trovare una strategia che le consenta di ricostruire, con un qualche grado di precisione, i valori inviate da Barbara?

In primo luogo, proponiamo una descrizione equivalente del problema. Se $n \in \mathbb{N}$, H è una matrice qualsiasi di dimensione $n \times r$, tale che $H^T H = I_r$, e Θ è la matrice diagonale $r \times r$, che ha sulla diagonale gli r valori che Barbara desidera inviare, chiamiamo P_n la matrice $n \times n$, tale che $P_n = H \Theta H^T$.

In un mondo ideale, Barbara potrebbe inviare la matrice P_n alla radio di Alessia e questi potrebbe semplicemente calcolarne gli autovalori, ricavando il vettore originario. Purtroppo, nel corso della trasmissione, i coefficienti di P_n vengono alterati e la matrice ricevuta dalla radio di Alessia sarà invece $P_n + X_n$. Dove X_n è una matrice aleatoria, simmetrica, di dimensione n . A questo punto, la domanda diventa: Alessia potrà dedurre, con un certo grado di precisione, tutti gli autovalori della matrice P_n originaria?

Il modello spiked Wigner non è altro che un caso specifico del problema di Alessia e Barbara, per l'esattezza, il caso in cui la matrice X_n sia proprio una matrice di Wigner. Tuttavia, il problema di Alessia e Barbara è stato posto più in generale e vedremo che avrà risposta affermativa se si verificheranno

alcune condizioni:

1. la distribuzione degli autovalori della matrice X_n , nel limite per n che tende ad infinito, dovrà tendere ad una distribuzione limite a supporto compatto;
2. la distribuzione della matrice X_n dovrà essere invariante sotto l'azione di coniugio da parte del gruppo ortogonale; questa proprietà prende anche i nomi di "invarianza per rotazioni" o "ortogonale invarianza";
3. tutte le componenti del vettore inviato da Barbara, non dovranno essere minori di un certo valore minimo.

Il risultato che spiega e dimostra questo comportamento è chiamato Teorema di transizione dell'autovalore. Il nome è immediatamente giustificato dall'affermazione (3) dell'elenco precedente; infatti, in un certo senso, le componenti del vettore "transitano" dal non essere ricostruibili, all'esserlo quasi certamente, sulla base del fatto che siano maggiori o minori di una certa soglia.

La tesi sarà organizzata come segue:

Il primo capitolo è dedicato alla dimostrazione della legge del semicerchio. Definiremo formalmente i concetti di matrice aleatoria di Wigner di dimensione n e di distribuzione mediata degli autovalori di una matrice aleatoria, sempre di dimensione n . Mostriamo che, nel limite per n che tende ad infinito, la distribuzione mediata degli autovalori di una matrice di Wigner convergerà debolmente alla distribuzione a semicerchio.

Invece, il secondo capitolo è dedicato alla dimostrazione del teorema di transizione dell'autovalore. Nel corso del capitolo, verranno date alcune definizioni essenziali, come quella di: matrice aleatoria invariante per rotazioni; convergenza, quasi certamente, debole e di trasformata di Cauchy di una distribuzione. L'enunciato del teorema sarà più generale e non limitato al caso

in cui la matrice X_n sia di Wigner. Infatti, varrà per ogni ensemble di matrici aleatorie che godano delle tre proprietà dell'elenco di cui sopra, e mostreremo che la soglia critica affinché avvenga la transizione è in esplicita dipendenza dalla trasformata di Cauchy della distribuzione limite degli autovalori.

Infine, il terzo capitolo sarà dedicato alla sperimentazione computazionale della legge del semicerchio ed allo studio numerico del problema di Alessia e Barbara. Più precisamente, il segnale di Barbara sarà composto da due valori, che verranno appositamente scelti in modo che uno sia ricostruibile, mentre l'altro no; in modo da illustrare più chiaramente l'occorrenza della transizione.

Capitolo 1

La legge del semicerchio

1.1 Utili concetti preliminari

Definizione 1.1. (I numeri di Catalan)

Definiamo una successione $(C)_{k \in \mathbb{N}}$ come segue:

$$C_0 = 1$$
$$C_k = \sum_{l=0}^{k-1} C_l C_{k-1-l}$$

i valori di questa successione prendono il nome di "numeri di Catalan".

Teorema 1.1. La successione dei numeri di Catalan verifica la seguente equazione:

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

Dimostrazione. Definiamo la seguente funzione $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

procediamo calcolando $G(x)^2$ utilizzando il prodotto di Cauchy per le serie:

$$\begin{aligned} G(x)^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k C_h C_{k-h} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1} x^k \end{aligned}$$

dunque:

$$\begin{aligned} x G(x)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k \\ &= G(x) - 1 \end{aligned}$$

ne segue che $G(x)$ soddisfa l'equazione:

$$x G(x)^2 - G(x) + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$G(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

discriminiamo fra le due osservando che $G(0) = 1$ e che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} &= -\infty \end{aligned}$$

dunque:

$$\forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \quad G(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

ma, dall'analiticità della funzione $\sqrt{1 - 4x}$ nell'intervallo $(-\infty, \frac{1}{4}]$, possiamo ricavare le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \quad f(x) = \sqrt{1 - 4x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2k-1} \binom{2k}{k} x^k \end{aligned}$$

sostituendo abbiamo che $\forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \\ &= \frac{1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2k-1} \binom{2k}{k} x^k}{2x} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} x^k}{2x} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{2(k+1)-1} \binom{2(k+1)}{k+1} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} x^k \end{aligned}$$

da cui:

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

□

Lemma 1.1. Sia (A, F, P) spazio di probabilità e $g : A \rightarrow B$ iniettiva e suriettiva. Allora, $(B, g(F), Q)$ è uno spazio di probabilità, con $g(F) = \{g(A) \mid A \in F\}$ e $\forall B \in g(F), Q(B) = P(g^{-1}(B))$

Dimostrazione. Mostriamo la chiusura di $g(F)$ rispetto al complementare. Se $B \in g(F)$ allora $\exists! A \in F$ tale che $g(A) = B$. Poichè F è una σ -algebra, anche $A^c \in F$. Dunque, dalle proprietà di g segue che: $g(A^c) = g(A)^c = B^c$. Allora, anche $B^c \in g(F)$. Tramite ragionamenti analoghi e sfruttando le proprietà di g , si ottiene facilmente il risultato. \square

Definizione 1.2. (La distribuzione a semicerchio)

Sia \mathbb{B} l'insieme dei Borelliani su \mathbb{R} , la distribuzione a semicerchio μ_{SC} è una distribuzione sullo spazio misurabile $([-2, 2], \mathbb{B})$ ed è quella con funzione di densità:

$$d\mu_{SC}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}$$

Definizione 1.3. (Momenti di una variabile aleatoria)

Sia $k \in \mathbb{N}$ e X una variabile aleatoria. Il k -esimo momento di X è definito come la quantità: $\mathbb{E}(X^k)$.

Teorema 1.2. (Momenti della distribuzione a semicerchio)

Sia X una variabile aleatoria che abbia come legge la distribuzione a semicerchio. Allora il k -esimo momento di X è dato da:

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^k \sqrt{4 - x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ C_{k/2} & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è reperibile qui: [1] \square

Definizione 1.4. (convergenza debole)

Sia $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di misure finite su \mathbb{R} e sia μ un'ulteriore misura finita, sempre su \mathbb{R} . Affermiamo che la successione $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ converge debolmente a μ , quando $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua e limitata è vero che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_k(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx)$$

denotiamo tale relazione con: $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$.

Definizione 1.5. (vaga convergenza)

Sia $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di misure finite su \mathbb{R} e sia μ un'ulteriore misura

finita, sempre su \mathbb{R} . Affermiamo che la successione $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vagamente a μ , quando $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua, tale che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, è vero che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_k(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx)$$

denotiamo tale relazione con: $\mu_k \xrightarrow{v} \mu$.

Enunciamo alcuni risultati che collegano la convergenza debole a quella vaga.

Lemma 1.2. Sia $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di misure di probabilità su \mathbb{R} che ammette un limite debole, sempre su \mathbb{R} . Sia μ quel limite. Allora, μ è effettivamente una misura di probabilità su \mathbb{R} .

Dimostrazione. La dimostrazione è reperibile qui: [1] □

Lemma 1.3. Sia $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di misure di probabilità su \mathbb{R} e sia μ un'ulteriore misura di probabilità. Allora, $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ se e solo se $\mu_k \xrightarrow{v} \mu$.

Dimostrazione. La dimostrazione è reperibile qui: [1] □

Teorema 1.3. (Teorema della scelta di Helly)

Ogni successione $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ di misure di probabilità su \mathbb{R} ammette una sottosuccessione $(\eta)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che: $\eta_k \xrightarrow{v} \eta$, dove η è ancora una misura su \mathbb{R} e $\eta(\mathbb{R}) \leq 1$.

Dimostrazione. Questo teorema è un esercizio su: [2], a pagina 167. □

1.2 La trasformata di Stieltjes

Definizione 1.6. (La trasformata di Stieltjes)

Sia μ una misura di Borel finita su \mathbb{R} . La sua trasformata di Stieltjes è la funzione $S_\mu : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ definita come segue:

$$S_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} \mu(dx)$$

Nota 1.1. Svolgiamo un rapido controllo della buona definizione della trasformata di Stieltjes. Più precisamente, l'unica cosa che non appare immediatamente ovvia è se il suo codominio sia ben definito.

Ricordiamo che se $z \in \mathbb{C}$, allora:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Dunque, poiché nella definizione della trasformata di Stieltjes $z \in \mathbb{C}^+$, è immediato concludere che $Im(x - z) < 0$ e conseguentemente che la parte immaginaria del suo reciproco sia maggiore di zero. Quindi, il codominio di S_μ è effettivamente \mathbb{C}^+ .

Nota 1.2. Fissato $z \in \mathbb{C}^+$, allora $\frac{1}{x-z} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^+$ è analitica. Ne segue che anche il suo integrale su \mathbb{R} sia analitico su \mathbb{C}^+ . Dunque, $S_\mu(z)$ è analitica su \mathbb{C}^+ .

Proposizione 1.1. (Formula d'inversione della trasformata di Stieltjes)

Sia μ una misura di Borel finita su \mathbb{R} e S_μ la sua trasformata di Stieltjes.

Siano $b, a \in \mathbb{R}$ con $b \geq a$. Allora, vale la seguente identità:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b Im(S_\mu(t + i\epsilon)) dt = \mu((a, b)) + \frac{1}{2} (\mu(a) + \mu(b))$$

Dimostrazione. Calcoliamo $Im(S_\mu(t + i\epsilon))$:

$$\begin{aligned} Im(S_\mu(t + i\epsilon)) &= \int_{\mathbb{R}} Im\left(\frac{1}{x - t - i\epsilon}\right) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Im\left(\frac{x - t + i\epsilon}{(x - t)^2 + \epsilon^2}\right) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon}{(x - t)^2 + \epsilon^2} \mu(dx) \end{aligned}$$

applicando il teorema di Fubini, ci è permesso scambiare l'ordine di integrazione, pertanto ne segue che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im}(S_\mu(t+i\epsilon)) dt &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon}{(x-t)^2 + \epsilon^2} \mu(dx) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_a^b \frac{\epsilon}{(x-t)^2 + \epsilon^2} dt \right) \mu(dx) \end{aligned}$$

se consideriamo la seguente sostituzione $t = \epsilon u + x$, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\epsilon}{(x-t)^2 + \epsilon^2} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a-x}{\epsilon}}^{\frac{b-x}{\epsilon}} \frac{\epsilon}{(u\epsilon)^2 + \epsilon^2} \epsilon du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a-x}{\epsilon}}^{\frac{b-x}{\epsilon}} \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan \left(\frac{b-x}{\epsilon} \right) - \arctan \left(\frac{a-x}{\epsilon} \right) \right) \end{aligned}$$

osserviamo che se $a < x < b$, allora:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left(\arctan \left(\frac{b-x}{\epsilon} \right) - \arctan \left(\frac{a-x}{\epsilon} \right) \right) = 1$$

invece, nel caso in cui $x = a$ o $x = b$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left(\arctan \left(\frac{b-x}{\epsilon} \right) - \arctan \left(\frac{a-x}{\epsilon} \right) \right) = \frac{1}{2}$$

in conclusione:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im}(S_\mu(t+i\epsilon)) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\arctan \left(\frac{b-x}{\epsilon} \right) - \arctan \left(\frac{a-x}{\epsilon} \right) \right) \mu(dx)$$

tuttavia, applicando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, possiamo scambiare l'operazione di limite con quella di integrale, giungendo alla

seguinte identità:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\arctan \left(\frac{b-x}{\epsilon} \right) - \arctan \left(\frac{a-x}{\epsilon} \right) \right) \mu(dx) = \\
& = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{b-x}{\epsilon} \right) - \arctan \left(\frac{a-x}{\epsilon} \right) \right) \mu(dx) = \\
& = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(x) + \frac{1}{2} \left(\chi_{\{a\}}(x) + \chi_{\{b\}}(x) \right) \mu(dx) \\
& = \mu((a, b)) + \frac{1}{2} (\mu(a) + \mu(b))
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.4. Siano μ e η misure finite di Borel su \mathbb{R} . Se $S_{\mu}(z) = S_{\eta}(z) \forall z \in \mathbb{C}^+$, allora $\mu = \eta$.

Dimostrazione. Siano a, b in \mathbb{R} ; tali che, $a < b$. Dalla Proposizione 1.1, otteniamo subito che se $\mu(a) = \mu(b) = 0$ e $\eta(a) = \eta(b) = 0$, allora $\mu((a, b)) = \eta((a, b))$.

Definiamo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(x) > 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \eta(x) > 0\}$, poichè μ e η sono misure finite, sia A che B sono numerabili. Dunque, $A \cup B$ è numerabile.

Pertanto, consideriamo (a, b) . Dalla numerabilità di $A \cup B$, segue l'esistenza di una successione reale e positiva $(\epsilon)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che: $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$ e sia $a + \epsilon_k$ che $b - \epsilon_k$ non appartengano ad $A \cup B$. In conclusione, dalle proprietà delle misure di Borel, otteniamo che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu((a, b)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu((a + \epsilon_k, b - \epsilon_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta((a + \epsilon_k, b - \epsilon_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta((a, b))$$

□

Teorema 1.5. Sia $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di misure di probabilità su \mathbb{R} e sia μ un'ulteriore misura di probabilità su \mathbb{R} . Allora, $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ se e solo se $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\mu_k}(z) = S_{\mu}(z) \forall z \in \mathbb{C}^+$

Dimostrazione. (\Rightarrow) Supponiamo che $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$. Dunque, se consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definita come segue:

$$f(x) = \frac{1}{x - z} \quad \text{con } z \in \mathbb{C}^+ \text{ fissato}$$

Poichè, $z \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow \text{Im}(z) > 0$, abbiamo che f è certamente continua. Inoltre, osservando che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{x-z} \right| = 0$, possiamo certamente concludere che sia anche limitata. Quindi, f verifica la definizione di convergenza debole (Definizione 1.4) e ne segue immediatamente che:

$$S_{\mu_k}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_k(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) = S_{\mu}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^+$$

(\Leftarrow) Dal Teorema 1.3, abbiamo che esiste $(\mu)_{h \in \mathbb{N}}$ sotto-successione di $(\mu)_k$ tale che $\mu_h \xrightarrow{v} \eta$, con η misura finita su \mathbb{R} . Dal Lemma 1.3, abbiamo immediatamente che $\mu_h \xrightarrow{w} \eta$.

Riutilizzando le medesime considerazioni svolte per l'implicazione precedente, otteniamo che $\lim_{h \rightarrow \infty} S_{\mu_h}(z) = S_{\eta}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^+$.

Tuttavia, per ipotesi, abbiamo anche che $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\mu_k}(z) = S_{\mu}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^+$. Dunque, poichè $(\mu)_{h \in \mathbb{N}}$ è una sotto-successione di $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$, allora, fissando $z \in \mathbb{C}^+$, definiamo: $(b)_{h \in \mathbb{N}}$ con $b_h = S_{\mu_h}(z)$ che è una sottosuccessione di $(a)_{k \in \mathbb{N}}$ con $a_k = S_{\mu_k}(z)$. Ne segue immediatamente che:

$$S_{\eta}(z) = \lim_{h \rightarrow \infty} S_{\mu_h}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{\mu_k}(z) = S_{\mu}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^+$$

Dal Teorema 1.4, abbiamo che $\mu = \eta$. Dunque, $\mu_h \xrightarrow{w} \eta = \mu$.

In conclusione, abbiamo appena mostrato che è impossibile trovare due sotto-successioni di $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ che convergano debolmente a misure di probabilità diverse. Ergo, $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$. \square

Proposizione 1.2. Sia μ una misura di probabilità su \mathbb{R} tale per cui esista un numero reale $R > 0$ tale che $\mu([-R, R]) = 1$. Allora, $\forall z \in \mathbb{C}^+$ tale che $|z| > R$:

$$S_{\mu}(z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{z^{k+1}}$$

dove M_k è il k -esimo momento della distribuzione μ .

Dimostrazione. Dall' esistenza di un numero reale $R > 0$ tale che $\mu([-R, R]) = 1$, otteniamo:

$$S_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} \mu(dx) = \int_{-R}^R \frac{1}{x-z} \mu(dx) = \int_{-R}^R -\frac{1}{z(1-\frac{x}{z})} \mu(dx)$$

se $|z| > R$, allora $\forall x \in [-R, R]$ si ha che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^k \text{ converge uniformemente a } \frac{1}{(1-\frac{x}{z})}$$

quindi, deduciamo che:

$$S_\mu(z) = \int_{-R}^R -\frac{1}{z(1-\frac{x}{z})} \mu(dx) = \int_{-R}^R -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^k \mu(dx)$$

infine, la proprietà di convergenza uniforme ci consente di scambiare la sommatoria con l'integrale: $\forall z \in \mathbb{C}^+$, $|z| > R$:

$$S_\mu(z) = \int_{-R}^R -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^k \mu(dx) = -\sum_{k=0}^{\infty} \int_{-R}^R \frac{x^k}{z^{k+1}} \mu(dx) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{z^{k+1}}$$

□

Nota 1.3. Come già evidenziato nella Nota 1.2, $S_\mu(z)$ su \mathbb{C}^+ è analitica, inoltre $\{z \in \mathbb{C}^+ \mid |z| > R\}$ è connesso. Dunque, il principio del prolungamento analitico ci permette di estendere il risultato precedente (Proposizione 1.2) a tutte le $z \in \mathbb{C}^+$

Proposizione 1.3. Sia μ_{SC} la distribuzione a semicerchio (Definizione 1.2). Allora:

$$S_{\mu_{SC}}(z) = \frac{-z + \sqrt{z^2 - 4}}{2}, \text{ con } z \in \mathbb{C}^+$$

Dimostrazione. Dalla Nota 1.3 e dal Teorema 1.2, otteniamo subito che $\forall z \in \mathbb{C}^+$:

$$S_{\mu_{SC}}(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{z^{k+1}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_{2k}}{z^{2k+1}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{z^{2k+1}}$$

ricordando la Definizione 1.1, consideriamo:

$$S_{\mu_{SC}}(z)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{z^{2k+1}} \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k \frac{C_h}{z^{2h+1}} \frac{C_{k-h}}{z^{2(k-h)+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{k+1}}{z^{2(k+1)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z^{2k}}$$

allora:

$$\frac{1}{z} S_{\mu_{SC}}(z)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z^{2k+1}} = -S_{\mu_{SC}}(z) - \frac{1}{z}$$

equivalentemente:

$$S_{\mu_{SC}}(z)^2 + z S_{\mu_{SC}}(z) + 1 = 0$$

in conclusione:

$$S_{\mu_{SC}}(z) = \frac{-z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

dalla Nota 1.1 sappiamo che $\forall z \in \mathbb{C}^+$, $S_{\mu_{SC}}(z) \in \mathbb{C}^+$. Dunque, l'unica soluzione ammissibile è quella col segno più.

□

1.3 La legge del semicerchio

Definizione 1.7. Sia $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. Definiamo $\Omega_N = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid M_{(i,j)} = M_{(j,i)} \forall (i,j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}\}$, l'insieme delle matrici simmetriche a coefficienti in \mathbb{R}

Nota 1.4. Sia $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. Osserviamo che $\mathbb{A}_N : \mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}} \rightarrow \Omega_N$, tale che:

$$\mathbb{A}_N(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_2 & x_{N+1} & \cdots & x_{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & x_{2N-1} & \cdots & x_{\frac{N(N+1)}{2}} \end{pmatrix}$$

è iniettiva e suriettiva.

Per questione di comodità, introduciamo la seguente notazione:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}}, \quad x_{(i,j)} = \mathbb{A}_N(x)_{(i,j)}.$$

Definizione 1.8. (N -esimo Gaussian Orthogonal Ensemble) Sia $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, sia ϕ la funzione presentata nella Nota 1.4 e sia Ω_N definito come nella Definizione 1.7. L' N -esimo "Gaussian Orthogonal Ensemble" (acr. GOE) è lo spazio di probabilità $(\Omega_N, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ definito come segue:

- Siano $\mathbb{B}^{\frac{N(N+1)}{2}}$ l'insieme dei borelliani su $\mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}}$, allora $\mathbb{F} = \mathbb{A}_N(\mathbb{B}^{\frac{N(N+1)}{2}})$ (vedi Lemma 1.1)

- Sia $B \in \mathbb{F}$, $\mathbb{P}(B) = K \int_{\mathbb{A}_N^{-1}(B)} e^{-\frac{N}{4} \text{Tr}(\mathbb{A}_N(x)^2)} dx := K \int_B e^{-\frac{N}{4} \text{Tr}(H^2)} dH$.

$$\text{Con } K = \left(\sqrt{\frac{N}{4\pi}}\right)^N \left(\sqrt{\frac{N}{2\pi}}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}}.$$

chiamiamo $\Gamma(H) = K e^{-\frac{N}{4} \text{Tr}(H^2)}$

Nota 1.5. Sia $(a, b) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$, con $a \neq b$.

Sia $X_{(a,b)} : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}$, tale che $X_{(a,b)}(M) = M_{(a,b)}$. Determiniamone la legge.

Sia B borelliano reale:

$$\mu_{X_{(a,b)}}(B) = \mathbb{P}(X_{(a,b)} \in B)$$

$$\begin{aligned} &= K \int_{B \times \mathbb{R}^{\binom{N(N+1)}{2}-1}} e^{-\frac{N}{4} \text{Tr}(\mathbb{A}_N(x)^2)} dx \\ &= \left(\sqrt{\frac{N}{4\pi}} \right)^N \left(\sqrt{\frac{N}{2\pi}} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \int_{B \times \mathbb{R}^{\binom{N(N+1)}{2}-1}} e^{-\frac{N}{4} [\sum_{i=1}^N (\mathbb{A}_N(i,i))^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\mathbb{A}_N(i,j))^2]} dx \\ &= \int_{B \times \mathbb{R}^{\binom{N(N+1)}{2}-1}} \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{N}{4\pi}} e^{-\frac{N}{4} (x_{(i,i)})^2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} e^{-\frac{N}{2} (x_{(i,j)})^2} dx \\ &= \int_B \sqrt{\frac{N}{2\pi}} e^{-\frac{N}{2} (x_{(a,b)})^2} d(x_{(a,b)}) \end{aligned}$$

Dunque $\forall (a, b) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}, a \neq b, X_{(a,b)} \sim \mathcal{N}_{0, \frac{1}{N}}$.

Analogamente si ottiene anche che: $\forall a \in \{1, \dots, N\} X_{(a,a)} \sim \mathcal{N}_{0, \frac{2}{N}}$.

Definizione 1.9. (distribuzione empirica degli autovalori)

Sia $M_N \in \Omega_N$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ i suoi N autovalori reali (non necessariamente distinti). Definiamo la "distribuzione empirica degli autovalori" su \mathbb{R} come segue:

$$\mu_{M_N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{\lambda_k}$$

Definizione 1.10. Fissato B borelliano reale, definiamo $\Psi_B : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}$ variabile aleatoria come segue: $\Psi_B(M_N) = \mu_{M_N}(B)$.

Definizione 1.11. (distribuzione mediata degli autovalori)

La "distribuzione mediata degli autovalori" è la distribuzione reale μ_N , definita come segue:

$$\mu_N(B) = \int_{\Omega_N} \Psi_B d\mathbb{P} = \int_{\Omega_N} \Psi_B(H) \Gamma(H) dH$$

Lemma 1.4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, f continua e limitata. Allora vale la seguente identità:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_N(dx) = \int_{\Omega_N} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_H(dx) \right) \Gamma(H) dH = \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_H(dx) \right]$$

Dimostrazione. Consideriamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, funzione semplice, sia $\{z_1, \dots, z_m\}$ la sua immagine. Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_N(dx) &= \sum_{k=1}^m z_k \mu_N(f^{-1}(\{z_k\})) = \sum_{k=1}^m z_k \int_{\Omega_N} \mu_H(f^{-1}(\{z_k\})) \Gamma(H) dH \\ &= \int_{\Omega_N} \left(\sum_{k=1}^m z_k \mu_H(f^{-1}(\{z_k\})) \Gamma(H) \right) dH \\ &= \int_{\Omega_N} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_H(dx) \right) \Gamma(H) dH \end{aligned}$$

Qualora f non sia semplice, il risultato si può estendere approssimando f con una successione di funzioni semplici ed applicando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue. \square

Lemma 1.5. Vale la seguente identità:

$$S_{\mu_N}(z) = \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\frac{1}{N} \text{Tr}((H - z I_N)^{-1}) \right]$$

Dimostrazione. Dal Lemma 1.4:

$$S_{\mu_N}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} \mu_N(dx) = \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} \mu_H(dx) \right]$$

siano $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ gli autovalori reali di H , allora:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} \mu_H(dx) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\lambda_k - z)^{-1} \\ &= \frac{1}{N} \text{Tr}((H - z I_n)^{-1}) \end{aligned}$$

dunque:

$$S_{\mu_N}(z) = \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\frac{1}{N} \text{Tr}((H - z I_n)^{-1}) \right]$$

□

Definizione 1.12. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ invertibile e $z \in \mathbb{C}$, definiamo il risolvente della matrice A centrato in z , come segue:

$$R_A(z) = (A - z I_n)^{-1}$$

Lemma 1.6. Vale la seguente identità:

$$S_{\mu_N}(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \frac{1}{N} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\text{Tr}(H R_H(z))]$$

Dimostrazione. Dalla Definizione 1.12:

$$\begin{aligned} (H - z I_N) R_H(z) &= I_N \\ H R_H(z) - z R_H(z) &= I_N \\ R_H(z) &= -\frac{1}{z} I_N + \frac{1}{z} H R_H(z) \end{aligned}$$

ne segue che:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(R_H(z)) &= \operatorname{Tr}\left(-\frac{1}{z} I_N + \frac{1}{z} H R_H(z)\right) \\ \operatorname{Tr}(R_H(z)) &= -\frac{1}{z} \operatorname{Tr}(I_N) + \frac{1}{z} \operatorname{Tr}(H R_H(z)) \\ \frac{1}{N} \operatorname{Tr}(R_H(z)) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{N} \frac{1}{z} \operatorname{Tr}(H R_H(z)) \end{aligned}$$

in conclusione, dal Lemma 1.5:

$$S_{\mu_N}(z) = \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\frac{1}{N} \operatorname{Tr}(R_H(z)) \right] = -\frac{1}{z} + \frac{1}{N} \frac{1}{z} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\operatorname{Tr}(H R_H(z))]$$

□

Teorema 1.6. (Identità di Stein)

Siano X_1, \dots, X_k variabili aleatorie: reali, indipendenti e con legge gaussiana. Più precisamente, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e $\operatorname{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Sia $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1(\mathbb{R}^k)$. Se vale:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |g(x)| \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right) = 0 \quad (1.1)$$

allora $\forall i \in \{1, \dots, k\}$:

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_k) X_i] = \sigma_i^2 \mathbb{E} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_k) \right]$$

Dimostrazione. Sia C la costante di normalizzazione della distribuzione gaussiana multi-dimensionale, le cui marginali coincidono con le distribuzioni delle variabili aleatorie X_1, \dots, X_k . Allora:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_k) X_i] &= \int_{\mathbb{R}^k} g(x_1, \dots, x_k) x_i d\mu_{(X_1, \dots, X_k)}(dx) \\ &= C \int_{\mathbb{R}^k} g(x_1, \dots, x_k) x_i \prod_{j=1}^k e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j}{\sigma_j}\right)^2} d(x_1, \dots, x_k) \\ &= C \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \prod_{j=1, j \neq i}^k e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j}{\sigma_j}\right)^2} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x_1, \dots, x_k) x_i e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2} d(x_i) \right) d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x_1, \dots, x_k) x_i e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2} d(x_i) = \int_{\mathbb{R}} g(x_1, \dots, x_k) \left[-\sigma_i^2 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2} \right]' d(x_i)$$

integrando per parti:

$$= - \left[g(x_1, \dots, x_k) \sigma_i^2 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_i^2 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_k) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2} d(x_i)$$

poichè per g vale l'Equazione 1.1:

$$= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_i^2 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_k) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2} d(x_i)$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} C \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \prod_{j=1, j \neq i}^k e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j}{\sigma_j}\right)^2} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x_1, \dots, x_k) x_i e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2} d(x_i) \right) d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \\ = C \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \prod_{j=1, j \neq i}^k e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j}{\sigma_j}\right)^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \sigma_i^2 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_k) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2} d(x_i) \right) d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \\ = \sigma_i^2 C \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_k) \prod_{j=1}^k e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j}{\sigma_j}\right)^2} d(x_1, \dots, x_k) = \sigma_i^2 \mathbb{E} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_k) \right] \end{aligned}$$

□

Nota 1.6. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$, invertibile. $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$, $\exists p_{(i,j)}(x_1, \dots, x_n)$ polinomio a coefficienti in \mathbb{C}^n tale che:

$$p_{(i,j)}(A_{(1,1)}, \dots, A_{(1,n)}, A_{(2,1)}, \dots, A_{(2,n)}, \dots, A_{(n,1)}, \dots, A_{(n,n)}) = A_{(i,j)}^{-1}$$

Proposizione 1.4. Fissato $z \in \mathbb{C}$, cale la seguente identità:

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}^{\Omega_N} [Tr(H R_H(z))] = -\frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [Tr(R_H(z)^2)] - \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [Tr(R_H(z))^2]$$

Dimostrazione. Fissato $z \in \mathbb{C}$, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$ definiamo $X_{(i,j)}$ variabile aleatoria come nella Nota 1.5. Osserviamo che queste variabili aleatorie reali sono indipendenti e gaussiane. Inoltre, osserviamo che:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(H R_H(z)) &= \sum_{i,j=1}^N X_{(i,j)}(H) R_H(z)_{(j,i)} \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} X_{(i,j)}(H) R_H(z)_{(j,i)} + \sum_{i=1}^N X_{(i,i)}(H) R_H(z)_{(i,i)} \end{aligned}$$

dunque:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\text{Tr}(H R_H(z))] &= \frac{2}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{E}^{\Omega_N} [X_{(i,j)}(H) R_H(z)_{(j,i)}] \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^{\Omega_N} [X_{(i,i)}(H) R_H(z)_{(i,i)}] \end{aligned}$$

Dalla Nota 1.6, sappiamo che $R_H(z)_{(j,i)}$ dipende polinomialmente da $(X_{(1,1)}, \dots, X_{(1,N)}, X_{(2,2)}, \dots, X_{(2,N)}, \dots, X_{(N,N)}) := (\cdot)$.

Se indichiamo con $\mathcal{R}_{(j,i)}(z)(x)$ la funzione polinomiale e deterministica, che associa alle variabili reali $x := (x_{(1,1)}, \dots, x_{(1,N)}, x_{(2,2)}, \dots, x_{(2,N)}, \dots, x_{(N,N)})$ il coefficiente (j, i) , del risolvete centrato in z , della matrice simmetrica con coefficienti x , allora $R_H(z)_{(j,i)} = \mathcal{R}_{(j,i)}(\cdot)$.

Dunque, possiamo applicare il Teorema 1.6, ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \mathbb{E}^{\Omega_N} [X_{(i,j)}(H) R_H(z)_{(j,i)}] &= \\ &= \frac{2}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{Var}(X_{(i,j)}(H)) \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_{(i,j)}} \mathcal{R}_{(j,i)}(z) \right) (\cdot) \right] \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Var}(X_{(i,i)}(H)) \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_{(i,i)}} \mathcal{R}_{(i,i)}(z) \right) (\cdot) \right] \end{aligned}$$

ricordando la Nota 1.4 e che $(\mathbb{A}_N(x) - z I_N) \mathcal{R}(z)(x) = I_N$, otteniamo che

$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial \mathcal{R}(z)}{\partial x_{(i,j)}}(x) (\mathbb{A}_N(x) - z I_N) + \mathcal{R}(z)(x) \frac{\partial \mathbb{A}_N}{\partial x_{(i,j)}}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{R}(z)}{\partial x_{(i,j)}}(x) = -\mathcal{R}(z)(x) \frac{\partial \mathbb{A}_N}{\partial x_{(i,j)}}(x) \mathcal{R}(z)(x) \quad (1.2)$$

denotando con $U_{(i,j)}$ la matrice a coefficienti reali con 1 in posizione (i, j) e zeri altrove, osserviamo che:

$$\frac{\partial \mathbb{A}_N}{\partial x_{(i,j)}}(x) = \begin{cases} U_{(i,i)} & \text{se } i = j; \\ U_{(i,j)} + U_{(j,i)} & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (1.3)$$

ne segue che se $i = j$:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{R}(z)}{\partial x_{(i,i)}}(x) \right]_{(i,i)} = -[\mathcal{R}(z)(x) U_{(i,i)} \mathcal{R}(z)(x)]_{(i,i)} = -(\mathcal{R}_{(i,i)}(z)(x))^2$$

se $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathcal{R}(z)}{\partial x_{(i,j)}}(x) \right]_{(j,i)} &= -[\mathcal{R}(z)(x) U_{(i,j)} \mathcal{R}(z)(x)]_{(j,i)} - [\mathcal{R}(z)(x) U_{(j,i)} \mathcal{R}(z)(x)]_{(j,i)} \\ &= -(\mathcal{R}_{(j,i)}(z)(x))^2 - (\mathcal{R}_{(i,i)}(z)(x)) (\mathcal{R}_{(j,j)}(z)(x)) \end{aligned}$$

In conclusione, richiamando la Nota 1.5 e ricordando che $\mathcal{R}(z)(x)$ è simme-

trica:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N}^N \text{Var}(X_{(i,j)}(H)) \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_{(i,j)}} \mathcal{R}_{(j,i)}(z) \right) (\cdot) \right] \\
& + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Var}(X_{(i,i)}(H)) \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_{(i,i)}} \mathcal{R}_{(i,i)}(z) \right) (\cdot) \right] = \\
& = -\frac{2}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{N} \mathbb{E}^{\Omega_N} [(\mathcal{R}_{(j,i)}(z)(\cdot))^2 + (\mathcal{R}_{(i,i)}(z)(\cdot)) (\mathcal{R}_{(j,j)}(z)(\cdot))] \\
& - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2}{N} \mathbb{E}^{\Omega_N} [(\mathcal{R}_{(i,i)}(z)(\cdot))^2] \\
& = -\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^{\Omega_N} [(\mathcal{R}_{(i,i)}(z)(\cdot))^2] - 2 \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{E}^{\Omega_N} [(\mathcal{R}_{(j,i)}(z)(\cdot))^2] \\
& - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^{\Omega_N} [(\mathcal{R}_{(i,i)}(z)(\cdot))^2] - 2 \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{E}^{\Omega_N} [(\mathcal{R}_{(i,i)}(z)(\cdot)) (\mathcal{R}_{(j,j)}(z)(\cdot))] \\
& = -\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \mathbb{E}^{\Omega_N} [(\mathcal{R}_{(i,j)}(z)(\cdot))^2] - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \mathbb{E}^{\Omega_N} [(\mathcal{R}_{(i,i)}(z)(\cdot)) (\mathcal{R}_{(j,j)}(z)(\cdot))] \\
& = -\frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\text{Tr}(R_H(z)^2)] - \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\text{Tr}(R_H(z))^2]
\end{aligned}$$

□

Proposizione 1.5. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fissato, vale la seguente identità:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\text{Tr}(R_H(z)^2)] = 0$$

Dimostrazione. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ gli autovalori della matrice $H \in \Omega_N$. Allora, gli autovalori di $R_H(z)^2$ sono $\frac{1}{(\lambda_1 - z)^2}, \dots, \frac{1}{(\lambda_N - z)^2}$.

Dunque, se $z \in \mathbb{C}^+$ e $k \in \{1, \dots, N\}$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
|(\lambda_k - z)^2| &= \sqrt{[(\text{Re}(z) - \lambda_k)^2 - \text{Im}(z)^2]^2 + [2(\text{Re}(z) - \lambda_k) \text{Im}(z)]^2} \\
&= \text{Im}(z)^2 + (\text{Re}(z) - \lambda_k)^2 \geq \text{Im}(z)^2
\end{aligned}$$

dalla disuguaglianza di Jensen:

$$\left| \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [Tr(R_H(z)^2)] \right| \leq \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [|Tr(R_H(z)^2)|]$$

osserviamo che la variabile aleatoria $|Tr(R_H(z)^2)| : \Omega_N \rightarrow \mathbb{C}$ è quella che ad una matrice $H \in \Omega_N$, associa:

$$\left| \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\lambda_i - z)^2} \right| \leq \sum_{i=1}^N \left| \frac{1}{(\lambda_i - z)^2} \right| \leq \frac{N}{Im(z)^2}$$

in conclusione:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [Tr(R_H(z)^2)] \right| &\leq \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [|Tr(R_H(z)^2)|] \\ &\leq \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\frac{N}{Im(z)^2} \right] = \frac{1}{N} \frac{1}{Im(z)^2} \end{aligned}$$

da qui, il risultato □

Nota 1.7. Sia $H \in M_n(\mathbb{C})$, allora definiamo:

$$\|H\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, |x|=1} (|Hx|)$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma euclidea della matrice medesima.

Osserviamo che, se $H \in \Omega_N$, $\exists C \in M_N(\mathbb{R})$, con $C C^T = I_N$ tale che:

$$R_H(z) = C^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - z} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2 - z} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_N - z} \end{pmatrix} C$$

dalle proprietà delle norme, segue che:

$$\|R_H(z)\| = \left\| \left\| C^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - z} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2 - z} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_N - z} \end{pmatrix} C \right\| \right\|$$

$$\leq \|C^{-1}\| \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1-z} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2-z} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_N-z} \end{pmatrix} \right\| \|C\|$$

Poichè, C è una matrice ortonormale, $\|C\| = \|C^{-1}\| = 1$, dunque:

$$= \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1-z} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2-z} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_N-z} \end{pmatrix} \right\| \leq \max_{k \in \{1, \dots, N\}} \left(\left| \frac{1}{\lambda_k - z} \right| \right) < \frac{1}{\text{Im}(z)}$$

Teorema 1.7. (Disuguaglianza di Gauss-Poincaré)

Siano X_1, \dots, X_k variabili aleatorie: reali, indipendenti e con legge gaussiana. Più precisamente, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$.

Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1(\mathbb{R}^k)$ allora:

$$\text{Var}(f(X_1, \dots, X_k)) \leq \max_{i \in \{1, \dots, k\}} (\sigma_i^2) \mathbb{E} [|\nabla(f)(X_1, \dots, X_k)|^2]$$

Dimostrazione. La dimostrazione è reperibile qui: [3], Teorema 6.10. \square

Proposizione 1.6. $\forall z \in \mathbb{C}^+$, vale la seguente identità:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\text{Tr}(R_H(z))^2] = S_{\mu_N}(z)^2$$

Dimostrazione. Osserviamo che per una qualsiasi variabile aleatoria X , definita su uno spazio di probabilità arbitrario, vale:

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}(X)^2 + \text{Var}(X)$$

dal Lemma 1.5, segue che:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\frac{1}{N^2} \text{Tr}(R_H(z))^2 \right] &= \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\frac{1}{N} \text{Tr}(R_H(z)) \right]^2 + \text{Var} \left(\frac{1}{N} \text{Tr}(R_H(z)) \right) \\ &= S_{\mu_N}(z)^2 + \text{Var} \left(\frac{1}{N} \text{Tr}(R_H(z)) \right) \end{aligned}$$

Dunque, se riusciremo a mostrare che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\frac{1}{N} \text{Tr}(R_H(z)) \right) = 0$$

allora il risultato seguirà immediatamente.

Partiamo con due osservazioni:

- se Z è una variabile aleatoria a valori complessi, allora, in un qualunque spazio di probabilità, vale che:

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(\text{Re}(Z) + i \text{Im}(Z)) \leq 2 (\text{Var}(\text{Re}(Z)) + \text{Var}(\text{Im}(Z)))$$

- riprendendo le notazioni usate nella dimostrazione della Proposizione 1.4 e concentrandoci sulle Equazioni 1.2 e 1.3, possiamo dedurre che: se $i \neq j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{(i,j)}} \frac{1}{N} \text{Tr}(\mathcal{R}(z)(x)) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{R}(z)}{\partial x_{(i,j)}}(x) \right]_{(k,k)} \\ &= - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ([\mathcal{R}(z)(x) U_{(i,j)} \mathcal{R}(z)(x)]_{(k,k)} + [\mathcal{R}(z)(x) U_{(j,i)} \mathcal{R}(z)(x)]_{(k,k)}) \\ &= - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ([\mathcal{R}_{(k,i)}(z)(x) \mathcal{R}_{(j,k)}(z)(x)] + [\mathcal{R}_{(k,j)}(z)(x) \mathcal{R}_{(i,k)}(z)(x)]) \\ &= - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (2 [\mathcal{R}_{(j,k)}(z)(x) \mathcal{R}_{(k,i)}(z)(x)]) \\ &= - \frac{2}{N} [(\mathcal{R}(z)(x))^2]_{(j,i)} = - \frac{2}{N} [(\mathcal{R}(z)(x))^2]_{(i,j)} \end{aligned}$$

se $i = j$, analogamente

$$\frac{\partial}{\partial x_{(i,i)}} \frac{1}{N} \text{Tr}(\mathcal{R}(z)(x)) = - \frac{1}{N} [(\mathcal{R}(z)(x))^2]_{(i,i)}$$

In conclusione, ricordando la Nota 1.7, notiamo che $\forall (i, j)$ con $i < j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{(i,j)}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{N} \operatorname{Tr}(\mathcal{R}(z)(x)) \right] &= \operatorname{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x_{(i,j)}} \frac{1}{N} \operatorname{Tr}(\mathcal{R}(z)(x)) \right] \\ &\leq \left| \frac{2}{N} [(\mathcal{R}(z)(x))^2]_{(i,j)} \right| \leq \frac{2}{N} \|(\mathcal{R}(z)(x))^2\| < \frac{2}{N} \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} \end{aligned}$$

ricordando la Nota 1.5, definiamo la funzione $F : \mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{N} \operatorname{Tr}(\mathcal{R}(z)(x)) \right)$$

alla quale applichiamo la disuguaglianza di Gauss-Poincarè, ottenendo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}^{\Omega_N} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{1}{N} \operatorname{Tr}(\mathcal{R}(z)(\cdot)) \right) \right] &\leq \frac{2}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{E}^{\Omega_N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_{(i,j)}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{N} \operatorname{Tr}(\mathcal{R}(z)(\cdot)) \right) \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{2}{N} \frac{4}{N^2} \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^4} \frac{N(N+1)}{2} \rightarrow 0 \text{ con } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Per considerazioni del tutto analoghe, lo stesso varrà anche con:

$$G(x) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{N} \operatorname{Tr}(\mathcal{R}(z)(x)) \right)$$

e dunque, il risultato è stato provato. \square

Teorema 1.8. (La legge del semicerchio)

La "distribuzione mediata degli autovalori", μ_N , converge debolmente alla distribuzione a semicerchio, μ_{SC}

Dimostrazione. Fissiamo $z \in \mathbb{C}^+$, allora dal Lemma 1.6:

$$S_{\mu_N}(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \frac{1}{N} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\operatorname{Tr}(H R_H(z))]$$

usando la Proposizione 1.4:

$$S_{\mu_N}(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\operatorname{Tr}(R_H(z)^2)] - \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\operatorname{Tr}(R_H(z))^2]$$

Supponendo che $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{\mu_N}(z) = w$, con $w \in \mathbb{C}^+$, otteniamo subito che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{\mu_N}(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\text{Tr}(R_H(z)^2)] \right) - \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^{\Omega_N} [\text{Tr}(R_H(z))^2] \right)$$

dalle Proposizioni 1.5 e 1.6, abbiamo che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{\mu_N}(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} S_{\mu_N}^2(z) + O\left(\frac{1}{N}\right) \right)$$

ergo:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} w^2 \\ \iff w^2 + zw + 1 &= 0 \\ \iff w &= S_{\mu_{SC}}(z) \end{aligned}$$

poichè:

$$|S_{\mu_N}(z)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} \mu_N(dx) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{x-z} \right| \mu_N(dx) \leq \frac{1}{\text{Im}(z)} \mu_N(\mathbb{R}) = \frac{1}{\text{Im}(z)}$$

allora la successione $(a)_{k \in \mathbb{N}}$, con $a_k = S_{\mu_k}(z)$, è limitata e dunque ammette almeno una sotto-successione convergente. Ma abbiamo appena mostrato che una qualunque sotto-successione convergente dovrà convergere a $S_{\mu_{SC}}(z)$.

Dunque, dal Teorema 1.5:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{\mu_N}(z) = S_{\mu_{SC}}(z) \Rightarrow \mu_N \xrightarrow{w} \mu_{SC}$$

□

Capitolo 2

La transizione BBP

2.1 Definizioni ed ipotesi

Definizione 2.1. (ortogonale invarianza di una matrice aleatoria)

Sia $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e \mathbb{F} una sigma algebra su $M_n(\mathbb{R})$. La variabile aleatoria $T : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ si dice "ortogonalmente invariante" se:

$$\forall H \in O_n(\mathbb{R}) \text{ e } \forall f \in \mathbb{F} \text{ vale che: } \mathbb{P}(T \in f) = \mathbb{P}(H T H^T \in f)$$

Definizione 2.2. (matrice con distribuzione di tipo Haar)

Sia $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e $G = (A, \cdot)$, $A \subseteq M_n(\mathbb{R})$ un gruppo ed \mathbb{F} una famiglia di insiemi misurabili di A . Sia $T : \Omega \rightarrow A$ una variabile aleatoria con legge μ_T . T si dice "Haar-distribuita" o "con distribuzione di tipo Haar" se:

$$\forall g \in G \text{ e } \forall f \in \mathbb{F}$$

$$\mu_T(f) = \mathbb{P}(T \in f) = \mathbb{P}(g T \in f) = \mathbb{P}(T g \in f)$$

Nel caso in cui $G = O(n)$, μ_T è detta la misura di Haar su $O(n)$ data la sua, non ovvia, unicità.

Definizione 2.3. Sia $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Ricordiamo la Definizione 1.7 e $\forall n \in \mathbb{N}$ definiamo le variabili aleatorie:

$$X_n, P_n : \Omega \rightarrow \Omega_n$$

in modo che se \mathbb{F} è una sigma algebra su Ω_n , allora $\mathbb{V}_n, \mathbb{W}_n : \mathbb{F} \rightarrow [0, 1]$ saranno le leggi, rispettivamente, di X_n e P_n .

Definiamo ora le ipotesi che saranno applicate a tutto il resto del capitolo:

Ipotesi 2.1. Fissato $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, siano $\theta_1 \geq \dots \theta_s > 0 > \theta_{s+1} \geq \theta_r$ valori reali non zero fissati. $\forall n \geq r$, siano X_n e P_n come nella Definizione 2.3. Assumeremo che:

- P_n abbia rango r e come autovalori $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_r$;
- aut X_n aut P_n siano "ortogonalmente invarianti";
- X_n e P_n siano variabili aleatorie indipendenti.

Nota 2.1. Sia X_n come nella Definizione 2.3 e sia μ_{X_n} la distribuzione empirica degli autovalori di X_n (Definizione 1.9). Nel corso delle successive pagine quando verrà affermato che " μ_{X_n} converge quasi certamente, debolmente ad una misura deterministica μ ", formalmente, intenderemo che:

per ogni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua e $\forall \epsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left(\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_{X_n}(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) \right| > \epsilon \right) = 0$$

Osserviamo, infine, che la proprietà di cui sopra, implica che la distribuzione mediata degli autovalori di X_n converga debolmente a μ . Tuttavia, il contrario non è vero; dunque, si tratta di un ipotesi più forte rispetto a quella presentata nel Capitolo 1.

Ipotesi 2.2. $\forall n \geq r$, sia X_n come nella Definizione 2.3, sia μ_{X_n} la distribuzione empirica degli autovalori di X_n (vedi Definizione 1.9). Assumeremo

che μ_{X_n} converga quasi certamente a μ_X : una distribuzione deterministica, il cui supporto sarà compatto; sia $[a, b]$ tale supporto.

Infine, assumeremo che il più piccolo ed il più grande autovalore di X_n convergano quasi certamente, rispettivamente, ad a e b . A proposito di autovalori, sia $S \in M_n(\mathbb{R})$, simmetrica. Indicheremo con $\lambda_1(S), \lambda_2(S), \dots, \lambda_n(S)$ i suoi autovalori ordinati decrescentemente.

Definizione 2.4. Siano X_n e P_n come ipotizzato. Definiamo $\tilde{X}_n = X_n + P_n$ la perturbazione additiva di rango r di X_n

Definizione 2.5. Sia μ una distribuzione reale, definiamo la trasformata di Cauchy di μ come segue: $\forall z \in \mathbb{C}$, tale che $z \notin \text{Supp}(\mu)$

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} \mu(dt)$$

Definizione 2.6. Sia $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di misure reali. Diciamo che questa successione è "stretta" se:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\sup_{k \in \mathbb{N}} (\mu_k(\{t \in \mathbb{R}; |t| \geq R\})) \right] = 0$$

2.2 Risultati preliminari

Lemma 2.1. Sia μ misura reale. Sia $A = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C(\mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0\}$ e sia $(\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ una stretta successione di misure reali tale che $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mu_k(\mathbb{R}) < \infty$.

Se $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$, allora la convergenza debole è uniforme $\forall g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente limitata e uniformemente Lipschitz.

Dimostrazione. La dimostrazione è reperibile qui: [6] □

Lemma 2.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, fissiamo $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$. Siano $u^{(n)} = (u_1, \dots, u_n)$ e $v^{(n)} = (v_1, \dots, v_n)$, rispettivamente, la colonna i -esima e j -esima di $T_{(n)} \in M_n(\mathbb{R})$: una matrice aleatoria, ortonormale e con legge di tipo Haar. Inoltre, sia $\lambda^{(n)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un vettore aleatorio indipendente da $u^{(n)}$ e $v^{(n)}$,

con l'aggiunta proprietà che, quasi certamente, valga: $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\max_{k \in \{1, \dots, n\}} (|\lambda_k|) \right) < +\infty$. Ulteriormente, se $\mu_\lambda^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k}$ è la distribuzione empirica dei valori di $\lambda^{(n)}$, supponiamo che $\mu_\lambda^{(n)}$ converga quasi certamente, debolmente a μ , una misura di probabilità deterministica su \mathbb{R} . Allora, per $n \rightarrow \infty$:

la distribuzione $\sum_{k=1}^n (u_k^{(n)})^2 \delta_{\lambda_k}$ converge quasi certamente, debolmente a μ

la distribuzione $\sum_{k=1}^n u_k^{(n)} v_k^{(n)} \delta_{\lambda_k}$ converge quasi certamente, debolmente a $\bar{0}$ (la misura nulla)

Dimostrazione. La dimostrazione è reperibile qui: [6] □

Proposizione 2.1. Siano $r, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq r \leq n$. Siano $X_n = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\Theta_r = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_r)$ e $U_{n,r} \in M_{n \times r}(\mathbb{R})$ tale che $U_{n,r}^T U_{n,r} = I_r$. Definiamo $P_n = U_{n,r} \Theta U_{n,r}^T$ e $\tilde{X}_n = X_n + P_n$. Allora valgono le seguenti affermazioni:

(a) $\forall z \in \mathbb{C}$, tali che $z \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, z è un autovalore di \tilde{X}_n se e solo se la matrice:

$$M_n(z) := I_r - U_{n,r}^T (z I_n - X_n)^{-1} U_{n,r} \Theta_r$$

è singolare. In particolare:

$$\dim(\text{Ker}(z I_n - \tilde{X}_n)) = \dim(\text{ker}(M_n(z)))$$

(b) Sia $(k, l) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, r\}$ e $u_{k,l}^{(n)}$ il coefficiente di posizione (k, l) della matrice $U_{n,r}$. $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, r\}$, definiamo:

$$\mu_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^n u_{k,i}^{(n)} u_{k,j}^{(n)} \delta_{\lambda_k}$$

allora, è vero che:

$$M_n(z)_{(i,j)} = \delta_{(i,j)} - \theta_j G_{\mu_{i,j}^{(n)}}(z)$$

dove $\delta_{(i,j)}$ è la funzione δ di Kronecker.

Dimostrazione. (a) La dimostrazione di questo punto è possibile trovarla qui: [7].

(b) Osserviamo che $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, r\}$:

$$[U_{n,r}^T (z I_n - X_n)^{-1} U_{n,r} \Theta_r]_{(i,j)} = \theta_j \sum_{k=1}^n u_{k,i}^{(n)} u_{k,j}^{(n)} \frac{1}{z - \lambda_k} = \theta_j G_{\mu_{i,j}^{(n)}}(z)$$

□

Lemma 2.3. Fissiamo un intero positivo r e siano $\theta_1 > \dots > \theta_r$ valori reali, non zero e distinti a coppie. Siano $a < b$ due numeri reali e $G(z)$ una funzione analitica definita su $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ tale che:

- (a) $G(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$;
- (b) $\forall z \in \mathbb{R} \setminus [a, b], G'(z) < 0$;
- (c) $G(z) \rightarrow 0$ con $|z| \rightarrow +\infty$;

Definiamo, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$, la matrice $r \times r$ a coefficienti complessi:

$$M_G(z) = \text{diag}(1 - \theta_1 G(z), \dots, 1 - \theta_r G(z))$$

Denotiamo con $z_1 > \dots > z_p$, i valori per cui $M_G(z)$ è singolare.

Consideriamo due successioni $(a)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b)_{n \in \mathbb{N}}$ convergenti, rispettivamente, ad a e b . Per ogni n naturale, consideriamo delle funzioni $M_n(z)$ definite su $\mathbb{C} \setminus [a_n, b_n]$ a valori nelle matrici $r \times r$ complesse che godano, per ogni n , delle seguenti proprietà :

- (d) $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, r\}, [M_n(z)]_{(i,j)}$ è una funzione analitica;
- (e) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, M_n(z)$ è invertibile;
- (f) Per $n \rightarrow \infty, M_n(z)$ converge uniformemente a $M_G(z)$ su $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, [a, b]) \geq \eta\}, \forall \eta > 0$.

Allora, valgono le seguenti:

1. Esistono p successioni reali $(z_1)_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (z_p)_{k \in \mathbb{N}}$ convergenti, rispettivamente a z_1, \dots, z_p tali che: $\forall \epsilon$ sufficientemente piccolo e $\forall n$ sufficientemente grande, le $z \in \mathbb{R} \setminus [a - \epsilon, b + \epsilon]$ che rendono $M_n(z)$ singolare sono esattamente $(z_1)_n, \dots, (z_p)_n$
2. $\forall n$ sufficientemente grande e $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, il rango di $M_n((z_i)_n)$ sarà $r - 1$.

Dimostrazione. Osserviamo che le $z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$, tali per cui $M_G(z)$ è singolare, sono quelle che per un qualche $j \in \{1, \dots, r\}$ soddisfano la seguente equazione:

$$1 - \theta_j G(z) = 0$$

Poichè $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, r\}$ con $i \neq j$ abbiamo che $\theta_i \neq \theta_j$, allora, dall'invertibilità della funzione $G(z)$ (ipotesi (b)), segue che gli $z_1 > \dots > z_p$ sono distinti a coppie e dunque che il rango di $M_G(z)$ potrà essere aut r aut $r - 1$.

Da (c) segue che:

$\exists R > \max(|a|, |b|)$, tale che $\forall |z| \geq R$, $|G(z)| \leq \min_{i \in \{1, \dots, r\}} (\frac{1}{2\theta_i})$ e quindi:

$$\forall |z| \geq R, |\det(M_G(z))| > 2^{-r}$$

Da (f) segue che per n sufficientemente grande anche $M_n(z)$ sarà singolare solo se $|z| < R$. Da (e), deduciamo che tali z apparterranno a $[-R, R]$.

Consideriamo $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{[a, b] \cup \{z_1, \dots, z_p\}\}$, $c < d$ e definiamo:

$$Card_{c,d} = |\{z_i \mid i \in \{1, \dots, p\} \text{ t.c. } z_i \in (c, d)\}|$$

$$Card_{c,d}(n) = |\{z \mid \det(M_n(z)) = 0 \text{ t.c. } z \in (c, d)\}|$$

Assumiamo, senza perdita di generalità, di aver scelto c e d in modo che $Card_{c,d} = 1$. Definiamo γ la circonferenza in \mathbb{C} , di centro $\frac{c+d}{2}$ e diametro $d - c$. Poichè, nè c , nè d appartengono a $\{z_1, \dots, z_p\}$, allora $\det(M_G(z))$ non si annullerà sulla curva γ . Dunque, applicando il Teorema dell'indicatore

logaritmico e considerando le ipotesi (f) e (d):

$$Card_{c,d} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\det(M_G)(z)'}{\det(M_G)(z)} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\det(M_n)(z)'}{\det(M_n)(z)} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} card_{c,d}(n) \quad (2.1)$$

In conclusione, scegliamo δ tale che $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$,
 $(z_i - \delta, z_i + \delta) \cap (z_j - \delta, z_j + \delta) = \emptyset$.

Dall'Equazione 2.1, sappiamo che $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq N$:

- $M_n(z)$ è singolare su p valori, indicati con $(z_j)_n$;
- $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, il rango di $M_n[(z_j)_n]$ sarà necessariamente $r - 1$;
- $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, $|z_j - (z_j)_n| < \delta$

Dunque, $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, definendo la successione $(z_j)_{k \in \mathbb{N}}$ come quella costante $\forall k < N$ e $\forall k \geq N$ equivalente a $(z_j)_n$. Abbiamo mostrato il risultato. \square

2.3 Teorema di transizione di fase dell'autovalore

Teorema 2.1. Ricordando la Definizione 2.5 ed il contenuto delle Ipotesi 2.1 e 2.2. Sia \tilde{X}_n come presentato nella Definizione 2.4. Allora per $n \rightarrow \infty$:

$\forall i$ tali che $1 \leq i \leq s$

$$\lambda_i(\tilde{X}_n) \xrightarrow{q.c.} \begin{cases} G_{\mu_X}^{-1}(\frac{1}{\theta_i}) & \text{se } \frac{1}{\theta_i} < G_{\mu_X}(b^+) \\ b & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\forall j$ tali che $s + (n - r) + 1 \leq j \leq n$

$$\lambda_j(\tilde{X}_n) \xrightarrow{q.c.} \begin{cases} G_{\mu_X}^{-1}(\frac{1}{\theta_j}) & \text{se } \frac{1}{\theta_j} > G_{\mu_X}(a^-) \\ a & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Ci restringiamo al caso in cui $i \in \{1, \dots, s\}$ ed i θ siano tutti distinti.

Osserviamo che dalle disuguaglianze di Weyl, possiamo dedurre che:

$\forall i \in \{1, \dots, s\}$

$$\begin{aligned} \lambda_i(\tilde{X}_n) &\geq \lambda_{i+(r-s)}(X_n) \\ \Rightarrow \lambda_1(\tilde{X}_n) &\geq \dots \geq \lambda_s(\tilde{X}_n) \geq \lambda_r(X_n) \end{aligned}$$

tuttavia, con $n \rightarrow \infty$:

$$\text{se } \lambda_1(X_n) \xrightarrow{q.c.} b \implies \lambda_r(X_n) \xrightarrow{q.c.} b$$

dunque, con $n \rightarrow \infty$:

$$\forall i \in \{1, \dots, s\} \quad \lambda_i(\tilde{X}_n) \geq b \quad \text{quasi certamente.} \quad (2.2)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, scriviamo X_n e P_n in questa forma:

$$X_n = U_X^{(n)} \text{diag}(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}) (U_X^{(n)})^T$$

$$P_n = U_P^{(n)} \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_r, 0 \dots, 0) (U_P^{(n)})^T$$

ne concludiamo che lo spettro di \tilde{X}_n sia il medesimo di:

$$\text{diag}(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}) + (U_X^{(n)})^T (U_P^{(n)}) \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_r, 0 \dots, 0) (U_P^{(n)})^T (U_X^{(n)})$$

denotando con $U_n := (U_X^{(n)})^T (U_P^{(n)})$ e con W_n la matrice $n \times r$ composta dalle prime r colonne di U_n , otteniamo che lo spettro di \tilde{X}_n è equivalente a quello di:

$$\text{diag}(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}) + W_n \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_r) W_n^T$$

siano, $w_{i,j}^{(n)}$ i coefficienti di posto $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, r\}$ della matrice W_n . Poichè aut X_n aut P_n sono ortogonalmente invarianti, sappiamo che U_n è una matrice, evidentemente ortogonale, con legge di tipo Haar, indipendente dal vettore aleatorio $\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$. Per maggiori dettagli, l'interessato lettore si senta libero di consultare [8].

Dalla Proposizione 2.1, sappiamo che: $\forall n \in \mathbb{N}$ gli unici autovalori di \tilde{X}_n , al di fuori dell'intervallo $[\lambda_n(X_n), \lambda_1(X_n)]$, sono le z reali che rendono singolare la matrice:

$$M_n(z) = I_r - \left[\theta_j G_{\mu_{i,j}^{(n)}}(z) \right]_{i,j=1}^r$$

dove:

$$\mu_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^n w_{k,i}^{(n)} w_{k,j}^{(n)} \delta_{\lambda_k(X_n)}$$

dal Lemma 2.2 sappiamo che:

$$\begin{cases} \mu_{i,j}^{(n)} \text{ converge quasi certamente, debolmente a } \bar{0} \text{ (la misura nulla)} & \forall i \neq j \\ \mu_{i,i}^{(n)} \text{ converge quasi certamente, debolmente a } \mu_X & \forall i \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

tuttavia, osserviamo che: $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, r\}$ la successione, di indice n , delle $\mu_{i,j}^{(n)}$ rispetta le ipotesi del Lemma 2.1. Questo ci permette di dedurre che: $\forall z \notin \text{supp}(\mu_{i,j}^{(n)})$

se $i \neq j$

$$G_{\mu_{i,j}^{(n)}}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} \mu_{i,j}^{(n)}(dt) \text{ converge q.c, unif., per } n \rightarrow \infty \text{ a } \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} (\bar{0})(dt) = 0$$

se $i = j$

$$G_{\mu_{i,j}^{(n)}}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} \mu_{i,j}^{(n)}(dt) \text{ converge q.c, unif., per } n \rightarrow \infty \text{ a } \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} (\mu_X)(dt) = G_{\mu_X}(z)$$

ne segue immediatamente che:

$$M_n(z) \text{ converge q.c., uniforme a } G_X(z) := \text{diag}(1-\theta_1 G_{\mu_X}(z), \dots, 1-\theta_r G_{\mu_X}(z))$$

e poichè, per ipotesi, $\lambda_1(X_n) \xrightarrow{q.c} b$ e $\lambda_n(X_n) \xrightarrow{q.c} a$, allora la convergenza uniforme si ha su $(-\infty, a - \eta] \cup [b + \eta, +\infty)$, $\forall \eta > 0$.

Giunti a questo punto, abbiamo ricavato tutte le informazioni necessarie per poter applicare il Lemma 2.3. Infatti, ponendo: $G(z) = G_{\mu_X}(z)$, a e b uguali agli estremi del supporto compatto di μ_X e $M_n(z)$ identicamente equivalente all'omonima funzione definita precedentemente nel corso di questa dimostrazione, otteniamo che:

- le ipotesi (a), (b) e (c) sono ovviamente verificate da $G_{\mu_X}(z)$;
- costruendo le successioni $(a)_{n \in \mathbb{N}}$, con $a_n = \lambda_n(X_n)$ e $(b)_{n \in \mathbb{N}}$, con $b_n = \lambda_1(X_n)$, otteniamo che $M_n(z)$ verifica immediatamente le ipotesi (d) ed (e);
- l'ipotesi (f) è stata verificata nella pagina precedente

In conclusione, sia $i \in \{1, \dots, s\}$:

$$\begin{aligned} &\text{se } \frac{1}{\theta_i} < G_{\mu_X}(b^+) \\ &\implies \exists Z_i > b \text{ tale che } 1 - \theta_i G_{\mu_X}(Z_i) = 0 \end{aligned}$$

dal Lemma 2.3, sappiamo che se la convergenza uniforme di $M_n(z)$ a $G_X(z)$ fosse deterministica, allora avremmo che la successione degli i -esimi autovalori di \tilde{X}_n convergerebbe a Z_i . Tuttavia, avendo mostrato che $M_n(z)$ ha quasi certamente convergenza uniforme a $G_X(z)$, ne concludiamo rapidamente che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i(\tilde{X}_n) \xrightarrow{q.c.} Z_i$$

d'altronde:

$$\text{se } \frac{1}{\theta_i} \geq G_{\mu_X}(b^+) \tag{2.3}$$

$$\implies \nexists Z_i > b \text{ tale che } 1 - \theta_i G_{\mu_X}(Z_i) = 0 \tag{2.4}$$

dunque, la successione degli i -esimi autovalori di \tilde{X}_n dovrà definitivamente appartenere all'intervallo $[a, b]$, infatti, in caso contrario, sappiamo che la successione degli i -esimi autovalori di \tilde{X}_n dovrà convergere ad un valore che renda singolare la matrice $G_X(z)$, ma questo è in contraddizione con l'Equazione 2.4.

Ricordando la Disuguaglianza 2.2, deduciamo che

$$\lambda_i(\tilde{X}_n) \xrightarrow{q.c.} b.$$

Ricordiamo di aver supposto che i θ fossero distinti a coppie, il caso generale è velocemente dimostrato dalla Proposizione (6.2.3) in [6].

Invece, il caso relativo ai $s + (n - r) \leq j \leq n$ è del tutto analogo a quello trattato in questa dimostrazione. \square

Capitolo 3

Simulazioni computazionali

3.1 Simulazione numerica della legge del semicerchio

Il seguente codice MATLABTM permette di generare aleatoriamente matrici simmetriche di dimensione n (nel corso di questo documento, abbiamo sempre considerato il parametro "sigma" pari 1) che appartengano al GOE.

```
function [M] = gen_wigner_mat(n, sigma)

M = zeros(n,n);
for i = 1:n
    for j = i:n
        if(i == j)
            M(i,i) = normrnd(0, sigma * sqrt(2/n));
        else
            M(i,j) = normrnd(0, sigma * sqrt(1/n));
            M(j,i) = M(i,j);
        end
    end
end
end
```

```
end
```

dunque, utilizzando questa funzione MATLAB™, potremo generare un numero arbitrario di matrici (sceglieremo 1000) ad una dimensione arbitraria fissata, estrarne gli autovalori attraverso la funzione *eig* pre-implementata all'interno di MATLAB™ medesimo ed utilizzare i dati raccolti per stimare la distribuzione empirica degli autovalori delle matrici.

Questa stima verrà graficamente presentata sotto forma di istogramma bidimensionale, dove l'area di ogni singola colonna rappresenterà la probabilità (ricordiamo, numericamente approssimata) che una matrice abbia un autovalore all'interno dell'intervallo su cui sarà posizionata la base della colonna. Ecco il relativo codice MATLAB™ :

```
n = 500;
iter = 1000;

eigs_data = [];

for k = 1:iter
    M = gen_wigner_mat(n, 1);
    eigenvals = eig(M);

    eigs_data = [eigs_data, eigenvals'];
end
hold on
grid
h = histogram(eigs_data, "Normalization", "pdf");
m_sc = @(x)(1/(2 * pi) * sqrt(4 - x.^2));
samples = linspace(-2, 2, 1000);
f_samples = m_sc(samples);
plot(samples, f_samples);
```

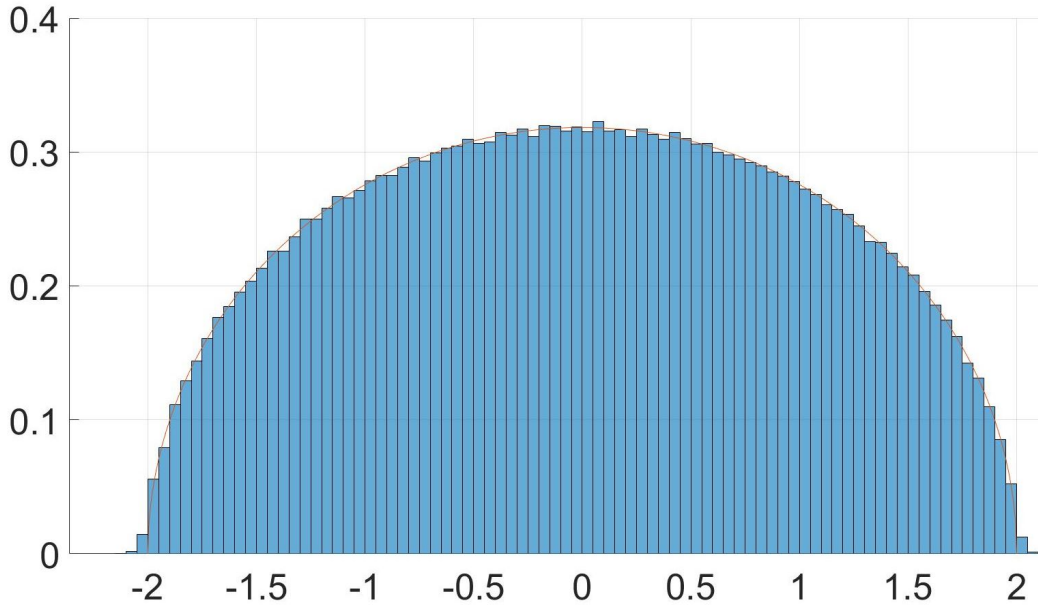



Figura 3.1: $n = 500$, $\sigma = 1$; la curva in rosso rappresenta la densità della distribuzione a semicerchio

3.2 Simulazione numerica della transizione BBP per le matrici di Wigner

Sia $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in GOE(n)$ e $P_n = U_n \text{diag}(0.5, 2) U_n^T$, dove U_n è una matrice $n \times 2$ a coefficienti reali ed aleatori, tale che $U_n^T U_n = I_2$. Nel corso del capitolo 1, abbiamo dedotto che la misura $\mu_X = \mu_{SC}$. Dunque, possiamo esplicitamente calcolarne la trasformata di Cauchy. In particolare, $\forall z > 2$:

$$G_{\mu_{SC}}(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

Osservando che $G_{\mu_{SC}}(2^+) = 1$, dal Teorema 2.1, otteniamo che per $n \rightarrow \infty$: $\forall i$ tali che $1 \leq i \leq 2$

$$\lambda_i(\tilde{X}_n) \xrightarrow{q.c.} \begin{cases} \theta_i + \frac{1}{\theta_i} & \text{se } \theta_i > 1 \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti, attraverso il seguente codice MATLAB™; potremo verificare che:

- l'autovalore più grande di \tilde{X}_n convergerà, quasi certamente, a 2.5;
- il secondo autovalore più grande, invece, dovrà convergere a 2;

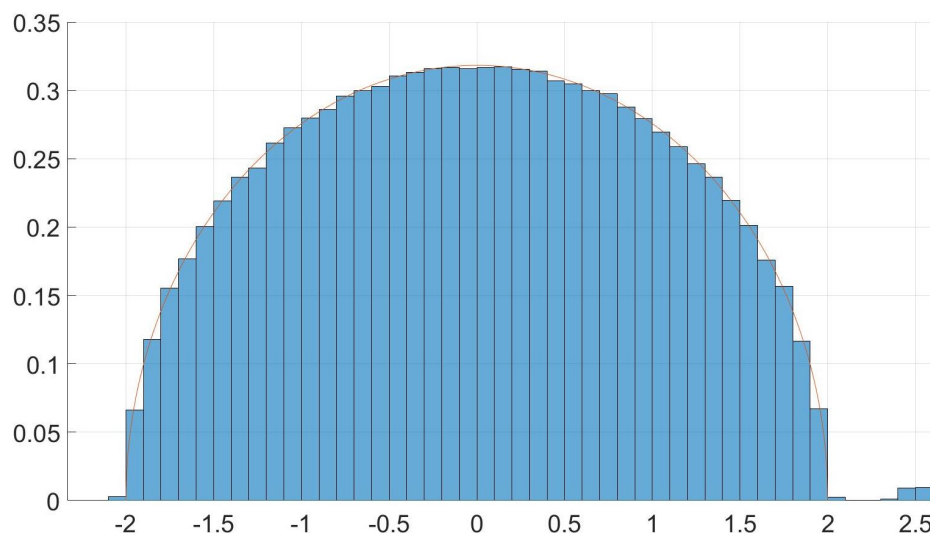
```
n = 500;
iter = 100;
sigma = 1;
r = 4;
%il parametro i, permette di selezionare l'i-esimo autovalore più grande
i = 1;
teta = linspace(0.5, 2, r);
eigs_data = [];
for k = 1:iter

    X_n = gen_wigner_mat(n, sigma);
    A = unifrnd(-1,1, [n, r]);
    H = orth(A);
    P_n = H * diag(teta) * H';
    M = X_n + P_n;

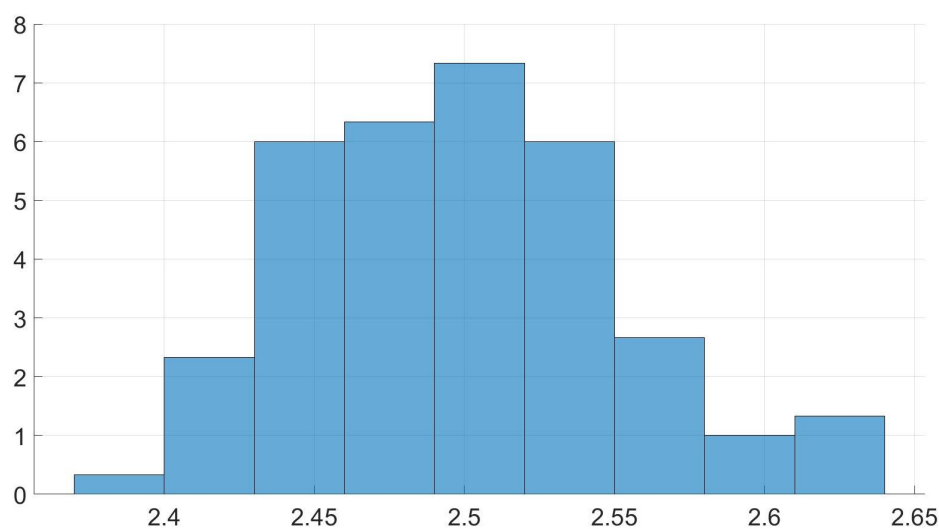
    eigenvals = sort(eig(M), "descend");
    eigenvals = eigenvals(i);
    eigs_data = [eigs_data, eigenvals'];

end
hold on;
grid
h = histogram(eigs_data, "Normalization", "pdf");
```

Di seguito mostriamo l'approssimazione numerica della distribuzione degli autovalori di \tilde{X}_n , con $n = 500$:



l'istogramma ci mostra come la maggior parte degli autovalori risieda fra -2 e 2. Tuttavia, nella parte destra, è prevedibilmente possibile osservare un *unico*, piccolo gruppo di "outliers", i cui valori sono centrati attorno a 2.5. Infatti, l'istogramma che segue, mostra una approssimazione numerica della distribuzione dell'autovalore più grande della matrice \tilde{X}_n , come ci aspettiamo, i valori sono tutti, quasi certamente, centrati attorno a 2.5:



3.3 L'ensemble matriciale di Wishart

Definizione 3.1. (ensemble matriciale di Wishart)

Sia $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. $\forall n, t \in \mathbb{N}$, con $n \geq t$, definiamo la variabile aleatoria:

$$H_{n,t} : \Omega \rightarrow M_{n \times t}(\mathbb{R})$$

tale che, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, t\}$:

$$[H_{n,t}]_{(i,j)} \sim \mathcal{N}_{0,1} \text{ i.i.d}$$

allora, definiamo l'ensemble matriciale di Wishart $n \times t$, come la variabile aleatoria:

$$W_{n,t} = \frac{1}{t} H_{n,t} H_{n,t}^T$$

Teorema 3.1. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}^+$. Definiamo $m = \text{floor}(n/c)$, $a = (1 - \sqrt{c})^2$ e $b = (1 + \sqrt{c})^2$. Sia $W_{n,m}$ variabile aleatoria come nella Definizione 3.1, allora, per $n \rightarrow \infty$, la distribuzione empirica degli autovalori di $W_{n,m}$ converge quasi certamente alla misura di Marchenko-Pastur, definita come segue:

sia B borelliano reale

$$\gamma_w(B) = \int_B \frac{1}{2\pi c x} \sqrt{(b-x)(x-a)} \chi_{[a,b]}(x) dx + \max\left[0, 1 - \frac{1}{c}\right] \chi_B(0)$$

Dimostrazione. La dimostrazione è reperibile qui: [5]. □

Teorema 3.2. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}^+$. Definiamo $m = \text{floor}(n/c)$, $a = (1 - \sqrt{c})^2$ e $b = (1 + \sqrt{c})^2$. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus [a, b] \setminus \{0\}$, la trasformata di Cauchy della misura di Marchenko-Pastur è:

$$G_{\gamma_w}(z) = \frac{z - (1 - c) - \sqrt{z - b} \sqrt{z - a}}{2 c z}$$

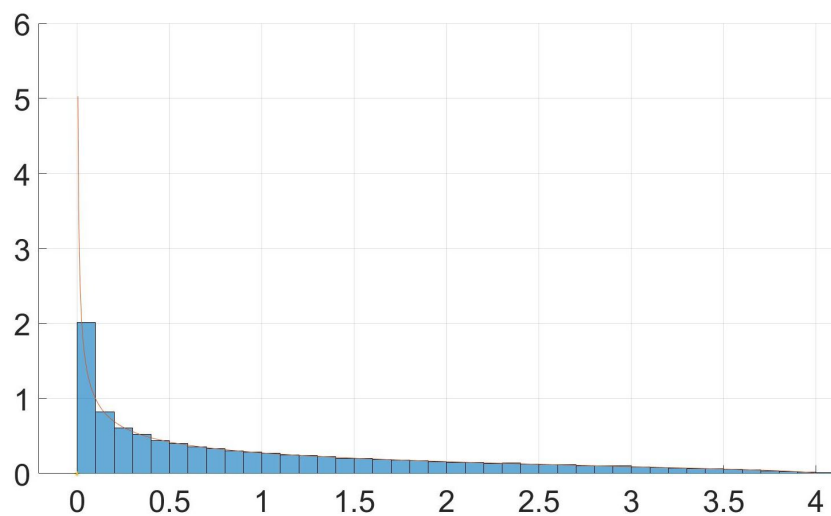
Dimostrazione. La dimostrazione è reperibile qui: [9], Capitolo 4. □

3.4 Simulazione numerica del Teorema 3.1

Consideriamo $c = 1$, dunque $a = 0$ e $b = 4$. Similmente a quanto svolto nelle sezioni precedenti di questo capitolo, ecco il codice MATLAB[™] che ci permetterà di generare delle matrici aleatorie appartenenti all'ensemble di Wishart:

```
function [X] = gen_matrice_wishart(n, p)
M = zeros(n, p);
for i = 1:n
    for j = 1:p
        M(i,j) = normrnd(0, 1);
    end
end
X = (1/p) * M * M';
end
```

ponendo $n = 500$, possiamo riutilizzare il codice che, nella Sezione 3.1, è stato adoperato per stimare la distribuzione degli autovalori di una matrice aleatoria di Wigner. Infatti, sostituendo alla funzione $gen_wigner_mat(n, sigma)$ la funzione $gen_matrice_wishart(n, p)$, si otterrà il seguente istogramma:



3.5 Simulazione numerica della transizione BBP per le matrici di Wishart

Sia $n \in \mathbb{N}$, $W_{n,n}$ nell'ensemble matriciale di Wishart $n \times n$ e $P_n = U_n \text{diag}(0.5, 3) U_n^T$, dove U_n è una matrice $n \times 2$ a coefficienti reali ed aleatori, tale che $U_n^T U_n = I_2$. Sia $\tilde{W}_n = W_n + P_n$. Il Teorema 3.1, afferma che la misura $\mu_W = \gamma_w$. Se poniamo $c = 1$, dunque, $a = 0$ e $b = 4$, allora dal Teorema 3.2 sappiamo che:

$$\forall z \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

$$G_{\gamma_w}(z) = \frac{z - \sqrt{z-4} \sqrt{z}}{2z}$$

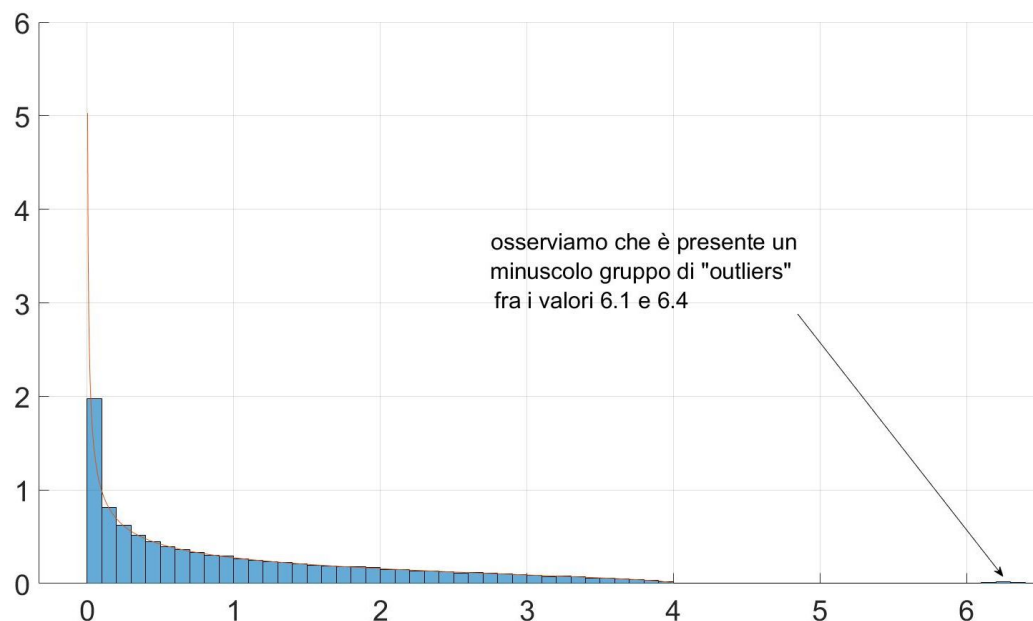
Osservando che $G_{\mu_{SC}}(4^+) = \frac{1}{2}$, dal Teorema 2.1, otteniamo che per $n \rightarrow \infty$: $\forall i$ tali che $1 \leq i \leq 2$

$$\lambda_i(\tilde{X}_n) \xrightarrow{q.c.} \begin{cases} \frac{(\theta_i)^2}{\theta_i - 1} & \text{se } \theta_i > 2 \\ 4 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

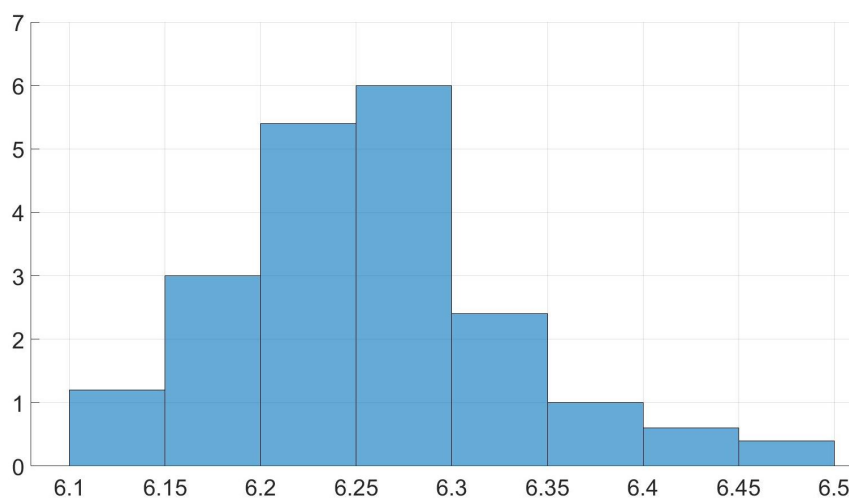
Infatti, tramite una versione del tutto analoga al codice MATLAB™ della Sezione 3.1; potremo verificare che:

- l'autovalore più grande di \tilde{X}_n convergerà, quasi certamente, a 6.25;
- il secondo autovalore più grande, invece, dovrà convergere a 4;

Il successivo istogramma mostrerà una approssimazione della distribuzione degli autovalori di \tilde{W}_n , con $n = 500$:



Come previsto, la stragrande maggioranza degli autovalori si distribuirà, approssimativamente, seguendo la legge di Marchenko-Pastur; soltanto un *unico* insieme isolato di autovalori, romperà questo schema. Di conseguenza, ci aspettiamo che la distribuzione dell'autovalore più grande di \tilde{W}_n , sia centrata attorno a 6.25. Eccone l'istogramma:



Capitolo 4

Conclusioni e prospettive

Nell'introduzione di questa tesi, si è definito il problema affrontato da Alessia e Barbara come un "problema modello". In matematica, l'attribuzione di questo termine ad un problema implica che esso sia inserito e contestualizzato all'interno di una specifica teoria o branca. Quale sia questa branca e se sia importante esplorarla è una questione che merita attenzione.

In primo luogo, il metodo di ricostruzione di segnali presentato in questo elaborato rientra tra i numerosi approcci noti come "analisi della componente principale" (Principal Component Analysis, PCA).

In breve, la PCA è una tecnica che permette l'analisi di grosse moli di dati tramite la riduzione della loro dimensionalità, che sarebbe altrimenti proibitiva. Per esempio, supponiamo di avere un database che contenga immagini alla risoluzione di 128×128 pixel. Nonostante la risoluzione di queste immagini sia scarsa, comunque, la dimensionalità dei dati è nell'ordine delle decine di migliaia. In casi analoghi a questo, in cui l'elaborazione diretta dei dati non costituisce un'opzione pratica, strumenti come la PCA ci consentono di superare i limiti processuali imposti dai nostri elaboratori.

Più praticamente, prendiamo in considerazione una matrice H , $n \times p$ che rappresenti un dato all'interno del nostro database. Per svolgere la PCA di uno di questi dati, è necessario calcolare alcuni degli autovalori più grandi

della matrice di covarianza, $H * H^T$.

Come abbiamo visto nel Capitolo 3, qualora i coefficienti della matrice H siano aleatori, indipendenti e gaussiani, allora $\frac{1}{p} H * H^T$ appartenerà l'ensemble matriciale di Wishart e le sue proprietà saranno essenziali per lo svolgimento della PCA.

Seguono alcune applicazioni notevoli di questi strumenti:

- Studi climatici: dove n può rappresentare il numero di osservazioni fatte in diversi momenti temporali di un determinato parametro meteorologico, mentre p il numero di stazioni meteorologiche considerate.
- Valutazione del rischio finanziario: in questo contesto, ad esempio, p potrebbe rappresentare il numero di indicatori finanziari monitorati, mentre n il numero di aggiornamenti giornalieri di ciascun indicatore.
- Analisi funzionale dei dati: consideriamo un insieme di p funzioni $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, rappresentazioni diverse di un fenomeno. Ad esempio, potremmo registrare la voce di p individui che pronunciano la parola "ciao" ed analizzarne i periodogrammi. Se tutti i periodogrammi sono definiti sullo stesso intervallo, sul quale spargiamo n nodi, possiamo rappresentare i dati in una matrice $n \times p$, dove ogni colonna, alta n , rappresenta le valutazioni del p -esimo periodogramma effettuate su ciascuno degli n nodi.

È importante sottolineare che l'elenco fornito non esaurisce tutte le possibili applicazioni della PCA.

In anni recenti, l'analisi di grosse quantità di dati ha permesso lo sviluppo di reti neurali artificiali ed il tema dell' "intelligenza artificiale" sembra starsi svincolando dalla fantascienza. Per approfondire l'argomento, si suggerisce di consultare le fonti citate come [10] e [6], che costituiscono un ottimo punto di partenza per ulteriori ricerche.

Bibliografia

- [1] Tianchong Jiang, *Wigner's semicircle law for gaussian random matrices*, <https://math.uchicago.edu/~may/REU2021/REUPapers/Jiang,Tianchong.pdf>
- [2] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, New York: McGraw-Hill. 1976.
- [3] Roland Speicher, *Random Matrices (lecture notes)*, Saarland University 2019, <https://arxiv.org/pdf/2009.05157.pdf>
- [4] Jinho Baik, Gérard Ben Arous, and Sandrine Pèchè, *Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices*, The Annals of Probability 33.5 (2005), pp. 1643–1697. DOI: <https://doi.org/10.1214/009117905000000233>
- [5] V.A. Marchenko, L.A. Pastur, *Distribution of eigenvalues in certain sets of random matrices*, Mat. Sb. (N.S.) 72 (114) (1967) 507–536.
- [6] Florent Benaych-Georges, Raj Rao Nadakuditi *The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices*, Advances in Mathematics 227 (2011) 494–521.
- [7] P. Arbenz, W. Gander, G.H. Golub, *Restricted rank modification of the symmetric eigenvalue problem: theoretical considerations*, Linear Algebra Appl. 104 (1988) 75–95.

- [8] F. Hiai, D. Petz, *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*, Math. Surveys Monogr., vol. 77, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [9] Marc Potters and Jean-Philippe Bouchaud. *A First Course in Random Matrix Theory: for Physicists, Engineers and Data Scientists*. Cambridge University Press, 2020
- [10] Iain M. Johnstone, *On the distribution of the largest eigenvalue in principal components analysis*, The Annals of Statistics 29.2 (2001), pp. 295–327. <https://doi.org/10.1214/aos/1009210544>

Ringraziamenti

In primissimo luogo, desidero ringraziare il professor Pierluigi Contucci, non solo per avermi accettato come tesista, ma anche per essere stato un relatore confidente nella mie capacità, come testimoniato dalla grande libertà lasciatami nella decisione, dei tempi e dei modi, della stesura di questo elaborato.

Un ringraziamento speciale va dedicato anche al dottor Francesco Camilli, per essere stato più di un semplice correlatore. I suoi consigli, suggerimenti ed incoraggiamenti sono stati essenziali per lo sviluppo e la riuscita di questa tesi.

Un ulteriore ringraziamento va ad alcuni dei miei compagni di corso: Alessia Marchi, Massimiliano Stignani, Andrea Gennari, Giovanni Lombardi ed Arianna Melino. La cui pazienza è stata sicuramente esaurita dalle mie costanti domande di appunti e confronti.