

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Identità per integrali di Feynman in rappresentazioni parametriche

Relatore:
Prof. Tiziano Peraro

Presentata da:
Giuseppe Bertolini

Correlatore:
Dott.ssa Gaia Fontana

Anno Accademico 2022/2023

Sommario

Gli integrali di Feynman sono integrali su impulsi di particelle virtuali (non osservate) e la loro decomposizione in una base di integrali linearmente indipendenti, detti *Master Integrals*, è essenziale per effettuare previsioni teoriche di alta precisione in QFT (Quantum Field Theory) e per la verifica del Modello Standard.

In questa tesi, dopo aver esposto il contesto fisico e i principali metodi per ricavare relazioni lineari fra integrali, viene dimostrato che i set di relazioni lineari fra integrali espressi mediante la parametrizzazione Lee-Pomeransky, ottenuti con il *metodo degli annichilatori* al primo ordine e con il *metodo dei syzygy*, sono gli stessi.

Indice

1	Introduzione	3
2	Dalla sezione d'urto alla regolarizzazione dimensionale	5
2.1	Sezione d'urto e tasso di decadimento	5
2.1.1	<i>Golden Rule</i>	7
2.2	Feynman rules per una <i>toy theory</i>	9
2.2.1	Vita media in <i>toy theory</i>	11
2.2.2	Scattering in <i>toy theory</i>	12
2.2.3	<i>One loop bubble</i>	15
2.3	Regolarizzazione e rinormalizzazione	16
2.3.1	Potenziale da filo infinito	18
3	Rappresentazioni degli <i>integrali di Feynman</i>	21
3.1	Rappresentazione nello spazio dei momenti	22
3.1.1	<i>One loop Bubble</i> -spazio dei momenti	23
3.2	Rappresentazione mediante i <i>parametri di Schwinger</i>	24
3.2.1	<i>One loop bubble-Parametri di Schwinger</i>	27
3.3	Rappresentazione mediante i <i>Parametri di Feynman</i>	27
3.3.1	<i>One loop bubble-Parametri di Feynman</i>	28
3.4	Parametrizzazione <i>Lee-Pomeransky</i>	28
3.4.1	<i>One loop bubble</i> -rappresentazione <i>Lee-Pomeransky</i>	29
4	Relazioni lineari tra <i>Integrali di Feynman</i>	31
4.1	<i>Laporta Algorithm</i> e riduzione a <i>Master Integrals</i>	31
4.2	Relazioni lineari nello spazio dei momenti	32
4.2.1	Relazioni di simmetria	32
4.2.2	<i>Trivial sectors</i>	33
4.2.3	Lorentz invariance identities	33
4.2.4	IBPs	34
4.2.5	Riduzione a <i>Master Integrals</i> di una <i>One loop bubble</i>	34
4.3	Metodi in rappresentazione <i>Lee-Pomeransky</i>	37

4.3.1	Syzygy	37
4.3.2	Trasformata di Mellin	38
4.3.3	Operatori differenziali polinomiali e di shift	39
4.3.4	Metodo degli annichilatori	41
4.4	Metodo dei syzygy	42
5	Uguaglianza tra metodi in rappresentazione Lee-Pomeransky	44
6	Conclusioni	48
A	Delta di dirac	50

Capitolo 1

Introduzione

Gli esperimenti di scattering e di decadimenti di particelle sono lo strumento più potente per poter analizzare e comprendere la natura a livello microscopico. In questi tipi di esperimenti le grandezze analizzate sono rispettivamente la *sezione d'urto* (differenziale o totale) e il *tasso di decadimento*: la prima rappresenta la parte della sezione di fascio che produce un determinato tipo di evento, mentre la seconda rappresenta il numero di decadimenti al secondo di una data particella. In contesto quantistico e quantistico-relativistico le due grandezze sono calcolate mediante la *Golden Rule* di Fermi. Nel calcolo di entrambe compare l'ampiezza di transizione; per determinarla, è necessario calcolare gli integrali di Feynman che contribuiscono al processo in esame, ognuno dei quali corrisponde a un determinato diagramma di Feynman, ed è derivato mediante le *Feynman Rules*. A seconda del processo in esame, e per un dato ordine in teoria delle perturbazioni, stabilito a seconda della precisione della previsione teorica che si desidera ottenere, ci si può trovare di fronte al calcolo di decine, centinaia o migliaia di integrali di Feynman, la cui integrazione porta a divergenze.

Per fronteggiare il problema della divergenza, si utilizzano le tecniche di *regolarizzazione* e *rinormalizzazione*. La tecnica di regolarizzazione maggiormente utilizzata al giorno d'oggi, e oggetto di analisi della tesi, è la *regolarizzazione dimensionale*. In regolarizzazione dimensionale si modificano le dimensioni dello spazio-tempo (e quindi di integrazione) da 4 a d (dove d è un parametro arbitrario), e si sceglie, a seconda del problema, il tipo di rappresentazione degli integrali più adatto. Successivamente, è possibile ricavare relazioni lineari fra integrali di Feynman in funzione del parametro introdotto. Le identità sono ricavate mediante l'ausilio di diverse tecniche: *IBPs*, *Lorentz invariance identities*, *metodo degli annichilatori*, *metodo dei syzygy*.

Una volta ricavato il set di relazioni lineari fra integrali, un passo importante per la risoluzione del sistema è la procedura di riduzione a *Master integrals*, il cui scopo è quello di riscrivere integrali più complicati in funzione di integrali più semplici, per poi calcolare questi ultimi tramite il metodo delle equazioni differenziali, la cui analisi non è argomento del presente elaborato.

La tesi è, dunque, strutturata come segue: nel capitolo 2 saranno trattati in dettaglio sezione d'urto, tasso di decadimento, *Golden rule* e *Feynman rules*, al fine di mostrare l'origine degli integrali di Feynman e le tecniche di *regolarizzazione* e *rinormalizzazione* dimensionale utilizzate per affrontare il problema della divergenza. Al termine del capitolo, viene riportato l'esempio di un'applicazione delle due tecniche al caso di integrale derivante dal potenziale da filo infinito.

Nel capitolo 3, sono ricavate e mostrate le diverse rappresentazioni degli integrali di Feynman in regolarizzazione dimensionale, analiticamente e nel caso della *One loop Bubble*.

Nel capitolo 4, dopo un'introduzione della procedura di riduzione a *Master integrals* mediante il *Laporta algorithm*, sono mostrate diverse tecniche per poter ricavare relazioni lineari tra integrali, necessarie per poter poi ridurre a *Master integrals*. Viene, inoltre, fatto un esempio di applicazione del *Laporta Algorithm* nel caso della *One loop bubble*.

Nel capitolo 5, si dimostra che i set di relazioni lineari che si ricavano mediante l'applicazione del *metodo degli annichilatori* al primo ordine è lo stesso che si ricava applicando il *metodo dei syzygy*. Quest'ultimo è un risultato originale introdotto in questa tesi.

Nell'appendice A, viene definita la funzione delta di Dirac e ne sono mostrate le principali proprietà.

Capitolo 2

Dalla sezione d'urto alla regolarizzazione dimensionale

Previsioni di elevata precisione nell'ambito della fisica delle particelle richiedono il calcolo di integrali di Feynman divergenti, che si ricavano mediante le *Feynman rules*. La divergenza viene affrontata mediante le tecniche di *regolarizzazione* e *rinormalizzazione*. Le suddette regole creano una corrispondenza tra i diagrammi che contribuiscono a un processo in esame e gli integrali di Feynman. Il calcolo degli integrali di Feynman è necessario quando si vuole determinare la sezione d'urto di un processo di scattering o la vita media di una particella in un processo di decadimento in contesti quantistico-relativistici. Tali grandezze verranno ricavate prima in modelli in cui vengono trascurati effetti quantistici e, successivamente, in contesti fisici d'interesse. Gli argomenti presenti in questa sezione sono trattati in [1].

2.1 Sezione d'urto e tasso di decadimento

La prima difficoltà che si pone quando si affronta un esperimento di qualsiasi tipo, riguarda la scelta delle grandezze che permettono di quantificare e caratterizzare il processo in esame. Nei processi di decadimento, in cui una particella A decade in una o più particelle di diverso tipo, $A \rightarrow B + C + \dots + K$, la grandezza che si sceglie di studiare è la vita media della particella iniziale A .

La vita media è chiaramente calcolata nel sistema di riferimento a impulso nullo (per via della dilatazione dei tempi), da ora in poi indicato con CM (centro di massa). Le particelle elementari non hanno memoria, ovvero, la probabilità che A decada in un determinato istante è la stessa per ogni istante di tempo ed è, quindi, indipendente da quanto tempo A è in vita. Un parametro chiave per descrivere processi di questo tipo è, dunque, il tasso di decadimento Γ , ovvero la probabilità per unità di tempo che la particella A decada.

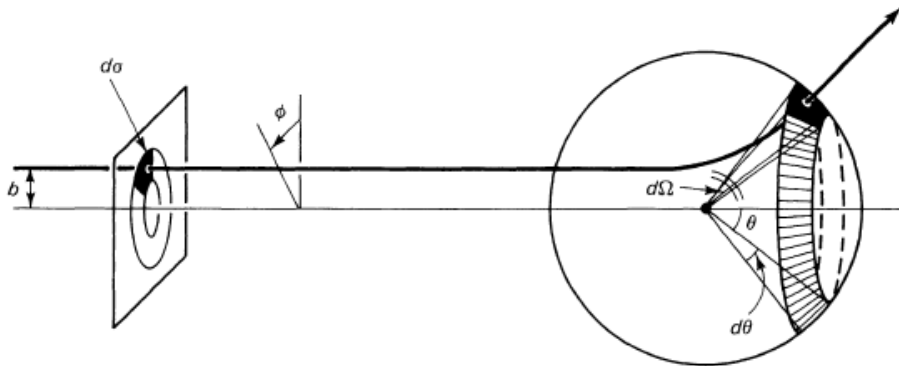


Figura 2.1: Scattering tra particelle. Immagine presa da [1]

Dato un insieme di $N(t)$ di particelle A al tempo t , $N\Gamma dt$ è il numero di particelle che ci si aspetta decadano in un intervallo di tempo infinitesimo successivo a t , quindi

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

da cui segue

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}.$$

Si può dunque procedere con il calcolo della vita media

$$\tau = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} tN(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} N(t)dt} = \frac{1}{\Gamma}$$

Una generica particella A , inoltre, potrebbe non decadere ogni volta nelle stesse particelle finali, per questo si definiscono tassi di decadimento Γ_i per ogni tipo di decadimento che la particella può intraprendere. Sarà ovviamente verificato $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$.

Nell'analisi dei processi di scattering, si sceglie di analizzare la sezione d'urto totale σ o la sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. Anche se i processi di scattering possono essere di diverso tipo e caratterizzati da diversi tipi di interazione, è sempre possibile definire le grandezze appena trattate. Per comprendere cosa rappresentano, è utile schematizzare lo scattering come urto elastico: pensare le particelle proiettile di un fascio di densità omogenea urtanti contro sfere di raggio R che rappresentano le particelle del bersaglio. In seguito si trascureranno i calcoli che permettono di ricavare le grandezze di interesse nel caso specifico, in quanto reperibili nella maggior parte di testi di introduzione alla fisica delle particelle.

Nella Fig.2.1, assumendo un sistema di coordinate sferiche con l'asse z passante per il centro della sfera e con la stessa direzione della velocità delle particelle proiettile, b è il

parametro d'impatto, e rappresenta la distanza delle particelle del fascio da z ; θ , invece, è l'angolo di deflessione delle particelle e $d\Omega(\theta)$ è la porzione di angolo solido in cui viene deflessa la particella dopo l'urto. È possibile ricavare in che porzione di angolo solido verranno deflesse le particelle proiettile che si trovano nella corona circolare di area infinitesima $d\sigma$ tra b e $b + db$. In altre parole è possibile ricavare la legge che descrive la parte di sezione del fascio ($d\sigma$) che produce un certo tipo di evento (che viene deflessa in $d\Omega$)

$$d\sigma = D(\theta)d\Omega.$$

A seconda del tipo di esperimento, può essere conveniente studiare la sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ o la sezione d'urto totale $\sigma = \int d\sigma = \int D(\theta)d\Omega$ che rappresenta l'area della sezione del fascio entro la quale deve essere contenuta una particella per dar vita al fenomeno di interazione. Nel caso di urto tra sfere, $\sigma = \pi R^2$, a conferma del fatto che solamente le particelle comprese nell'area πR^2 centrata attorno all'asse passante per il centro della particella bersaglio, possono dar vita ad un urto elastico. Nel caso di scattering da interazione elettromagnetica, schematizzato come interazione fra due cariche puntiformi, in cui la particella proiettile è scagliata contro la carica bersaglio ferma, $\sigma = +\infty$, a conferma del fatto che il raggio di interazione dell'interazione elettromagnetica è infinito. La verifica sperimentale di tali leggi mediante l'ausilio di rilevatori di particelle, consente di ricavare importanti informazioni come la validità di modelli che descrivono interazioni e le proprietà delle particelle coinvolte.

2.1.1 *Golden Rule*

In contesti quantistici e quantistico-relativistici, tassi di decadimento, sezione d'urto totale e differenziale sono ricavati mediante la *Golden Rule* di Fermi, la cui dimostrazione non è oggetto di studio del presente elaborato.

Golden rule per decadimenti: supponendo che una particella A di massa m_1 , quadrimpulso p_1 , quantità di moto \mathbf{p}_1 ed energia E_1 decada in K particelle di massa m_i , quadrimpulso p_i , momento \mathbf{p}_i ed energia E_i con $i \in [1, K]$ ($A \rightarrow B + \dots + K$), il tasso di decadimento è dato da

$$d\Gamma = |M|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \left[\left(\frac{c \cdot d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 \cdot 2E_2} \right) \cdots \left(\frac{c \cdot d^3 \mathbf{p}_K}{(2\pi)^3 \cdot 2E_K} \right) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - \cdots - p_n)$$

dove, la presenza della funzione δ rappresenta la conservazione dell'energia e dell'impulso, S è un fattore statistico e M è l'ampiezza di transizione. Solitamente non si è interessati al momento specifico dei prodotti del decadimento, per cui si integra su tutti i momenti delle particelle prodotte al fine ottenere il tasso di decadimento totale del processo in esame. Nel caso specifico di decadimento a due corpi

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_A} \left(\frac{c}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|M|^2}{E_B E_C} \delta(p_A - p_B - p_C) d^3 \mathbf{p}_B d^3 \mathbf{p}_C.$$

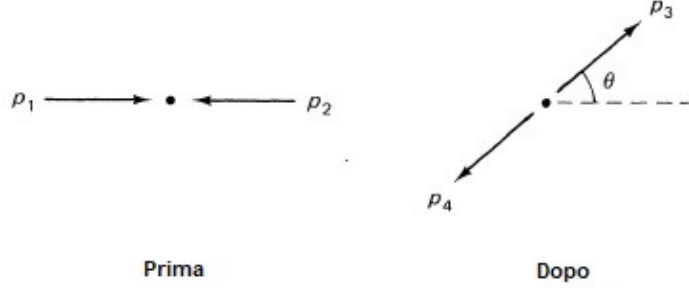


Figura 2.2: Scattering a due corpi nel CM

M è una funzione scalare dei momenti e degli spin dei prodotti del decadimento. Solitamente si lavora con l'ampiezza calcolata nei valori medi degli spin, rendendola così solo funzione dei momenti e, nel caso di decadimenti a due corpi, il calcolo dell'integrale può essere comunque svolto senza consocere la forma esatta di M [1], sfruttando le proprietà del delta di Dirac (App. A). Il tasso di decadimento diventa

$$\Gamma = \frac{S\rho_0}{8\pi\hbar(m_A)^2c} |M|^2 \quad (2.1)$$

ed M è valutato in $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_3$, mentre $|\mathbf{p}_2| = \rho_0$ è una funzione delle masse delle particelle coinvolte.

Golden Rule per scattering: Nel caso due particelle, A e B, la prima di quadrimpulso p_1 , momento \mathbf{p}_1 , energia E_1 e la seconda di quadrimpulso, momento ed energia rispettivamente p_2, \mathbf{p}_2, E_2 , collidano, producendo K particelle di quadrimpulso, momento ed energia rispettivamente p_i, \mathbf{p}_i, E_i con $i \in [1, K]$, $A \rightarrow B + \dots + K$, la sezione d'urto infinitesima è data da

$$d\sigma = |M|^2 \frac{\hbar S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2) - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left[\left(\frac{c \cdot d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 \cdot 2E_2} \right) \cdots \left(\frac{c \cdot d^3 \mathbf{p}_K}{(2\pi)^3 \cdot 2E_K} \right) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - \dots - p_K)$$

Nel caso di scattering a due corpi, $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ (Fig. 2.2)

$$d\sigma = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S|M|^2 c}{(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_1|} \frac{d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4}{E_3 E_4} \cdot \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

nel CM $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_i|, |\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_4| = |\mathbf{p}_f|$ e $|M|^2$ è funzione solamente di $|\mathbf{p}_f|$ e θ , per cui è possibile svolgere l'integrale, come nel caso di decadimento a due corpi, senza conoscere l'espressione esplicita di M e sfruttando le proprietà del delta di Dirac.

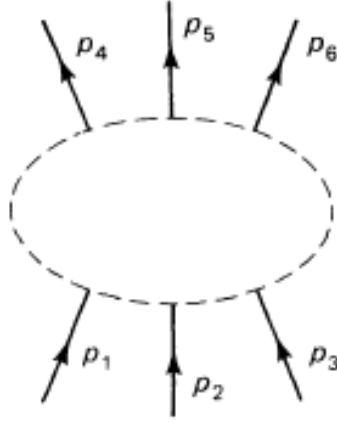


Figura 2.3: Diagramma di Feynman con n linee esterne. Le linee interne non sono rappresentate. Immagine presa da [1].

Riscrivendo i momenti su cui si integra in coordinate polari si ottiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} |M|^2 \quad (2.2)$$

$[\sigma] = \text{barn}$, $[\Gamma] = 1/s$, per cui, dato un generico diagramma con n linee esterne (entranti e uscenti, Fig. 2.3) $[M] = (mc)^{4-n}$

2.2 Feynman rules per una *toy theory*

In questa sezione verrà mostrato come ricavare l'espressione dell'ampiezza di transizione mediante le *Feynman Rules* a partire dai diagrammi di Feynman che contribuiscono al processo in esame; in particolare, esse consentono di associare a ogni diagramma, un termine che entra nel calcolo dell'ampiezza di transizione.

Le *Feynman rules* per reali sistemi fisici presentano delle complicazioni strettamente legate al fatto che le particelle hanno spin $s \neq 0$, ma che non hanno nulla a che vedere con la logica del procedimento. Verranno quindi introdotte delle regole per una *Toy theory*, la quale si basa sulle seguenti proprietà:

- sono presenti solamente tre diversi tipi di particelle, A, B, C;
- tutte le particelle sono senza spin;
- le particelle hanno massa m_A, m_B e m_C ed $m_A > m_B + m_C$;
- ogni particella corrisponde alla propria antiparticella.

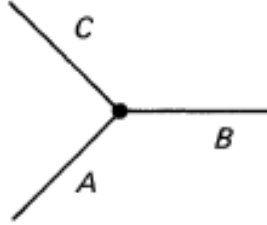


Figura 2.4: Vertice della "toy theory". Asse temporale rivolto verso l'alto. Immagine presa da [1]

Il vertice mediante il quale le particelle interagiscono è mostrato in Fig. 2.4.

L'ultimo elemento di cui bisogna tener conto, prima di introdurre le *Feynman Rules*, è che è presente una corrispondenza tra diagrammi di Feynman che contribuiscono al processo in esame e addendi che contribuiscono al calcolo dell'ampiezza di transizione; ovvero, supponendo che a un processo di ordine fissato contribuiscano G diagrammi, l'ampiezza di transizione risulterà essere la somma tra tutti i G addendi, ognuno dei quali è associato a uno dei G diagrammi mediante le *Feynman Rules* $M = M_1 + \dots + M_G$.

Feynman Rules:

1. *Notazione.* Dato un generico diagramma (Fig. 2.3), indicare con $p_1 \dots p_n$ ognuno dei quadrimpulsi entranti e uscenti. Indicare ogni quadrimpulso interno con $k_1, k_2 \dots$ e, mediante una freccia applicata a ogni linea, il verso della direzione positiva (assegnata arbitrariamente per le linee interne).
2. *Costante di accoppiamento.* Ad ogni vertice assegnare in fattore

$$-ig$$

g è la costante di accoppiamento e specifica l'intensità dell'interazione tra A, B e C. In questa *Toy theory*, g ha le dimensioni di un momento.

3. *Conservazione dell'energia e del momento.* Ad ogni vertice associare un δ di Dirac della forma

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$$

dove i k_i con $i \in [1, 3]$ rappresentano i quadrimpulsi che entrano nel vertice (nel caso di quadrimpulsi uscenti dal vertice allora k_i rappresenta il quadrimpulso del propagatore interno con segno negativo). La δ di Dirac impone la conservazione dell'energia e dell'impulso a ogni vertice (la funzione delta è nulla a meno che la somma dei momenti entranti eguagli la somma dei momenti uscenti).

4. *Propagatori interni.* Ad ogni linea interna associare un fattore

$$\frac{i}{(k_j)^2 - (m_j c)^2}$$

dove k_j è il quadrimpulso del propagatore rappresentato dalla linea in questione e m_j è la massa del propagatore; $(k_j)^2 - (m_j c)^2 \neq 0$ perchè i propagatori interni corrispondono a particelle virtuali, non osservate, che non soddisfano la relazione $p^2 = m^2$.

5. *Integrazione sui momenti interni.* Ad ogni linea interna (quindi ad ogni propagatore interno) associare un fattore

$$\frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4}.$$

Combinando questa regola con la 3 si ottiene un integrale in k_j per ognuno dei loop.

6. *Cancellare la funzione delta.* La forma finale dell'integrale, dopo aver effettuato tutti i calcoli e sfruttato le proprietà della funzione delta di Dirac, includerà un fattore del tipo

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \dots - p_n)$$

che rappresenta la conservazione di energia e momento tra le particelle iniziali e i prodotti dell'interazione. La sesta regola consiste nel cancellare questo fattore per ottenere

$$-iM_i$$

dove M_i è il termine che compare nel calcolo di M , derivante dal diagramma i -esimo che contribuisce al processo in esame all'ordine desiderato.

Nelle sezioni successive verranno effettuati alcuni esempi di applicazione delle *Feynman Rules* a diagrammi della *toy theory* per poter comprendere da dove derivano gli integrali divergenti, oggetto di analisi dei capitoli successivi.

2.2.1 Vita media in *toy theory*

Tramite *Feynman Rules* per la *toy theory*, è possibile ricavare l'ampiezza di transizione all'ordine più basso nel caso di decadimento della particella A in B e C , $A \rightarrow B + C$, permesso dal fatto che $m_A > m_B + m_C$. Il diagramma di quest'interazione è rappresentato in Fig. 2.5; è presente un solo vertice, dal quale si ricava un fattore $-ig$ e un fattore $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3)$ (regole 2-3), che scartiamo per la regola 6, e nessuna linea interna. In tal modo si ottiene $-iM = -ig$, ovvero

$$M = g$$

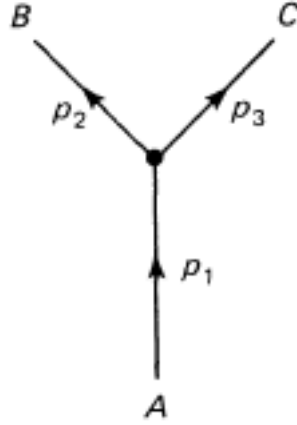


Figura 2.5: Decadimento $A \rightarrow B + C$. Immagine presa da [1]

Dall'equazione 2.1 si ricava

$$\Gamma = \frac{g^2 |p|}{8\pi \hbar (m_A)^2 c}$$

e

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi \hbar (m_A)^2 c}{g^2 |p|}$$

2.2.2 Scattering in *toy theory*

Adesso, verrà ricavata M , prima all'ordine più basso e, poi, all'ordine successivo, nel caso di scattering a due corpi $A + A \rightarrow B + B$. Per il calcolo dell'ampiezza di transizione, bisogna tener conto del fatto che ci sono più diagrammi che contribuiscono al processo in esame. Il primo, è presente in Fig. 2.6, il secondo in 2.7, e si ottiene interscambiando i momenti finali. L'ampiezza di transizione totale sarà la somma dei termini derivanti dai due diagrammi mediante le *Feynman Rules*. Partendo dal primo, sono presenti due vertici da cui ricaviamo due fattori $-ig$, due funzioni delta (regole 2-3)

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - k) \text{ e } (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + k - k_4)$$

ed una linea interna, da cui si ricava (regole 4-5)

$$\frac{i}{q^2 - (m_C c)^2}$$

e

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 k$$

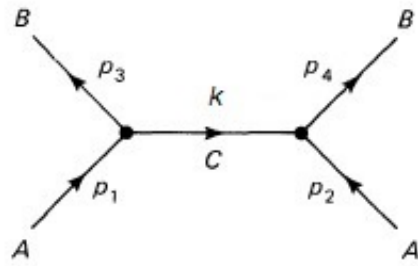


Figura 2.6: Primo diagramma di processo di scattering al primo ordine. Immagine presa da [1].

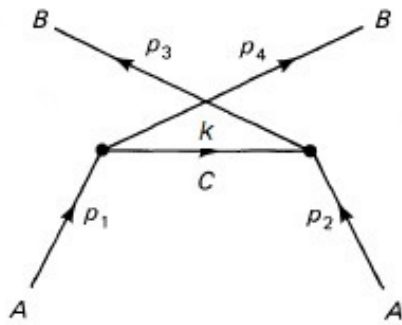


Figura 2.7: Secondo diagramma di processo di scattering al primo ordine. Immagine presa da [1].

L'espressione, dunque, recita

$$-i(2\pi)^4 g^2 \frac{1}{(k^2 - m_{CC})^2} \delta^4(p_1 - p_3 - k) \delta^4(p_2 + q - k_4) d^4k.$$

Operando sul secondo delta di Dirac, e sfruttandone la definizione, si ottiene

$$\begin{aligned} & -i(2\pi)^4 g^2 \frac{1}{(k^2 - m_{CC})^2} \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 + k - p_4) d^4k = \\ & -ig^2 \frac{1}{(p_4 - p_2)^2 - (m_{CC})^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \end{aligned}$$

È possibile, dunque, applicare la regola 6, che ci consente di ottenere

$$M_1 = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - (m_{CC})^2}.$$

Con lo stesso procedimento, nel caso del secondo diagramma (Fig. 2.7), si ottiene

$$M_2 = \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2 - (m_{CC})^2}.$$

L'ampiezza di transizione risulterà essere

$$M = M_1 + M_2 = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - (m_{CC})^2} + \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2 - (m_{CC})^2}. \quad (2.3)$$

Per come sono costruite le *Feynman Rules*, M è un invariante di Lorentz. Scegliendo il CM come sistema di riferimento in cui analizzare il processo, e considerando il semplice caso in cui $m_A = m_B$ e $m_C = 0$ si ottiene

$$(p_4 - p_2)^2 - (m_{CC})^2 = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos(\theta))$$

$$(p_3 - p_2)^2 - (m_{CC})^2 = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos(\theta)).$$

Sostituendo le ultime due espressioni in eq. 2.3 si ottiene

$$M = -\frac{g^2}{\mathbf{p}^2 \sin(\theta)} \quad (2.4)$$

e, sostituendo eq. 2.4 in eq. 2.2, si giunge a

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E \mathbf{p}^2 \sin^2(\theta)} \right)^2 \quad (2.5)$$

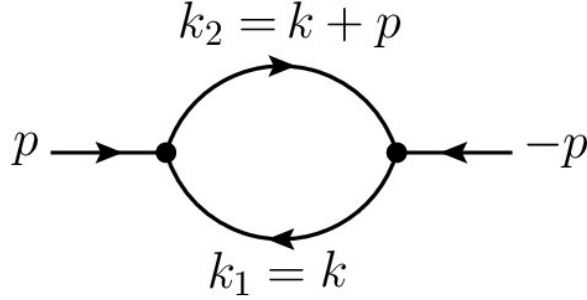


Figura 2.8: *One loop bubble*

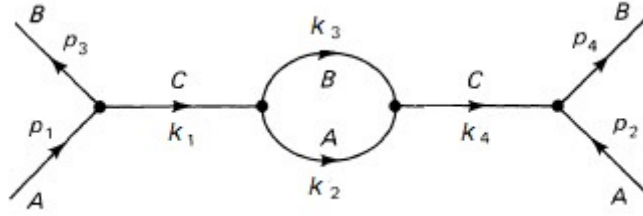


Figura 2.9: Diagramma $A + A \rightarrow B + B$ con *One loop bubble*. Immagine presa da [1]

2.2.3 *One loop bubble*

In questa sezione si calcolerà un termine che contribuisce all'ampiezza di scattering per lo stesso processo, all'ordine successivo. Per ottenere un'espressione di $\frac{d\sigma}{d\theta}$ più accurata, bisogna tener conto anche dei processi a un *loop*. In questo caso, al calcolo dell'ampiezza di transizione, contribuiscono ben 15 diagrammi ad un loop, e tenderanno ad aumentare sempre di più aumentando l'ordine scelto. M sarà la somma di ognuno dei 15 termini derivanti dai 15 diagrammi, più il termine calcolato in precedenza (eq. 2.3).

Il diagramma scelto (fig. 2.9) "contiene" il diagramma detto *One loop Bubble* (fig. 2.8). Quest'ultimo rappresenta il decadimento di un quanto, in un determinato punto nello spazio e in un determinato istante temporale, in due quanti virtuali, che, in un diverso punto dello spazio e ad un determinato istante temporale successivo, andranno ad annichilarsi per ricreare il quanto iniziale. In fig 2.9, sarà il quanto C, propagatore interno, a decadere nei quanti A e B virtuali, i quali successivamente andranno ad annichilarsi e produrre il propagatore iniziale C. Per ottenere il termine M_i derivante da tale diagramma bisogna applicare le regole di Feynman. Applicandole dalla 1 alla 5 si ottiene

$$g^4 \int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4 \frac{\delta^4(p_1 - k_1 - p_3) \delta^4(k_1 - k_2 - k_3)}{(k_1^2 - m_C^2 c^2)(k_2^2 - m_A^2 c^2)} \cdot \frac{\delta^4(k_2 + k_3 - k_4) \delta^4(k_4 + p_2 - p_4)}{(k_3^2 - m_B^2 c^2)(k_4^2 - m_C^2 c^2)}.$$

Integrando in k_1 e sfruttando la prima delta di Dirac, si sostituisce k_1 con $(k_1 - k_3)$; integrando in k_4 , sfruttando la quarta delta di Dirac, si sostituisce k_4 con $(p_4 - p_2)$ e, sfruttando il secondo delta di Dirac, si sostituisce p_2 con $(p_1 - p_3 - k_3)$. L'integrando contiene dunque un fattore $\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$ che viene eliminato per la regola 6 e si ottiene

$$M_i = i \left(\frac{g}{2\pi} \right)^4 \frac{1}{[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 c^2]^2} \int d^4 k_3 \frac{1}{[(p_1 - p_3 - k_3)^2 - m_A^2 c^2](k_3^2 - m_B^2 c^2)} \quad (2.6)$$

Riscrivendo in coordinate polari il volume infinitesimo $d^4 k = k^3 dk d\Omega'$, si può osservare che, per grandi valori di k_3 , l'integrale diverge logaritmicamente. Non si è in presenza di un caso isolato. Quando si calcola l'ampiezza di transizione tenendo in considerazione diagrammi con *loop*, i termini che contribuiscono al calcolo dell'ampiezza di transizione, ovvero gli *Integrali di Feynman*, divergono.

2.3 Regolarizzazione e rinormalizzazione

La divergenza predente è detta divergenza *ultravioletta*. La denominazione deriva dal fatto che essa proviene dalla regione di integrazione dove i momenti di sui cui si integra assumono valori elevati. Il problema si estende anche al calcolo degli osservabili delle particelle coinvolte nel processo che si analizza poichè, per calcolare quest'ultimi, è necessario determinare l'ampiezza di transizione.

È importante comprendere l'origine di questa divergenza, come si affronta e come effettuare lo stesso previsioni riguardo osservabili [2].

- La divergenza deriva dalla scarsa conoscenza di ciò che succede ad alte energie. Integrare su momenti elevati, significa considerare stati a energie estremamente elevate dove compaiono effetti di fisica non nota (anche perchè sperimentalmente inaccessibile), inclusi effetti quantistici della gravità. La teoria, dunque, risulta non essere più valida per energie così elevate.

Storicamente, si sono presentate situazioni analoghe sotto alcuni aspetti, ma ciò non ha comunque impedito di ottenere previsioni in accordo con dati sperimentali; oggetti macroscopici a grandi distanze (basse energie) possono essere modellizzati come corpi continui descritti da osservabili come densità, temperatura, etc. . .

A scale di energia maggiori (quindi a distanze minori) tale modellizzazione non è più valida, ed è necessario descrivere gli stessi oggetti come un insieme di atomi e molecole, dunque tener conto della discretizzazione della materia. La conoscenza e la verifica sperimentale di entrambi i modelli è stata necessaria per comprendere come gli osservabili macroscopici fossero collegati a osservabili di atomi e molecole (per esempio, la temperatura all'energia cinetica media delle molecole, $\bar{K} = \frac{3}{2} k_b T$), ma non per misurare le grandezze che caratterizzano macroscopicamente i corpi.

Previsioni teoriche molto accurate a riguardo sono state effettuate anche senza conoscenze specifiche del microscopico, ovvero di ciò che succede a piccole distanze (alte energie).

Seguendo una linea di pensiero analoga, ci si può aspettare di poter effettuare previsioni (calcolare osservabili) a basse energie pur non conoscendo nel dettaglio ciò che succede a energie maggiori. Inoltre, come gli osservabili macroscopici che caratterizzano un corpo non sono influenzati da ciò che succede a livello microscopico, osservabili di particelle a basse energie non dovrebbero essere influenzati da ciò che succede ad alte energie.

È, dunque, necessario elaborare tecniche che consentano di rendere pratica tale linea di pensiero, la quale consente di considerare le procedure descritte in seguito *non* come necessarie in QFT, ma come naturali e necessarie per il modo in cui vengono effettuate previsioni teoriche in fisica.

- La procedura che consente di rendere pratica la linea di pensiero precedente e consente di "manipolare" le divergenze per poter calcolare osservabili, consiste in due fasi: regolarizzazione e rinormalizzazione:

1. *Regolarizzazione*. È una procedura matematica che consente di rendere gli integrali, e, quindi, le quantità fisiche osservabili, non divergenti e dipendenti da un parametro introdotto in maniera "artificiale", detto *regolarizzatore*. Al termine della successiva fase di rinormalizzazione, questi parametri non fisici dovranno essere rimossi opportunamente.

I modi in cui sono introdotti i parametri sono numerosi e, chiaramente, non influenzano i risultati finali, in quanto indipendentemente dal modo in cui tali parametri sono introdotti, dovranno essere opportunamente rimossi. Di seguito ne sono descritti due.

- *Regolarizzazione a cutoff*. Consiste nel modificare gli estremi di integrazione da $(-\infty; +\infty)$ a $(-\Lambda; +\Lambda)$, integrando così su momenti di modulo minore di Λ . Tale metodo, però, non è più utilizzato in quanto la modifica degli estremi di integrazione rompe importanti simmetrie e rende gli integrali non più invarianti di Lorentz, complicando notevolmente i calcoli.
- *Regolarizzazione dimensionale*. Consiste nel modificare le dimensioni dello spazio-tempo (e dei momenti su cui si integra) da 4 a un parametro arbitrario " d ". Seppur, a differenza del metodo precedente, non ha un chiaro significato fisico, consente di ottenere risultati equivalenti, rendendo più agevoli i calcoli. Tale formula rende l'ampiezza funzione analitica di d con poli in $d=4$, successivamente rimossi con la procedura di rinormalizzazione.

2. *Rinormalizzazione.* È la procedura che rende gli osservabili non più dipendenti dal parametro introdotto in regolarizzazione. In sostanza, consente di “eliminare” il parametro; ciò può essere realizzato riscrivendo osservabili in funzione di altri osservabili e ridefinendo questi ultimi in funzione del parametro introdotto.

2.3.1 Potenziale da filo infinito

Di seguito è presentato un esempio di applicazione delle tecniche di regolarizzazione e rinormalizzazione a un integrale derivante dall’espressione del potenziale elettrico in caso di filo uniformemente carico e di lunghezza infinita [2]. Seppur non si tratti di un caso legato al calcolo dell’ampiezza di transizione, può essere utile sia per osservare come situazioni analoghe sono presenti anche in fisica classica, sia per capire come applicare le procedure di regolarizzazione e rinormalizzazione.

Si consideri un filo carico di lunghezza $l \rightarrow \infty$ con densità di carica uniforme λ . Lo scopo è calcolare l’espressione del potenziale per una carica che si trova a distanza R dal filo.

$$V(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\lambda}{4\pi r} = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \infty \quad (2.7)$$

Il potenziale è stato calcolato in un sistema di riferimento dove x è la coordinata di un punto appartenente al filo lungo l’asse coincidente con il filo, R è la distanza della carica dal filo ed r è la distanza della carica dai punti del filo.

È utile fare alcune osservazioni, mediante le quali è possibile scorgere alcune analogie con gli integrali di *loop*:

- Se $R \ll l$, ciò che accade a grandi distanze, ovvero agli estremi del filo, non influenza la carica e la fisica che la descrive;
- $V(R)$ non è osservabile, ma lo è la differenza di potenziale $\Delta V = V(R_1) - V(R_2)$. Nell’espressione dell’ampiezza di transizione (eq. 2.6), g e m_i sono due parametri che compaiono nella Lagrangiana, in quanto le Regole di Feynman sono collegate a quest’ultima. Essi non sono osservabili: la massa i -esima misurabile sperimentalmente (massa a riposo) m_{mi} è infatti legata al quadrimpulso del quanto virtuale da $m_{mi}^2 = p_i^2$ ed è shiftata dalla massa presente nella Lagrangiana di correzioni che dipendono da g , anch’esso parametro non misurabile sperimentalmente

$$m_i = m_{mi} + O(g).$$

Tutto ciò è legato al fatto che la teoria non è più valida per alcuni stati fisici considerati.

Dunque, come nel caso degli integrali di *loop* è necessario ridefinire osservabili in funzioni di quantità effettivamente osservabili (per esempio riscrivendo m_i come

funzione di m_{mi}), anche in questo caso è necessario ridefinire l'osservabile $V(R)$. Ciò consentirà di eliminare il *regolarizzatore* Λ introdotto nella fase di regolarizzazione;

- Non è strettamente necessario introdurre un *regolarizzatore*. Sarebbe possibile definire quantità fisiche finite, senza affrontare gli step di regolarizzazione e rinormalizzazione:

$$\Delta V(R) = V(R) - V(R_0) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right) = -\frac{\lambda}{4\pi} \log \frac{R^2}{R_0^2}.$$

Una strategia simile potrebbe essere utilizzata anche nel caso di integrali di *loop*, ma si incorrerebbe in complicazioni che hanno reso questa tecnica poco utilizzata. Però, il fatto che questa tecnica, in principio, possa essere messa in atto, naturalizza ancora di più le procedure di regolarizzazione e rinormalizzazione.

Regolarizzazione con cutoff.

$$V(R) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\lambda}{4\pi} \log \frac{\sqrt{\Lambda^2 + R^2} + \Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + R^2} - \Lambda}$$

Rinormalizzazione. Per rimpiazzare $V(R)$ con una quantità osservabile, si introduce una scala R_0 che ridefinisce il potenziale fisico rinormalizzato, ma dal quale non dipendono gli altri osservabili.

$$\Delta V(R) = V(R) - V(R_0) \approx -\frac{\lambda}{4\pi} \log \frac{R^2}{R_0^2} + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)$$

per $\Lambda \rightarrow +\infty$. L'osservabile non è più divergente ed è possibile calcolare altri osservabili, come il campo elettrico $E_i = \partial_i(\Delta V(R))$, il quale, non dipende nè dal regolarizzatore, nè da R_0 .

In seguito è riportato lo stesso procedimento, ma con la tecnica della regolarizzazione dimensionale, oggetto di studio dei prossimi capitoli.

Regolarizzazione dimensionale.

$$V(R) = \frac{\lambda}{4\pi} \mu^{d-1} \int d^d x \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + R^2}}$$

Sono stati rimpiazzati x con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, dx con $d^d x = dx_1 \dots dx_d$ e x^2 con $|\mathbf{x}|^2 = \sum_i^d x_i^2$; μ è una scala introdotta per mantenere le corrette dimensioni di V e λ ed è

necessaria a seguito della modifica delle dimensioni dello spazio-tempo, $[\mu] = [m]$.
Riscrivendo l'integrale in coordinate polari, $r = |\mathbf{x}|$ e Ω_d angolo solido in d dimensioni

$$\int d^d x = \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int d\Omega_d$$

si ottiene

$$V(R) = \frac{\lambda}{4\pi} \Omega_d \int_0^{+\infty} dr \frac{r^{d-1}}{\sqrt{r^2 + R^2}}$$

$V(R)$ risulta essere una funzione analitica in d con polo in $d=1$ (nel caso di integrali di *loop* M è funzione analitica di d con polo in $d=4$). Risolvendo l'integrale, si ottiene

$$V(R) = \frac{\lambda}{4\pi} \left[-\frac{2}{d-1} - \log(\mu R)^2 + k \right] + O(d-1)$$

dove k è una costante.

Rinormalizzazione. È necessario, ora, ridefinire l'osservabile $V(R)$.

$$\Delta V(R) = V(R) - V(R_0) = -\frac{\lambda}{4\pi} \log \frac{R^2}{R_0^2} + O(d-1)$$

se $d \rightarrow 1$.

Anche in questo caso, l'osservabile assume valore finito e altre grandezze, come il campo elettrico E , non dipendono nè dal regolarizzatore, nè da R_0 .

Capitolo 3

Rappresentazioni degli *integrali di Feynman*

Un generico integrale di Feynman in regolarizzazione dimensionale, con L loop, derivante da un diagramma con $E + 1$ momenti esterni di cui E indipendenti, è della forma

$$\int \prod_{i=1}^L d^d k_i \frac{N(k_i^\mu)}{D_1^{\alpha_1} \dots D_{t'}^{\alpha_{t'}}$$

Il numeratore $N(k_i^\mu)$ presenta una struttura tensoriale. I denominatori D_i sono i *propagatori inversi* o, semplicemente, *propagatori* e sono forme quadratiche

$$D_i = P_i^2 - m_i^2$$

dove P_i e m_i sono rispettivamente combinazioni lineari dei momenti $k_1 \dots k_L, p_1 \dots p_E$ e le masse dei propagatori interni.

I *prodotti scalari indipendenti* sono tutti i prodotti scalari possibili tra momenti esterni indipendenti e momenti di *loop* e momenti di *loop* stessi. Dati E momenti esterni indipendenti e L momenti di *loop*, il numero totale di *prodotti scalari indipendenti* del tipo

$$k_i \cdot p_j \text{ dove } 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq E$$

$$k_i \cdot k_j \text{ dove } 1 \leq i < j \leq L$$

è

$$n = L \cdot E + \frac{L(L-1)}{2}$$

Un integrale di Feynman presenta t propagatori indipendenti quando è possibile esprimere massimo t degli n *prodotti scalari indipendenti* mediante t propagatori opportuni. Inoltre, $\alpha_j \geq 0 \forall j \in [1, t']$

3.1 Rappresentazione nello spazio dei momenti

Il calcolo degli integrali si semplifica dopo la procedura di *riduzione tensoriale*, la quale consente di fattorizzare la parte tensoriale e lasciare espressa la dipendenza dai momenti di *loop* in fattori scalari, chiamati *integrali di Feynman scalari*, da ora in poi indicati semplicemente come integrali di Feynman, I . L'espressione dell'ampiezza di transizione diventa

$$M = \sum_i a_i I_i$$

dove i coefficienti a_i sono funzioni razionali degli invarianti cinematici e di d . Al termine della procedura di riduzione tensoriale, un generico integrale che presenta L loop, E momenti esterni indipendenti, t *propagatori* indipendenti, è espresso nella forma

$$I[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \int \prod_{j=1}^L \left(\frac{d^d k_j}{\pi^{d/2}} \right) \frac{1}{D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}} \quad (3.1)$$

Dopo la riduzione tensoriale, t *prodotti scalari indipendenti* restano espressi mediante i denominatori e i restanti $q = n - t$ detti, *prodotti scalari irriducibili*, sono espressi mediante i *propagatori ausiliari*, ovvero tutti i fattori D_i al denominatore elevati a esponenti $\alpha_i \leq 0$. Quindi

$$\begin{cases} \alpha_i \geq 0 & \text{se } 1 \leq i \leq t \\ \alpha_i \leq 0 & \text{se } t+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Di seguito sono introdotte alcune definizioni ed effettuate alcune osservazioni relative agli integrali.

- *Notazione.* Da ora in poi, un generico integrale di Feynman, viene indicato semplicemente con I , oppure, ove sarà utile indicarlo come funzione degli esponenti dei propagatori con $I[\alpha_1 \dots \alpha_n]$
- *Settori.* Due integrali appartengono allo stesso settore se e solo se il loro set di denominatori è lo stesso, ovvero se posseggono gli stessi fattori D_i con esponenti $\alpha_i \geq 0$, eventualmente anche elevati a esponenti differenti, e/o con diversi *propagatori ausiliari*.
- *Dots.* In Fig. 3.1 è presente un diagramma con *dots*. La presenza di h *dots* su un propagatore interno indica che il fattore al denominatore derivante da esso è elevato ad una potenza $h + 1$.
- *Corner integral.* Si definisce *corner integral* di un settore l'integrale appartenente a un settore avente ogni fattore D_i al denominatore elevato ad esponente $\alpha_i = 1$ ed

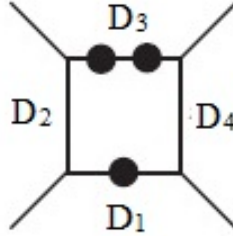


Figura 3.1: Diagramma *box* in cui il propagatore D_1 è elevato ad esponente 2 mentre il propagatore D_3 ad esponente 3. Immagine presa da [3]

ogni fattore al numeratore elevato ad esponente $\alpha_i = 0$. Ovvero $I[\alpha_1 \dots \alpha_n]$ è un *corner integral* se e solo se $\alpha_i = 1 \forall i \in [1, t]$ e $\alpha_i = 0 \forall i \in [t + 1, n]$. Da ora in poi viene indicato con $I_t[1 \dots 1]$, dove t è il numero di fattori D al denominatore della funzione integranda.

- *Parametri per classificazione.* La procedura di riduzione a *Master Integral*, consiste nell'esprimere integrali più difficili da calcolare in funzione di altri meno difficili da calcolare. Per questo, è utile quantificare quanto sia "complicato" calcolare un integrale. Per fare ciò, è opportuno definire alcuni parametri:

1. t rappresenta il numero di *propagatori*, ovvero è il numero di esponenti α_i tali che $\alpha_i > 0$;
2. r è la somma degli esponenti positivi

$$r = \sum_{\alpha_i \geq 0} \alpha_i;$$

3. s è l'opposto della somma degli esponenti negativi

$$s = - \sum_{\alpha_i \leq 0} \alpha_i.$$

Maggiori sono r , s , t , più è complicato l'integrale.

3.1.1 *One loop Bubble*-spazio dei momenti

Nell'esempio affrontato nella sez. 2.2.3 si sarebbe potuto considerare, invece che l'integrale 2.6 derivante dal grafico presente in Fig. 2.9, l'integrale

$$I[\nu_1, \nu_2] = \int d^d k \frac{1}{(k^2 - m^2)^{\nu_1} [(k-p)^2 - m^2]^{\nu_2}} = \int d^d k \frac{1}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} \quad (3.2)$$

(a cui va aggiunto il fattore di normalizzazione $1/(\pi^{d/2})$) derivante dal diagramma in Fig. 2.8. Si noti che l'integrale 3.2 deriva dalla situazione più generale in cui il diagramma in fig. 2.8 presenta un numero arbitrario di *dots*: $\nu_1 - 1$ sul propagatore con momento k e $\nu_2 - 1$ sul propagatore con momento $k-p$. Applicando, quindi, le *Feynman rules* al diagramma in 2.8, detto *Diagramma a Bolla*, si ottiene la rappresentazione nello *spazio dei momenti* dell'integrale *One loop Bubble*.

3.2 Rappresentazione mediante i *parametri di Schwinger*

A seconda del tipo di problema può essere conveniente lavorare con integrali espressi in parametrizzazioni differenti.

Rappresentazioni diverse da quella nello spazio di momenti (eq. 3.1) possono essere utilizzate solamente in presenza di *Integrali di Feynman*, $I[\nu_1 \dots \nu_n]$, con $\nu_i > 0 \forall i$. Il primo tipo di parametrizzazione mostrato, è la rappresentazione mediante i *Parametri di Schwinger*. Essa consente di passare da un'integrazione in $L \cdot d$ momenti a un'integrazione in n parametri, ovvero i *Parametri di Schwinger*.

Per ricavarla si parte dalla seguente identità, anche detta *Schwinger's trick*: sia $A > 0$ e $Re(\nu) > 0$, allora

$$\frac{1}{A^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} d\alpha \cdot \alpha^{\nu-1} e^{-\alpha A} \quad (3.3)$$

Questa identità deriva dalla definizione della funzione *Gamma di Eulero*. Ponendo $A = D_j = P_j - m_j$, si ricava

$$\frac{1}{(P_j - m_j)^{\nu_j}} = \frac{1}{\Gamma(\nu_j)} \int_{\alpha_j \geq 0} d\alpha_j \cdot \alpha_j^{\nu_j-1} \exp[-\alpha_j(P_j - m_j)] \quad (3.4)$$

Mediante l'eq. 3.4 è possibile riscrivere ognuno dei fattori D_i all'interno di un *Integrale di Feynman* espresso in rappresentazione dei momenti (Eq. 3.1), ottenendo

$$I[\nu_1 \dots \nu_n] = \frac{1}{\prod_{a=1}^n \Gamma(\nu_a)} \int \prod_{a=1}^n (d\alpha_a \cdot \alpha_a^{\nu_a-1}) \int \prod_{m=1}^L \frac{d^d k_m}{\pi^{d/2}} \exp\left(-\sum_{j=1}^n \alpha_j(P_j - m_j)\right). \quad (3.5)$$

Esprimendo

$$P_j = \sum_{r=1}^L \lambda_{jr} k_r + \sum_{r=1}^E \sigma_{jr} p_r \quad (3.6)$$

si giunge a

$$\begin{aligned} \sum_j \alpha_j (P_j^2 - m_j^2) &= \sum_{r,s} k_r \left(\sum_j \alpha_j \lambda_{jrs}^2 \right) k_s + \sum_{r,s} k_r \left(\sum_j \alpha_j \lambda_{jr} \lambda_{js} \right) k_s + \\ &+ \sum_r p_r^2 \sum_j \alpha_j \sigma_{jr}^2 + 2 \sum_r k_r \left(\sum_s \sum_j \alpha_j \lambda_{jr} \sigma_{js} p_s \right) - \sum_j \alpha_j m_j^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

e ponendo

$$M_{rs} = \sum_j \alpha_j \lambda_{jrs}^2 + \sum_j \alpha_j \lambda_{jr} \lambda_{js}$$

(dove $\lambda_{jrs} = \lambda_{jr}$ per $s = r$ e $\lambda_{jrs} = 0$ per $s \neq r$),

$$v_r = \sum_s \sum_j \alpha_j \lambda_{jr} \sigma_{js} p_s$$

$$J = \sum_j \alpha_j m_j^2 - \sum_r p_r^2 \sum_j \alpha_j \sigma_{jr}^2$$

l'eq 3.7 diventa

$$\sum_j \alpha_j (P_j^2 - m_j^2) = \mathbf{k}^T M \mathbf{k} + 2\mathbf{v}^T \mathbf{k} - J \quad (3.8)$$

dove \mathbf{k} e \mathbf{v} sono vettori L -dimensionali con vettori d -dimensionali come elementi. Diagonalizzando $M = O^{-1} D O$ (O matrice ortogonale), effettuando un cambio di variabili $y_i = \sum_j O_{ij} x_j$ e sfruttando l'ortogonalità di O ($O^T O = 1$)

$$\sum_j \alpha_j (P_j^2 - m_j^2) = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} + 2\mathbf{v}^T O^{-1} \mathbf{y} - J. \quad (3.9)$$

Sfruttando l'eq 3.9, l'ultimo integrale presente in eq. 3.5 diventa

$$\begin{aligned} &\int \prod_m \left(\frac{d^d k_m}{\pi^{d/2}} \right) \exp \left(- \sum_j \alpha_j (P_j^2 - m_j^2) \right) = \\ &\int \frac{d^d y_1}{\pi^{d/2}} \exp \left(-D_{11} y_1^2 - 2 \sum_i v_i O_{1i} \cdot y_1 + J/L \right) \cdot \dots \\ &\cdot \int \frac{d^d y_L}{\pi^{d/2}} \exp \left(-D_{LL} y_L^2 - 2 \sum_i v_i O_{Li} \cdot y_L + J/L \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

dove i D_{ii} ($i = 1, \dots, L$) rappresentano gli elementi diagonali della matrice D . Partendo dall'identità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \exp(-ax^2 - bx + c) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \left(\frac{b^2}{4a} + c \right) \quad (3.11)$$

e generalizzando al caso di un'integrazione in d -dimensioni [4], si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^d x \exp(-\mathbf{x}^T A \mathbf{x} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + c) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\text{Det}A}} \right)^d \exp(\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c) \quad (3.12)$$

Per cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^d y_k \exp\left(-D_{kk} y_k^2 - 2 \sum_i v_i O_{ki} y_k + J/L\right) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{D_{kk}}} \right)^d \exp\left(\frac{\sum_i v_i^2 O_{ki}^2}{D_{kk}} + J/L\right). \quad (3.13)$$

Applicando lo stesso ragionamento per ognuno degli L integrali in d dimensioni e considerando che

$$\sum_k \left(\sum_i v_i O_{ki} (D_{kk}^{-1}) v_i O_{ki} \right) = \mathbf{v}^T M^{-1} \mathbf{v} \quad (3.14)$$

l'eq 3.10 diventa

$$\int \prod_m \frac{d^d k_m}{\pi^{d/2}} \exp\left(-\sum_j \alpha_j (P_j^2 - m_j^2)\right) = \frac{1}{(\det M)^{-d/2}} \exp(-\mathbf{v}^T M^{-1} \mathbf{v} + J). \quad (3.15)$$

Definendo

$$U(\alpha) = \det M \quad (3.16)$$

$$F(\alpha) = \det M (\mathbf{v}^T M^{-1} \mathbf{v} - J) \quad (3.17)$$

dall'eq 3.5 si ottiene la rappresentazione dell'integrale mediante i *Parametri di Schwinger*

$$I[\nu_1 \dots \nu_n] = \frac{1}{\prod_{a=1}^n \Gamma(\nu_a)} \int_{\alpha_j \geq 0} \prod_{a=1}^n (d\alpha_a \cdot \alpha_a^{\nu_a-1}) U^{-d/2} \exp\left(-\frac{F}{U}\right) \quad (3.18)$$

$U(\alpha)$ ed $F(\alpha)$ sono polinomi che godono delle seguenti proprietà:

- Sono entrambi polinomi omogenei nei *Parametri di Schwinger*, U è di grado L , F è di grado $L+1$;
- U è lineare in ogni *Parametro di Schwinger*. Se tutte le masse interne sono nulle, anche F è lineare in ogni parametro;
- Ogni monomio costituente U ha coefficiente $+1$.

U è detto *primo polinomio di Symanzik*, F , invece, *secondo polinomio di Symanzik*.

3.2.1 One loop bubble-Parametri di Schwinger

L'integrale derivante dal *Diagramma a bolla* (Fig. 2.8), in rappresentazione mediante *Parametri di Schwinger* è

$$I[\nu_1, \nu_2] = \frac{1}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_{\alpha_j \geq 0} d\alpha_1 d\alpha_2 \cdot \alpha_1^{\nu_1-1} \alpha_2^{\nu_2-1} (\alpha_1 + \alpha_2)^{-d/2} \exp\left(-\frac{F}{U}\right) \quad (3.19)$$

dove

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (3.20)$$

$$F = \alpha_1 \alpha_2 (-p^2) + (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 m_1^2) \quad (3.21)$$

3.3 Rappresentazione mediante i Parametri di Feynman

Un'altra comune rappresentazione è quella mediante i *Parametri di Feynman*. Il primo passaggio per ricavarla è inserire, nell'espressione della rappresentazione mediante i *Parametri di Schwinger* (Eq. 3.18), un 1 nella forma

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot \delta\left(t - \sum_{j=1}^n \alpha_j\right) = \int_0^{+\infty} dt \cdot \delta\left(t - \sum_{j=1}^n \alpha_j\right) \quad (3.22)$$

dove nell'ultimo passaggio è stato utilizzato $\sum_j \alpha_j \geq 0$. Sfruttando l'eq. 3.22 è possibile ricavare la seguente identità

$$\int_{\alpha_j \geq 0} d^n \alpha \cdot f(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \int_{a_j \geq 0} d^n a \cdot \delta\left(1 - \sum_{j=1}^n a_j\right) \int_0^{+\infty} dt \cdot t^{n-1} f(ta_1, \dots, ta_n) \quad (3.23)$$

Applicando l'eq 3.23 alla rappresentazione mediante *Parametri di Schwinger* e considerando che U ed F sono polinomi omogenei di grado rispettivamente L e $L+1$, si ottiene

$$I = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\nu_j)} \int_{a_j \geq 0} d^n a \cdot \delta\left(1 - \sum_{j=1}^n a_j\right) \left(\prod_{j=1}^n a_j^{\nu_j-1}\right) U^{-\frac{d}{2}} \cdot \int_0^{+\infty} dt \cdot t^{\nu-\frac{ld}{2}-1} \exp\left(-\frac{F}{U}t\right) =$$

$$\frac{1}{\prod_j \Gamma(\nu_j)} \int_{a_j \geq 0} d^n a \cdot \delta\left(1 - \sum_j a_j\right) \left(\prod_j a_j^{\nu_j-1}\right) \frac{U^{\nu-\frac{(L+1)d}{2}}}{F^{\nu-\frac{Ld}{2}}} \int_0^{+\infty} dm \cdot m^{\nu-\frac{Ld}{2}-1} e^{-m}$$

dove $\nu = \sum_i \nu_i$ e nell'ultimo passaggio è stato effettuato il cambio di variabili $m = \frac{F}{U}t$. L'ultimo integrale corrisponde alla definizione della funzione *Gamma di Eulero* e, dunque,

un generico *Integrale di Feynman* con L loop ed n prodotti scalari indipendenti, espresso in rappresentazione mediante i *Parametri di Feynman* è nella forma

$$I[\nu_1 \dots \nu_n] = \frac{\Gamma\left(\nu - \frac{Ld}{2}\right)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\nu_j)} \int_{a_j \geq 0} d^n a \cdot \delta\left(1 - \sum_{j=1}^n a_j\right) \left(\prod_{j=1}^n a_j^{\nu_j - 1}\right) \frac{U^{\nu - \frac{(L+1)d}{2}}}{F^{\nu - \frac{Ld}{2}}} \quad (3.24)$$

Chiaramente, in questa rappresentazione, per via dei cambi di variabili effettuati, $U = U(a)$ ed $F = F(a)$.

3.3.1 *One loop bubble-Parametri di Feynman*

L'integrale derivante dal *Diagramma a bolla* (Fig. 2.8), in rappresentazione mediante *Parametri di Feynman* è

$$I[\nu_1, \nu_2] = \frac{\Gamma\left(\nu - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int da_1 da_2 \cdot \delta(1 - a_1 - a_2) a_1^{\nu_1 - 1} a_2^{\nu_2 - 1} \frac{U^{\nu - d}}{F^{\nu - \frac{d}{2}}} \quad (3.25)$$

dove

$$U = a_1 + a_2 \quad (3.26)$$

$$F = a_1 a_2 (-p^2) + (a_1 + a_2)(a_1 m_1^2 + a_2 m_2^2) \quad (3.27)$$

Nel caso in cui il processo avvenga in presenza di propagatori non massivi

$$F = a_1 a_2 (-p^2). \quad (3.28)$$

L'eq 3.25, in questo caso, diventa

$$I[\nu_1, \nu_2] = \frac{\Gamma\left(\nu - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} (-p^2)^{\frac{d}{2} - \nu} \int_0^1 da_2 \cdot a_2^{\frac{d}{2} - \nu_2 - 1} (1 - a_2)^{\frac{d}{2} - \nu_2 - 1}. \quad (3.29)$$

La variabile di integrazione a_2 è integrata da 0 a 1, poichè, avendo sfruttato le proprietà del delta di Dirac, gli unici valori di a_2 che non rendono nullo l'integrale sono $0 \leq a_2 \leq 1$, in quanto $a_1 \geq 0$.

L'integrale in a_2 , non è altro che la funzione *Beta di Eulero*, per cui

$$I[\nu_1, \nu_2] = (-p^2)^{\frac{d}{2} - \nu} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - \nu_1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - \nu_2\right)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)\Gamma(d - \nu)} \quad (3.30)$$

3.4 *Parametrizzazione Lee-Pomeransky*

L'ultima parametrizzazione mostrata è la parametrizzazione *Lee-Pomeransky* [5]. In questa rappresentazione, è presente un solo polinomio, $G = U + F$. In questo caso, si

partirà dalla rappresentazione *Lee-Pomeransky* per dimostrare che è equivalente alla parametrizzazione mediante i *Parametri di Feynman* [6]. Un generico *Integrale di Feynman* con L loop e n prodotti scalari indipendenti, in rappresentazione *Lee-Pomeransky*, è nella forma

$$I[\nu_1, \dots, \nu_n] = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(L+1)d}{2} - \nu\right) \prod_{j=1}^n \Gamma(\nu_j)} \int_{x_j \geq 0} \prod_{a=1}^n dx_a \cdot x_a^{\nu_a - 1} G^{-\frac{d}{2}} \quad (3.31)$$

dove $G = G(x) = U(x) + F(x)$. Per dimostrare che tale rappresentazione è equivalente all'eq 3.24, si inserisce un 1 nella forma

$$1 = \int_0^{+\infty} \delta\left(t - \sum_{j=1}^n x_j\right)$$

all'interno dell'eq 3.31; successivamente si effettua un cambio di variabili $a_j = x_j/t$ e si sfrutta il fatto che U ed F sono polinomi omogenei di grado rispettivamente L e $(L+1)$:

$$I[\nu_1 \dots \nu_n] = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(m) \prod_j \Gamma(\nu_j)} \int_{a_j} d^n a \cdot \delta\left(1 - \sum_j a_j\right) \left(\prod_j a_j^{\nu_j - 1}\right) \cdot \int_0^{+\infty} dt \cdot t^{\nu - \frac{Ld}{2}} (U + Ft)^{-\frac{d}{2}}$$

dove $m = \nu - \frac{(L+1)d}{2}$. Effettuando un cambio di variabili $y = \frac{F}{U}t$ si ottiene

$$I[\nu_1 \dots \nu_n] = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(m) \prod_j \Gamma(\nu_j)} \int_{a_j \geq 0} d^n a \cdot \delta\left(1 - \sum_j a_j\right) \left(\prod_j a_j^{\nu_j - 1}\right) \frac{U^{-m}}{F^{\nu - \frac{Ld}{2}}} \int_0^{+\infty} dy \cdot y^{\nu - \frac{Ld}{2} - 1} (1 + y)^{-\frac{d}{2}} \quad (3.32)$$

L'integrale in y non è altro che la seconda rappresentazione integrale della funzione *Beta di Eulero*. Sostituendo

$$\int_0^{+\infty} dy \cdot y^{\nu - \frac{Ld}{2} - 1} (1 + y)^{-\frac{d}{2}} = \frac{\Gamma\left(\nu - \frac{Ld}{2}\right) \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

in eq. 3.32 si ottiene $I[\nu_1, \dots, \nu_n]$ in rappresentazione mediante i *Parametri di Feynman*.

3.4.1 One loop bubble-rappresentazione *Lee-Pomeransky*

L'integrale *One loop Bubble* in caso di propagatori massivi in rappresentazione *Lee-Pomeransky* è

$$I[\nu_1, \nu_2] = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(m) \Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2)} \int dx_1 dx_2 \cdot x_1^{\nu_1 - 1} x_2^{\nu_2 - 1} G^{-\frac{d}{2}} \quad (3.33)$$

dove U e F sono gli stessi rispettivamente di eq. 3.26 e eq. 3.27. Nel caso di propagatori non massivi, l'eq. 3.33 diventa

$$I[\nu_1, \nu_2] = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(m)\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int dx_1 dx_2 \cdot x_1^{\nu_1-1} x_2^{\nu_2-1} (x_1 + x_2 + x_1 x_2 p^2)^{-\frac{d}{2}} \quad (3.34)$$

Capitolo 4

Relazioni lineari tra *Integrali di Feynman*

4.1 *Laporta Algorithm* e riduzione a *Master Integrals*

Generalmente, per determinare l'ampiezza di transizione, è necessario calcolare un numero elevato di integrali di Feynman. La procedura di riduzione a *Master Integrals* è essenziale. Gli integrali iniziali soddisfano un insieme di relazioni lineari, per cui non sono tutti linearmente indipendenti. Lo scopo è riscrivere il maggior numero possibile di integrali iniziali in funzione di un insieme minimale di integrali linearmente indipendenti, detti *Master Integrals*. Il primo passo consiste nel ricavare le relazioni lineari. I metodi utilizzati per ricavarle variano a seconda della parametrizzazione scelta. Nel caso si scelga la rappresentazione nello spazio dei momenti, è possibile ricavare le *Integration By Parts identities (IBPs)*, Lorentz invariance identities (*LI*) e symmetry relations (*SR*). Nel caso si scelga la parametrizzazione *Lee-Pomeransky* è possibile utilizzare il *metodo degli annichilatori* o il *metodo dei syzygy* per ricavare equazioni simil-*IBPs*. Ricavare il set di equazioni soddisfatte dagli integrali è il primo step del *Laporta algorithm*, una delle procedure più utilizzate per la riduzione a *Master integrals*. Essa consiste nella seguente procedura:

1. *Creazione del sistema di equazioni.* Le identità sono ricavate per integrali il cui insieme di indici $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ è arbitrario. Il sistema che si viene a formare è detto *sistema IBP*, e le equazioni che lo compongono sono dette *equazioni modello*.
2. *Seed equations.* Una volta ricavato il *sistema IBP*, bisogna sostituire valori numerici specifici agli indici ν_i , detti *seed*. Il sistema presenta più equazioni del numero di incognite, e può essere quindi risolto per il set di integrali che si desidera calcolare.

3. *Scelta dei Master integrals.* L'ultimo passo è la scelta degli integrali da calcolare effettivamente. Essa è arbitraria, e può essere paragonata alla scelta di una base di vettori: a seconda del tipo di problema e dei parametri r, s, t , viene scelto un certo insieme di *Master Integrals* mediante i quali saranno espressi gli integrali del set di partenza. Una volta scelti i Master Integrals, un generico integrale è espresso nella forma

$$I_i = \sum_j c_{i,j} G_j$$

dove G_j è il j -esimo elemento della “base” di Master Integrals. Nella sez. 4.2.5 è mostrato un esempio del Laporta algorithm applicato al diagramma One loop bubble.

4.2 Relazioni lineari nello spazio dei momenti

A seconda del tipo di rappresentazione utilizzato, è possibile utilizzare diversi metodi per ricavare relazioni lineari fra integrali. Di seguito sono esposti i principali metodi per ricavare identità con integrali rappresentati nello spazio dei momenti.

Da ora in poi negli integrali rappresentati nello spazio dei momenti verranno omessi i fattori di normalizzazione

$$\frac{1}{\pi^{d/2}}$$

in quanto sono ininfluenti nel calcolo delle relazioni.

4.2.1 Relazioni di simmetria

Un generico *integrale di Feynman* espresso mediante la rappresentazione nello spazio dei momenti (eq. 3.1) è invariante per traslazioni dei momenti su cui si integra:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \dots dk_d \cdot f(k) = \int d^d k f(k) = \int d^d k \cdot f(k + c) \quad (4.1)$$

dove c è un vettore d -dimensionale generico. Sfruttare l'eq. 4.1 consente di ricavare le *relazioni di simmetria* tra integrali: traslare uno dei momenti di integrazione consente di esprimere un generico integrale $I[\nu_1, \dots, \nu_n]$ come combinazione di altri. Come esempio, è possibile considerare l'integrale *One loop bubble*

$$I[\nu_1, \nu_2] = \int d^d k \frac{1}{(k^2 - m^2)^{\nu_1} [(k-p)^2 - m^2]^{\nu_2}} = \int d^d k \frac{1}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} \quad (4.2)$$

ed effettuare la traslazione $k \rightarrow -k + p$. Ciò consente di ricavare la relazione

$$\int d^d k \frac{1}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} = \int d^d k \frac{1}{D_1^{\nu_2} D_2^{\nu_1}}$$

ovvero

$$I[\nu_1, \nu_2] = I[\nu_2, \nu_1] \quad (4.3)$$

Sfruttare l'invarianza traslazionale consente di ricavare relazioni tra integrali dello stesso settore, sia tra integrali di settori diversi. Nel primo caso, si è in presenza di *simmetrie settoriali* nel secondo si è in presenza di *mappature tra settori*.

4.2.2 Trivial sectors

La risoluzione di un *sistema IBP* può essere semplificata identificando “a priori” integrali o interi settori nulli. Un integrale è nullo se è *scaleless*, ovvero se, in presenza di un cambio di variabile $k \rightarrow sk$

$$\int d^d k \cdot f(k) = \int d^d(sk) k \cdot f(sk) = s^d \cdot s^\alpha \int d^d k \cdot f(k)$$

dove α è un esponente il cui valore dipende dalla forma della funzione integranda. Identificare integrali *scaleless* è importante per identificare un *trivial sector*; infatti, un settore è un *trivial sector*, ovvero tutti gli integrali che vi appartengono sono nulli, se il suo *corner integral* è nullo. Dunque, verificare se il *corner integral* di un settore è *scaleless*, può semplificare notevolmente sistemi IBP.

4.2.3 Lorentz invariance identities

Un integrale di Feynman in regolarizzazione dimensionale è invariante per trasformazione di Lorentz, infatti, gli n fattori D_i al denominatore in eq 3.1 esprimono n prodotti scalari tra momenti, i quali sono invarianti per trasformazioni di Lorentz. Effettuando dunque una trasformazione infinitesima di Lorentz $p_n^\mu \rightarrow p_n^\mu + \delta p_n^\mu$ con $\delta p_n^\mu = \omega^{\mu\nu} p_{n\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ tensore antisimmetrico ($\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$) sarà verificato

$$\begin{aligned} I[\nu_1, \dots, \nu_n] &= I[\nu_1, \dots, \nu_n] + \sum_i \frac{\partial I[\nu_1, \dots, \nu_n]}{\partial p_n^\mu} \delta p_n^\mu \\ &= I[\nu_1, \dots, \nu_n] + \omega^{\mu\nu} \sum_n p_{n\nu} \frac{\partial I[\nu_1, \dots, \nu_n]}{\partial p_n^\mu}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sfruttando l'antisimmetria, per ogni coppia di indici, vale

$$0 = \omega^{\mu\nu} p_{n\nu} \frac{\partial I}{\partial p_n^\mu} + \omega^{\nu\mu} p_{n\mu} \frac{\partial I}{\partial p_n^\nu} = \omega^{\mu\nu} \left(p_{n\nu} \frac{\partial I}{\partial p_n^\mu} - p_{n\mu} \frac{\partial I}{\partial p_n^\nu} \right) = \omega^{\mu\nu} \left(p_{n\nu} \frac{\partial}{\partial p_n^\mu} - p_{n\mu} \frac{\partial}{\partial p_n^\nu} \right) I$$

ovvero

$$\left(p_{n\nu} \frac{\partial}{\partial p_n^\mu} - p_{n\mu} \frac{\partial}{\partial p_n^\nu} \right) I = 0 \quad (4.5)$$

Le relazioni che si ricavano mediante l'eq 4.5 esprimono identità fra integrali che *non* sono invarianti per Lorentz. Per renderle invarianti è sufficiente contrarre l'eq 4.5 con tutte le possibili combinazioni $p_i^\mu p_j^\nu$

$$p_i^\mu p_j^\nu \left(p_{n\nu} \frac{\partial}{\partial p_n^\mu} - p_{n\mu} \frac{\partial}{\partial p_n^\nu} \right) I = 0 \quad (4.6)$$

Le LI non sono linearmente indipendenti dalle $IBPs$, ma non ricavarle potrebbe rendere la procedura di calcolo più dispendiosa, per cui non è ragionevole evitare di derivarle.

4.2.4 IBPs

L'ultimo tipo di relazioni lineari mostrato per integrali in rappresentazione nello spazio dei momenti sono le $IBPs$. Per ricavare le $IBPs$ si parte dall'eq 4.1: ponendo $c = \lambda q$ dove $q \in \{p_1, \dots, p_E, k_1, \dots, k_L\}$ e $\lambda \rightarrow 0$

$$\int d^d k f(k) = \int d^d k f(k) + \lambda \int d^d k \sum_{\mu=1}^d q^\mu \frac{\partial f(k)}{\partial k^\mu}. \quad (4.7)$$

Ciò implica

$$\int d^d k \frac{\partial (f(k) q^\mu)}{\partial k^\mu} = 0 \quad (4.8)$$

L'equazione risulta essere valida anche per $q \in \{k_1, \dots, k_n\}$.

Nello spazio dei momenti, l'insieme delle $IBPs$ è formato dunque da equazioni del tipo

$$\int d^d k_1 \dots d^d k_L \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial k_i^\mu} \left(\frac{q^\mu}{D_1^{\nu_1} \dots D_n^{\nu_n}} \right) = 0 \quad (4.9)$$

le quali, dopo aver svolto l'operazione di derivazione parziale, saranno nella forma

$$\sum_i c_i I[\nu_1 + \beta_{i,1}, \dots, \nu_n + \beta_{i,n}] = 0 \quad (4.10)$$

dove c_i sono polinomi che dipendono da d , invarianti cinematici e masse dei propagatori interni, mentre I sono integrali appartenenti allo stesso settore dell'integrale iniziale o, eventualmente, ad un sottosectore, nel caso uno degli indici ν_i si annullasse a seguito della derivazione.

4.2.5 Riduzione a Master Integrals di una *One loop bubble*

Si propone di seguito un esempio di riduzione a *Master Integrals*, mediante il *Laporta algorithm*, della *One loop bubble* con propagatori massivi. Mediante le $IBPs$ è possibile mostrare che un generico integrale $I[\nu_1, \nu_2]$ può essere riscritto come combinazione lineare di due *Master Integrals*, $I[1, 1]$ e $I[1, 0]$ o $I[1, 1]$ e $I[0, 1]$ per l'eq 4.3.

1. *Sistema IBP*. Si costruisce il sistema *IBPs* di *equazioni modello* partendo da eq. 3.2 e andando a ricavare le *IBPs*. In eq. 4.9 $q \in \{k, p\}$. Utilizzando la notazione di Einstein, la prima *equazione modello* è

$$\int \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{k^\mu}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} \right) = 0 \quad (4.11)$$

e la seconda

$$\int \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{p^\mu}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} \right) = 0 \quad (4.12)$$

dove $D_1 = k^2 - m^2$ e $D_2 = [(k - p)^2 - m^2]$.

Dall'eq 4.11 si ricava

$$\int \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{k^\mu}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} \right) = \int \frac{d}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} - \int \frac{2\nu_1 k^2}{D_1^{\nu_1+1} D_2^{\nu_2}} + \frac{\nu_2 (2kp - 2k)^2}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2+1}} = 0 \quad (4.13)$$

sostituendo $k^2 = k^2 - m^2 + m^2 = D_1 + m^2$ e $(k - p)^2 = p^2 - 2m^2 - D_1 - D_2$ si ottiene

$$\int \frac{d - 2\nu_1 - \nu_2}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} - \int \frac{2\nu_1 m^2}{D_1^{\nu_1+1} D_2^{\nu_2}} + \int \frac{\nu_2 (p^2 - 2m^2 - D_1)}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2+1}} = 0. \quad (4.14)$$

Dall'eq. 4.12

$$\int \frac{\partial}{\partial k^u} \left(\frac{p^u}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} \right) = - \int \frac{\nu_1 kp}{D_1^{\nu_1+1} D_2^{\nu_2}} + \int \frac{\nu_2 (2p^2 - 2kp)}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2+1}} = 0 \quad (4.15)$$

e sostituendo $2kp = D_1 - D_2 + p^2$, $2p^2 - 2kp = D_2 - D_1 + p^2$ si ottiene

$$\int \frac{\nu_2 - \nu_1}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} + \int \frac{\nu_1 (D_2 - p^2)}{D_1^{\nu_1+1} D_2^{\nu_2}} + \int \frac{\nu_2 (p^2 - D_1)}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2+1}} = 0 \quad (4.16)$$

quindi, il *sistema IBP* è

$$\begin{cases} \int \frac{d - 2\nu_1 - \nu_2}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} - \int \frac{2\nu_1 m^2}{D_1^{\nu_1+1} D_2^{\nu_2}} + \int \frac{\nu_2 (p^2 - 2m^2 - D_1)}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2+1}} = 0 \\ \int \frac{\nu_2 - \nu_1}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2}} + \int \frac{\nu_1 (D_2 - p^2)}{D_1^{\nu_1+1} D_2^{\nu_2}} + \int \frac{\nu_2 (p^2 - D_1)}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2+1}} = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

2. *Seed equations*. Una volta ricavato il *IBP* si ricavano le equazioni calcolando le eq. 4.17 per valori espliciti di ν_1 e ν_2 . Per

$$\nu_1 = 1, \nu_2 = 0$$

si ottiene

$$\int \frac{d-2}{D_1} - \int \frac{2m^2}{D_1^2} = 0 \quad (4.18)$$

$$\int \frac{D_1 - D_2 + p^2}{D_1^2} = 0 \quad (4.19)$$

ovvero

$$\frac{d-2}{2m^2} I[1, 0] = I[2, 0] \quad (4.20)$$

$$I[1, 0] = I[2, -1] - p^2 I[2, 0]. \quad (4.21)$$

Per

$$\nu_1 = 0, \nu_2 = 1$$

$$(d-1)I[0, 1] = (2m^2 - p^2)I[0, 2] + I[-1, 2] \quad (4.22)$$

$$I[0, 1] = I[-1, 2] - p^2 I[0, 2]. \quad (4.23)$$

Dalle eq. 4.22 e 4.23 si ricava

$$\frac{d-2}{2m^2} I[0, 1] = I[0, 2] \quad (4.24)$$

la quale si sarebbe potuta ottenere anche sfruttando le relazioni di simmetria

$$I[1, 0] = I[0, 1]$$

$$I[2, 0] = I[0, 2]$$

partendo da eq. 4.20. Per

$$\nu_1 = 1, \nu_2 = 1$$

$$(d-3)I[1, 1] - 4m^2 I[2, 1] + p^2 I[1, 2] - I[0, 2] = 0 \quad (4.25)$$

$$I[1, 2] = I[2, 1] \quad (4.26)$$

anche quest'ultima sarebbe stata ottenibile sfruttando le *SR*. Per

$$\nu_1 = 2, \nu_2 = 0$$

$$\frac{d-4}{4m^2} I[2, 0] = I[3, 0]. \quad (4.27)$$

Per

$$\nu_1 = 2, \nu_2 = 1$$

$$(d-6)I[2, 1] - 4m^2 I[3, 1] + (p^2 - 2m)I[2, 2] = 0 \quad (4.28)$$

$$-2I[2, 1] - 2p^2 I[3, 1] + 2I[3, 0] + p^2 I[2, 2] = 0 \quad (4.29)$$

Per

$$\nu_1 = 1, \nu_2 = 2$$

$$(d-4)I[2, 1] - 2m^2I[2, 2] + 2(p^2 - 2m^2)I[3, 1] - 2I[3, 0] = 0 \quad (4.30)$$

Sostituendo ulteriori valori è possibile creare un *sistema IBP* con un numero ancora maggiore di equazioni.

3. *Scelta dei master integrals.* In questo *sistema IBP* è possibile esprimere ogni integrale come combinazione lineare di due *master integrals*, la cui scelta è arbitraria. Scegliendo come *master integrals* $I[1, 1]$ e $I[1, 0]$, oltre alle eq. 4.20 e 4.24, si ottiene sostituendo le eq. 4.26 e 4.24 in eq. 4.25

$$I[1, 2] = I[2, 1] = \frac{d-3}{4m^2 - p^2}I[1, 1] - \frac{1}{4m^2 - p^2} \frac{d-2}{2m^2}I[1, 0]. \quad (4.31)$$

Sostituendo ulteriori valori dei *seed* e andando a risolvere le nuove equazioni ottenute si ottengono altri integrali in funzione dei *Master integrals* scelti.

4.3 Metodi in rappresentazione Lee-Pomeransky

È possibile ricavare relazioni lineari tra integrali in rappresentazione Lee-Pomeransky. Di seguito, sono esposti due metodi: il primo è il *metodo degli annichilatori*, il secondo è il *metodo dei syzygy*. Prima di mostrare i due metodi sono espresse alcune definizioni fondamentali per la loro comprensione: i *syzygy*, la trasformata di Mellin, gli operatori differenziali polinomiali e gli operatori di shift.

4.3.1 Syzygy

Per ricavare relazioni in rappresentazione Lee-Pomeransky, in entrambi i metodi, è necessario avvalersi di un *syzygy* [7]. Un *syzygy* è una condizione rispettata da due insiemi di polinomi espressa mediante l'*equazione syzygy*.

Dato un set di n polinomi $(f_1, f_2, \dots, f_n) = \mathbf{f}$ nelle variabili $(z_1, \dots, z_n) = \mathbf{z}$, l'*equazione syzygy* è

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{z}) \cdot g_i(\mathbf{z}) = 0 \quad (4.32)$$

dove $\{g_1, \dots, g_n\} = \mathbf{g}$ è un insieme di n polinomi nelle variabili \mathbf{z} . Il termine *syzygy* è utilizzato anche per indicare \mathbf{g} stesso. Se $\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(m)}$ sono i generatori della soluzione dell'*equazione syzygy* allora ogni soluzione può essere scritta come

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^m p_j(\mathbf{z}) \mathbf{g}^{(j)}(\mathbf{z}) \quad (4.33)$$

dove i $p_j(\mathbf{z})$ sono polinomi in $\mathbf{z} \forall i \in [1, n]$, per cui ogni soluzione moltiplicata per un polinomio è ancora soluzione.

4.3.2 Trasformata di Mellin

La trasformata di Mellin associa ad una funzione f una nuova funzione formalmente definita tramite l'operazione

$$M\{f\}(\boldsymbol{\nu}) = \prod_{a=1}^n \int_0^{+\infty} dx_a \cdot x_a^{\nu_a-1} f(x_1, \dots, x_n) \quad (4.34)$$

dove $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$. Al fine di ricavare relazioni fra integrali è opportuno ridefinire la trasformata di Mellin [8] come

$$M\{f\}(\boldsymbol{\nu}) = \prod_{i=1}^n \int_0^{+\infty} \frac{dx_a \cdot x_a^{\nu_a-1}}{\Gamma(\nu_a)} f(x_1, \dots, x_n) \quad (4.35)$$

per evidenziare il legame con l'integrale in $I[\nu_1, \dots, \nu_n]$ espresso in rappresentazione Lee-Pomeransky

$$I[\nu_1, \dots, \nu_n] = I[\boldsymbol{\nu}] = \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{(L+1)d}{2} - \boldsymbol{\nu}\right)} M\{G^{-\frac{d}{2}}\}(\boldsymbol{\nu}). \quad (4.36)$$

Per semplificare la notazione, quando opportuno, si indicherà con $\tilde{I}(\boldsymbol{\nu})$ la trasformata di Mellin di $G^{-\frac{d}{2}}$

$$\tilde{I}(\boldsymbol{\nu}) = M\{G^{-\frac{d}{2}}\}(\boldsymbol{\nu}).$$

La trasformata di Mellin gode delle seguenti proprietà:

1. *Linearità*

$$M\{\alpha f + \beta g\}(\boldsymbol{\nu}) = \alpha M\{f\}(\boldsymbol{\nu}) + \beta M\{g\}(\boldsymbol{\nu}) \quad (4.37)$$

per la linearità degli integrali;

2. *Moltiplicazione*

$$M\{x_i \cdot f\}(\boldsymbol{\nu}) = \prod_{a \neq i} \left(\int \frac{dx_a \cdot x_a^{\nu_a-1}}{\Gamma(\nu_a)} \right) \int \frac{dx_i \cdot x_i^{\nu_i}}{\Gamma(\nu_i)} f = \nu_i M\{f\}(\boldsymbol{\nu} + \mathbf{e}_i) \quad (4.38)$$

3. *Differenziazione*

$$\begin{aligned} M\{f\}(\partial_i \boldsymbol{\nu}) &= \prod_{a \neq i} \left(\int \frac{dx_a \cdot x_a^{\nu_a-1}}{\Gamma(\nu_a)} \right) \cdot \frac{x_i^{\nu_i-1}}{\Gamma(\nu_i)} f \Big|_0^{+\infty} - \prod_{a \neq i} \left(\int \frac{dx_a \cdot x_a^{\nu_a}}{\Gamma(\nu_a)} \right) \int \frac{dx_i \cdot x_i^{\nu_i-2}}{\Gamma(\nu_i-1)} f \\ &= -M\{f\}(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{e}_i) \end{aligned} \quad (4.39)$$

dove l'ultimo passaggio è valido se il termine di bordo è nullo

$$\prod_{a \neq i} \left(\int \frac{dx_a \cdot x_a^{\nu_a - 1}}{\Gamma(\nu_a)} \right) \cdot \frac{x_i^{\nu_i - 1}}{\Gamma(\nu_i)} f \Big|_0^{+\infty} = 0$$

4.3.3 Operatori differenziali polinomiali e di shift

Di seguito sono definiti due tipi di operatori: gli operatori differenziali polinomiali in n variabili e gli operatori di shift.

Utilizzando la notazione multi-indice $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$ e $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1}, \dots, \partial_n^{\beta_n}$, ogni operatore differenziale polinomiale P può essere scritto nella forma

$$P = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta \quad (4.40)$$

dove $c_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ sono n -uple con componenti in \mathbb{N}^+ . L'insieme degli operatori differenziali in n variabili è indicato con

$$A^n = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_i, \dots, \partial_n \text{ dove } i \in [1, n]\}.$$

I coefficienti $c_{\alpha, \beta}$ possono anche essere estesi a polinomi in una variabile s , definendo così $A^n[s] = A^n \otimes \mathbb{C}[s]$ dove $\mathbb{C}[s]$ è l'insieme dei polinomi in \mathbb{C} nella variabile s . Con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione tra operatori differenziali, i generatori seguono le seguenti regole di commutazione

$$[x_i, x_j] = [\partial_i, \partial_j] = 0 \text{ e } [\partial_i, x_j] = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j \in [1, n] \quad (4.41)$$

dove $\delta_{i,j}$ è la delta di Kronecker.

Un operatore di shift in n variabili è un operatore che agisce su una funzione $f(\boldsymbol{\nu})$ dove $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, shiftando gli indici (ν_1, \dots, ν_n) che la caratterizzano. Un generico operatore di shift S può essere scritto, utilizzando la notazione multi-indice, come

$$S = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} \left(\prod_{i=1}^n (i^+)^{\alpha_i} (j^-)^{\beta_j} \right)$$

dove

$$\begin{aligned} i^+ f(\nu_1, \dots, \nu_n) &= f(\nu_1, \dots, \nu_i + 1, \dots, \nu_n) = \nu_i \cdot f(\boldsymbol{\nu} + \mathbf{e}_i), \\ j^- f(\nu_1, \dots, \nu_n) &= f(\nu_1, \dots, \nu_j - 1, \dots, \nu_n) = f(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{e}_j), \end{aligned}$$

$c_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ sono n -uple con componenti in \mathbb{N}^+ . Anche in questo caso è possibile estendere i coefficienti $c_{\alpha, \beta}$ a polinomi in una variabile s ,

definendo così $S^n[s] = S^n \otimes \mathbb{C}[s]$. L'insieme degli operatori di shift in n variabili è indicato con

$$S^n = \mathbb{C}\{1^+, \dots, i^+, \dots, n^+, 1^-, \dots, i^-, \dots, n^-\} \text{ dove } i \in [1, n]$$

ed i generatori seguono le seguenti regole di commutazione:

$$[i^+, j^+] = [i^-, j^-] = 0 \text{ e } [i^+, j^-] = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j \in [1, n] \quad (4.42)$$

Le regole di commutazione dei generatori degli operatori differenziali polinomiali e degli operatori di shift sono le stesse, ed è possibile definire un isomorfismo tra i due spazi [8] mediante le corrispondenze

$$\begin{aligned} i^+ &\leftrightarrow x_i \\ j^- &\leftrightarrow -\partial_j. \end{aligned}$$

Formalmente l'isomorfismo è descritto da un'applicazione lineare $M\{\cdot\}$ che agisce nel seguente modo:

$$M\{\cdot\} : A^n/A^n[s] \rightarrow S^n/S^n[s], \quad P \rightarrow M\{P\} = P \Big|_{x_i=i^+, \partial_i=-i^- \quad \forall i \in [1, n]}.$$

Se un operatore P è tale che

$$P(f^s) = 0 \quad (4.43)$$

viene definito *annichilatore differenziale* e il sottospazio di tali operatori è definito come

$$Ann_{A^n[s]}(f^s) = \{P \in A^n \text{ t.c } P(f^s) = 0.\} \quad (4.44)$$

La trasformata di Mellin è compatibile con l'azione di entrambi i tipi di operatori definiti in precedenza [8]; vale l'identità

$$M\{P f^s\} = M\{P\}M\{f^s\}, \quad \forall P \in A^n[s] \quad (4.45)$$

e, in particolare, $M\{\cdot\}$ associa ad ogni operatore $P \in Ann_{A^n[s]}(f^s)$ un operatore di shift che annulla la trasformata di Mellin [8]

$$M\{P f^s\} = M\{P\}M\{f^s\} = 0, \quad \forall P \in Ann_{A^n[s]}(f^s). \quad (4.46)$$

Le relazioni espote in eq. 4.45 e in eq. 4.46 sono valide anche per ogni operatore $P \in A^n/Ann_{A^n}(f)$.

4.3.4 Metodo degli annichilatori

Le definizioni di *syzygy*, trasformata di mellin, operatori differenziali polinomiali e operatori di shift, insieme alle proprietà definite nella sezione precedente, sono utili al fine di ricavare relazioni lineari fra integrali in rappresentazione Lee-Pomeransky; Il primo metodo mostrato per ricavarle è il metodo degli annichilatori [8], [9].

È possibile costruire un operatore $P \in \text{Ann}_{A^n[d]}(G^{-\frac{d}{2}})$ mediante l'equazione

$$\left[c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \right] G^{-\frac{d}{2}} = 0 \quad (4.47)$$

andando a calcolare i coefficienti $[c_0(x_1, \dots, x_n, d), c_i(x_1, \dots, x_n, d), \dots]$ dall'equazione *syzygy*

$$c_0 \left(-\frac{2}{d} G^2 \right) + \sum_i c_i \left(G \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) + \sum_{i,j} c_{ij} \left[G \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} + \left(-\frac{d}{2} - 1 \right) \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} \right] + \dots = 0 \quad (4.48)$$

e, mediante l'isomorfismo $M\{\cdot\}$, costruire un operatore di shift che agisce su $M\{G^{-\frac{d}{2}}\}$

$$\left[c_0(1^+, \dots, n^+) - \sum_{i=1}^n c_i(1^+, \dots, n^+) i^- + \sum_{i,j=1}^n c_{i,j}(1^+, \dots, n^+) i^- j^- + \dots \right] \tilde{I}(\nu_1, \dots, \nu_n) = 0. \quad (4.49)$$

Mediante la corrispondenza espressa in eq. 4.36 è possibile ricavare relazioni fra integrali in rappresentazione Lee-Pomeransky; in particolare, definendo per semplicità $(L+1)d/2 = k$, si ottiene

$$\sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} \prod_{i, j} [(i^+)^{\alpha_i} (-j^-)^{\beta_j}] \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(k - \nu)} \tilde{I}(\nu_1, \dots, \nu_n) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} \frac{\Gamma(k - \nu - |\alpha| + \beta)}{\Gamma(k - \nu)} \cdot I \left[\nu + \sum_i \alpha_i e_i - \sum_j \beta_j e_j \right] \cdot \left[\prod_{m(\alpha_m \neq 0)} \left(\prod_{l=0}^{\alpha_m} (v_m - l) \right) \right]. \quad (4.50)$$

la quale esprime una combinazione lineare di integrali in rappresentazione Lee-Pomeransky.

4.4 Metodo dei syzygy

Il secondo metodo per ricavare relazioni fra integrali in rappresentazione Lee-Pomeransky è il Metodo dei syzygy [10],[11]. In questa sezione verrà ommesso il fattore

$$\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{(L+1)d}{2} - \nu\right)}$$

presente nella rappresentazione Lee-Pomeransky (eq. 3.31).

Si parte considerando il termine di bordo

$$\int \prod_a dx_a \partial_i [f G^{-\frac{d}{2}}] \quad (4.51)$$

dove

$$f = \prod_a \left(\frac{x_a^{\nu_a - 1}}{\Gamma(\nu_a)} \right). \quad (4.52)$$

Il termine di bordo è generalmente diverso da zero; per mostrarlo, si può scegliere $f = 1$ (ovvero $\nu_i = 1 \forall i \in [1, n]$). Si ottiene

$$\int dx_i \partial_i [G^{-\frac{d}{2}}] = G^{-\frac{d}{2}} \Big|_{x_i=+\infty} - G^{-\frac{d}{2}} \Big|_{x_i=0} = -G^{-\frac{d}{2}} \Big|_{x_i=0}. \quad (4.53)$$

Nel caso di un generico f , quindi

$$\int \prod_a dx_a \partial_i [f G^{\frac{d}{2}}] = - \int \prod_{a \neq i} dx_a f G^{\frac{d}{2}} \Big|_{x_i=0}. \quad (4.54)$$

È possibile trattare il termine di bordo in maniera differente, ovvero non utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale, ma semplicemente calcolando la derivata parziale:

$$\int \prod_a dx_a \partial_i [f G^{-\frac{d}{2}}] = \int \prod_a dx_a \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} G^{-\frac{d}{2}} + \left(-\frac{d}{2}\right) f G^{-\frac{d}{2}-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i} \right]. \quad (4.55)$$

Combinando l'eq. 4.54 e l'eq. 4.55 si ottiene

$$- \int \prod_{a \neq i} dx_a [f G^{-\frac{d}{2}}] \Big|_{x_i=0} = \int \prod_a dx_a \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} G^{-\frac{d}{2}} + \left(-\frac{d}{2}\right) f G^{-\frac{d}{2}-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i} \right] \quad (4.56)$$

la quale è una relazione lineare fra integrali di cui alcuni in dimensioni shiftate per via della presenza del termine $G^{-\frac{d}{2}-1}$ nel membro di destra. Per aggirare tale problema,

ovvero ottenere relazioni lineari fra integrali espressi tutti nella stessa dimensione, si utilizza un *syzygy*. Si consideri un set di n polinomi

$$\phi = (\phi_0, \dots, \phi_n).$$

che soddisfa l'equazione *syzygy*

$$\phi_0 G + \sum_{i=1}^n \phi_i \partial_i G = 0, \quad (4.57)$$

allora è possibile ottenere relazioni lineari tra integrali aventi tutti la stessa dimensione. Infatti, per la 4.56, vale

$$-\sum_{i=1}^n \int \prod_{a \neq i} dx_a \left[\phi_i G^{-\frac{d}{2}} \right] \Big|_{x_i=0} = \sum_{i=1}^n \left[\int \prod_a dx_a \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} G^{-\frac{d}{2}} + \int \prod_a dx_a \left(-\frac{d}{2} G^{-\frac{d}{2}-1} \phi_i \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4.58)$$

e, riscrivendo il secondo addendo all'interno della sommatoria del membro di destra nell'eq. 4.58

$$\int \prod_a dx_a \left[-G^{-\frac{d}{2}-1} \frac{d}{2} \left(\sum_i \phi_i \frac{\partial G}{\partial x_i} + \phi_0 G - \phi_0 G \right) \right] = \int \prod_a dx_a G^{-\frac{d}{2}} \phi_0, \quad (4.59)$$

si ottiene

$$-\sum_{i=1}^n \int \prod_{a \neq i} dx_a \left[\phi_i G^{-\frac{d}{2}} \right] \Big|_{x_i=0} = \int \prod_a dx_a \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} + \frac{d}{2} \phi_0 \right) G^{-\frac{d}{2}}. \quad (4.60)$$

Per la proprietà espressa in eq. 4.33

$$f\phi = (f\phi_0, \dots, f\phi_n) \quad (4.61)$$

soddisfa

$$f\phi_0 G + \sum_{i=1}^n f\phi_i \partial_i G = 0 \quad (4.62)$$

per cui vale

$$-\sum_{i=1}^n \int \prod_{a \neq i} dx_a \left[f\phi_i G^{-\frac{d}{2}} \right] \Big|_{x_i=0} = \int \prod_a dx_a \left(\frac{\partial (f\phi_i)}{\partial x_i} + \frac{d}{2} f\phi_0 \right) G^{-\frac{d}{2}}. \quad (4.63)$$

Variando f è possibile ottenere equazioni non banali tra integrali in rappresentazione Lee-Pomeransky

Capitolo 5

Uguaglianza tra metodi in rappresentazione Lee-Pomeransky

In questo capitolo verrà mostrato che le relazioni fra integrali ottenute con il metodo degli annichilatori al primo ordine e con il metodo dei syzygy sono le stesse.

Si precisa che le relazioni ottenute con il metodo degli annichilatori al primo ordine sono equazioni costruite mediante annichilatori formati al più da derivate di ordine uno mediante le equazioni 4.47 e 4.48.

Per prima cosa, occorre dimostrare che dato un set di polinomi

$$\phi_0, \dots, \phi_n \tag{5.1}$$

nelle variabili $[x_1, \dots, x_n]$ che soddisfa il syzygy

$$\phi_0 G + \sum_{i=1}^n \phi_i \partial_i G = 0 \tag{5.2}$$

è possibile costruire un set di polinomi (c_0, c_1, \dots, c_n) nelle variabili (x_1, \dots, x_n) che soddisfa la condizione

$$\left(c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \partial_i \right) G^{-\frac{d}{2}} = 0 \tag{5.3}$$

nel seguente modo:

$$(c_0, c_1, \dots, c_n) = \left(\frac{d}{2} \phi_0, -\phi_1, -\phi_2, \dots, -\phi_n \right). \tag{5.4}$$

L'affermazione è vera in quanto

$$\begin{aligned}
\phi_0 G + \sum_{i=1}^n \phi_i \partial_i G = 0 &= \frac{d}{2} G^{-\frac{d}{2}-1} \left(\phi_0 G + \sum_{i=1}^n \phi_i \partial_i G \right) = \\
&= \frac{d}{2} \phi_0 G^{-\frac{d}{2}} + \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\frac{d}{2} G^{-\frac{d}{2}-1} \partial_i G \right) = \\
&= \left(\frac{d}{2} \phi_0 - \sum_{i=1}^n \phi_i \partial_i \right) G^{-\frac{d}{2}}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

La dimostrazione dell'uguaglianza tra i due metodi si divide in due casi: il primo è quello di termini di bordo nulli, il secondo è quello di termini di bordo non nulli.

Si consideri un set di polinomi

$$\phi_0, \dots, \phi_n \tag{5.6}$$

che soddisfa

$$\phi_0 G + \sum_{i=1}^n \phi_i \partial_i G = 0 \tag{5.7}$$

e si ponga

$$f = \prod_a \left(\frac{x_a^{\nu_a-1}}{\Gamma(\nu_a)} \right). \tag{5.8}$$

Allora, considerando la trasformata di Mellin di $G^{-\frac{d}{2}}$ caratterizzata da un set di indici $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ corrispondente al set di indici che caratterizza f (eq. 5.8) vale

$$\sum_{i=1}^n M\{\phi_i \partial_i G^{-\frac{d}{2}}\}(\boldsymbol{\nu}) = - \sum_{i=1}^n \int \prod_{a=1}^n dx_a \frac{\partial(f\phi_i)}{\partial x_i} G^{-\frac{d}{2}} \tag{5.9}$$

se è verificato

$$\int \prod_{a \neq i=1}^n dx_a \left[\phi_i f G^{-\frac{d}{2}} \right] \Big|_{x_i=0} = 0 \quad \forall i \in [1, n] \tag{5.10}$$

ovvero $\phi_i f$ genera un polinomio in cui ogni volta che compare la variabile x_i essa è elevata ad un esponente diverso da zero. Applicando il metodo degli annihilatori ad $\tilde{I}[\nu_1, \dots, \nu_n]$, dove (ν_1, \dots, ν_n) sono gli stessi indici che caratterizzano la trasformata di Mellin in eq. 5.9, con il set in eq. 5.6 si ottiene

$$\int \prod_{a=1}^n dx_a \left[\frac{d}{2} \phi_0 f + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\phi_i f)}{\partial x_i} \right] G^{-\frac{d}{2}} = \sum_{i=1}^n M \left\{ \left[\frac{d}{2} \phi_0 - \phi_i \partial_i \right] G^{-\frac{d}{2}} \right\}(\boldsymbol{\nu}) \tag{5.11}$$

che corrisponde all'equazione che si ottiene applicando il metodo degli annichilatori ad $\tilde{I}[\nu_1, \dots, \nu_n]$ mediante

$$P = \frac{d}{2}\phi_0 - \sum_{i=1}^n \phi_i \partial_i$$

il quale appartiene a $\text{Ann}_{A^n[d]}$ per l'eq. 5.4. L'equazione può eventualmente essere riscritta in termini di operatori di shift mediante $M\{\cdot\}$.

Si consideri ora un set di polinomi

$$\psi_0, \dots, \psi_n \quad (5.12)$$

che soddisfa

$$\psi_0 G + \sum_{i=1}^n \psi_i \partial_i G = 0 \quad (5.13)$$

tale che $\psi_i f$ non sia necessariamente nullo in $x_i = 0$, ponendo

$$f = \prod_a \left(\frac{x_a^{\chi_a - 1}}{\Gamma(\chi_a)} \right). \quad (5.14)$$

e considerando la trasformata di Mellin di $G^{-\frac{d}{2}}$ caratterizzata dallo stesso set di indici $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ di f (eq. 5.14) vale

$$\sum_{i=1}^n M\{\psi_i \partial_i G^{-\frac{d}{2}}\}(\boldsymbol{\chi}) = - \sum_{i=1}^n \int \prod_{a \neq i} dx_a \left[\psi_i f G^{-\frac{d}{2}} \right] \Big|_{x_i=0} - \sum_{i=1}^n \int \prod_{a=1}^n dx_a \frac{\partial(f\psi_i)}{\partial x_i} G^{-\frac{d}{2}}. \quad (5.15)$$

Si noti che nel caso in cui uno dei monomi che compone $\psi_i f$ non contenga la variabile x_i , esso contribuirà all'espressione della trasformata di Mellin in eq. 5.15 mediante un termine di bordo non nullo, mentre il secondo addendo derivante da tale monomio si annulla per l'operazione di derivazione rispetto ad x_i . Viceversa, nel caso in cui un monomio che compone $\psi_i f$ contenga la variabile x_i elevata ad un esponente qualsiasi, esso contribuirà all'espressione della trasformata di Mellin in eq. 5.15 soltanto mediante il secondo addendo presente in eq. 5.15, in quanto il termine di bordo corrispondente è nullo.

Applicando il metodo dei syzygy ad $\tilde{I}[\chi_1, \dots, \chi_n]$ dove (χ_1, \dots, χ_n) sono gli stessi indici che caratterizzano la trasformata di Mellin in eq. 5.15 si ottiene

$$- \sum_{i=1}^n \int \prod_{a \neq i=1}^n \left[\psi_i f G^{-\frac{d}{2}} \right] \Big|_{x_i=0} = \int \prod_{a=1}^n \left[\frac{d}{2} \psi_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i f}{\partial x_i} \right] G^{-\frac{d}{2}} \quad (5.16)$$

da cui

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \int \prod_{a \neq i=1}^n \left[\psi_i f G^{-\frac{d}{2}} \right] \Big|_{x_i=0} + \int \prod_{a=1}^n \left[\frac{d}{2} \psi_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i f}{\partial x_i} \right] G^{-\frac{d}{2}} = 0 = \\
= M \left\{ \left[\frac{d}{2} \psi_0 - \sum_{i=1}^n \psi_i \partial_i \right] G^{-\frac{d}{2}} \right\} (\boldsymbol{\chi})
\end{aligned} \tag{5.17}$$

che corrisponde all'equazione che si ottiene applicando il metodo degli annichilatori ad $\tilde{I}[\chi_1, \dots, \chi_n]$ mediante

$$A = \frac{d}{2} \psi_0 - \sum_{i=1}^n \psi_i \partial_i \tag{5.18}$$

il quale appartiene ad $Ann_{A^n[d]}$ per eq. 5.4. Anche in questo caso l'equazione può essere scritta in termini di operatori di shift mediante $M\{\cdot\}$.

L'uguaglianza delle relazioni ottenute nel caso di termini di bordo nulli e nel caso di termini di bordo non nulli, dimostra che le relazioni che si ricavano con il metodo degli annichilatori al primo ordine sono le stesse che si ottengono applicando il metodo dei syzygy.

Capitolo 6

Conclusioni

Calcolare le ampiezze di transizione è fondamentale per effettuare previsioni teoriche nello studio delle interazioni fondamentali. Dopo aver introdotto la sezione d'urto e il tasso di decadimento è stato mostrato che per il calcolo di quest'ultime grandezze è necessario determinare le ampiezze di transizione, quindi calcolare gli integrali di Feynman derivanti dai grafici che contribuiscono al processo in esame, determinati mediante le Feynman Rules.

In base al tipo di problema, sotto opportune condizioni, si può scegliere di rappresentare gli integrali mediante diverse parametrizzazioni; in questa tesi sono state mostrate le rappresentazioni nello spazio dei momenti, mediante i *parametri di Schwinger*, mediante i *parametri di Feynman* e in rappresentazione *Lee-Pomeransky*.

Per calcolare gli integrali è necessaria la loro decomposizione in integrali linearmente indipendenti detti *Master Integrals*. L'importanza di questo procedimento risiede nella possibilità di ridurre gli integrali da calcolare effettivamente da centinaia ad un set con un numero minore di integrali. Tale procedimento è realizzato mediante la creazione di un sistema in equazioni che esprimono relazioni lineari tra integrali; la risoluzione di tale sistema richiede ampie risorse computazionali quando sono coinvolti integrali con un elevato numero di loop, di conseguenza è opportuno sfruttare la maggior parte dei metodi conosciuti per ricavare relazioni lineari per ridurre il numero di equazioni presenti nel sistema.

In questo elaborato sono state esposte alcune tecniche per ricavare relazioni lineari tra integrali, suddivise in base al tipo di rappresentazione scelto. Sono state mostrate tecniche da applicare quando si lavora con integrali in rappresentazione nello spazio dei momenti e in rappresentazione Lee-Pomeransky.

Nel primo caso, sono state mostrate le *SR (Symmetry Relations)*, le *LI (Lorentz Invariance identities)* e le *IBPs (Integration By Parts identities)*; successivamente, è stato mostrato un esempio di applicazione del *Laporta Algorithm*, un procedimento che sfrutta le relazioni lineari rispettate dagli integrali per poter decomporre gli integrali più complicati da calcolare in *Master Integrals*. Nel secondo caso, ovvero lavorando con integrali

in rappresentazione Lee-Pomeransky, sono stati mostrati il metodo degli annichilatori e il metodo dei syzygy, i quali consentono di ottenere relazioni simil-IBPs; per definire tali metodi è stato necessario esporre i concetti di *syzygy*, trasformata di Mellin, operatori differenziali polinomiali e operatori di shift. Infine è stato mostrato che le relazioni lineari fra integrali ricavate con il metodo degli annichilatori al primo ordine sono le stesse che si ricavano applicando il metodo dei syzygy.

Quest'ultimo è un risultato originale introdotto in questa tesi e può essere utile in futuro per ottenere più agevolmente previsioni teoriche affidabili.

Appendice A

Delta di dirac

Essendo al di fuori dello scopo di questo elaborato, non si entrerà nel dettaglio della teoria delle distribuzioni, ma si definirà la funzione *Delta di Dirac*, indicata con $\delta(x)$, come una funzione estremamente piccata all'origine, nulla in ogni altro punto e che gode delle seguenti proprietà:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (\text{A.2})$$

Se $f(x)$ è una funzione continua, vale

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x).$$

Per via di quest'ultima identità, è possibile pensare la funzione $\delta(x)$ come una funzione che è in grado di “estrapolare” il valore in zero di una funzione integranda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0). \quad (\text{A.3})$$

È possibile definire funzioni con proprietà simili a $\delta(x)$ ma con picchi traslati in punti generici:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq a \\ \infty & \text{se } x = a \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = 1. \quad (\text{A.5})$$

L'eq. A.3 diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = f(a). \quad (\text{A.6})$$

Un'ulteriore generalizzazione della funzione $\delta(x)$ si ottiene studiando il comportamento della funzione $\delta(kx)$ quando assume il ruolo di funzione integranda assieme a una generica funzione $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(kx)dx = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/k)d(y)\frac{dy}{k} = \frac{1}{|k|}f(0). \quad (\text{A.7})$$

La funzione $\delta(kx)$ svolge lo stesso ruolo di $(1/|k|)\delta(x)$, intendendo con ciò

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(kx) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\frac{1}{|k|}\delta(x) \right] \quad (\text{A.8})$$

e, dato che l'equazione è valida per qualsiasi $f(x)$, è valida la seguente identità:

$$d(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x). \quad (\text{A.9})$$

Una forma ancora più generale è $\delta(g(x))$. Assumendo che $g(x)$ si annulli in x_1, x_2, \dots, x_n

$$g(x_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \dots, n$$

ed espandendo in un intorno dell' i -esimo zero

$$g(x) = g(x_i) + (x - x_i)g'(x_i) + O(x)$$

si definisce

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x - x_i) \quad \text{per } x \rightarrow x_i.$$

Espandendo in Taylor in intorni degli altri zeri si ottiene

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x - x_i) \quad (\text{A.10})$$

riducendo, dunque, ogni funzione del tipo $\delta(g(x))$ ad una somma di funzioni delta più "semplici". Si propone di seguito anche la generalizzazione della funzione $\delta(x)$ al caso tridimensionale; la generalizzazione a più dimensioni segue un procedimento analogo. Definendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$,

$$\delta^3(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3). \quad (\text{A.11})$$

La funzione $\delta(\mathbf{x})$ è zero ovunque tranne che all'origine. Essa gode delle seguenti proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x})d^3x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)dx_1dx_2dx_3 = 1 \quad (\text{A.12})$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)d^3x = f(\mathbf{x}_0). \quad (\text{A.13})$$

Bibliografia

- [1] David J. Griffiths. *INTRODUCTION TO ELEMENTARY PARTICLES*, pages [195,208]. 1987. ISBN 978-0-471-60386-3, 978-3-527-61846-0. DOI:10.1002/9783527618460.
- [2] Tiziano Peraro. Unpublished lecture notes on qft-loop amplitues and renormalization. .
- [3] Gaia Fontana and Tiziano Peraro. *Reduction to master integrals via intersection numbers and polynomial expansions*, volume 08, pages [11,24]. 2023. DOI:10.1007/JHEP08(2023)175.
- [4] Anthony Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell: Second Edition*, pages [14,15]. Princeton University Press, 2010. ISBN 978-0-691-14034-6.
- [5] Roman N. Lee and Andrei A. Pomeransky. Critical points and number of master integrals. *JHEP*, 11, 2013. DOI:10.1007/JHEP11(2013)165.
- [6] Stefan Weinzierl. *Feynman Integrals*, pages [43,49], [56,57], [157,159]. 2022. DOI:10.1007/978-3-030-99558-4.
- [7] Tiziano Peraro. Unpublished lecture notes on qft-syzygy. .
- [8] Thomas Bitoun, Christian Bogner, Rene Pascal Klausen, and Erik Panzer. Feynman integral relations from parametric annihilators. *Lett. Math. Phys.*, 109(3):6–9, 2019. DOI:10.1007/s11005-018-1114-8.
- [9] Andreas V. Manteuffel. Syzygies for no-numerator or no-dot relations between feynman integrals. pages [15,18], 2019. URL <https://indico.cern.ch/event/783212/contributions/3512597/attachments/1904620/3146332/manteuffel-radcor19.pdf>.
- [10] Ray Daniel Sameshima. *On Different Parametrizations of Feynman Integrals*. PhD thesis, CUNY, Graduate School - U. Ctr., 2019.

- [11] Ray Daniel Sameshima. Integration-by-parts-like identities in schwinger-feynman-lee-pomeransky parametrization. pages [7,11], 2020. URL https://indico.cern.ch/event/858682/contributions/3848687/attachments/2030956/3400288/Pheno_2020_3.pdf.

Ringraziamenti

Voglio ringraziare il Prof. Tiziano Peraro e la Dott.ssa Gaia Fontana per avermi seguito con costanza, per avermi dedicato tanto del loro tempo e per avermi fatto sentire sempre supportato durante questo percorso, il loro aiuto e supporto è stato fondamentale.

Voglio ringraziare Gabriele per essermi stato sempre vicino nei momenti di difficoltà, per tutte le lunghe chiacchiere, le risate, per avermi sempre tirato sempre su di morale, e per avermi fatto capire cos'è la vera amicizia, anzi per avermi fatto capire cosa significa avere un fratello.

Voglio ringraziare Miriam, che mi ha fatto capire com'è bello poter essere sempre se stessi senza filtri, per avermi supportato e supportato sempre, anche quando mostravo lati di me che non avevo mai mostrato, per essere stata con me anche nei momenti in cui non avrei mai immaginato di avere qualcuno al mio fianco, per avermi fatto capire cosa significa sostenersi e per avermi fatto vedere il colore delle piccole cose del quotidiano, anche quando un colore per me non l'avevano. Ma soprattutto perchè con le sue buffe risate, i suoi sguardi, la sua dolcezza, e le sue azioni mi ha fatto scoprire cos'è la complicità e cos'è l'amore.

Grazie a Peppe, che mi ha preso sotto la sua ala nel momento più difficile della mia vita e senza il quale non avrei mai raggiunto questo primo traguardo, per avermi aiutato a crescere, facendomi conoscere e riflettere su lati di me che nemmeno conoscevo, per avermi fatto sentire sempre ascoltato e per avermi consentito di appoggiarmi a lui nei momenti più incogniti; potrei andare tanto avanti, ma riassumerei tutto semplicemente ringraziandolo per avermi fatto capire la fortuna di avere persone come lui nella propria vita.

Grazie a mamma e papà, che con la loro dolcezza, la loro presenza, le loro attenzioni anche per le cose all'apparenza più insignificanti, mi hanno sempre preso per mano e guidato nei momenti più bui. Per essere dei genitori così comprensivi, anche nei momenti più duri e impensabili. Per avermi trasmesso la loro passione per la conoscenza, per essere costantemente la mia guida e il mio punto di riferimento. Per avermi mostrato anche il loro lato come persone e non solo come genitori e quindi per avermi fatto capire

come si possa superare qualsiasi cosa; grazie semplicemente per essere le persone che sono, che amo e stimo così tanto.

Grazie a nonno, per avermi fatto conoscere un modo di voler bene a me nuovo, per le infinite partite a carte insieme, per avermi trasmesso il suo amore per la natura e per avermi fatto apprezzare ancora di più le mie origini.

Infine, grazie a nonna e zia, alla loro dolcezza, ai loro sorrisi, alle loro storie, ai loro abbracci, ai momenti passati insieme in cucina e alle volte che tornavo a casa ed erano SEMPRE pronte ad accogliermi con un sorriso, grazie per essere state il mio posto sicuro e per avermi insegnato e fatto vedere la gioia nei momenti più semplici.

Ero indeciso se scrivere questi ringraziamenti perchè sapevo che sarei sfociato così tanto nel romanticismo, ma alla fine è andata così.