

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# MODULAZIONE E DEMODULAZIONE IN SPETTROSCOPIA DI SATURAZIONE

**Relatore:**  
**Prof. Francesco Minardi**

**Presentata da:**  
**Francesca Di Masi**

**Correlatore:**  
**Dott. Matteo Marchesini**

Anno Accademico 2022/2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Spettroscopia di saturazione</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione . . . . .	1
1.2	Allargamento delle righe . . . . .	4
1.2.1	Allargamento Doppler . . . . .	7
1.2.2	Allargamento per potenza . . . . .	10
1.3	Effetti non lineari . . . . .	12
1.3.1	Lamb dip . . . . .	12
1.4	Tecniche di modulazione per segnali dispari . . . . .	13
1.4.1	Modulazione ad alta frequenza: Spettroscopia FM . . . . .	13
1.4.2	Modulazione ad alta frequenza: spettroscopia a trasferimento di modulazione . . . . .	17
1.4.3	Modulazione a bassa frequenza: segnali in derivata . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Apparato sperimentale</b>	<b>22</b>
2.1	Laser . . . . .	24
2.2	AOM . . . . .	26
2.3	Rivelatore . . . . .	29
2.4	Procedura . . . . .	30
2.4.1	Modulazione del fascio di <i>probe</i> . . . . .	30
2.4.2	Modulazione del fascio di <i>pump</i> . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Analisi risultati</b>	<b>33</b>
3.1	Segnali acquisiti con segnali di derivata . . . . .	37
3.2	Segnali acquisiti con modulazione in frequenza ad alte frequenze . . . . .	44
3.2.1	Spettroscopia FM . . . . .	44
3.2.2	Spettroscopia a trasferimento di modulazione . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>54</b>
<b>A</b>	<b>Approfondimento allargamento per potenza</b>	<b>56</b>



## Sommario

Il fine di questa tesi è identificare il *segnale dispersivo di spettroscopia* ottimale da usare per stabilizzare la frequenza di un laser. Nella fattispecie il lavoro è stato svolto su un apparato di raffreddamento laser di atomi di rubidio, per realizzare un sensore quantistico in fibra ottica.

La tesi è articolata in una prima parte di introduzione teorica alla *spettroscopia di assorbimento in saturazione* e alle tecniche di *modulazione del segnale*. Segue una descrizione delle metodologie sperimentali e l'analisi dei dati di assorbimento raccolti. Lo studio ha portato all'individuazione delle curve dispersive "migliori" in base a due criteri distinti, ovvero la *precisione* e la *stabilità* della frequenza del laser.

La scelta finale di una curva rispetto all'altra dipenderà dalle specifiche esigenze sperimentali che insorgeranno nell'implementazione pratica del *setup*.

# Capitolo 1

## Spettroscopia di saturazione

### 1.1 Introduzione

La bibliografia di riferimento per questa sezione è [2]. La spettroscopia, tramite lo studio degli spettri generati dall'interazione della radiazione elettromagnetica con atomi e molecole, permette di studiare la loro struttura energetica interna. Ad esempio, misurando la lunghezza d'onda delle linee spettrali, è possibile determinare l'energia dei livelli atomici o molecolari. Attraverso l'intensità di una riga spettrale, si ricavano informazioni sulla forza dell'accoppiamento tra due livelli coinvolti in una transizione atomica. Misure della larghezza di riga naturale permettono di conoscere le vite medie degli stati elettronici eccitati. Misurando la larghezza spettrale Doppler, si può conoscere la distribuzione in velocità degli atomi che emettono o assorbono radiazione, e tramite essa la temperatura del campione.

È possibile identificare due principali tipi di spettroscopia nel campo della fisica atomica:

- la spettroscopia in assorbimento
- la spettroscopia in emissione

In spettroscopia di assorbimento, si utilizzano luce non monocromatica e campioni di atomi allo stato gassoso. Le particelle del gas assorbono parte della radiazione elettromagnetica, nello specifico assorbono le componenti con frequenze tali che  $\nu = \frac{E_k - E_i}{h}$ . Queste frequenze corrispondono alle transizioni molecolari tra un livello di partenza di energia  $E_i$  e un livello di arrivo di energia  $E_k$ . In questo modo allo spettro continuo della luce utilizzata, vengono sottratte alcune lunghezze d'onda, il che permette di conoscere le transizioni possibili del tipo di atomo studiato. A livello sperimentale si realizza facendo passare la luce attraverso il campione. Per separare le componenti rimaste dopo il campione del fascio con diversa frequenza, è utilizzato un prisma. Infine la luce incontra uno schermo su cui viene proiettato lo spettro.

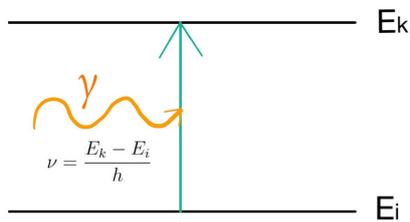


Figura 1.1: Schematizzazione dell'assorbimento da parte di un elettrone di un fotone con frequenza pari alla differenza in energia tra i due livelli energetici coinvolti nella transizione.

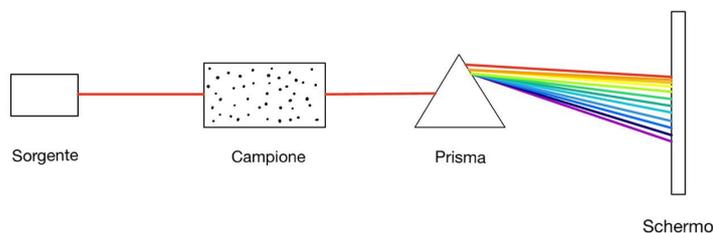


Figura 1.2: Schema di spettroscopia in assorbimento.

Il risultato ottenuto è lo spettro continuo della luce a cui mancano alcune lunghezze d'onda, ossia quelle assorbite dal campione. Analizzando le lunghezze d'onda "mancanti" si possono determinare le transizioni possibili tra i livelli energetici in fase di eccitazione.

In spettroscopia di emissione, il meccanismo è diverso, si studia il diseccitamento degli atomi del campione. Dopo aver eccitato il campione di atomi, si studia la luce riemessa durante il diseccitamento degli atomi. Questi per tornare allo stato di equilibrio possono compiere diverse transizioni dai livelli energetici più alti verso quelli ad energia minore, e nel farlo emettono energia sotto forma di radiazione. A livello sperimentale, per studiare le componenti della radiazione riemessa dagli atomi, sono utilizzati un prisma e uno schermo (dove sono rivelate le righe spettrali corrispondenti alle frequenze delle componenti della radiazione riemessa).

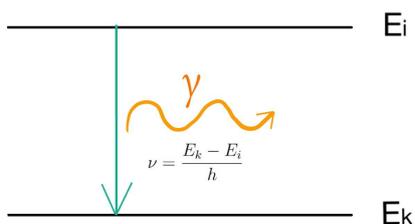


Figura 1.3: Schematizzazione dell'emissione da parte di un elettrone di un fotone con frequenza pari alla differenza in energia tra i due livelli energetici coinvolti nella transizione.

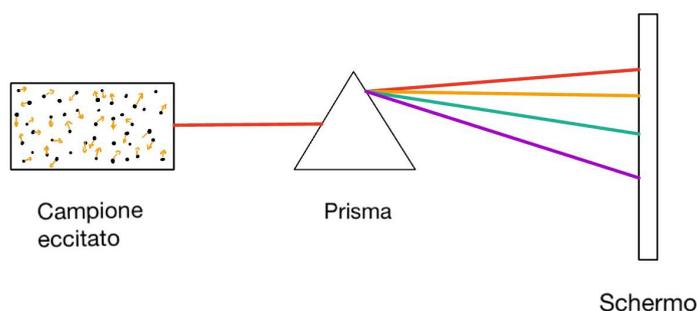


Figura 1.4: Schema di spettroscopia di emissione.

Il risultato è uno spettro discreto che riporta solo le righe spettrali corrispondenti alle

transizioni possibili degli atomi. A titolo di esempio in Fig.1.5 è riportato lo spettro di emissione del rubidio nel *range* del visibile.

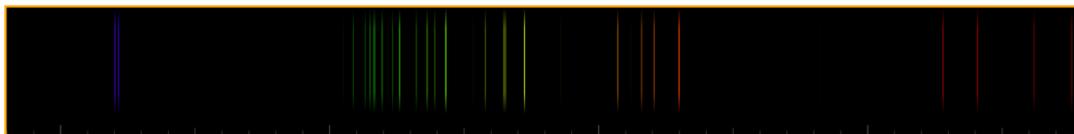


Figura 1.5: Spettro di emissione del rubidio nell' intervallo di lunghezze d'onda da 380 nm a 780 nm. [9]

Le linee spettrali negli spettri di assorbimento o di emissione non sono strettamente monocromatiche. Anche con interferometri ad alta risoluzione, si osserva una distribuzione spettrale dell'intensità  $I(\nu)$  assorbita o emessa attorno al valore centrale di frequenza ( $\nu_0 = (E_k - E_i)/h$ ) corrispondente alla transizione molecolare con energia  $\Delta E = E_k - E_i$ . La funzione  $I(\nu)$  nelle vicinanze di  $\nu_0$  è chiamata "profilo di riga". L'intervallo di frequenza  $\delta\nu = |\nu_2 - \nu_1|$  tra le due frequenze  $\nu_1$  e  $\nu_2$  per cui  $I(\nu_1) = I(\nu_2) = I(\nu_0)/2$ , è chiamato larghezza in frequenza a mezza altezza <sup>1</sup>, spesso abbreviato con "larghezza di riga". In Fig.(1.6) è riportato un esempio di profilo di riga.

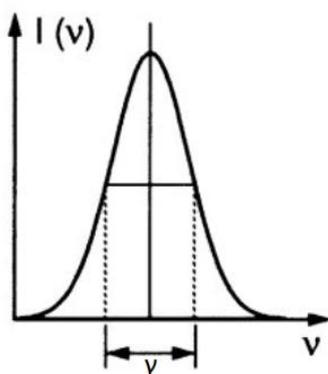


Figura 1.6: Profilo di riga Lorentziano, tratto da [2].

La spettroscopia di assorbimento ha due principali zone di lavoro a seconda del valore dell'intensità della radiazione incidente, utilizzata per sondare il campione di atomi allo stato gassoso. Per basse intensità incidenti si parla di assorbimento lineare. In questa condizione, il *rate* delle transizioni di assorbimento è minore del *rate* di riempimento del livello. Questo si traduce in una indipendenza della popolazione del livello di partenza e del coefficiente di assorbimento  $\alpha$  da parte dell'intensità incidente, e in una dipendenza

<sup>1</sup>in inglese *full width at half maximum* (FWHM) nota anche come *linewidth*

lineare della potenza assorbita  $\Delta P$  dalla potenza della radiazione incidente  $P_0$ :

$$dP = -P_0\alpha dz \quad (1.1)$$

Per alte intensità, il *rate* delle transizioni di assorbimento diventa maggiore del *rate* di rilassamento, che ripopola il livello energetico di partenza. Questo provoca una diminuzione della popolazione del livello di partenza ( $N_i$ ) e una saturazione della popolazione del livello di arrivo ( $N_k$ ). In questo caso  $\alpha$  non è più indipendente dall'intensità incidente  $I_0$ , e si parla di assorbimento non lineare, perchè la potenza assorbita dal campione  $dP$  non dipende linearmente dalla potenza incidente  $P_0$ :

$$dP = -P_0\alpha(P_0)dz \quad (1.2)$$

La spettroscopia di saturazione si basa sulla saturazione di transizioni molecolari o atomiche soggette ad allargamento Doppler (un tipo di allargamento subito dalle righe di assorbimento). In questo caso, la risoluzione spettrale di una linea dello spettro di assorbimento o di emissione non è più limitata dalla larghezza Doppler della curva di profilo, ma dalla larghezza del “*Lamb Dip*”, definito in seguito, che è molto minore.

## 1.2 Allargamento delle righe

In spettroscopia non è possibile osservare una linea di assorbimento perfettamente monocromatica, a causa di vari effetti fisici che allargano la linea di profilo associata ad una transizione di assorbimento o di emissione.

In particolare l'allargamento naturale, è intrinseco alla transizione stessa e ha origine quantomeccanica. È possibile spiegare questo allargamento grazie al principio di indeterminazione di Heisenberg ( $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ ): il tempo che un atomo passa su un livello eccitato (vita media del livello) prima di decadere è inversamente proporzionale all'incertezza sul valore energetico del livello. Affinchè tale diseuguaglianza sia vera, nè  $\Delta E$  nè  $\Delta t$ , possono avere valore zero. Per questo motivo i livelli eccitati hanno una vita media finita, e un'incertezza  $\Delta E$  diversa da zero. L'indeterminazione sull'energia dei livelli comporta che ogni transizione ottica (che sia di assorbimento o di emissione) non si verifichi solo quando la radiazione che interagisce con l'atomo ha pulsazione:  $\nu_0 = \frac{E_i - E_j}{h}$ , ma per un'intervallo di pulsazioni  $\delta\omega$  attorno a quella caratteristica della transizione.  $\delta\omega$  è detto larghezza naturale di riga. Minore è il tempo in cui l'atomo è su un livello, maggiore è l'incertezza sul valore dell'energia del livello ( $\Delta E$ ), e di conseguenza maggiore è l'allargamento in frequenza della linea spettrale e della linea di profilo I.

L'intensità  $I$  di un'onda piana (ad esempio un fascio laser) che si propaga in direzione  $z$  e passa attraverso un campione assorbente, diminuisce con la distanza  $dz$ :

$$dI = -\alpha I dz \quad (1.3)$$

Il coefficiente di assorbimento  $\alpha_{ik}$  [ $\text{cm}^{-1}$ ] della transizione  $|i\rangle \rightarrow |k\rangle$ , dipende dalle densità di popolazione  $N_i$  e  $N_k$  del livello di partenza (con energia minore) e di arrivo (con energia maggiore), e dalla sezione trasversale di assorbimento ottico  $\sigma_{ik}$  [ $\text{cm}^2$ ] di ogni atomo assorbente:

$$\alpha_{ik}(\omega) = \sigma_{ik} \left[ N_i - \left( \frac{g_i}{g_k} \right) N_k \right] \quad (1.4)$$

Nel caso in cui  $N_i \gg N_k$ , il coefficiente di assorbimento si riduce a  $\alpha_{ik} = \sigma N_i$ . Quando l'intensità incidente è sufficientemente piccola ( $I_S$  dove  $I_S$  è l'intensità di saturazione), il rate di assorbimento indotto è piccolo rispetto al rate di *refill* del livello  $|i\rangle$ , e si parla di assorbimento lineare. In questa condizione la densità di popolazione del livello di partenza  $N_i$  e il coefficiente di assorbimento  $\alpha(\omega)$  sono indipendenti dall'intensità  $I$  dell'onda incidente. È possibile integrare l'equazione 1.3, ottenendo la legge di Beer per l'intensità:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha(\omega)z} = I_0 e^{-\sigma_{ik} N_i z} \quad (1.5)$$

A livello macroscopico, è possibile descrivere l'interazione della radiazione con gli atomi, considerando solo gli elettroni più esterni. L'elettone atomico eccitato è modellizzato con un oscillatore armonico classico di carica elettrica  $q$ , smorzato con costante  $\gamma$  e forzato. La forzante di Coulomb ( $\vec{F} = e\vec{E}$ ) è dovuta all'onda piana incidente di ampiezza  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ . La costante di smorzamento  $\gamma$ , è legata alla probabilità di emissione spontanea tramite la quale l'atomo eccitato si diseccita. Mediante la precedente modellizzazione, è possibile ricavare le relazioni di dispersione.<sup>2</sup>

Il coefficiente di assorbimento  $\alpha(\omega)$  è proporzionale alla parte immaginaria dell'indice di rifrazione ( $\alpha = \frac{4\pi k}{\lambda}$ ), e nell'intorno della frequenza caratteristica della transizione di assorbimento  $\omega_0$ , risulta  $\alpha(\omega) \sim k(\omega)$ . Sia  $\omega_0$  la frequenza corrispondente ad una transizione molecolare, per frequenze  $\omega$  tali che  $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0$ , le relazioni di dispersione si riducono a:

$$\alpha(\omega) = \frac{Ne^2}{4\epsilon_0 mc} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2} \quad (1.8)$$

$$n' = 1 + \frac{Ne^2}{4\epsilon_0 m \omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2} \quad (1.9)$$

---

<sup>2</sup>Le relazioni di dispersione si ottengono separando la parte reale ( $n'$ ) e la parte immaginaria ( $k$ ) dell'indice di rifrazione  $n$

$$k = \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (1.6)$$

$$n' = 1 + \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (1.7)$$

Queste relazioni legano l'assorbimento e la dispersione tramite l'indice di rifrazione complesso. Sono valide per oscillatori armonici classici fermi.

dove  $N$  è la densità di elettroni ed è stata considerata una carica  $q$  pari al modulo della carica dell'elettrone  $e$ <sup>3</sup> e l'approssimazione  $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \sim 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ .

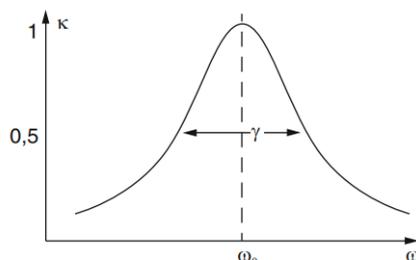


Figura 1.7: Profilo di assorbimento ( $k$ ) attorno alla transizione atomica di assorbimento, tratto da [2].

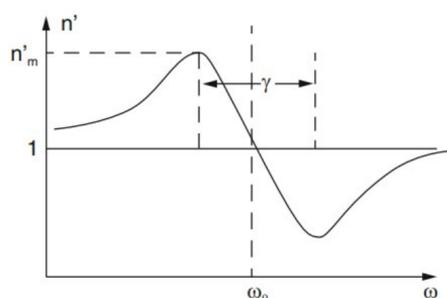


Figura 1.8: Profilo di dispersione ( $n'$ ) attorno alla transizione atomica di assorbimento, tratto da [2].

Nelle Fig.(1.7) e Fig.(1.8) sono riportati i profili di assorbimento e di dispersione in prossimità dell'autofrequenza  $\omega_0$  caratteristica della transizione atomica di assorbimento.

Il profilo di assorbimento  $\alpha(\omega)$  ha una forma Lorentziana con larghezza a mezza altezza  $\Delta\omega_n = \gamma$ , che per atomi liberi e fermi è chiamata *larghezza naturale di riga*. La larghezza naturale di riga è legata alla vita media ( $\tau$ ) del livello energetico atomico eccitato ( $E_i$ ) tramite la formula:  $\Delta\omega_n = 1/\tau_i$ . Più è instabile il livello eccitato, maggiore è la larghezza di riga naturale associata alla linea spettrale della transizione di assorbimento, e maggiore è la larghezza della curva Lorentziana che descrive il profilo di assorbimento.

Le relazioni riportate in questa sezione sono valide solo per oscillatori armonici a riposo nel sistema di riferimento dell'osservatore. Questo modello non è più valido quando si considerano gas reali in cui gli atomi si muovono di moto termico. Il moto degli atomi causa degli allargamenti aggiuntivi delle linee di profilo: *l'allargamento Doppler*.

<sup>3</sup>La carica dell'elettrone è pari a  $e = -1,60217663410^{19}$  C

Quando la probabilità di assorbimento o emissione della radiazione con pulsazione  $\omega_{ik}$ , che causa la transizione  $E_i \rightarrow E_k$ , è uguale per tutti gli atomi, si dice che il profilo della riga spettrale ha “allargamento omogeneo”. Un caso di allargamento omogeneo del profilo di riga è l’allargamento naturale. L’allargamento Doppler, è invece un esempio di allargamento non omogeneo in cui la probabilità di assorbimento o emissione della radiazione non è uguale per tutti gli atomi, ma dipende dalla loro velocità. Sia  $\Delta\omega_n$  l’allargamento naturale omogeneo, questo è di due ordini di grandezza minore rispetto all’allargamento Doppler (non omogeneo).

Aumentando la potenza, e di conseguenza l’intensità, della luce incidente, è possibile saturare le transizioni elettroniche. Per  $I_0 > I_S$ , dove  $I_0$  è l’intensità incidente e  $I_S$  l’intensità di saturazione della transizione, si parla di regime di saturazione. In condizioni di saturazione, i profili di riga variano a seconda che le righe siano allargate in maniera omogenea o non omogenea. A potenze elevate si ha un ulteriore allargamento (*per potenza*) a partire da linee allargate omogeneamente. Il Lamb dip è, invece, un effetto dovuto alla saturazione, partendo da una riga allargata non omogeneamente (la curva Doppler). È possibile osservare la larghezza naturale di riga (la forma Lorentziana) solo con tecniche speciali, in quanto è completamente nascosta da effetti di allargamento di riga maggiori, come l’allargamento Doppler o l’allargamento per potenza.

### 1.2.1 Allargamento Doppler

Si consideri il moto termico degli atomi o delle molecole di un gas reale. Si prenda in esame un atomo o una molecola con velocità  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  nel sistema di riferimento a riposo dell’osservatore, che si muove in un campo elettromagnetico di onde piane:  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t - \vec{k}\vec{r}}$ . La radiazione considerata in questa sezione ha intensità  $I \ll I_S$  e non induce una condizione di saturazione. Sia  $\omega_0$  la frequenza centrale di una linea di assorbimento. A causa dell’effetto Doppler, nel sistema di riferimento solidale con l’atomo, la pulsazione  $\omega'$  risulta diversa dalla pulsazione  $\omega$  misurata nel sistema di riferimento dell’osservatore:

$$\omega' = \omega - \vec{k}\vec{r} \quad (1.10)$$

Solo se la pulsazione  $\omega'$  coincide con  $\omega_0$ , l’atomo può assorbire la radiazione. La pulsazione assorbita nel sistema di riferimento dell’osservatore risulta essere:  $\omega_a = \omega_0 + \vec{k}\vec{r}$ . L’assorbimento si sposta a pulsazioni maggiori di  $\omega_0$  quando  $\vec{k}\vec{r} > 0$  (per atomi che si muovono parallelamente alla direzione di propagazione dell’onda), e si sposta a pulsazioni minori di  $\omega_0$  quando  $\vec{k}\vec{r} < 0$  (per atomi che si muovono in direzione opposta alla direzione di propagazione della luce). Questo comporta che la frequenza della radiazione che l’atomo in moto deve assorbire, affinché possa avvenire la transizione, è traslata rispetto a quella assorbita da un atomo fermo. Scegliendo come asse-z la direzione di propagazione della luce,  $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$ , la pulsazione assorbita risulta:

$$\omega_a = \omega_0 \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) \quad (1.11)$$

All'equilibrio termico, le molecole di un gas seguono la distribuzione di velocità di Maxwell-Boltzmann. Utilizzando il numero di molecole per unità di volume con componente  $z$  della velocità tra  $v_z$  e  $v_z + dv_z$ , fornito dalla distribuzione di Maxwell, si ottiene il numero di molecole per unità di volume con pulsazione di assorbimento spostata da  $\omega_0$  nell'intervallo  $[\omega, \omega + d\omega]$ :

$$n_i(\omega)d\omega = N_i \frac{c}{\omega_0 v_p \sqrt{\pi}} e^{-\left[\frac{c(\omega-\omega_0)}{\omega_0 v_p}\right]^2} d\omega \quad (1.12)$$

La potenza irradiata assorbita è proporzionale alla densità delle molecole assorbenti nell'intervallo  $d\omega$ . Il profilo di intensità di una linea spettrale con allargamento Doppler, risulta essere una curva Gaussiana:

$$I(\omega) = I_0 e^{-\left(\frac{c(\omega-\omega_0)}{\omega_0 v_p}\right)^2} \quad (1.13)$$

dove  $v_p = \left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{1/2}$  è la velocità più probabile, con  $m$  la massa di un atomo,  $k_B$  la costante di Boltzmann e  $T$  è la temperatura assoluta misurata in kelvin. L'ampiezza a mezza altezza della curva è chiamata *larghezza Doppler* ed è pari a:

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\ln 2} \omega_0 v_p / c = \omega_0 / c \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{m}} \quad (1.14)$$

È importante notare che  $\Delta\omega_D$  è direttamente proporzionale a  $\omega_0$  e a  $\sqrt{T/m}$ .

Esprimendo la larghezza Doppler in funzione della temperatura  $T$ , Eq.(1.14), si nota che all'aumentare della temperatura la linea spettrale subisce un allargamento Doppler più ampio. Per temperature alte l'allargamento Doppler diventa più significativo.

Fin qui abbiamo assunto che ogni atomo o molecola assorba radiazione solo quando la pulsazione del laser è pari, nel proprio sistema di riferimento, a quella della risonanza  $\omega_0$ . Ora teniamo conto dell'allargamento naturale visto in precedenza. È possibile suddividere il campione di atomi in gruppi a seconda del valore di velocità  $v_z$  definita. Per ciascun gruppo la transizione avviene a pulsazioni  $\omega'$  diverse a seconda del valore della velocità ( $\omega' = \omega_a = \omega_0(1 + v_z/c)$ ).

L'assorbimento di ogni gruppo di atomi è descritto da una distribuzione Lorentziana, centrata sulla pulsazione  $\omega' = \omega_a$ . Per ogni valore di pulsazione apparente assorbita, in un intorno della pulsazione, l'intensità è descritta da una Lorentziana centrata su quel valore. Le curve Lorentziane sono più o meno profonde a seconda del numero di atomi che hanno la velocità associata a quella pulsazione (distribuzione di Maxwell). Il picco più profondo è collegato al valore di velocità  $v_z = 0$ , ed è centrato alla pulsazione caratteristica della transizione di assorbimento  $\omega_a$ .

Non è possibile rappresentare l'allargamento Doppler di una riga spettrale tramite una Gaussiana pura, ma si deve considerare la convoluzione della curva Gaussiana e delle curve di assorbimento Lorentziane degli atomi con valori di velocità diversi. La curva

che si ottiene è chiamata “profilo di Voigt”, si veda Fig.(1.8). Nella curva di Voigt sono considerati contemporaneamente i contributi al profilo d'intensità in un intorno della pulsazione caratteristica di una transizione dell'allargamento Doppler e della larghezza di riga naturale.

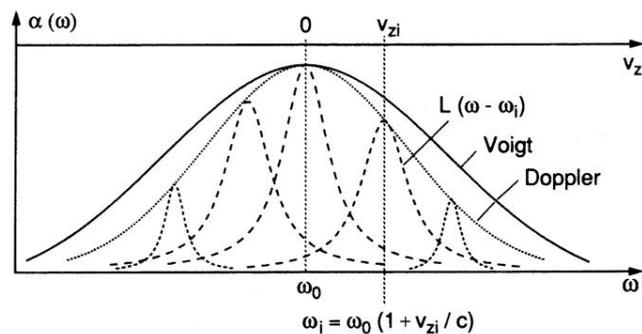


Figura 1.9: Profilo di Voigt come convoluzione del profilo Gaussiano e dei profili Lorentziani delle molecole con velocità diverse  $v_{zi}$  e pulsazione centrale di assorbimento  $\omega_i = \omega_0(1 + v_{zi}/c)$ , tratto da [2].

## 1.2.2 Allargamento per potenza

La letteratura di riferimento per questa sezione è Cap.3[2]. L'allargamento per potenza delle linee spettrali è dovuto all'effetto della saturazione della popolazione del livello assorbente. È un allargamento per saturazione a partire da linee con allargamento omogeneo (profili Lorentziani).

L'effetto del pompaggio ottico sulla saturazione della densità di popolazione è spiegato utilizzando il modello del sistema a due livelli. I due livelli sono accoppiati tra loro da transizioni di assorbimento o emissione, ma non sono permesse transizioni ad altri livelli, si veda Fig.(1.9).

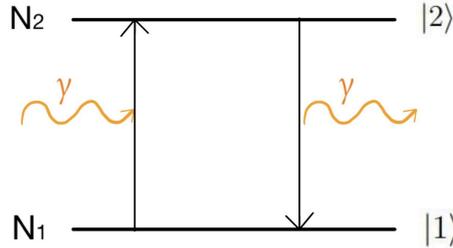


Figura 1.10: Sistema a due livelli chiuso (senza relazione con gli altri livelli energetici).

L'equazione di *rate* per le popolazioni  $N_1$  e  $N_2$  dei livelli:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = -PN_1 - R_1N_1 + PN_2 + R_2N_2 \quad (1.15)$$

con  $P$  la probabilità delle transizioni  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  o rate di pompaggio, e  $R_i$  la probabilità di rilassamento del livello  $|i\rangle$ .

In condizioni stazionarie ( $\frac{dN_i}{dt} = 0$ ) e assumendo che  $N = N_1 + N_2$ , le densità di popolazione dei livelli  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  sono:

$$N_1 = N \frac{P + R_2}{2P + R_1 + R_2} \quad (1.16)$$

$$N_2 = N \frac{P + R_1}{2P + R_1 + R_2} \quad (1.17)$$

La probabilità  $P$  è uguale per tutti gli atomi (caso omogeneo). Quando il *pumping rate* diventa molto più grande del rate di rilassamento,  $N_1 \rightarrow N/2$  e  $N_1 = N_2$ . Per  $P \rightarrow \infty$ , il coefficiente di assorbimento  $\alpha = \sigma(N_1 - N_2)$  tende a zero, e il mezzo diventa completamente trasparente. Senza radiazione ( $P = 0$ ), le densità di popolazione all'equilibrio termico diventano:

$$N_{10} = N \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.18)$$

$$N_{20} = N \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1.19)$$

Allora :

$$\Delta N = N_1 - N_2 = \frac{\Delta N_0}{1 + S} \quad (1.20)$$

dove  $S = \frac{2P}{(R_1 + R_2)}$  è il parametro di saturazione. Il parametro  $S$  è il rapporto tra il *rate* di pompaggio  $P$  e il *rate* di rilassamento medio  $\bar{R}$ . Se l'unico meccanismo di rilassamento è l'emissione spontanea del livello  $|2\rangle$ ,  $R_1 = 0$  e  $R_2 = A_{21}$ , dove  $A_{21}$  è il coefficiente di Einstein dell'emissione spontanea, ossia il *rate* di decadimento per atomo. Il *rate* di pompaggio per un'onda monocromatica con intensità  $I(\omega)$  è  $P = \sigma_{12}I(\omega)/\hbar\omega$  e il coefficiente di saturazione:

$$S = \frac{2\sigma_{12}I(\omega)}{\hbar\omega A_{12}} \quad (1.21)$$

dove  $\sigma_{12}$  è la sezione trasversale di assorbimento ottico di ogni atomo. Il coefficiente di assorbimento saturato è:

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0}{1 + S} \quad (1.22)$$

Per  $S \sim 0$ , con  $\bar{R} \gg P$ , il coefficiente di assorbimento saturato  $\alpha_s$  coincide con quello non saturato, senza pompaggio, ovvero  $\alpha_0$ . La probabilità di assorbimento indotto  $P$  ha una dipendenza Lorentziana dalla pulsazione, e questo permette di definire un parametro di saturazione spettrale con andamento Lorentziano :

$$S_\omega = S_\omega(\omega_0) \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (1.23)$$

Il profilo di assorbimento saturato  $\alpha_S(\omega)$  di una linea con allargamento omogeneo è una Lorentziana:

$$\alpha_S(\omega) = \frac{\alpha_0(\omega)}{1 + S_\omega} = \alpha_0(\omega_0) \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma_S/2)^2} \quad (1.24)$$

dove il profilo di assorbimento non saturato è:

$$\alpha_0(\omega) = \alpha_0(\omega_0) \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (1.25)$$

con  $\alpha_0(\omega_0) = 2\hbar\omega B_{12}\Delta N_0/\pi c\gamma$ , dove  $B_{12}$  è il coefficiente di Einstein dell'assorbimento, ossia il *rate* di assorbimento per atomo. Il coefficiente di assorbimento saturato, Eq.(1.24) , ha forma Lorentziana e larghezza a mezza altezza:  $\Delta\omega_s = \Delta\omega_0\sqrt{1 + S_0}$ , dove  $S_0 = S(\omega_0)$ .  $\Delta\omega_s$  è maggiore rispetto alla larghezza non saturata  $\Delta\omega_0$ , e questo è causa dell'allargamento per potenza. Dall'Eq.(1.24) si nota che la saturazione diminuisce il valore del coefficiente di saturazione di un fattore  $1 + S_\omega$ . Il fattore ha valore massimo  $1 + S_\omega(\omega_0)$  al centro della riga, per pulsazione  $\omega = \omega_0$ . L'effetto della saturazione va a zero quando  $(\omega - \omega_0) \rightarrow \infty$ , ovvero  $(\omega - \omega_0) \gg \gamma$ .

La saturazione di transizioni con profili di riga Lorentziani, produce un ulteriore profilo Lorentziano con larghezza di riga maggiore rispetto alla larghezza di riga non saturata.

## 1.3 Effetti non lineari

### 1.3.1 Lamb dip

La letteratura di riferimento per questa sezione è Cap.2[3]. Ora si consideri la saturazione di profili di riga non omogenei, ovvero i profili con allargamento Doppler.

Per superare i limiti di risoluzione di una riga di assorbimento dovuti all'allargamento Doppler, è possibile utilizzare due fasci laser contropropaganti che attraversano la cella contenente il campione di atomi. Il primo fascio laser, quello più intenso, è chiamato “*pump*”, il secondo, meno intenso, è chiamato “*probe*”. I due fasci attraversano il campione nella stessa direzione ma in versi opposti.

Si evidenzia, che se fosse usato un solo laser (“*probe*”), si ricadrebbe nei casi precedentemente illustrati.

Le pulsazione del laser *probe* e del *pump* nel sistema di riferimento degli atomi in moto con velocità  $\vec{v}$  nella stessa direzione di propagazione dei fasci, risultano diverse dato che si propagano in verso opposto:

$$\omega'_{probe} = \omega_{laser} - \vec{k}\vec{v} \quad (1.26)$$

$$\omega'_{pump} = \omega_{laser} + \vec{k}\vec{v} \quad (1.27)$$

Gli atomi assorbono se la pulsazione percepita è uguale a quella caratteristica della transizione, cioè se :  $\omega' = \omega_0$ . Date le espressioni delle pulsazioni  $\omega'_{probe}$  e  $\omega'_{pump}$ , gli atomi con velocità non nulla assorbono o solo il *probe*, o solo il *pump* a seconda del verso della loro velocità. Al contrario gli atomi con velocità nulla possono assorbire sia il *pump* che il *probe*. Supponendo che il *pump* sia più intenso del *probe*, gli atomi del campione assorbiranno maggiormente dal primo diventando trasparenti al secondo, il quale è assorbito meno rispetto al caso dell'assorbimento lineare. Se un egual numero di atomi con velocità nulla si trova nello stato eccitato e in quello fondamentale si dice che il laser ha saturato la transizione.

Il *probe*, propagandosi, attraversa il campione e poi procede verso il fotodiodo, che rivela il profilo di assorbimento. L'assorbimento del *probe* diminuisce in corrispondenza della frequenza centrale della riga della transizione a causa del *pump*, che si propaga in verso opposto. In questo caso si parla di assorbimento saturato per il *probe*. I fotoni del *probe* con frequenza uguale a  $\nu_0$  sono meno assorbiti dagli atomi e arrivano al rivelatore. Misurando con un rivelatore l'intensità del *probe* in funzione della frequenza  $\nu$ , si ottiene un profilo Doppler come quello visto nella sezione precedente, per frequenze lontane da  $\nu_0$ . Per frequenze prossime a  $\nu_0$  si registra invece un minimo dell'assorbimento chiamato “*Lamb dip*” (picco di trasparenza). Il minimo dell'assorbimento ha forma Lorentziana e diventa più profondo e più largo all'aumentare dell'intensità del *pump*. Questo comportamento è causato dall'allargamento per potenza descritto precedentemente. Il profilo di assorbimento saturato è descritto da:

$$\alpha_S(\omega) = \alpha_0(\omega) \left[ 1 - \frac{S_0}{2} \left( 1 + \frac{(\gamma_S/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma_S/2)^2} \right) \right] \quad (1.28)$$

con  $\gamma_S = \gamma\sqrt{1 + S_0}$  e  $S_0 = S_0(I, \omega_0)$ . Si sottolinea che  $\gamma$  è la larghezza naturale della riga dell'assorbimento non saturato.

## 1.4 Tecniche di modulazione per segnali dispari

Gli esperimenti nel campo del *laser cooling*, necessitano di un sistema per stabilizzare in maniera attiva la frequenza del laser utilizzato. Esistono molti modi per ottenere un segnale che possa essere usato per regolare la frequenza del laser implementato per il *laser cooling*. Per lo scopo dell'esperimento, ci limiteremo alla spettroscopia in modulazione di frequenza (*FM spectroscopy*), alla spettroscopia a trasferimento di modulazione e allo studio di segnali di derivata. Nei primi due casi si parla di modulazione ad alta frequenza, mentre nel terzo caso di modulazione ad bassa frequenza. Grazie alla modulazione del fascio laser *probe*, è possibile ottenere segnali con risoluzione migliore, con gradienti più ripidi e con maggiore distinzione delle frequenze, rispetto ai segnali ottenuti senza modulazione.

### 1.4.1 Modulazione ad alta frequenza: Spettroscopia FM

Per questa sezione la letteratura di riferimento è [1] e [7]. La luce emessa dal laser è rappresentata da un campo elettromagnetico che varia nel tempo:

$$E_1(t) = E_0 e^{i\omega_0 t + i\Phi(t)} \quad (1.29)$$

dove  $E_0$  è l'ampiezza iniziale del campo,  $\omega_0$  la frequenza portante del laser e  $\Phi(t)$  la fase. Nell'esperimento la fase è modulata da un modulatore acustico-ottico (AOM). Per far vibrare il cristallo contenuto nell'AOM, è utilizzata un'onda elettromagnetica sinusoidale con frequenza 84 MHz. La modulazione del *probe* è realizzata dall'AOM con frequenza di modulazione pari a  $\omega_m = 2\pi \cdot 84$  MHz. L'*output* dell'AOM è costituito da più fasci, deviati spazialmente e con frequenza modificata<sup>4</sup>. Tra i fasci in uscita, l'ordine  $-1$  è il fascio di *probe*, che attraversa la cella di rubidio. L'AOM modifica la pulsazione del *probe*, portandola da  $\omega_0$  (la pulsazione del laser di partenza) a  $\omega'_0 = \omega_0 + 2\pi \cdot 84$  MHz, e si occupa anche della modulazione di fase del fascio.

La fase del *probe* è modulata sinusoidalmente dall'AOM, con  $M$  l'ampiezza di modulazione e  $\omega_m$  la frequenza di modulazione :

$$\Phi(t) = M \sin(\omega_m t) \quad (1.30)$$

---

<sup>4</sup>si veda il paragrafo 2.2 dove si spiega il funzionamento dell'AOM

Entambi i parametri di modulazione ( $M$  e  $\omega_m$ ) sono modificati dall'AOM. A seguito della modulazione, il campo elettrico del *probe*:

$$E_2(t) = E_0 e^{i(\omega'_0 t + M \sin(\omega_m t))} \quad (1.31)$$

L'identità di Jacobi-Anger:  $e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}$ , permette di riscrivere l'Eq.(1.31) del campo elettrico come una serie di funzioni di Bessel di ordine  $n$ :

$$E_2(t) = E_0 e^{i\omega'_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(M) e^{in\omega_m t} \quad (1.32)$$

L'Eq.(1.32) descrive luce modulata in frequenza, senza imporre nessun vincolo sui parametri  $M$  e  $\omega_m$ . Per valori piccoli di  $M$  e  $\omega_m$  si ottengono due bande laterali aggiuntive rispetto alla frequenza portante del laser  $\omega_c = \omega'_0$  a distanza  $\omega_m$  da  $\omega_c$ . Si osservano solo due bande perchè per valori piccoli di  $M$  gli ordini superiori della funzione di Bessel tendono a zero. Le due bande sono fuori fase l'una rispetto all'altra di 180, perchè la funzione di Bessel di ordine  $n$  ha una differenza di fase rispetto alla funzione di ordine  $-n$  di 180. Si faccia riferimento alla Fig.(1.11).

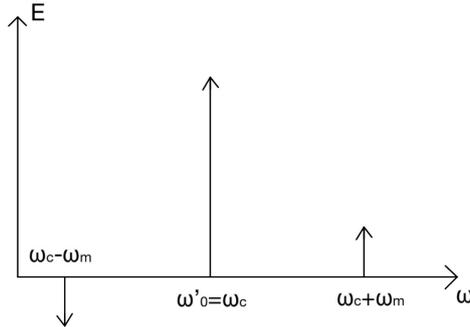


Figura 1.11: Distribuzione dell'ampiezza del campo elettrico sull'ordine 0 e gli ordini  $\pm 1$  della funzione di Bessel, per  $M < 1$ .

Al crescere del valore di  $M$ , il numero di bande laterali aumenta, perchè gli ordini superiori della funzione di Bessel non sono più trascurabili. L'aumento della frequenza di modulazione  $\omega_m$ , invece, cambia la spaziatura tra le bande laterali, aumentandola. Come si vede dall'Eq.(1.32), le bande laterali hanno pulsazioni che differiscono dalla portante di multipli interi di  $\omega_m$ . Solitamente in spettroscopia FM si lavora nel regime con  $M < 1$  e frequenza di modulazione  $\omega_m$  grande.  $M$  è tenuto piccolo perchè sono necessarie solo due bande laterali, mentre la frequenza di modulazione è scelta dell'ordine di grandezza della larghezza di riga della risonanza <sup>5</sup> sondata. Inoltre la pulsazione  $\omega_m$  è scelta con

<sup>5</sup>Si fa riferimento alla frequenza corrispondente alla transizione che si vuole studiare, per la quale gli atomi del gas sono risonanti (*Lamb dip*).

valori grandi, per assicurare che solo il primo paio di bande laterali possano interagire con la risonanza per evitare *l'overlap*. La frequenza di modulazione è scelta nel range MHz (nell'esperimento  $\omega_m/2\pi = 2$  MHz) in modo tale da tenere basso il rumore in frequenza intrinseco del laser, che va come  $1/\omega$ . Bisogna fare attenzione a non modulare il laser con una frequenza che posizionerebbe la banda laterale all'esterno del picco che si vuole sondare. Allo stesso tempo la frequenza di modulazione non può essere molto minore rispetto alla larghezza di riga del picco da sondare, perchè altrimenti entrambe le bande laterali sarebbero attenuate nello stesso modo e non si osserverebbe una differenza di assorbimento.

Per  $M < 1$ , il fascio modulato è descritto da: una portante più intensa a pulsazione  $\omega_c = \omega'_0$ , e due bande laterali più deboli alle pulsazioni  $\omega_c \pm \omega_m$ . Quando l'indice  $M \ll 1$ , la maggior parte della potenza del campo è divisa tra la portante con  $n = 0$  e le due bande laterali con  $n \pm 1$ :

$$E_2(t) = E_0[J_0 e^{i\omega'_0 t} + J_1(M) e^{i(\omega'_0 + \omega_m)t} + J_{-1}(M) e^{i(\omega'_0 - \omega_m)t}] \quad (1.33)$$

Sappiamo che l'intensità è legata all'ampiezza del campo elettrico:  $I_0 \propto E_0^2$ , allora l'intensità della portante e delle bande laterali:

$$I_{portante} = J_0^2(M) I_0 \quad (1.34)$$

$$I_{lat} = |J_1(M)|^2 I_0 = |J_{-1}(M)|^2 I_0 \quad (1.35)$$

Quando l'indice di modulazione è piccolo, tutta la potenza è osservata nelle bande laterali del primo ordine e nella portante:  $I_0 \sim I_{portante} + 2I_{laterale}$ . In questo range di funzionamento, la funzione di Bessel all'ordine zero e al primo ordine si semplificano:

$$J_0 = 1 \quad (1.36)$$

$$J_{\pm 1} = \pm M/2 \quad (1.37)$$

Queste semplificazioni comportano che le intensità delle bande laterali diventino :  $I_{lat} = I_0 M^2/4$ .

Nell'esperimento, il fascio viene fatto passare attraverso un campione assorbente (cella del rubidio). Per descrivere l'interazione tra il fascio e il campione, si definiscono le grandezze:

$$\delta_n(\omega) = \frac{A\gamma^2}{(\omega - \omega_c - n\omega_m)^2 + \gamma^2} \quad (1.38)$$

$$\Phi_n(\omega) = \frac{A\gamma(\omega - \omega_c - n\omega_m)}{(\omega - \omega_c - n\omega_m)^2 + \gamma^2} \quad (1.39)$$

dove  $n = \pm 1, 0$ ,  $\gamma$  è la larghezza di riga naturale e  $A$  l'assorbimento massimo.  $\delta_n(\omega)$  e  $\Phi_n(\omega)$  descrivono rispettivamente l'attenuazione di ampiezza e la variazione di frequenza

di ogni componente del fascio laser, dovuta al mezzo assorbente. Sia  $\delta_n(\omega)$  che  $\Phi_n(\omega)$  sono descritte da una curva Lorentziana. L'effetto del campione sulle componenti dell'onda modulata è modellizzato da coefficienti di trasmissione complessi  $T_n$ :

$$T_n = e^{-\delta_n - i\Phi_n(\omega)} \quad (1.40)$$

Il campo trasmesso risultante è:

$$E_3(t) = E_0[T_0 e^{i\omega_c t} + T_1 \frac{M}{2} e^{i(\omega_c + \omega_m)t} - T_{-1} \frac{M}{2} e^{i(\omega_c - \omega_m)t}] \quad (1.41)$$

L'intensità del fascio che arriva sul fotodiodo è data da:  $I_3 = c|E_3|^2/32\pi$ . Trascurando i termini di ordine  $M^2$ , l'intensità sul fotodiodo diventa:

$$I_3(t) = \frac{cE_0^2}{8\pi} e^{-2\delta_0} \{ 1 + [e^{\delta_0 - \delta_1} \cos(\Phi_1 - \Phi_0) - e^{\delta_0 - \delta_{-1}} \cos(\Phi_0 - \Phi_{-1})] M \cos \omega_m t \\ + [e^{\delta_0 - \delta_1} \sin(\Phi_1 - \Phi_0) - e^{\delta_0 - \delta_{-1}} \sin(\Phi_0 - \Phi_{-1})] M \sin(\omega_m t) \} \quad (1.42)$$

Il segnale elettrico del fotodiodo  $S(t)$  è proporzionale a  $I_3$  e quindi al segnale di battimento. Questo segnale viene generato dall'interazione tra portante e le bande laterali superiore e inferiore. Nel nostro caso  $|\delta_0 - \delta_1|$ ,  $|\delta_0 - \delta_{-1}|$ ,  $|\Phi_0 - \Phi_1|$  e  $|\Phi_0 - \Phi_{-1}|$  sono minori di 1, quindi è possibile semplificare l'Eq.1.36 :

$$I_3(t) = \frac{cE_0^2}{8\pi} e^{-2\delta_0} [1 + (\delta_{-1} - \delta_1) M \cos \omega_m t + (\Phi_1 + \Phi_{-1} - 2\Phi_0) M \sin(\omega_m t)] \quad (1.43)$$

La componente in fase ( $\cos(\omega_m t)$ ) del segnale di battimento è proporzionale alla differenza dell'attenuazione di ampiezza tra le bande laterali con  $n = \pm 1$ . La componente in quadratura ( $\sin(\omega_m t)$ ) è proporzionale alla differenza tra lo *shift* della fase subito dalla portante e la media dello shift subito dalle bande laterali.

Se la frequenza di modulazione  $\omega_m$  è piccola rispetto alla larghezza in frequenza del profilo di riga della transizione che si sta studiando, la componente in fase diventa proporzionale alla derivata dell'assorbimento, mentre il termine in quadratura diventa proporzionale alla derivata seconda della dispersione.

Quando  $\omega_m$  è dello stesso ordine di grandezza della larghezza in frequenza della banda della curva della transizione, solo una banda laterale sonda la curva della transizione. In questo caso si parla di spettroscopia FM.

Nel nostro esperimento la larghezza del *Lamb dip*, centrato alla pulsazione  $\omega'_0$ , è di circa  $2\pi 6$  MHz. La modulazione FM è realizzata con una frequenza di modulazione  $\nu_m/2\pi = 2$  MHz, dello stesso ordine di grandezza della larghezza di riga.

La "scansione" dell'interazione delle bande laterali e della banda centrale, ottenute dalla modulazione, con il profilo di assorbimento del campione è realizzata variando la frequenza del fascio laser iniziale, e di conseguenza anche della portante  $\omega_c$  modulata.

Nel caso di spettroscopia FM si scansiona l'interazione della banda laterale con il profilo di assorbimento del campione.

Siano  $\bar{\delta} = \delta_0$ ,  $\bar{\Phi} = \Phi_0$ ,  $\Delta\delta = \delta_1 - \bar{\delta}$  e  $\Delta\Phi = \Phi_1 - \bar{\Phi}$  allora l'Eq.(1.42) si semplifica:

$$I_3(t) = \frac{cE_0^2}{8\pi} e^{-2\bar{\delta}} [1 - \Delta\delta M \cos(\omega_m t) + \Delta\Phi M \sin(\omega_m t)] \quad (1.44)$$

La componente in fase del segnale di battimento ( $\cos(\omega_m t)$ ) è direttamente proporzionale all'assorbimento indotto dal campione, dato che restituisce la differenza dell'attenuazione dell'ampiezza subita dalle bande laterali (per  $n = \pm 1$ ) a causa dell'interazione col campione. Mentre la componente in quadratura del segnale ( $\sin(\omega_m t)$ ) è direttamente proporzionale alla dispersione indotta dal campione, dato che restituisce lo *shift* della fase subito dalle bande laterali.

### 1.4.2 Modulazione ad alta frequenza: spettroscopia a trasferimento di modulazione

La letteratura di riferimento per questa sezione è [8] La spettroscopia a trasferimento di modulazione è una tecnica che sfrutta due laser collineari (*pump* e *probe*) per produrre curve con risoluzione spettrale migliore rispetto all'allargamento Doppler da utilizzare per la stabilizzazione della frequenza del laser.

Un grande limite della spettroscopia FM è il segnale di fondo non stabile, esso presenta delle caratteristiche di "disturbo" attorno alla forma dispersiva. La spettroscopia a trasferimento di modulazione invece, genera curve di forma dispersiva con un segnale di base molto piatto, i segnali risultano quindi meglio centrati in corrispondenza della transizione atomica. In secondo luogo, i segnali prodotti dalla spettroscopia a trasferimento di modulazione sono dominati dai contributi delle transizioni atomiche chiuse, che risulta essere molto utile quando lo spettro atomico presenta diverse transizioni molto vicine.

I fasci laser di *pump* e di *probe* utilizzati hanno potenza simile. Al contrario dei casi precedenti, si procede facendo passare il fascio di *pump* attraverso l'AOM, dove viene modulato con frequenza  $\omega_m$ . L'indice di modulazione  $M < 1$ , in modo tale che il *pump* trasmesso dall'AOM possa essere descritto da un'onda portante intensa con frequenza  $\omega_c$  e due bande laterali più deboli con frequenza  $\omega_c \pm \omega_m$ . Il fascio di *pump* modulato in fase e il *probe* contro-propagante sono allineati all'interno della cella contenente vapori di rubidio. Se le interazioni del *pump* e del *probe* col gas di rubidio sono sufficientemente non lineari, il *probe* viene modulato.

Il trasferimento di modulazione è descritto dalla sovrapposizione di quattro onde (le tre componenti del *pump* e il *probe*). Due componenti del *pump* si combinano con il *probe* grazie alla non linearità del gas assorbente <sup>6</sup>. Il trasferimento di modulazione è molto

---

<sup>6</sup>Il gas di rubidio risulta non lineare a causa del terzo ordine della suscettività  $\chi$

forte nel caso di transizioni chiuse: in queste condizioni il processo di miscelamento delle quattro onde è molto efficiente in quanto gli atomi non possono decadere in altri stati. Il trasferimento di modulazione si realizza solo se la condizione di risonanza all'interno della curva Doppler è verificata, in questo modo la stabilità della linea di base è indipendente dagli effetti residui dell'assorbimento lineare. La stabilità è inoltre indipendente dalle variazioni dell'assorbimento a causa di fluttuazioni di temperatura, intensità del fascio o di polarizzazione.

Dopo aver attraversato la cella col rubidio, il *probe* è rivelato con un fotodiodo. Se si considerano un indice di modulazione sul *pump*  $M < 1$  e solo il primo ordine delle bande laterali, il segnale, sul fotodiodo, dovuto al *probe* modulato risulta essere:

$$S(\omega_m) = \frac{C}{\sqrt{\Gamma^2 + \omega_m^2}} J_0(M) J_1(M) [(L_{-1} - L_{-1/2} + L_{1/2} - L_1) \cos(\omega_m t + \Phi) + (D_1 - D_{1/2} - D_{-1/2}) + D_{-1}] \sin(\omega_m t + \Phi) \quad (1.45)$$

con

$$L_n = \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\Delta - n\omega_m)^2} \quad (1.46)$$

e

$$D_n = \frac{\Gamma(\Delta - n\omega_m)}{\Gamma^2 + (\Delta - n\omega_m)^2} \quad (1.47)$$

dove  $\Gamma$  è la larghezza di riga naturale,  $\Delta$  è il *detuning* di frequenza rispetto alla frequenza centrale e  $\Phi$  la fase rispetto a quella del campo di modulazione del *pump*. Nell'Eq.(1.45) il termine che moltiplica il sin rappresenta la componente in quadratura del segnale, mentre il termine che moltiplica cos la componente in fase. (grafici dei due termini in funzione del detuning al variare di  $\omega_m/\Gamma$ ) Entrambi i segnali di assorbimento e dispersione sono funzioni dispari del *detuning*  $\Delta$  tra la frequenza del laser e la frequenza della transizione. Quando  $\omega_m < \Gamma$ , sia il segnale di assorbimento che di dispersione hanno forma simile (dispersiva), con un gradiente grande quando viene attraversata la frequenza di risonanza della transizione. Questa grande pendenza dei segnali attorno alla frequenza di risonanza li rende ottimi per essere segnali di errore per la stabilizzazione della frequenza del laser.

Questo tipo di modulazione è ad alta frequenza, infatti sperimentalmente la frequenza di modulazione utilizzata è pari a  $\nu_m = 2$  MHz, dello stesso ordine di grandezza della larghezza di riga, pari a circa 6 MHz.

### 1.4.3 Modulazione a bassa frequenza: segnali in derivata

Il segnale in derivata è un tipo di modulazione di frequenza a bassa frequenza. Come per i casi precedenti, la modulazione è realizzata sperimentalmente dall'AOM.

Sia  $\vec{E}_1(t)$  il campo elettrico che rappresenta il fascio laser prima di entrare nell'AOM:

$$E_1(t) = E_0 e^{i\omega_0 t} \quad (1.48)$$

dove  $E_0$  è l'ampiezza iniziale del campo,  $\omega_0$  la frequenza portante del laser. Si ricorda che l'AOM non solo si occupa di modulare il fascio laser, ma cambia anche la frequenza portante del segnale da  $\omega_0$  a  $\omega'_0 = \omega_0 + 2\pi 84$  MHz. Considerando una modulazione di frequenza sinusoidale di frequenza di modulazione  $\nu_m = \omega_m/2\pi$ , la pulsazione del laser è descritta da:

$$\omega(t) = \omega'_0 + A \sin(\omega_m t) \quad (1.49)$$

La pulsazione del laser oscilla con continuità tra i valori  $\omega'_0 + A$  e  $\omega'_0 - A$ . Il campo elettrico del laser modulato, è descritto da:

$$E(t) = E_0 e^{i[\omega'_0 + A \sin(\omega_m t)]t} \quad (1.50)$$

È importante sottolineare che, a differenza della modulazione di fase, modulando in frequenza, è il valore della frequenza del laser ad avere una dipendenza temporale, si veda Fig.(1.12).

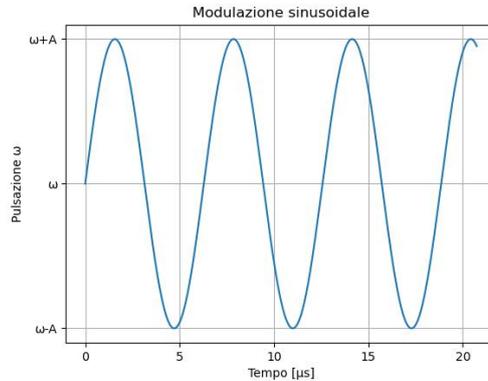


Figura 1.12: Modulazione sinusoidale della pulsazione  $\omega'_0$  ( $\omega$  nel grafico) con frequenza di modulazione  $\nu_m = 333$  kHz e ampiezza  $A$ .

Nell'esperimento la modulazione non è sinusoidale, ma ad onda quadra. La pulsazione del laser modulato risulta essere:

$$\omega(t) = \omega'_0 + A \text{sqw}(\omega_m t) \quad (1.51)$$

dove  $A$  è l'ampiezza di modulazione detta "profondità di modulazione",  $\text{sqw}()$  indica la funzione a onda quadra con ampiezza unitaria, e  $\omega_m$  la pulsazione di modulazione. In questo modo la pulsazione non varia con continuità tra due valori, ma assume solo due valori :  $\omega'_0 + A$  e  $\omega'_0 - A$ , si faccia riferimento alla Fig.(1.13)

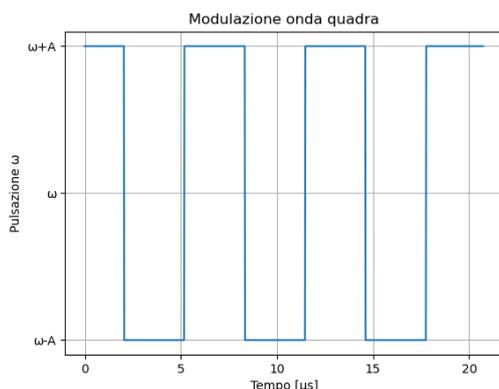


Figura 1.13: Modulazione con onda quadra della pulsazione  $\omega'_0$  ( $\omega$  nel grafico) con frequenza di modulazione  $\nu_m = 333$  kHz e ampiezza  $A$ .

La frequenza di modulazione utilizzata sperimentalmente è pari a  $\omega_m/2\pi = 333$  kHz. Nelle condizioni sperimentali, per questo tipo di modulazione, è possibile parlare di modulazione a bassa frequenza in quanto risulta:  $\omega_m \ll \Gamma$  MHz, dove  $\Gamma/(2\pi) = 6$  MHz è la larghezza del *Lamb dip* da analizzare. Per ottenere il profilo della riga spettrale della transizione che si vuole studiare, è necessario variare la frequenza del laser attorno al picco di assorbimento (per ulteriori dettagli si veda Paragrafo 2.1). Il demodulatore, per ogni valore di frequenza della scansione, raccoglie i due valori del segnale per le frequenze  $\omega_0 + A$  e  $\omega_0 - A$ , ottenute con la modulazione. Esso moltiplica per  $\pm 1$  i segnali  $S(\omega'_0 + A)$  e  $S(\omega'_0 - A)$ . A valle un filtro passa-basso estrae la media temporale, eliminando tutte le componenti di Fourier ad alta frequenza. Il filtro passa-basso ha una frequenza di trasferimento  $1/(1 + i\omega\tau)$  con  $\tau = 0.5 \mu\text{s}$ , ha quindi una frequenza di taglio  $\nu_c = (2\pi\tau) = 320$  kHz. Tramite i due valori del segnale, calcola la derivata prima discreta col rapporto incrementale:

$$\frac{S(\omega'_0 + A) - S(\omega'_0 - A)}{2A} \quad (1.52)$$

Più è piccolo il valore di  $A$ , più l'esito di questo calcolo si avvicina alla derivata prima del segnale di assorbimento. Il demodulatore raccoglie i valori di questi rapporti incrementali, e produce un grafico del segnale demodulato, di forma dispersiva. Questo segnale di derivata, è un ottimo candidato per la stabilizzazione della frequenza del laser.

I segnali in derivata terza sono ottenuti in modo simile ai segnali in derivata prima. In questo caso però la pulsazione del laser non oscilla in modo discontinuo tra due valori,

ma tra quattro:  $\omega'_0 + 2A$ ,  $\omega'_0 + A$ ,  $\omega'_0 - A$  e  $\omega'_0 - 2A$ . L'oscillazione tra i 4 valori ha un periodo  $T = 3.3\mu s$ . Il tempo per cui la pulsazione del laser modulato assume uno dei quattro valori non è lo stesso. La frazione di tempo per cui la pulsazione del laser vale  $\omega'_0 + A$  e  $\omega'_0 - A$  è il doppio rispetto al tempo in cui la pulsazione assume i valori  $\omega'_0 + 2A$  e  $\omega'_0 - 2A$ . Il segnale in entrata al demodulatore oscilla dunque tra quattro valori, ovvero quelli relativi a  $\omega'_0 \pm A$  e  $\omega'_0 \pm 2A$ . Un filtro passa-basso, con frequenza di taglio  $f_c = 320$  kHz estrae il valore medio del segnale che risulta proporzionale alla derivata terza discreta del segnale:

$$\frac{-S(\omega'_0 - 2A) + 2S(\omega'_0 - A) - 2S(\omega'_0 + A) + S(\omega'_0 + 2A)}{A^3} \quad (1.53)$$

# Capitolo 2

## Apparato sperimentale

L'analisi spettroscopica del rubidio è realizzata tramite l'apparato sperimentale in due configurazioni diverse riportate nelle Fig.(2.2) e Fig.(2.4). Le due configurazioni dell'apparato sono schematizzate nelle Fig.(2.1) e Fig.(2.3) L'apparato è composto da:

- Un laser a diodo a 780 nm, TOPTICA EYP-DFB-0780-00040-1500-BFW11-0005
- Un isolatore ottico a 780 nm, THORLABS
- Un *beam splitter* R:95 T:5, THORLABS
- Un *beam splitter* R:10 T:90, THORLABS
- Cinque specchi dielettrici, THORLABS BB1-E03
- Un modulatore acusto-ottico (AOM), da 780 nm, Crystal Technology, 3080-122
- Una scheda DDS (*Direct Digital Synthesis*), provvista di:
  - Un generatore di funzioni da 84 MHz
  - Un generatore di funzioni da 333 kHz
  - Un generatore di funzioni da 2 MHz
- Un amplificatore di potenza RF da 20 dB
- Un generatore di funzioni, TTi TG1010
- Una lamina  $\lambda/2$  a 780 nm, THORLABS
- Un diaframma
- Un telescopio  $1 \times 2$ , THORLABS GBE02-B, con una densità ottica OD15

- Un cubo polarizzatore a 780 nm, THORLABS
- Un fotodiodo al silicio
- Una cella di vetro contenente vapori di rubidio
- Un oscilloscopio RODE&SCHWARZ RTM3004
- Un portatile
- Un sistema di controllo elettronico realizzato "in-house"

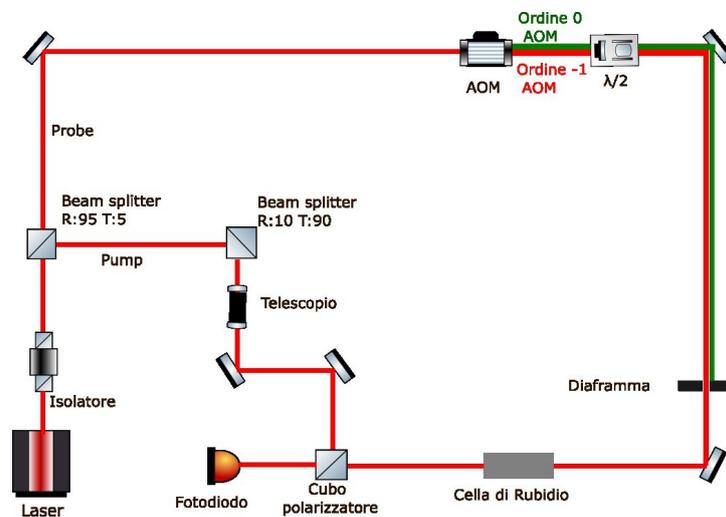


Figura 2.1: Schema dell'apparato sperimentale, nella configurazione in cui è modulato il *probe*.

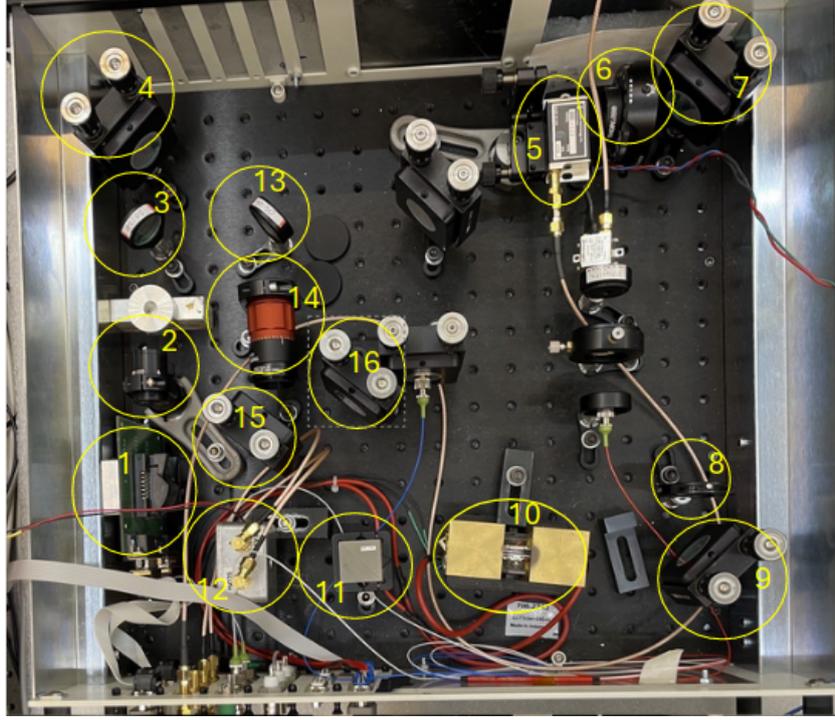


Figura 2.2: Setup sperimentale per modulazione *probe*: 1 Laser; 2 Isolatore; 3 *Beam splitter R : 95 T : 5*; 4,7,9,15,16 Specchi; 5 AOM; 6 Lamina  $\lambda/2$ ; 8 Diaframma; 10 Cella di rubidio; 11 Cubo polarizzatore; 12 Fotodiodo; 13 *Beam splitter R : 10 T : 90*; 14 Telescopio.

## 2.1 Laser

La scansione attorno al picco di assorbimento è realizzata facendo variare in maniera periodica la frequenza del diodo laser utilizzando il generatore di funzione, che genera un segnale a dente di sega. Per ogni volt di modulazione, la corrente del laser varia di  $\Delta I_{laser} = 0.1$  mA. Questa variazione di corrente provoca una variazione della frequenza del laser  $\Delta \nu_{laser} = 76$  MHz.

Nell'esperimento, a seconda del tipo di modulazione scelto per il fascio di *probe*, la modulazione della corrente del laser è diversa. Nella spettroscopia a trasferimento di modulazione, l'ampiezza del segnale a dente di sega è di 2 V, con un periodo  $T = 0.5$  s (frequenza  $\nu = 2$  Hz), un segnale tipico è riportato in Fig.(2.5). La modulazione provoca una variazione della corrente del laser pari a  $\Delta I_{laser} = 0.2$  mA e una scansione in frequenza di  $\Delta \nu_{laser} = 152$  MHz centrato nella frequenza  $\nu_0$  del picco.

In spettroscopia FM e nell'acquisizione di segnali con segnali di derivata, l'ampiezza del segnale a dente di sega del potenziale è 5 V, con un periodo  $T = 0.5$  s (frequenza  $\nu = 2$  Hz). Questa modulazione provoca una variazione della corrente del laser pari

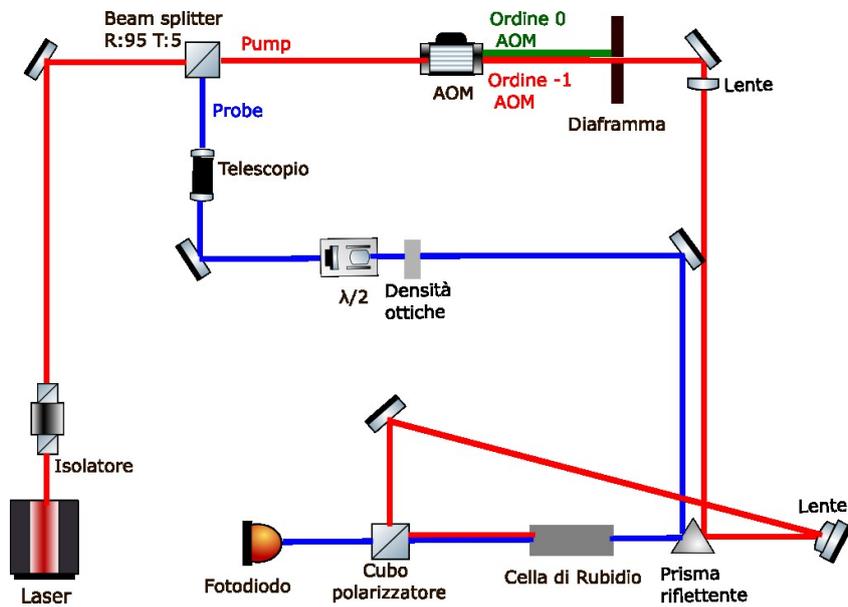


Figura 2.3: Schema dell'apparato sperimentale, nella configurazione in cui è modulato il *pump*.

a  $\Delta I_{laser} = 0.5 \text{ mA}$  e una scansione in frequenza di  $\Delta \nu_{laser} = 380 \text{ MHz}$  centrato nella frequenza  $\nu_0$  del picco.

Il fascio laser ha una lunghezza d'onda pari a  $780.03 \text{ nm}$  (in vuoto) prossima alla transizione  $D_2$  del rubidio, ed ha polarizzazione verticale.

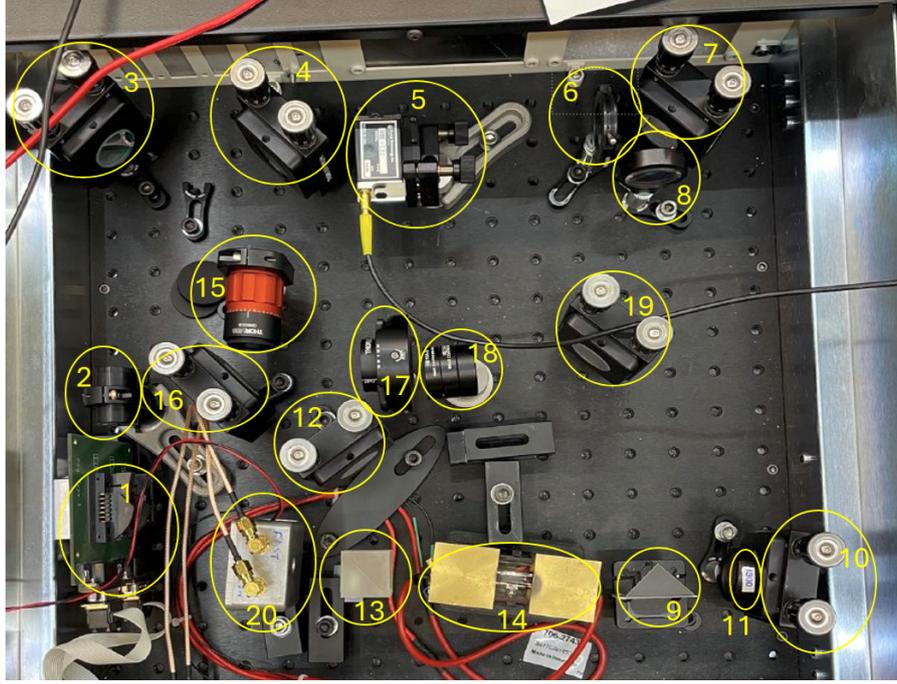


Figura 2.4: Setup sperimentale per modulazione *pump*:1 Laser; 2 Isolatore; 3,7,10,12,16,19 Specchi; 4 *Beam splitter*  $R : 95 T : 5$ ; 5 AOM; 6 Diaframma; 8, 11 Lenti; 9 Prisma riflettente; 13 Cubo polarizzatore; 14 Cella di rubidio; 15 Telescopio  $1 \times 2$ ; 17 Lamina  $\lambda/2$ ; 18 Densità ottiche; 20 Fotodiodo.

## 2.2 AOM

L'AOM, dall'inglese *Acusto-optic modulator*, è un modulatore acusto-ottico. Il suo funzionamento si basa sull'interazione tra un'onda acustica, utilizzata per far vibrare il cristallo contenuto all'interno dell'AOM, e un'onda elettromagnetica. Nel nostro caso l'onda elettromagnetica è il fascio laser proveniente dal diodo laser. Si consideri, inizialmente, solamente l'interazione dell'onda elettromagnetica con il cristallo all'interno dell'AOM. In questa sezione è riportato il caso in cui il fascio laser sia perpendicolare all'asse del cristallo, al fine di rendere chiaro il meccanismo alla base del funzionamento dell'AOM.

Il fascio laser in ingresso dell'AOM, è descritto dal campo elettrico seguente:

$$E_1(x, t) = E_0 e^{ikx} e^{-i\omega t} \quad (2.1)$$

Il campo elettrico, attraversando il cristallo, subisce uno sfasamento  $\Phi$  pari a :

$$\Phi = kL - k_0L = \frac{2\pi}{\lambda} L(n_0 - 1) \quad (2.2)$$

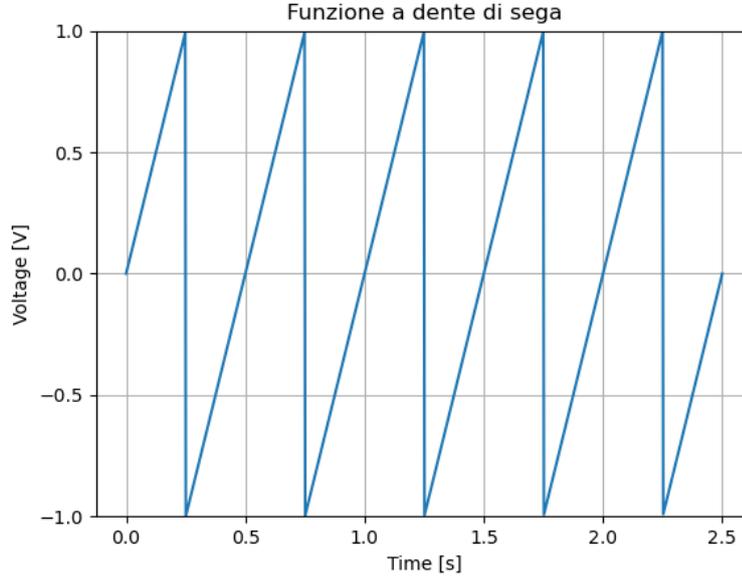


Figura 2.5: Nel grafico è rappresentato il segnale a dente di sega del segnale inviato all'alimentatore del laser per modularne la corrente. È un segnale periodico di periodo  $T = 0.5$  s e ampiezza 1 V, che provoca variazioni di corrente e di frequenza del laser, rispettivamente di ampiezza pari a 0.1 mA e 76 MHz.

dove  $k$  è il vettore d'onda del fascio modificato a causa della presenza del cristallo con indice di rifrazione  $n_0 \neq 1$ ,  $k_0$  il vettore d'onda del laser nel vuoto,  $\lambda$  la lunghezza d'onda del laser e  $L$  la lunghezza del cristallo. Il campo elettrico del laser in uscita dall'AOM risulta essere:

$$E_2(x, t) = E_0 e^{ikr} e^{-i\omega_0 t} e^{i\Phi} \quad (2.3)$$

Come sopra riportato, sul cristallo dell'AOM è inviata un'onda sinusoidale di frequenza  $\nu_s = 84$  MHz generata dal generatore di funzioni. Questa si propaga nel cristallo generando una perturbazione sinusoidale della densità del mezzo. La variazione di densità provoca una variazione dell'indice di rifrazione del cristallo, che così dipende dalla posizione e dal tempo tramite l'onda sonora sinusoidale:

$$n(y, t) = n_0 + n_1 \sin(k_s y - \omega_s t) \quad (2.4)$$

dove  $n_0$  è l'indice di rifrazione del cristallo imperturbato,  $k_s$  il vettore d'onda dell'onda sonora e  $\omega_s$  la pulsazione dell'onda sonora. Sperimentalmente risulta  $\omega_s = 2\pi\nu_s = 2\pi 84$  MHz. Inoltre la potenza dell'onda generata dal generatore di funzione è amplificata da un amplificatore di potenza da 1 W, prima di arrivare all'AOM.

Lo sfasamento  $\Phi$ , dall'Eq.(2.2), diventa:

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \frac{2\pi}{\lambda} L(n(y, t) - 1) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} L(n_0 + n_1 \sin(k_s y - \omega_s t) - 1)\end{aligned}\quad (2.5)$$

Considerando anche la dipendenza temporale dello sfasamento  $\Phi$ , il campo elettrico in uscita dall'AOM è descritto da:

$$\begin{aligned}E_2(x, t) &= E_0 e^{ikr} e^{-i\omega_0 t} e^{i\Phi(t)} \\ &= E_0 e^{ikr} e^{-i\omega_0 t} e^{i2\pi L/\lambda(n_0-1)} e^{i2\pi L/\lambda n_1 \sin(k_s y - \omega_s t)}\end{aligned}\quad (2.6)$$

È possibile riscrivere l'ultimo termine esponenziale della 2.6 tramite le funzioni di Bessel:

$$e^{i2\pi L/\lambda n_1 \sin(k_s y - \omega_s t)} = \sum_m J_m(M) e^{i(k_s y - \omega_s t)m} \quad (2.7)$$

dove  $M = 2\pi L/\lambda$ ,  $m$  assume valori interi positivi e negativi. Allora il campo elettrico in uscita dall'AOM è una somma di  $m$  campi elettrici:

$$E_2(x, t) = \sum_m E_0 e^{i2\pi L/\lambda(n_0-1)} J_m(M) e^{i(kx + mk_s y)} e^{-i(\omega_0 + \omega_s m)t} \quad (2.8)$$

Dall'Eq.(2.8), il campo  $m$ -esimo ha vettore d'onda  $\vec{k}_m = (k, mk_s)$  e pulsazione  $\omega_m = \omega_0 + m\omega_s$ . In uscita dall'AOM sono dunque presenti più campi elettrici con pulsazioni  $\omega_m$  diverse, deviati spazialmente l'uno rispetto all'altro.

La potenza del fascio laser in ingresso è divisa tra i fasci in uscita dall'AOM. Nel nostro assetto sperimentale, la maggior parte della potenza è sul fascio  $m = -1$ , mentre la parte rimanente sul fascio con  $m = 0$ . Gli altri ordini hanno potenza trascurabile. La descrizione del funzionamento del modulatore acusto-ottico qui fornita, è legata ad un caso specifico della direzione del campo elettrico rispetto al campo di onde sonore. Per una trattazione più esaustiva si faccia riferimento a: [10].

Affinchè il meccanismo dell'AOM sia ottimizzato, è necessario fare qualche ulteriore puntualizzazione. Siano  $\theta_i$  e  $\theta_r$  rispettivamente l'angolo d'incidenza dell'onda elettromagnetica e l'angolo di diffrazione dei raggi diffratti, rispetto ai fronti d'onda dell'onda sonora, che si propaga nel cristallo. Si consideri l'interazione di un solo fronte d'onda dell'onda sonora con il campo elettromagnetico. Affinchè la diffrazione all'interno del cristallo avvenga all'angolo  $\theta_r$ , tutti i punti del fronte d'onda dell'onda sonora, devono contribuire in fase alla diffrazione nella direzione  $\theta_r$ . Questo si traduce nella condizione:

$$x [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_r)] = a \frac{\lambda}{n} \quad (2.9)$$

dove  $x$  indica i punti sul fronte,  $\lambda$  è la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica,  $n$  l'indice di rifrazione del cristallo, e  $a$  è un numero intero. Affinchè la condizione nell'Eq.(2.9) sia soddisfatta per ogni punto  $x$  del fronte, è necessario che:  $a = 0$  e  $\theta_i = \theta_r = \theta$ . Andando a considerare più fronti d'onda dell'onda sonora, affinché avvenga la diffrazione all'angolo  $\theta_r$ : è necessario che la diffrazione di fronti d'onda diversi si sommi in fase lungo la direzione del fascio diffratto. Questo si traduce nella condizione:

$$2\lambda_s \sin \theta_r = \frac{\lambda}{n} \quad (2.10)$$

dove  $\lambda_s$  è la lunghezza d'onda dell'onda sonora. La diffrazione che soddisfa l'Eq.(2.10), è chiamata diffrazione di *Bragg*. Tramite essa è possibile stimare il valore dell'angolo d'incidenza del laser che ottimizza la diffrazione, e quindi il funzionamento dell'AOM. Nel nostro caso con una  $\nu_s = 84$  MHz,  $v_s = 4.2$  km/s velocità del suono nel vuoto, chiedi.

Oltre al meccanismo qui illustrato, l'AOM si occupa anche della modulazione, in fase o in frequenza, del fascio laser in uscita con  $m = -1$  che, a seconda della modulazione scelta, è il fascio di *probe* o di *pump*. Sperimentalmente l'onda sonora con frequenza 84 MHz, arriva al modulatore acusto-ottico modulata in frequenza, con la stessa frequenza con cui si vuole modulare il fascio laser di *probe* o di *pump*. Per ulteriori approfondimenti si faccia riferimento a [6].

## 2.3 Rivelatore

Il rivelatore è composto da un diodo al silicio, un amplificatore a transimpedenza ed è alimentato da un generatore di tensione a 5 V. È stato scelto un diodo al silicio perchè l'energia del suo *bandgap* è dello stesso ordine di grandezza dell'energia del laser utilizzato per la spettroscopia del rubidio. Infatti questo fotodiodo lavora nel *range* dell'infrarosso ( $\approx 780$  nm). Il diodo è polarizzato inversamente, in modo che quando un fotone con energia superiore al *gap* del silicio arriva sul diodo, un elettrone riesce ad attraversare la giunzione del diodo contribuendo alla corrente nel circuito. L'efficienza con cui un fotone genera un elettrone è detta "efficienza quantica" e non è necessariamente unitaria; nel nostro caso vale  $\approx 0.4$ .

La fotocorrente generata nel circuito è proporzionale alla potenza incidente. Attraverso un amplificatore a transimpedenza [5], la fotocorrente genera un segnale pari alla caduta di tensione ai capi della transimpedenza, nel nostro caso  $R = 10$  k  $\Omega$ . Il segnale in uscita dal fotodiodo è la tensione ai capi della transimpedenza.

Il rapporto tra la corrente generata dal fascio incidente sul fotodiodo e la potenza del fascio incidente fornisce una grandezza caratteristica del fotodiodo chiamata "responsività". La responsività del fotodiodo utilizzato è pari a 0.6 A/W. Questo significa che un fascio incidente di potenza  $P = 0.1$  mW genera una corrente  $I = 0.06$  mA, che tramite la resistenza è trasformata in un segnale di tensione in uscita dal fotodiodo pari a 6 V.

Il fotodiodo presenta due uscite, una “veloce” e una “lenta”. L’uscita lenta è filtrata per le alte frequenze, ed è letta con l’oscilloscopio per visualizzare la curva di assorbimento. L’uscita veloce è inviata al DDS per la demodulazione.

## 2.4 Procedura

In questa sezione sono riportate le procedure sperimentali per ottenere, dalla spettroscopia del rubidio, i diversi tipi di segnali dispersivi, attorno alla frequenza centrale del *Lamb dip* scelto, utilizzando i tre tipi di modulazione del fascio laser riportati nel paragrafo 1.4. La trattazione è concentrata unicamente sulla riga  $D_2$  del rubidio, corrispondente alla transizione tra gli stati fini:  $5^2S_{1/2}$  e  $5^2P_{3/2}$  (altro a riguardo in seguito).

### 2.4.1 Modulazione del fascio di *probe*

In questo paragrafo sono descritte le procedure sperimentali per studiare i segnali in derivata prima e terza, e la spettroscopia in modulazione di frequenza (FM *spectroscopy*), modulando il fascio laser di *probe*. Per ottenere la spazzata in frequenza del laser attorno al valore centrale di un *Lamb dip*, corrispondente ad una transizione iperfine della riga  $D_2$  del rubidio 87, la corrente del laser è modulata tramite un segnale a dente di sega, come illustrato nel paragrafo 2.1.1. L’ampiezza del segnale è 5 V e fa oscillare la corrente attorno al valore centrale  $I_{laser} = 79.65$  mA nell’intervallo  $\pm 2.5$  mA. Facendo riferimento al setup sperimentale riportato in Fig.(2.2) e allo schema in Fig.(2.1), la descrizione dell’apparato sperimentale segue quella del percorso del fascio laser. Tra parentesi tonde sono indicati: il numero di riferimento alla Fig.(2.2), marca, modello (dove necessario). Il fascio del laser a diodo a 780 nm (1, TOPTICA, YP-DFB-0780-00040-1500-BFW11-0005) è emesso con polarizzazione verticale, attraversa l’isolatore ottico (2, THORLABS), dopo il quale, tramite il *beam splitter* (3, THORLABS,R:95 T:5), è diviso nel fascio di *probe*, che si propaga verso lo specchio dielettrico (4, THORLABS, BB1-E03), e nel fascio di *pump*, che si propaga verso il *beam splitter* (13, THORLABS,R:10 T:90). Il *probe*, dopo la riflessione, attraversa l’AOM (5, Crystal Technology, 3080-122), che si occupa della modulazione del fascio e lo divide in due componenti: gli ordini  $m=0$  e  $m=1$  dell’AOM (si faccia riferimento al paragrafo 2.1.2). Si consideri che la maggior parte della potenza del *probe* è sull’ordine  $m = -1$ , questo continua a propagarsi ed è il fascio che continuiamo a chiamare *probe*. Al contrario, il fascio dell’ordine  $m = 0$ , più debole, viene bloccato dal diaframma (8), in modo che non arrivi alla cella del rubidio, ed è quindi trascurabile. Dopo l’AOM, è posizionata la lamina a ritardo di fase  $\lambda/2$  (6, THORLABS), questa è posizionata in modo da rendere la polarizzazione del fascio orizzontale. In seguito il *probe* è riflesso dallo specchio (7), attraversa il diaframma (8) e dopo un’ulteriore riflessione (specchio 9), arriva sulla cella di rubidio(10). Il fascio di *probe* attraversa il rubidio e, grazie alla saturazione della transizione iperfine da parte

del pump, è solo parzialmente assorbito (come illustrato nel paragrafo 1.3.1 ). In uscita dalla cella attraversa il cubo polarizzatore (11), trasparente a luce polarizzata orizzontalmente, ed arriva al fotodiodo (12). Il fotodiodo, tramite il meccanismo spiegato nel paragrafo (2.3), misura l'assorbimento del *probe* da parte del rubidio. Tramite la sua uscita veloce e lenta i dati sono quindi inviati all'oscilloscopio e al DDS rispettivamente. Il primo si occupa della visualizzazione del profilo di assorbimento, mentre il DDS della demodulazione del segnale (segnali dispersivi), che è poi visualizzata sul secondo canale dell'oscilloscopio.

Il fascio di *pump*, dopo il *beam splitter*, si propaga verso il telescopio  $1 \times 2$  (14, THORLABS, GBE02-B), dotato di una densità ottica (THORLABS ,OD15), dopo il quale a seguito di due riflessioni, arriva al cubo polarizzatore (11). Questo è riflettente per polarizzazioni verticali e riflette il fascio di *pump* attraverso la cella di rubidio. Qui il *pump*, contro-propagante rispetto al fascio di *probe*, induce la saturazione delle transizioni iperfini che vogliamo studiare.

## 2.4.2 Modulazione del fascio di *pump*

In questo paragrafo sono analizzate le procedure sperimentali per studiare la spettroscopia a trasferimento di modulazione, modulando il fascio laser di *pump*. Per modulare la corrente sul laser è utilizzato lo stesso segnale a dente di sega con ampiezza 2 V, come illustrato nel paragrafo 2.1.1. La corrente sul laser è fatta oscillare con ampiezza pari a 1 mA attorno al valore centrale  $I_{laser} = 79.51$  mA. Facendo riferimento al setup sperimentale riportato in Fig.(2.4) e allo schema in Fig.(2.3), la descrizione del setup segue il percorso del fascio laser. Per ogni componente dell'apparato, sono indicati tra parentesi tonde il numero di riferimento alla Fig.(2.4), marca e modello (dove necessario). Il fascio dal laser a diodo (1) è emesso con polarizzazione verticale, attraversa l'isolatore ottico (2), dopo una riflessione (specchio 3), procede verso il *beam splitter* (4,  $R : 95, T : 5$ ), dal quale è diviso nei due fasci di *pump* e *probe*. Il fascio di *pump* procede verso l'AOM (5), mentre il fascio di *probe* procede verso il telescopio  $1 \times 2$  (15). Il *pump* viene quindi modulato e la maggior parte della potenza è "deviata" sull'ordine  $m = -1$  dell'AOM. All'uscita è presente un diaframma (6), che permette il passaggio dell'ordine  $m = -1$ , mentre blocca la propagazione dell'ordine  $m = 0$  dell'AOM. Dopo una riflessione (specchio 7), il fascio di *pump* attraversa le lenti (8 e 11) che si comportano come un telescopio. Prima di arrivare sulla lente (11), subisce un'ulteriore riflessione da parte del prisma riflettente (9). Infine il fascio arriva alla cella di rubidio (14) dopo due riflessioni sugli specchi (10 e 12) e una sul cubo polarizzatore (13). Si ricorda che il cubo polarizzatore risulta trasparente per fasci polarizzati orizzontalmente (*probe*) e riflette fasci polarizzati verticalmente (*pump*). Il fascio di *probe*, dopo la riflessione del *beam splitter* (4), procede quindi verso il telescopio(15), viene riflesso dallo specchio (16) e attraversa la lamina  $\lambda/2$ , che ruota la polarizzazione del fascio, polarizzandolo orizzontalmente. Da qui il *probe* è attenuato dalle densità ottiche (18), procede verso lo specchio (19) e poi verso il prisma

riflettente (9), che a sua volta lo riflette verso la cella di rubidio. Dopo aver attraversato la cella di rubidio, la parte di *probe* non assorbita è trasmessa dal cubo polarizzatore (13) verso il fotodiodo (20). Il segnale di assorbimento del *probe* misurato dal fotodiodo è poi mandato tramite le sue due uscite all'oscilloscopio, per la visualizzazione, e al DDS, che si occupa della demodulazione. In questo caso è il *pump* a essere modulato, ad una frequenza di 2 MHz secondo il processo spiegato nel paragrafo (1.4.2). I profili dispersivi ottenuti dalla demodulazione sono descritti dall'Eq.(1.45).

# Capitolo 3

## Analisi risultati

Per identificare il miglior segnale dispersivo da usare per la stabilizzazione in frequenza, è stato utilizzato l'assorbimento associato alla transizione  $D_2$  del rubidio 87, tra i livelli di struttura fine  $5^2S_{1/2}$  e  $5^2P_{3/2}$ . Come si può notare nella Fig.(3.1), alla riga  $D_2$  corrispondono più transizioni tra livelli della struttura iperfine. Nel caso in esame sono analizzate le transizioni che hanno come livello di iniziale il livello iperfine  $F = 2$ . I livelli  $F' = 1$ ,  $F' = 2$  e  $F' = 3$  della struttura iperfine, secondo le regole di selezione, sono i tre livelli finali possibili. I livelli iperfini dello stato eccitato sono così vicini in energia che le curve di assorbimento delle corrispondenti transizioni si sovrappongono formando un'unica curva Doppler più ampia, dove sono "raccolti" i contributi di assorbimento di tutte le transizioni iperfini possibili avendo come livello di partenza  $F = 2$ . Tuttavia, grazie alla spettroscopia di saturazione, è possibile avere una risoluzione migliore di questa ed ottenere delle curve più strette, i *Lamb dip*, in corrispondenza di ogni transizione iperfine. Nel profilo di assorbimento della riga  $D_2$ , si osservano più picchi rispetto ai tre previsti. Questo è dovuto all'effetto di *cross-over* che, partendo sempre dal livello  $F = 2$ , aggiunge tre ulteriori transizioni "intermedie" possibili [4].

Prima di misurare gli spettri di assorbimento del rubidio, è necessario verificare che i fasci di *probe* e di *pump* siano allineati. Nel caso in cui i due fasci non siano allineati, non sono più verificate le condizioni per l'assorbimento saturato descritte nei paragrafo 1.2.2 e 1.3.1. In questo caso la risoluzione della riga di assorbimento peggiora, e si otterrebbe una curva più larga dovuta all'allargamento Doppler corrispondente alla riga  $D = 2$ . Sarebbe così impossibile studiare e distinguere gli assorbimenti corrispondenti alle singole transizioni iperfini (*Lamb dip*).

L'acquisizione dei dati comincia misurando il profilo di assorbimento: dopo aver scelto le transizioni di cui si vogliono studiare i segnali dispersivi, si fissa la corrente centrale del laser in modo tale da ottenere con la scansione in frequenza la curva Doppler con i *dip* di saturazione.

Tutti i segnali analizzati sono misurati dal fotodiodo in funzione del tempo. Per l'analisi è necessario che i grafici riportino il segnale del fotodiodo in funzione della fre-

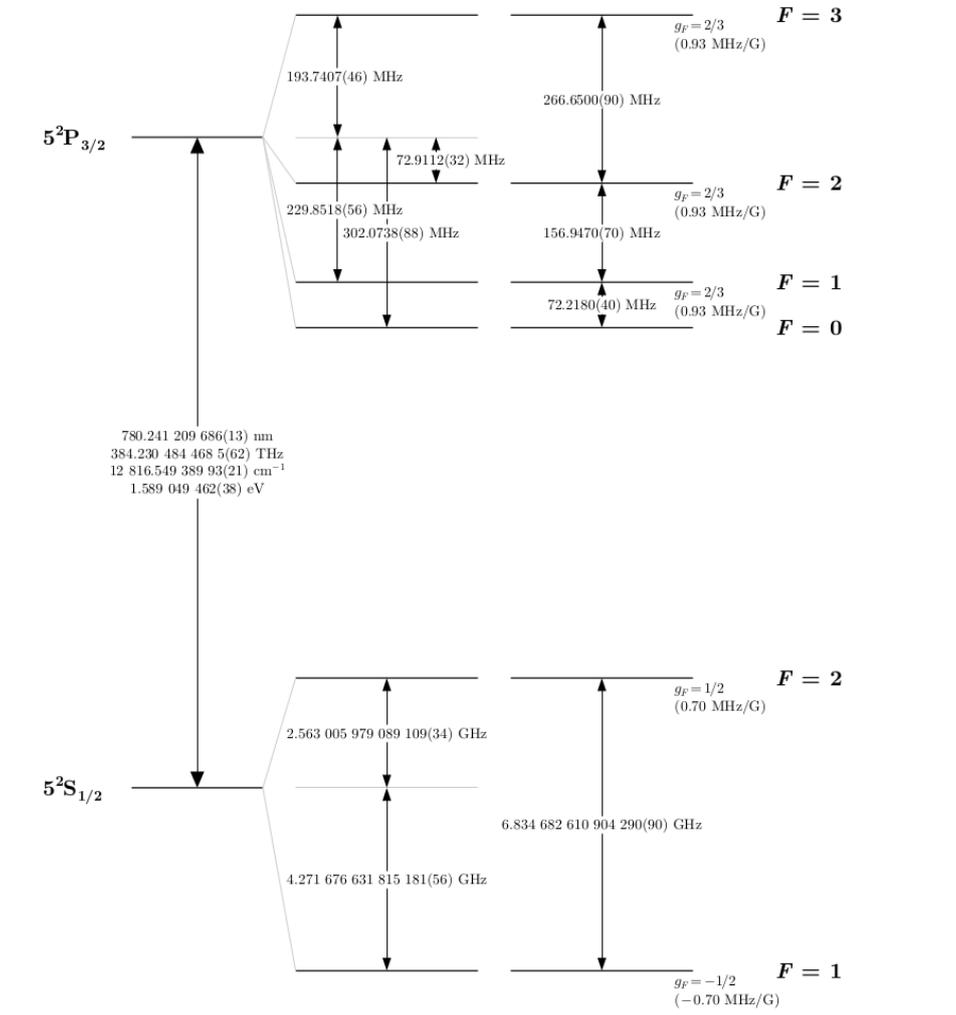


Figura 3.1: Livelli del rubidio 87 rilevanti per la transizione  $D_2$ .

quenza del laser, che varia nel tempo. Per passare al dominio delle frequenze è necessario ricalibrare l'asse  $x$  in frequenza. Il processo di calibrazione utilizzato è riportato nell'Appendice (2), ed è stato applicato a tutti i dati utilizzati per i grafici riportati in questo capitolo. Come descritto nel paragrafo 2.3, il segnale sull'uscita veloce viene inviato al demodulatore sincrono integrato nella scheda DDS. Il segnale demodulato viene quindi visualizzato sull'oscilloscopio simultaneamente all'uscita lenta del fotodiodo, da cui si osserva la curva di assorbimento.

In questa sezione si analizzano i dati riguardanti le curve di assorbimento, mentre nelle prossime sezioni è riportata l'analisi di segnali di forma dispersiva ottenuti con la demodulazione.

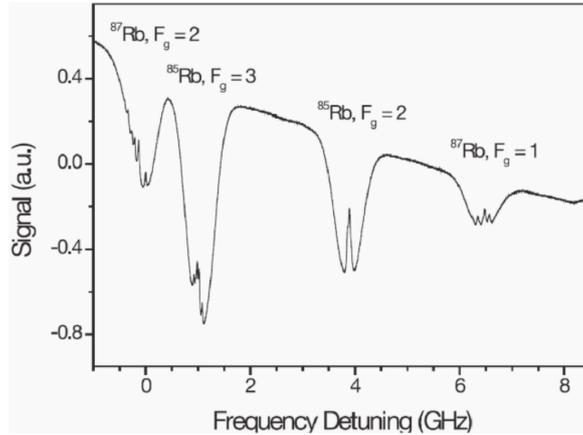


Figura 3.2: Profilo di assorbimento della linea  $D_2$  del rubidio  $^{87}$  e  $^{85}$ . I 4 picchi più grandi, corrispondono agli assorbimenti delle transizioni iperfini con livello di ground diverso; in ordine partendo da sinistra: livello di *ground*  $F = 2$  per il  $^{87}\text{Rb}$ , livello di *ground*  $F = 3$  per il Rb 85, livello di *ground*  $F = 2$  per il Rb 85, livello di *ground*  $F = 1$  per il Rb 87.

I profili di assorbimento, misurati rispettivamente con una scansione in frequenza di 380 MHz e di 152 MHz, tramite segnali di modulazione della corrente del laser di 5 V e 2 V, sono riportati in Fig.(3.3) e Fig.(3.4). Nelle Fig.(3.3) e Fig.(3.4) sono specificate le transizioni iperfini appartenenti alla riga  $D_2$  corrispondenti ai rispettivi *Lamb dip*. È stato possibile identificare le transizioni corrispondenti ai picchi, mettendo in relazione la spaziatura dei *dip* con le frequenze associate alle varie transizioni riportate in Fig.(3.1). In Fig.(3.3), le transizioni iperfini corrispondenti ai *dip* di assorbimento osservati sono :

- la transizione tra livelli iperfini  $F = 2 \rightarrow F = 3$
- la transizione al livello di *cross-over* tra i livelli di arrivo con  $F = 2$  e  $F = 3$
- la transizione al livello di *cross-over* tra i livelli di arrivo con  $F = 1$  e  $F = 3$

La scansione a 2 V permette di "zoomare" l'assorbimento in Fig.(3.3), infatti in Fig.(3.4) si osserva solo un picco di assorbimento, quello corrispondente alla transizione tra i livelli iperfini:  $F = 2 \rightarrow F = 3$ . È importante sottolineare che i segnali nelle Fig.(3.3) e Fig.(3.4) sono gli assorbimenti lineari di riferimento per tutta l'analisi successiva. L'ampiezza dei *dip* dipende dal tipo di modulazione utilizzata sui fasci contropropaganti di *pump* e *probe*, mentre la spaziatura tra le frequenze centrali dei *dip* di saturazione ne è indipendente. I due grafici possono essere quindi i riferimenti per i segnali demodulati che andremo ad analizzare, perchè serviranno solo per identificare le transizioni corrispondenti ai segnali dispersivi osservati. Per ottenere questi profili di

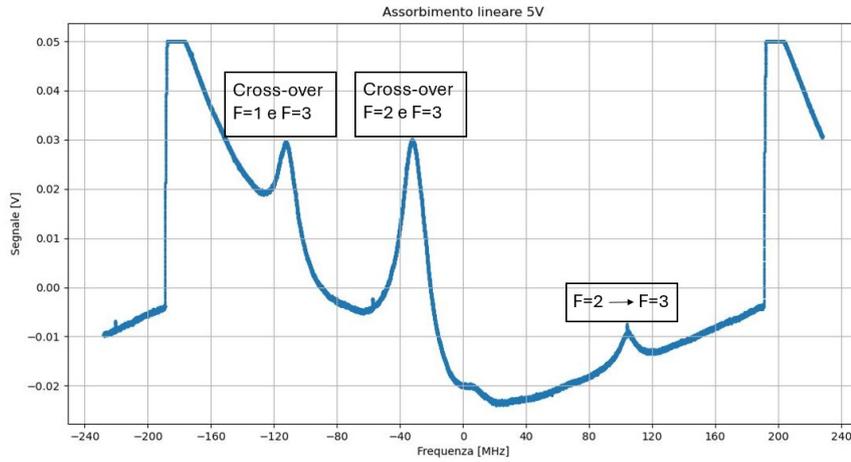


Figura 3.3: Assorbimento con una scansione in frequenza di ampiezza 380 MHz e ampiezza di modulazione di corrente del laser pari a 5 V. Sui picchi di saturazione, *Lamb dip*, sono riportate le transizioni iperfini corrispondenti. Le barre verticali in corrispondenza delle frequenze  $\pm 180$  MHz indicano l'inizio e la fine del periodo della scansione in frequenza.

assorbimento, nel caso della scansione più ampia, la corrente centrale del laser è stata scelta pari a  $I_{laser} = 79.65$  mA, mentre per la scansione "zoomata"  $I_{laser} = 79.51$  mA.

Si sottolinea che in tutti i grafici sono significative solo le differenze tra frequenze; dato che la frequenza del laser non è nota con sufficiente precisione, in ogni grafico si sceglie arbitrariamente pari a 0 la frequenza in assenza di scansione.

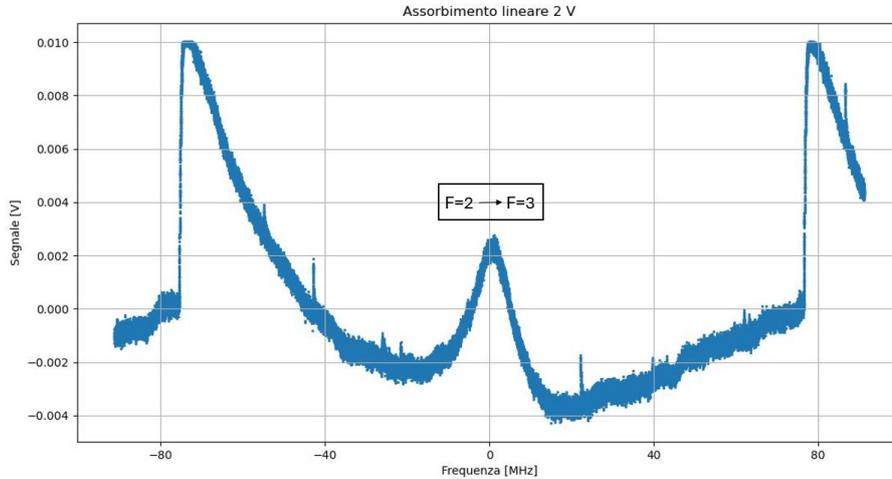


Figura 3.4: Assorbimento con una scansione in frequenza di ampiezza 152 MHz e ampiezza di modulazione di corrente del laser pari a 2V. Sul picco di saturazione, *Lamb dip*, è riportata la transizione iperfine corrispondente. Le barre verticali in corrispondenza delle frequenze  $\pm 76$  MHz indicano l'inizio e la fine del periodo della scansione in frequenza.

### 3.1 Segnali acquisiti con segnali di derivata

In questa sezione sono analizzati i segnali in derivata prima e terza prodotti dalla demodulazione del segnale, effettuata dal demodulatore integrato nella scheda DDS, dell'assorbimento con scansione di ampiezza 380 MHz. L'assorbimento saturato è ottenuto con la modulazione a bassa frequenza ( $\nu_m = 333$  kHz) del *probe*; i segnali in derivata prima sono ottenuti dal demodulatore, il quale calcola il rapporto incrementale del segnale per ottenere la derivata prima discreta, come descritto nel paragrafo (1.4.3).

In Fig.(3.5) sono raffigurate le curve della derivata prima del segnale di assorbimento del fotodiode (Fig.3.3) ottenute dalla demodulazione al variare della profondità di modulazione del *probe*  $\delta\nu$ :  $\delta\nu_1 = 10$  MHz,  $\delta\nu_2 = 5$  MHz,  $\delta\nu_3 = 2$  MHz,  $\delta\nu_4 = 1$  MHz e  $\delta\nu_5 = 0.5$  MHz. Nei segnali corrispondenti alle profondità di modulazione  $\delta\nu_1 = 10$  MHz,  $\delta\nu_2 = 5$  MHz,  $\delta\nu_3 = 2$  MHz, è possibile notare per ognuna delle tre forme dispersive principali. Queste corrispondono alle derivate dei tre picchi di assorbimento in Fig.(3.3). Le curve con profondità di modulazione  $\delta\nu_4 = 1$  MHz e  $\delta\nu_5 = 0.5$  MHz presentano dei segnali dispersivi troppo piccoli per essere presi in considerazione per l'analisi successiva.

Tra le tre forme dispersive possibili per ogni curva, utilizzando come criterio l'ampiezza del segnale, si sceglie di analizzare più nel dettaglio la curva corrispondente alla transizione tra il livello iperfine con  $F = 2$  e il livello di *cross-over* tra il livello di ar-

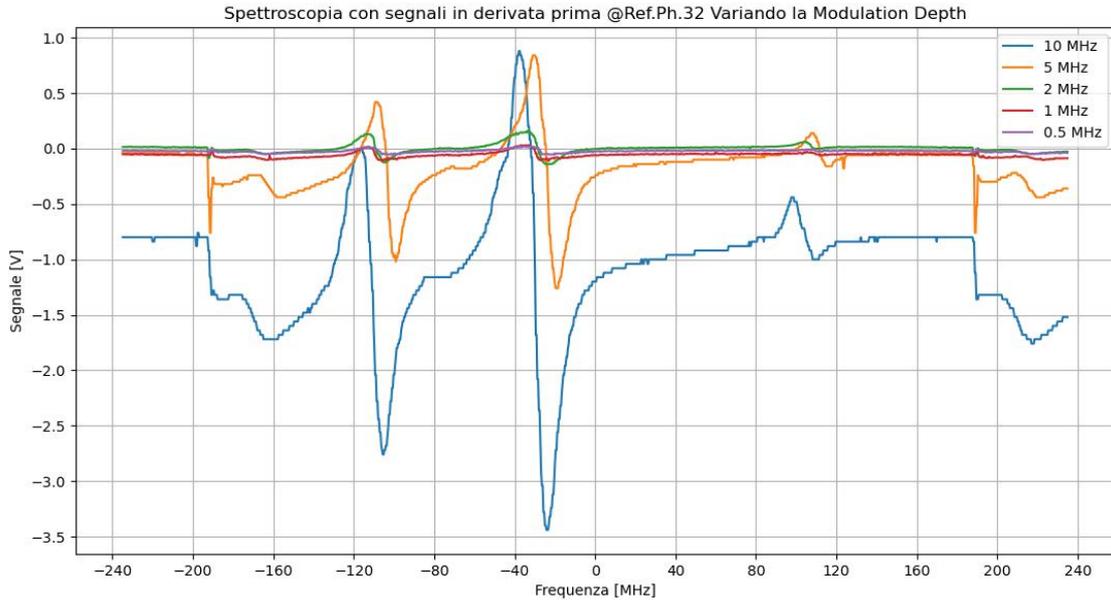


Figura 3.5: Segnali in derivata prima ottenuti dalla demodulazione, relativi ad una scansione in frequenza di ampiezza 380 MHz, al variare della profondità di modulazione  $\delta\nu$  del *probe*:  $\delta\nu_1 = 10$  MHz,  $\delta\nu_2 = 5$  MHz,  $\delta\nu_3 = 2$  MHz,  $\delta\nu_4 = 1$  MHz e  $\delta\nu_5 = 0.5$  MHz. Le barre verticali in corrispondenza delle frequenze  $\pm 180$  MHz indicano l'inizio e la fine del periodo della scansione in frequenza, per frequenze maggiori di 180 MHz il segnale si ripete identico.

rivo con  $F = 2$  e  $F = 3$  (la forma dispersiva centrale). Si procede facendo un *fit* dei dati sperimentali con l'andamento teorico della forma dispersiva della derivata prima per ottenere una stima dei parametri che caratterizzano l'assorbimento, la larghezza di riga naturale (parametro  $\gamma$ ) e l'ampiezza  $A$ . Come descritto nel paragrafo 1.4.3 il demodulatore calcola la derivata prima discreta del segnale di assorbimento proveniente dal fotodiodo. Il segnale dispersivo che vogliamo studiare rappresenta la derivata prima del segnale di assorbimento in corrispondenza del *Lamb dip* associato alla transizione iperfine di *cross-over*.

Sperimentalmente, la frequenza  $\nu$  del *probe*, oltre a variare nel tempo con un periodo  $T = 0.5$  s a causa della scansione, a seguito della modulazione, oscilla tra due valori discreti pari a  $\nu + \delta\nu$  e  $\nu - \delta\nu$  con un periodo  $T = 3 \mu\text{s}$ . Il demodulatore per stimare la derivata prima discreta del segnale, riceve il segnale  $S$  alle frequenze  $\nu_+ = \nu + \delta\nu$  e  $\nu_- = \nu - \delta\nu_p$ , dove  $\nu$  cambia nel tempo a causa della scansione, e ne fa la differenza. Essendo la scansione in frequenza molto più lenta dell'oscillazione della frequenza a causa della modulazione, il demodulatore è in grado di calcolare la differenza del segnale per ogni valore di  $\nu$ , considerando  $\nu$  praticamente costante durante l'oscillazione tra  $\nu + \delta\nu$

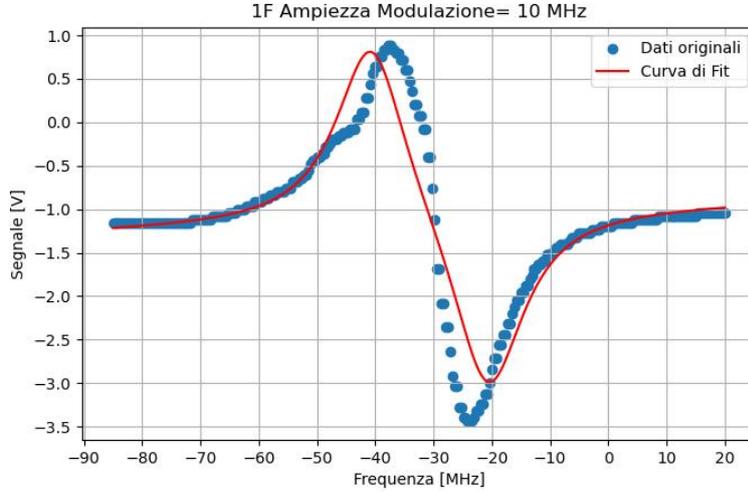


Figura 3.6: *Fit* dei dati sperimentali relativi al segnale in derivata prima (ottenuto dalla demodulazione) con la funzione modello in Eq.(3.1). Il fascio di *probe* è modulato con profondità di modulazione  $\delta\nu = 10$  MHz. Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello di *cross-over* tra i livelli  $F' = 2$  e  $F' = 3$ .

e  $\nu - \delta\nu$ .

La differenza del segnale  $S(\nu + \delta\nu) - S(\nu - \delta\nu)$  è descritta dalla differenza di due Lorentziane, dato che il segnale scorre su un *Lamb dip*. Queste due Lorentziane sono descritte in funzione della frequenza  $\nu_- = \nu - \delta\nu$  e  $\nu_+ = \nu + \delta\nu$ , ed entrambe hanno frequenza centrale  $\nu_0$ . La funzione utilizzata per il fit di segnali in derivata prima è:

$$f(x) = Dx + C + A \left[ \frac{\gamma^2}{(x + \delta\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2} - \frac{\gamma^2}{(x - \delta\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2} \right] \quad (3.1)$$

dove  $x$  è la frequenza variata dalla scansione,  $\delta\nu$  la profondità di modulazione,  $\nu_0$  la frequenza centrale del *dip*,  $\gamma$  la larghezza di riga saturata,  $A$  l'ampiezza,  $C$  il termine costante e  $D$  il coefficiente del termine lineare. Rispetto alla semplice differenza tra due Lorentziane, alla funzione di *fit*, sono aggiunti il termine lineare e il termine costante, per descrivere la presenza di un eventuale off-set e un eventuale dipendenza lineare dalla frequenza. Questi sono generati da un'eventuale dipendenza lineare e quadratica con la frequenza dell'assorbimento, dovuta alle condizioni sperimentali.

Nelle Fig.(3.6), Fig.(3.7) e Fig.(3.8) sono riportati i grafici dei *fit* dei dati sperimentali di segnali in derivata prima con frequenza di modulazione  $\nu_m = 333$  kHz al variare della profondità di modulazione del *probe*:  $\delta\nu_1 = 10$  MHz,  $\delta\nu_2 = 5$  MHz e  $\delta\nu_3 = 2$  MHz.

Nella Tabella (3.1) sono riportati i valori dei parametri con la relativa incertezza, ottenuti dal *fit*. Il fit dei dati è stato realizzato utilizzando il metodo dei minimi quadrati.

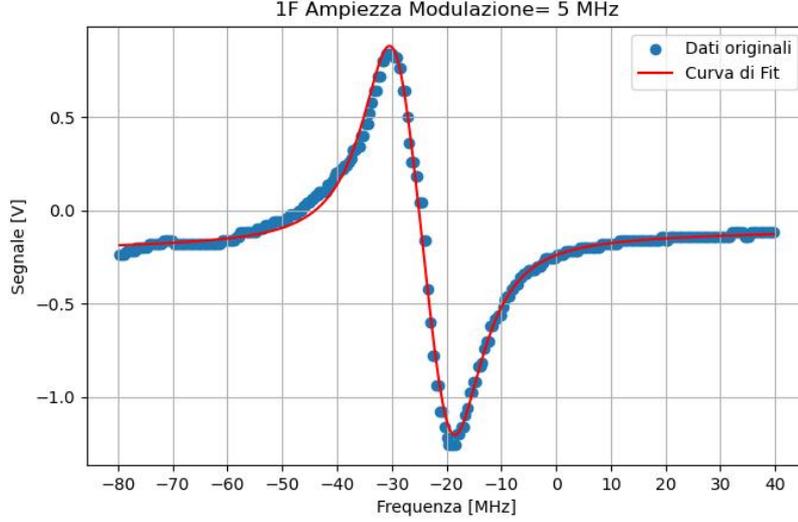


Figura 3.7: *Fit* dei dati sperimentali relativi al segnale in derivata prima (ottenuto dalla demodulazione) con la funzione modello in Eq.(3.1). Il fascio di *probe* è modulato con profondità di modulazione  $\delta\nu = 5$  MHz. Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello di *cross-over* tra i livelli  $F' = 2$  e  $F' = 3$ .

$\delta\nu$ [MHz]	A [V]	$\gamma$ [MHz]	$\nu_0$ [MHz]	C [V]	D [mV/MHz]
10	$2.19 \pm 0.06$	$7.5 \pm 0.5$	$-30.6 \pm 0.2$	$-0.99 \pm 0.03$	$2.9 \pm 0.8$
5	$1.520 \pm 0.009$	$7.05 \pm 0.07$	$-24.43 \pm 0.03$	$-0.15 \pm 0.07$	$10 \pm 3$
2	$0.602 \pm 0.007$	$9.6 \pm 0.1$	$-28.80 \pm 0.05$	$0.0109 \pm 0.0007$	$0.15 \pm 0.02$

Tabella 3.1: Valori dei parametri stimati tramite il *fit* dei dati sperimentali con la funzione modello in Eq.(3.1).

$\delta\nu$ [MHz]	$\sigma[V^2]$
10	0.12
5	0.0015
2	0.00010

Tabella 3.2: Valori della varianza media per i segnali ottenuti al variare della profondità di modulazione  $\delta\nu$  per segnali in derivata prima.

Per confrontare la qualità dei *fit* è stato utilizzato il valore della *varianza media*  $\sigma$ , definita come il rapporto tra la somma dei quadrati degli scarti  $\sum(\Delta Y)^2$  e il numero di gradi di

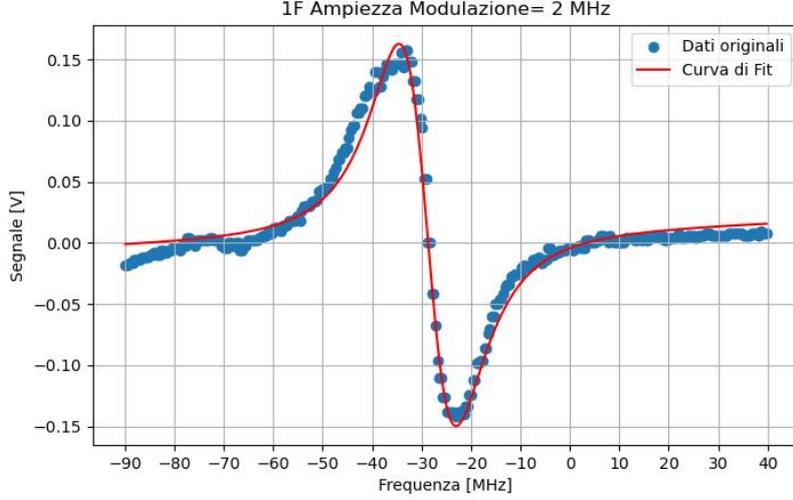


Figura 3.8: *Fit* dei dati sperimentali relativi al segnale in derivata prima (ottenuto dalla demodulazione) con la funzione modello in Eq.(3.1). Il fascio di *probe* è modulato con profondità di modulazione  $\delta\nu = 2$  MHz. Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello di *cross-over* tra i livelli  $F' = 2$  e  $F' = 3$ .

libertà:

$$\sigma = \frac{\sum(\Delta Y)^2}{g.d.l.} \quad (3.2)$$

dove gli scarti  $\Delta Y$  sono calcolati come la differenza tra il valore sperimentale e il valore previsto dal modello, e i gradi di libertà sono ottenuti dalla differenza tra il numero di punti sperimentali e il numero di parametri del *fit*. A causa della mancanza di informazioni sulle incertezze dei dati sperimentali, per valutare la bontà del *fit*, non è stato possibile usare un criterio più fine come il  $\chi^2$ . Tra i parametri stimati con il *fit*, i più significativi sono l'ampiezza  $A$  e l'altezza a mezza altezza  $\gamma$ . Confrontando i valori della varianza media  $\sigma$ , riportati in Tabella (3.2), il miglior *fit* risulta essere quello ottenuto con i dati relativi ai segnali in derivata prima ottenuti con un'ampiezza di modulazione del *probe* di  $\delta\nu = 2$  MHz.

Oltre allo studio dei segnali in derivata prima, si è pensato di studiare anche i segnali in derivata terza. Questo perchè in teoria, la derivata terza del segnale, dovrebbe essere priva dei termini dovuti a dipendenze lineari o quadratiche del segnale di assorbimento (parametri  $C$  e  $D$  in derivata prima), dando luogo a segnale dispersivi centrati allo zero nell'asse delle  $y$ . Sarebbe ottimale eliminare i termini costanti ( $C$ ) e lineari ( $D$ ) che possono variare di giorno in giorno. Dato che l'obiettivo di questo studio è trovare un segnale dispersivo da utilizzare per il laser *locking*, ottenere un segnale stabile nel tempo è necessario. Come vedremo sperimentalmente questo risultato non è stato ottenuto.

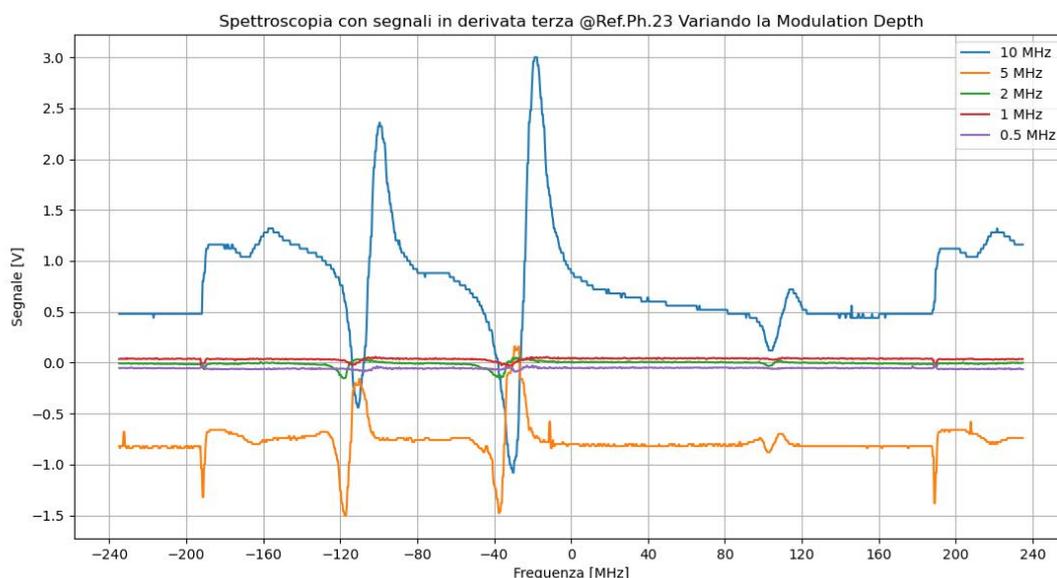


Figura 3.9: Segnali in derivata terza, relativi ad una scansione in frequenza di ampiezza 380 MHz ed ottenuti dalla demodulazione, al variare della profondità di modulazione  $\delta\nu$  del *probe*:  $\delta\nu_1 = 10$  MHz,  $\delta\nu_2 = 5$  MHz,  $\delta\nu_3 = 2$  MHz,  $\delta\nu_4 = 1$  MHz e  $\delta\nu_5 = 0.5$  MHz. Il *probe* ha frequenza di modulazione  $\nu_m = 333$  kHz. Le barre verticali in corrispondenza delle frequenze  $\pm 180$  MHz indicano l'inizio e la fine del periodo della scansione in frequenza, per frequenze maggiori di 180 MHz il segnale si ripete identico.

I segnali in derivata terza sono ottenuti dalla demodulazione del DDS, il quale calcola la derivata terza discreta del segnale, come descritto nel paragrafo 1.4.3.

In Fig.(3.9) sono riportate le curve della derivata terza del segnale di assorbimento del fotodiode (Fig.3.3) ottenute dalla demodulazione al variare della profondità di modulazione del *probe*  $\delta\nu$ :  $\delta\nu_1 = 10$  MHz,  $\delta\nu_2 = 5$  MHz,  $\delta\nu_3 = 2$  MHz,  $\delta\nu_4 = 1$  MHz e  $\delta\nu_5 = 0.5$  MHz. Come visto con i segnali di derivata prima, nei segnali corrispondenti alle profondità di modulazione maggiori ( $\delta\nu_1 = 10$  MHz e  $\delta\nu_2 = 5$  MHz) si distinguono chiaramente tre forme dispersive principali per ogni curva. Queste forme dispersive corrispondono alla derivata terza dei tre picchi di assorbimento in Fig.(3.3). Per l'analisi successiva trascuriamo i segnali con profondità di modulazione  $\delta\nu_3 = 2$  MHz,  $\delta\nu_4 = 1$  MHz e  $\delta\nu_5 = 0.5$  MHz, perchè le curve dispersive risultano troppo poco ampie. Si procede ad analizzare il segnale dispersivo corrispondente alla transizione tra il livello iperfine con  $F = 2$  e il livello di *cross-over* tra il livello di arrivo con  $F' = 2$  e  $F' = 3$  (la forma dispersiva centrale). Come descritto nel paragrafo (1.4.3) il demodulatore calcola il valore della derivata terza discreta del segnale del fotodiode per ogni valore della frequenza  $\nu$  durante la scansione, utilizzando i valori assunti dal segnale alle frequenze  $\nu + 2\delta\nu$ ,  $\nu + \delta\nu$ ,  $\nu - \delta\nu$  e  $\nu - 2\delta\nu$ . Il periodo di oscillazione della frequenza a causa della modulazione è

$T = 3 \mu s$ . Durante un'oscillazione completa tra  $\nu - 2\delta\nu$  e  $\nu + 2\delta\nu$ , la frequenza passa il doppio del tempo sui valori intermedi  $\nu + \delta\nu$ ,  $\nu - \delta\nu$ , per questo motivo il contributo del segnale alle due frequenze centrali deve essere doppio. Dall'Eq.(1.53), descrivendo il segnale alle diverse frequenze con una Lorentziana, come fatto precedentemente per i segnali in derivata prima, si ricava la funzione di *fit* utilizzata per i segnali in derivata terza:

$$f(x) = Dx + C + A \left[ -\frac{\gamma^2}{(x - \nu_0 - 2\delta\nu)^2 + \gamma^2} + 2\frac{\gamma^2}{(x - \nu_0 - \delta\nu)^2 + \gamma^2} - 2\frac{\gamma^2}{(x - \nu_0 + \delta\nu)^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma^2}{(x - \nu_0 + 2\delta\nu)^2 + \gamma^2} \right] \quad (3.3)$$

dove  $x$  è la frequenza variata dalla scansione,  $\delta\nu$  la profondità di modulazione,  $\nu_0$  la frequenza centrale del *dip*,  $\gamma$  la larghezza di riga saturata,  $A$  l'ampiezza,  $C$  il termine costante e  $D$  il coefficiente del termine lineare. I termini lineare e costante con la frequenza sono stati aggiunti per descrivere meglio i dati sperimentali, che possono essere soggetti a qualche effetto in prima approssimazione trascurato dal modello teorico.

Nelle Fig.(3.11) e Fig.(3.10) sono riportati i grafici dei *fit* dei dati sperimentali di segnali di derivata terza con frequenza di modulazione  $\nu_m = 333$  kHz per i valori di profondità di modulazione  $\delta\nu_1 = 10$  MHz e  $\delta\nu_2 = 5$  MHz. Nella Tab(3.3) sono riportati i valori dei parametri stimati tramite il *fit* dei dati sperimentali con la funzione modello. Il *fit* dei dati è stato realizzato con il metodo dei minimi quadrati.

$\delta\nu$ [MHz]	A [V]	$\gamma$ [MHz]	$\nu_0$ [MHz]	C [V]	D [mV/MHz]
10	$27.8 \pm 0.9$	$18.6 \pm 0.3$	$-24.56 \pm 0.08$	$0.81 \pm 0.01$	$0.7 \pm 0.3$
5	$2.8 \pm 0.2$	$10.1 \pm 0.4$	$-33.7 \pm 0.1$	$-0.71 \pm 0.01$	$0.5 \pm 0.3$

Tabella 3.3: Valori dei parametri stimati tramite il *fit* dei dati sperimentali con la funzione modello in Eq.(3.3).

È stata calcolata la varianza  $\sigma$ , come parametro per la bontà del *fit*. Confrontando i valori di  $\sigma$  dei segnali in derivata terza, con i valori di  $\sigma$  ottenuti per i segnali in derivata prima, si nota che il modello utilizzato sui dati del segnale in derivata terza, descrive peggio l'andamento dei dati sperimentali.

$\delta\nu$ [MHz]	$\sigma$ [V <sup>2</sup> ]
10	0.037
5	0.015

Tabella 3.4: Valori della varianza media per i segnali ottenuti al variare della profondità di modulazione  $\delta\nu$  per segnali in derivata terza.

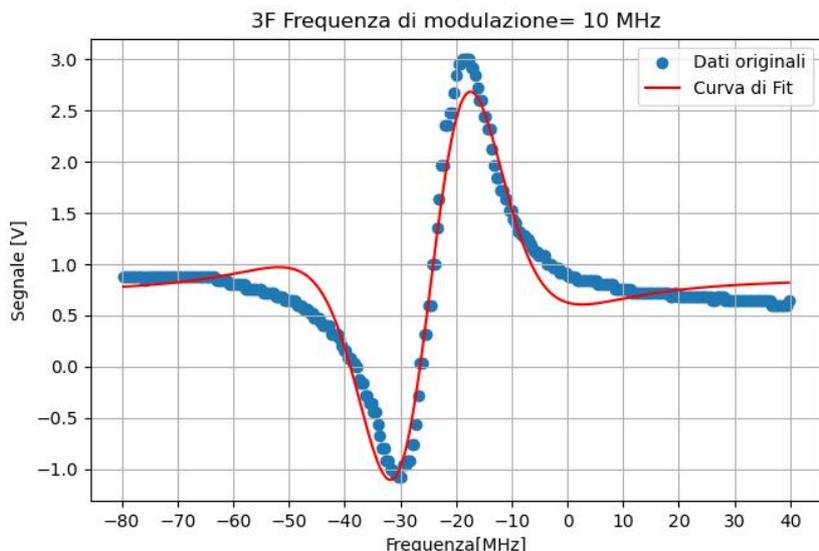


Figura 3.10: *Fit* dei dati sperimentali relativi al segnale in derivata terza (ottenuto dalla demodulazione) con la funzione modello in Eq.(3.3). Il fascio di *probe* è modulato con profondità di modulazione  $\delta\nu = 10$  MHz. Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello di *cross-over* tra i livelli  $F' = 2$  e  $F' = 3$ .

## 3.2 Segnali acquisiti con modulazione in frequenza ad alte frequenze

### 3.2.1 Spettroscopia FM

In questa sezione sono analizzati i segnali ottenuti tramite spettroscopia in modulazione di frequenza prodotti dalla demodulazione fatta dal DDS, dell'assorbimento. L'assorbimento saturato è ottenuto con la modulazione ad alta frequenza ( $\nu_m = 2$  MHz) del fascio di *probe* descritta nel paragrafo 1.4.1.

In Fig.(3.12) sono riportate le curve ottenute dalla demodulazione del segnale di assorbimento con spettroscopia in modulazione di frequenza con frequenza di modulazione  $\nu_m = 2$  MHz, al variare del valore dell'ampiezza di modulazione  $M$ :  $M_1 = 1$  rad,  $M_2 = M_1/2 = 0.5$  rad e  $M_3 = M_1/4 = 0.25$  rad. Anche in questo caso si distinguono, per ogni segnale, tre forme dispersive principali, corrispondenti ai tre picchi di assorbimento in Fig(3.3). Si prosegue l'analisi della forma dispersiva centrale, in riferimento alla Fig.(3.12), solo per i segnali con ampiezza di modulazione  $M_1 = 1$  rad  $M_2 = 0.5$  rad. Le forme dispersive centrali del segnale con  $M_3 = 0.25$  rad, sono troppo poco ampie per essere prese in considerazione per la stabilizzazione in frequenza del laser. Come visto nel paragrafo (1.4.3), quando la frequenza di modulazione è dell'ordine della larghez-

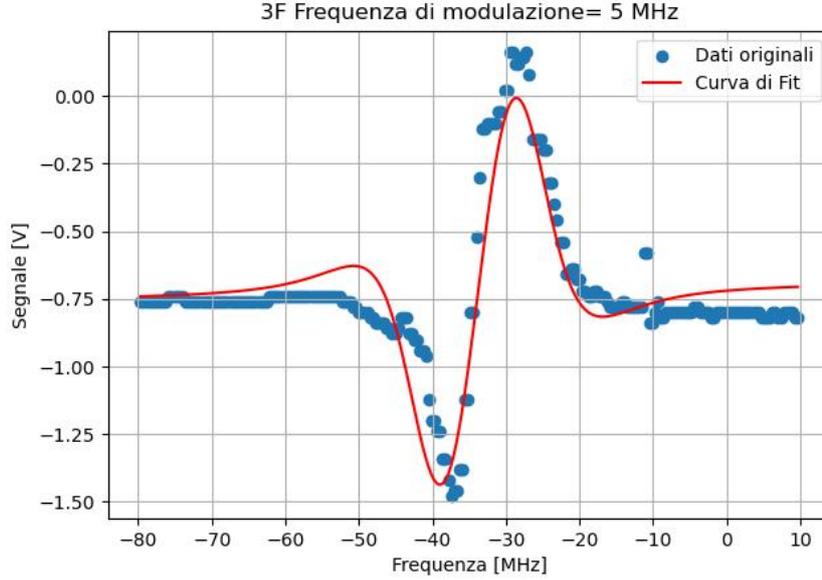


Figura 3.11: *Fit* dei dati sperimentali relativi al segnale in derivata terza (ottenuto dalla demodulazione) con la funzione modello in Eq.(3.3). Il fascio di *probe* è modulato con profondità di modulazione  $\delta\nu = 5$  MHz. Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello di *cross-over* tra i livelli  $F' = 2$  e  $F' = 3$ .

za del *dip* da sondare, il segnale che subisce la modulazione di frequenza ha intensità descritta dall'Eq.(1.43). La componente in fase del segnale, ovvero il coefficiente del  $\cos(\omega_m)t$ , è direttamente proporzionale all'assorbimento indotto dal campione, ed ha la forma  $M(\delta_{-1} - \delta_1)$ . Il termine moltiplicativo  $M(\delta_{-1} - \delta_1)$  descrive l'assorbimento del *probe* (modulato) da parte della cella di rubidio. Si ricorda che  $\delta_n$  descrive l'attenuazione di ampiezza di ogni componente del fascio laser dovuta al mezzo assorbente, ed ha la seguente forma Lorentziana:

$$\delta_n(\nu) = \frac{A\gamma^2}{(\nu - \nu_c - n\nu_m)^2 + \gamma^2} \quad (3.4)$$

dove  $n$  è l'ordine della funzione di Bessel,  $A$  l'ampiezza,  $\gamma$  la larghezza a mezza altezza,  $\nu_c$  la frequenza portante del laser e  $\nu_m$  la frequenza di modulazione. Dato che sperimentalmente si lavora con valori  $M \leq 1$ , si considerano solo due bande laterali aggiuntive rispetto alla frequenza portante ( $\nu_c = \nu_{laser} + 84$  MHz) del fascio di *probe*, ovvero solo gli ordini della funzione di Bessel con  $n = 0, \pm 1$ .

Sostituendo l'Eq.(3.4) nell'espressione del termine in fase, si ottiene:

$$M(\delta_{-1} - \delta_1) = M A \left[ \frac{\gamma^2}{(\nu - (\nu_c - \nu_m))^2 + \gamma^2} - \frac{\gamma^2}{(\nu - (\nu_c + \nu_m))^2 + \gamma^2} \right] \quad (3.5)$$

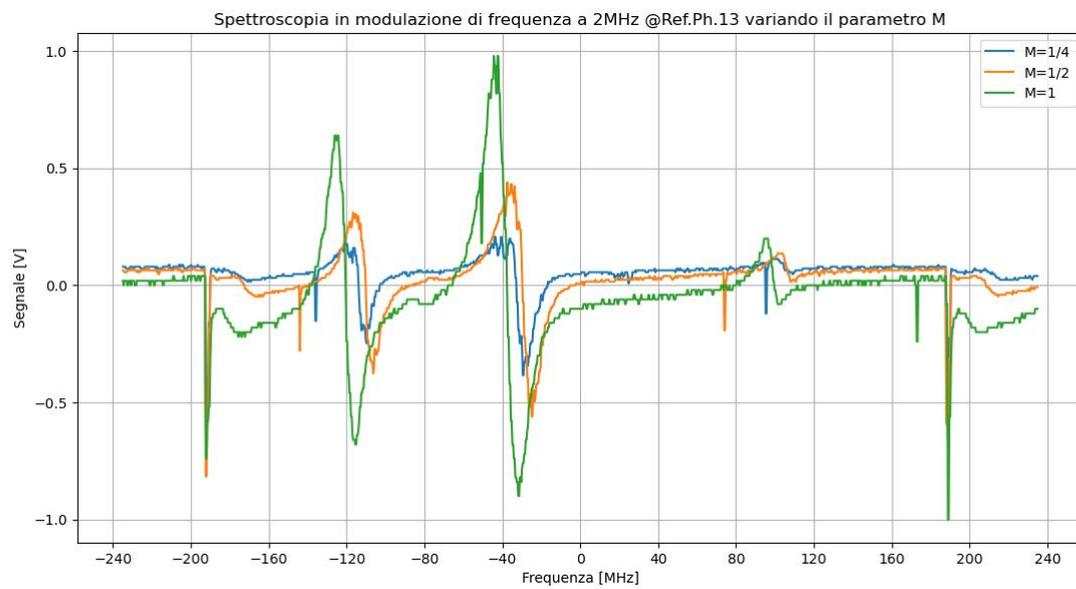


Figura 3.12: Segnali in spettroscopia con modulazione in frequenza, relativi ad una scansione in frequenza di ampiezza 380 MHz ottenuti dalla demodulazione, al variare dell'ampiezza di modulazione  $M$ :  $M_1 = 1$  rad,  $M_2 = M_1/2 = 0.5$  rad e  $M_3 = M_1/4 = 0.25$  rad. Il fascio di *probe* è modulato a frequenza  $\nu_m = 2$  MHz. Le barre verticali in corrispondenza delle frequenze  $\pm 180$  MHz indicano l'inizio e la fine del periodo della scansione in frequenza, per frequenze maggiori di 180 MHz il segnale si ripete identico.

dove  $M$  è l'ampiezza di modulazione. La componente in fase del segnale dell'assorbimento del *probe*, in corrispondenza della transizione iperfine, è descritta dalla differenza tra due Lorenziane una centrata alla frequenza  $\nu_c + \nu_m$  e l'altra alla frequenza  $\nu_c - \nu_m$ , ed ha forma dispersiva. Quella in Eq.(3.6) è la funzione di partenza utilizzata per il *fit*.

Il segnale in arrivo al demodulatore  $S(t)$ , misurato dal fotodiodo, dipende dal tempo come l'intensità descritta dalla Eq.(1.42); per estrarre il coefficiente del termine  $\cos(\omega_m t)$ , si calcola l'integrale:

$$\int S(t) \cos(\omega_m t + \Phi), dt \quad (3.6)$$

con  $\Phi = 0$ . Sperimentalmente, il demodulatore sincrono, invece di moltiplicare il segnale  $S(t)$  per una funzione sinusoidale, moltiplica per un'onda quadra. Variando la fase dell'onda quadra, questa può fare le veci di un'onda cosinusoidale (come nel nostro caso) oppure di un'onda sinusoidale. Dopo che il demodulatore ha isolato la componente in fase del segnale, questa è inviata all'oscilloscopio, col quale si osservano curve come quelle riportate in Fig.(3.12).

Come conseguenza del ragionamento sopra descritto, la funzione di *fit* scelta per i segnali dispersivi prodotti dal demodulatore, in condizioni di spettroscopia FM, risulta essere:

$$f(x) = Dx + C + A \left[ \frac{\gamma^2}{(x - \nu_0 + \nu_m)^2 + \gamma^2} - \frac{\gamma^2}{(x - \nu_0 - \nu_m)^2 + \gamma^2} \right] \quad (3.7)$$

dove  $x$  è la frequenza variata dalla scansione,  $\nu_0$  la frequenza centrale del *Lamb dip*,  $\nu_m$  la frequenza di modulazione,  $\gamma$  la larghezza di riga saturata (a causa della saturazione fatta da fascio di *pump*),  $A$  l'ampiezza (c'è anche il contributo del valore di  $M$  al suo interno),  $C$  il termine costante,  $D$  il coefficiente lineare. Nelle Fig.(3.13) e Fig.(3.14) sono riportati i grafici dei *fit* dei dati sperimentali della spettroscopia in modulazione di frequenza con  $\nu_m = 2$  MHz per valori di ampiezza di modulazione  $M$ :  $M_1 = 1$  rad e  $M_2 = 0.5$  rad. I *fit* sono stati realizzati con la tecnica della minimizzazione dei minimi quadrati. In Tab.(3.5) sono riportate le stime dei valori dei parametri della funzione di *fit* con la loro relativa incertezza. Per permettere una stima della bontà dei *fit*, in Tab.(3.6) sono riportati i valori della varianza media  $\sigma$  definita nel paragrafo precedente.

$M$ [rad]	A [V]	$\gamma$ [MHz]	$\nu_0$ [MHz]	C [V]	D [mV/MHz]
1	$3.33 \pm 0.04$	$9.4 \pm 0.1$	$-37,64 \pm 0.05$	$-0.009 \pm 0.006$	$0.6 \pm 0.1$
0.5	$1.57 \pm 0.02$	$8.5 \pm 0.1$	$-29.98 \pm 0.06$	$0.029 \pm 0.003$	$0.20 \pm 0.08$

Tabella 3.5: Valori dei parametri stimati tramite il *fit* dei dati sperimentali con la funzione modello in Eq.(3.8).

Confrontando i valori della varianza  $\sigma$  riportati in Tab(3.8), i dati sperimentali relativi al segnale con ampiezza di modulazione  $M = 0.5$  rad sono quelli meglio descritti dal modello teorico esplicitato dalla funzione di *fit* in Eq.(3.9).

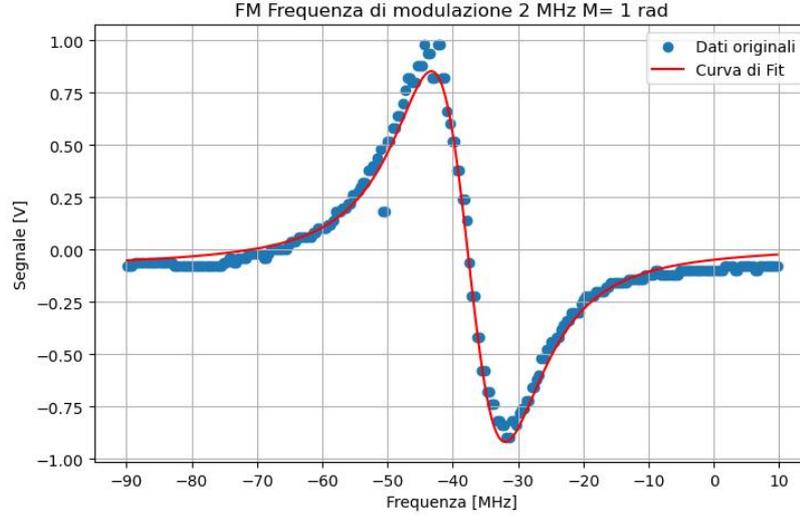


Figura 3.13: *Fit* dei dati sperimentali relativi all'assorbimento con modulazione di frequenza con la funzione modello in Eq.(3.7). Il fascio di *probe* è modulato a frequenza  $\nu_m = 2$  MHz e ampiezza di modulazione  $M = 1$  rad. Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello di *cross-over* tra i livelli  $F' = 2$  e  $F' = 3$ .

$M$ [rad]	$\sigma[V^2]$
$M_1$	0.0030
$M_2$	0.0011

Tabella 3.6: Valori della varianza media per i segnali con  $M_1 = 1$  rad e  $M_2 = 0.5$  rad

### 3.2.2 Spettroscopia a trasferimento di modulazione

In questa sezione sono analizzati i segnali ottenuti tramite spettroscopia a trasferimento di modulazione prodotti dalla demodulazione fatta dal DDS, dell'assorbimento con una scansione in frequenza di ampiezza 152 MHz. L'assorbimento saturato è ottenuto con la modulazione ad alta frequenza ( $\nu_m = 2$  MHz) del fascio di *pump* descritta nel paragrafo 1.4.2. In Fig.(3.15), sono riportate le curve ottenute dalla demodulazione del segnale di assorbimento con spettroscopia in modulazione di frequenza con modulazione a  $\nu_m = 2$  MHz, al variare della potenza del *pump*:  $P_1 = 540 \mu\text{W}$ ,  $P_2 = 400 \mu\text{W}$ ,  $P_3 = 250 \mu\text{W}$  e  $P_4 = 103 \mu\text{W}$ . A differenza dei casi precedenti, in questo grafico è presente una sola forma dispersiva. Questo è dovuto all'assorbimento lineare a 2 V, il quale "zoomma" su un unico *Lamb dip*, quello corrispondente alla transizione tra gli stati iperfini con  $F = 2$  e  $F = 3$ . Le curve nel grafico in Fig.(3.15), rappresentano al variare della potenza del *pump*, il segnale dispersivo corrispondente alla transizione sopra citata.

L'Eq.(1.45) del paragrafo 1.4.2, descrive il segnale in arrivo al fotodiodo a causa

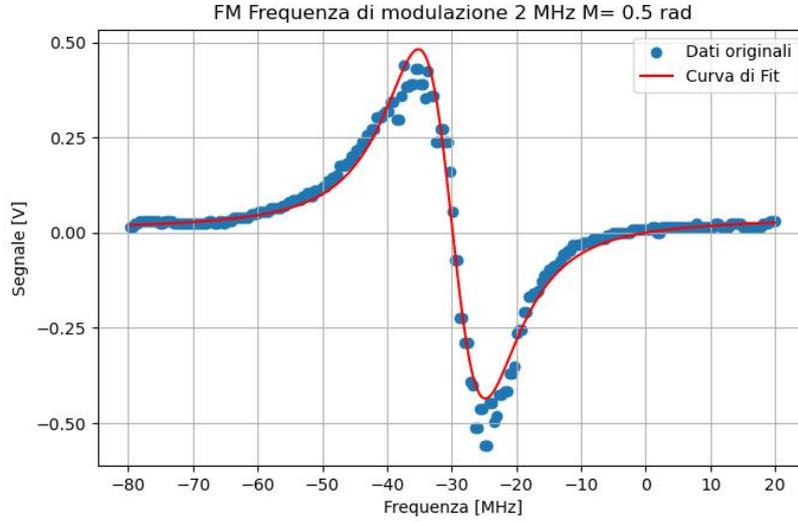


Figura 3.14: *Fit* dei dati sperimentali relativi all'assorbimento con modulazione di frequenza con la funzione modello in Eq.(3.7). Il fascio di *probe* è modulato a frequenza  $\nu_m = 2$  MHz e ampiezza di modulazione  $M = 0.5$  rad. Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello di *cross-over* tra i livelli  $F' = 2$  e  $F' = 3$ .

del *probe* modulato tramite l'interazione con il *pump* modulato direttamente dall'AOM. Come nel caso della spettroscopia a modulazione di frequenza, descritta nel paragrafo precedente, il demodulatore si occupa dell'estrazione della componente in fase del segnale. Questa componente è costituita dal termine :  $L_{-1} - L_{-1/2} + L_{1/2} - L_1$  che moltiplica la funzione  $\cos(\omega_m t + \Phi)$ , in cui  $L_n$  risulta essere la Lorentziana:

$$L_n = \frac{\gamma^2}{(\nu - \nu_0 - n\nu_m)^2 + \gamma^2} \quad (3.8)$$

dove  $\gamma$  è la larghezza di riga naturale,  $\nu_0$  la frequenza centrale del *dip*,  $n$  l'ordine della funzione di Bessel,  $\nu_m$  la frequenza di modulazione. Allora la funzione utilizzata per il fit dei segnali ottenuti dal DDS in spettroscopia a traferimento di modulazione è:

$$f(x) = Dx + C + A \left[ \frac{\gamma^2}{(x - \nu_0 + \nu_m)^2 + \gamma^2} - \frac{\gamma^2}{(x - \nu_0 + \nu_m/2)^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma^2}{(x - \nu_0 - \nu_m/2)^2 + \gamma^2} - \frac{\gamma^2}{(x - \nu_0 - \nu_m)^2 + \gamma^2} \right] \quad (3.9)$$

dove  $x$  è la frequenza variata dalla scansione,  $\nu_0$  la frequenza centrale del *Lamb dip*,  $\gamma$  la larghezza di riga naturale,  $A$  l'ampiezza,  $C$  il termine costante e  $D$  il coefficiente lineare. Nelle Fig.(3.16), Fig.(3.17), Fig.(3.18) e Fig.(3.19) sono riportati i grafici dei *fit* dei dati

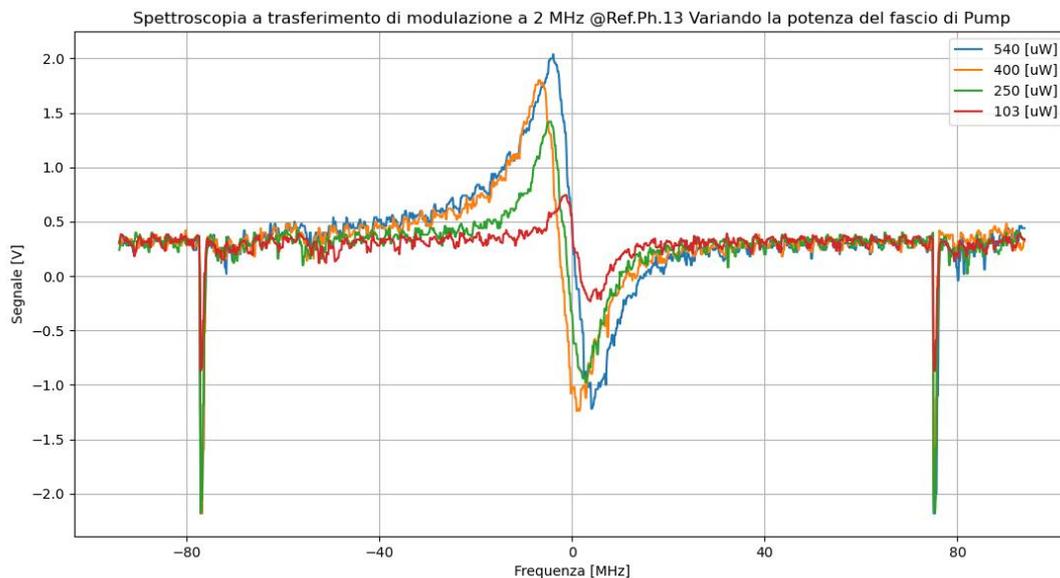


Figura 3.15: Segnali in spettroscopia a trasferimento di modulazione, relativi ad una scansione in frequenza di ampiezza 152 MHz ottenuti dalla demodulazione, al variare della potenza del fascio di *pump*  $P$ :  $P_1 = 540 \mu\text{W}$ ,  $P_2 = 400 \mu\text{W}$ ,  $P_3 = 250 \mu\text{W}$  e  $P_4 = 103 \mu\text{W}$ . Il fascio di *pump* è modulato a frequenza  $\nu_m = 2$  MHz. Le barre verticali in corrispondenza delle frequenze  $\pm 76$  MHz indicano l'inizio e la fine del periodo della scansione in frequenza, per frequenze maggiori di più di 76 MHz della frequenza centrale della transizione, il segnale si ripete identico. Il segnale è centrato sulla transizione iperfine dallo stato  $F = 2$  a  $F' = 3$ .

sperimentali ottenuti dalla demodulazione della spettroscopia a 2 V a trasferimento di modulazione, al variare della potenza del *pump* con frequenza di modulazione  $\nu_m = 2$  MHz.

In Tab.(3.7) sono riportati i valori stimati dei parametri della funzione di *fit* con le relative incertezze. Anche in questo caso il *fit* è stato realizzato con la tecnica della minimizzazione dei quadrati. In Tab.(3.8) sono riportati i valori della varianza, per permettere una stima della qualità del *fit*. Il *fit* in cui i dati sperimentali sono meglio descritti dalla funzione modello in Eq.(3.11), è quello realizzato con potenza del *pump* pari a  $P_4 = 130 \mu\text{W}$ .

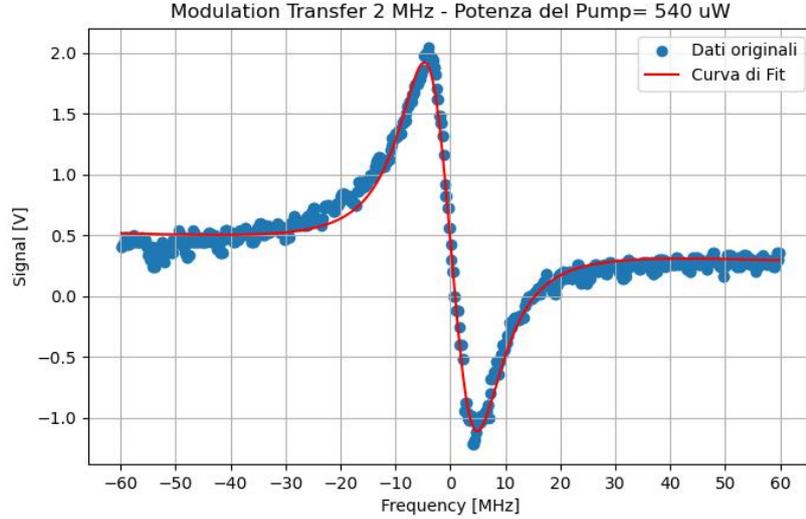


Figura 3.16: *Fit* dei dati sperimentali relativi all'assorbimento in spettroscopia con trasferimento di modulazione con la funzione modello in Eq.(3.9). Il fascio di *pump* è modulato a frequenza  $\nu_m = 2$  MHz ed ha potenza  $P = 540 \mu\text{W}$ . Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello  $F' = 3$ .

$P$ [ $\mu\text{W}$ ]	A [V]	$\gamma$ [MHz]	$\nu_0$ [MHz]	C [V]	D [mV/MHz]
540	$9.30 \pm 0.06$	$7.33 \pm 0.06$	$0.09 \pm 0.03$	$0.405 \pm 0.003$	$-1.71 \pm 0.009$
400	$8.09 \pm 0.05$	$6.52 \pm 0.05$	$-2.7 \pm 0.02$	$0.351 \pm 0.003$	$-1.17 \pm 0.08$
250	$5.90 \pm 0.08$	$7.0 \pm 0.1$	$-1.37 \pm 0.05$	$0.299 \pm 0.005$	$0.5 \pm 0.2$
103	$1.81 \pm 0.03$	$3.73 \pm 0.10$	$0.93 \pm 0.04$	$0.298 \pm 0.002$	$-0.2 \pm 0.1$

Tabella 3.7: Valori dei parametri stimati tramite il *fit* dei dati sperimentali con la funzione modello in Eq.(3.10).

$P$ [ $\mu\text{W}$ ]	$\sigma$ [ $\text{V}^2$ ]
540	0.0072
400	0.0049
250	0.012
103	0.0028

Tabella 3.8: Valori della varianza media per i segnali ottenuti al variare della potenza  $P$  del fascio di *pump*.

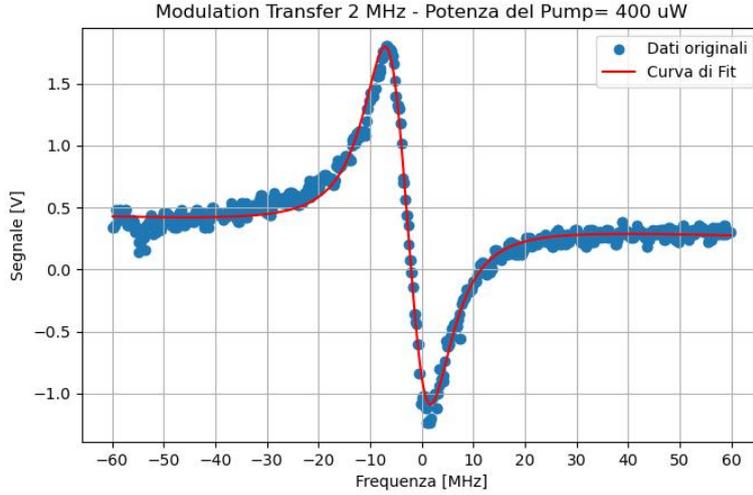


Figura 3.17: *Fit* dei dati sperimentali relativi all'assorbimento in spettroscopia con trasferimento di modulazione con la funzione modello in Eq.(3.9). Il fascio di *pump* è modulato a frequenza  $\nu_m = 2$  MHz ed ha potenza  $P = 400 \mu\text{W}$ . Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello  $F' = 3$ .

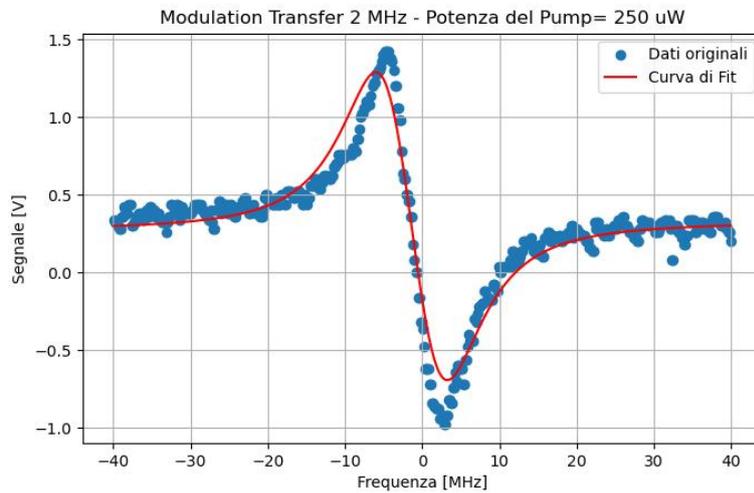


Figura 3.18: *Fit* dei dati sperimentali relativi all'assorbimento in spettroscopia con trasferimento di modulazione con la funzione modello in Eq.(3.9). Il fascio di *pump* è modulato a frequenza  $\nu_m = 2$  MHz ed ha potenza  $P = 250 \mu\text{W}$ . Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello  $F' = 3$ .

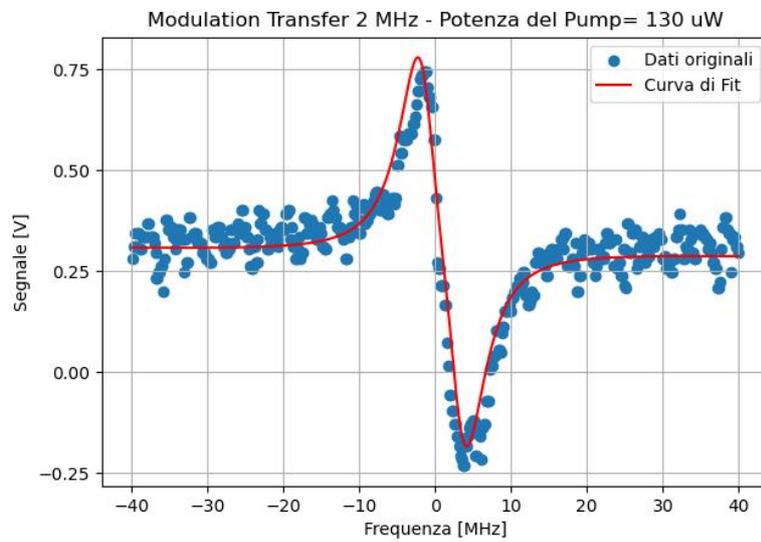


Figura 3.19: *Fit* dei dati sperimentali relativi all'assorbimento in spettroscopia con trasferimento di modulazione con la funzione modello in Eq.(3.9). Il fascio di *pump* è modulato a frequenza  $\nu_m = 2$  MHz ed ha potenza  $P = 130 \mu\text{W}$ . Il campione di dati sperimentali analizzati descrive la transizione iperfine tra il livello  $F = 2$  e il livello  $F' = 3$ .

# Capitolo 4

## Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro di tesi è studiare i segnali dispersivi per selezionare quello più adatto per la stabilizzazione in frequenza del laser.

Per scegliere la migliore forma dispersiva, non è sufficiente che il *fit* sia buono, in quanto questo comporta solo che non ci siano effetti ulteriori rispetto a quelli previsti dal modello che è stato utilizzato.

Avere una grande variazione del segnale, rende più facile tenere traccia della variazione della frequenza del laser. Per avere una misura della precisione della stabilizzazione della frequenza raggiungibile con i diversi segnali dispersivi, definiamo il fattore di merito  $\delta\nu$ :

$$\Delta\nu = \left| \frac{\sigma_{STD}(\Delta Y)}{f'_{fit}(\nu_0; A, \gamma, \nu_0, C, D)} \right| \quad (4.1)$$

dove  $\sigma_{STD}(\Delta Y)$  è la radice quadrata della varianza degli scarti calcolata precedentemente, e  $f'_{fit}(\nu_0; A, \gamma, \nu_0, C, D)$  è la derivata prima della funzione del *fit* utilizzata calcolata con i valori dei parametri stimati col *fit* nel valore di frequenza centrale stimato  $\nu_0$ .

Le curve caratterizzate da un valore di  $\Delta\nu$  minore, sono le curve con la forma dispersiva meno rumorosa e/o con un gradiente maggiore. Nelle Tab.(4.1), Tab.(4.2), Tab.(4.3) e Tab.(4.4) sono riportati i valori del fattore di merito  $\Delta\nu$  per ogni curva il cui *fit* è riportato nel capitolo precedente.

Un altro parametro da tenere in conto nella scelta della miglior curva dispersiva è la stabilità della curva. Curve dispersive i cui *fit* producono valori dei parametri  $C$  e  $D$  diversi da zero, sono curve instabili se i parametri  $C$  e  $D$  non sono costanti nel tempo, di giorno in giorno. Una curva con  $C$  e  $D$  prossimi allo zero ha un segnale più stabile, il centro della figura dispersiva è fisso. Quindi la curva più stabile sarà quella con valori di  $C$  e  $D$  minori.

Utilizzando i criteri sopra descritti, la curva con precisione maggiore, corrispondente ad un valore di  $\Delta\nu$  minore, risulta essere quella ottenuta tramite spettroscopia a trasferimento di modulazione con potenza del *pump* pari a  $P_2 = 400 \mu\text{W}$  (Fig.(3.17). La

$\delta\nu$ [MHz]	$\Delta\nu$ [MHz]
10	-1.69
5	-0.141
2	-0.213

Tabella 4.1: Valori del fattore di merito  $\Delta\nu$  per segnali in derivata prima al variare della profondità di modulazione  $\delta\nu$ .

$\delta\nu$ [MHz]	$\Delta\nu$ [MHz]
10	0.434
5	0.559

Tabella 4.2: Valori del fattore di merito  $\Delta\nu$  per segnali in derivata terza al variare della profondità di modulazione  $\delta\nu$ .

$M$ [rad]	$\Delta\nu$ [MHz]
$M_1$	-0.195
$M_2$	-0.217

Tabella 4.3: Valori del fattore di merito  $\delta\nu$  per segnali in spettroscopia con modulazione di frequenza al variare dell'indice di modulazione  $M$ .

$P$ [ $\mu$ W]	$\delta\nu$ [MHz]
540	-0.159
400	-0.129
250	-0.302
103	-0.305

Tabella 4.4: Valori del fattore di merito  $\delta\nu$  per segnali in spettroscopia a trasferimento di modulazione al variare della potenza  $P$  del fascio di *pump*.

curva più stabile, descritta da valori di  $C$  e  $D$  minori, risulta invece essere quella ottenuta in spettroscopia a modulazione di frequenza con indice di modulazione  $M = 1$  rad (Fig.(3.13)). Si sottolinea che questa curva ha anche un valore di  $\Delta\nu = 0.195$  MHz, tra i quattro più bassi ottenuti. Questa curva ha quindi entrambe le caratteristiche che cerchiamo anche se  $\Delta\nu$  non è il migliore.

In conclusione, tra i due segnali selezionati, quale curva sia migliore dipende dalle esigenze sperimentali. Se è necessaria una curva di dispersione molto precisa allora è più indicata la curva ottenuta in spettroscopia a trasferimento di modulazione, se si preferisce una figura meno precisa ma più stabile, la curva più adatta risulta quella ottenuta in spettroscopia a modulazione di frequenza.

Per proseguire lo studio, è necessario eseguire il laser *locking* con entrambe le curve di dispersione identificate e verificare quale si adatti meglio alle esigenze sperimentali.

# Appendice A

## Approfondimento allargamento per potenza

È proposto, in questa sezione, un secondo metodo per ricavare il profilo di assorbimento con allargamento per potenza, rispetto a quello presentato nel paragrafo 1.2.2. Si lavora, come nella discussione precedente, con laser intensi.

Quando un sistema a due livelli è esposto a un campo di radiazione  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$ <sup>1</sup>, la probabilità di trovare il sistema nel livello  $|b\rangle$  (livello eccitato), è una funzione oscillante nel tempo:

$$|b(t, \omega)|^2 = \frac{D_{ab}^2 E_0^2}{\hbar^2 (\omega_{ab} - \omega)^2 + D_{ab}^2 E_0^2} \sin^2 \left( \frac{1}{2} t \sqrt{(\omega_{ab} - \omega)^2 + (D_{ab} E_0 / \hbar)^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

dove  $\omega_{ab}$  è la pulsazione caratteristica della transizione  $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$  e  $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$ ,  $D_{ab}$  è l'elemento corrispondente alla transizione  $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$  della matrice di dipolo<sup>2</sup>. La probabilità  $|b(t, \omega)|^2$  alla pulsazione di risonanza  $\omega = \omega_{ab}$  oscilla con la frequenza di *flopping* di Rabi  $\Omega_R = \Omega_{ab} = D_{ab} E_0 / \hbar$ . Se il livello più alto  $|b\rangle$  può decadere tramite processi spontanei con costante di rilassamento  $\gamma$ , la probabilità media di trovare il sistema nel livello  $|b\rangle$  all'istante  $t$ :

$$\begin{aligned} P_b &= \overline{|b(t, \omega)|^2} = \int_0^\infty \gamma e^{-\gamma t} |b(t, \omega)|^2 dt = \frac{1}{2} \frac{D_{ab} E_0^2}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2 [1 + (D_{ab}^2 E_0^2) / (\hbar^2 \gamma^2)]} \\ &= \frac{1}{2} \frac{D_{ab} E_0^2}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \gamma^2 (1 + S)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

dove  $S = D_{ab}^2 E_0^2 / \hbar^2 \gamma^2$  che coincide con il parametro di saturazione. La probabilità di trovare il sistema nel livello  $b$  è proporzionale al profilo di assorbimento, perchè la probabilità di trovare il sistema nel livello  $b$  è la probabilità che avvenga l'assorbimento,

<sup>1</sup>Nel volume atomico  $kz = 0$ , considerando il sistema di riferimento centrato nell'atomo

<sup>2</sup>

quindi il profilo trovato per la probabilità ha lo stesso andamento del profilo di assorbimento. Come nella discussione precedente troviamo un profilo di riga Lorentziano con allargamento di potenza con larghezza di riga:  $\gamma_S = \gamma\sqrt{1+S}$

# Appendice B

## Taratura asse delle frequenze

I segnali di assorbimento, di derivata prima, terza, di spettroscopia a modulazione di frequenza e di spettroscopia a trasferimento di modulazione sono raccolti dal fotodiode in funzione del tempo. Sappiamo che per fare la scansione in frequenza e ottenere lo spettro di assorbimento della riga  $D_2$  del rubidio, è necessario variare la frequenza del laser. Per ottenere la spazzata in frequenza, è mandata sul laser una tensione a dente di sega periodica nel tempo, in modo tale da variare la frequenza del laser nel tempo in maniera periodica. Per poter interpretare i grafici ottenuti dall'acquisizione, è necessario convertire la dipendenza temporale dei dati del segnale nel periodo della funzione a dente di sega del potenziale, in dipendenza dalla frequenza del laser. Per farlo si identificano le corrispondenze tra i *Lamb dip* della curva di assorbimento Fig.(B.1) e le transizioni iperfini Fig.(3.1), confrontando le differenze in frequenza tra le transizioni teoriche e la spaziatura tra i *dip* nella figura di assorbimento.



Figura B.1: Acquisizione dell'oscilloscopio dell'assorbimento con scansione di ampiezza 10 V.

Dallo schema dei livelli elettronici del rubidio della linea  $D_2$  riportata in Fig.(3.1), si ricava la differenza tra frequenza assorbita nella transizione tra i livelli iperfini  $F = 2 \rightarrow$

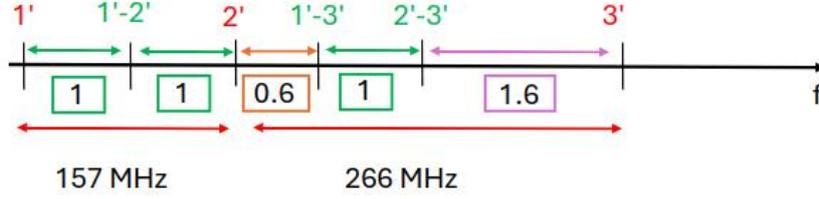


Figura B.2: Schema della spaziatura in frequenza tra le transizioni iperfini.  $1'$ ,  $2'$  e  $3'$  sono i livelli iperfini di arrivo della transizione con  $F' = 1$ ,  $F' = 2$  e  $F' = 3$ , mentre in verde sono rappresentati i livelli di arrivo di *cross-over*. Nei quadrati sono riportate le proporzioni tra le spaziature, associando il valore 1 alle distanze pari a 78 MHz.

$F = 2$  e nella transizione tra i livelli iperfini  $F = 2 \rightarrow F = 1$ , pari a 156.95 MHz, e la differenza in frequenza tra gli assorbimenti tra i livelli iperfini  $F = 2 \rightarrow F = 3$  e  $F = 2 \rightarrow F = 2$  pari a 266.65 MHz. In aggiunta alle precedenti transizioni sono possibili altre tre transizioni di assorbimento a causa del *cross-over*. Le proporzioni tra le spaziature delle frequenze assorbite, corrispondenti alle sei transizioni iperfini, sono riportate in Fig.(B.2). Le stesse proporzioni sono rispettate anche dalla spaziatura tra le frequenze centrali dei *Lamb dip* in Fig.(B.1). Tramite le proporzioni fissate, è possibile identificare la transizione iperfine corrispondente a ciascun *Lamb dip* nel profilo di assorbimento. Una volta identificati i diversi *Lamb dip*, è possibile associare alla loro distanza "temporale", una distanza in frequenza. In questo modo è possibile ricavare il fattore per riscalarne l'asse x, e ottenere i grafici del segnale in funzione della frequenza. Col procedimento precedente, si scopre che i 5 *dip* presenti in Fig.(B.1) sono corrispondenti alle 5 transizioni iperfini a frequenza più alta( sempre all'interno della riga  $D_2$ , con livello iperfine di partenza  $F = 2$ ). Partendo da sinistra, il primo picco corrisponde alla transizione di *cross-over* tra i livelli di arrivo con  $F = 1$  ed  $F = 2$ , il secondo alla transizione  $F = 2 \rightarrow F = 2$ , il terzo alla transizione di *cross-over* tra i livelli  $F = 1$  e  $F = 3$ , il quarto alla transizione di *cross-over* tra i livelli  $F = 2$  e  $F = 3$ , e l'ultimo alla transizione  $F = 2 \rightarrow F = 3$ . Facendo i calcoli, si ottiene che  $1 \text{ ms} = 0.76 \text{ MHz}$ . Essendo il periodo della modulazione della frequenza del laser  $T = 0.5 \text{ s}$ , l'ampiezza dell'oscillazione della frequenza è di  $\Delta\nu_{laser} \approx 380 \text{ MHz}$ . La frequenza del laser varia nell'intervallo  $\pm 190 \text{ MHz}$  attorno alla frequenza centrale. Allora tutti i valori dell'asse x dei tempi, possono essere riscaldati in valori di frequenza secondo la formula:

$$x_{\text{frequenza}}[\text{MHz}] = \frac{380 x_{\text{tempo}}[\text{s}]}{0.5[\text{s}]}$$

L'Eq.(B.1) è valida solo per segnali acquisiti con una modulazione della corrente sul laser tramite un potenziale a dente di sega di ampiezza 5 V. Per la modulazione di

corrente di ampiezza 2 V bisogna modificare la conversione. Il periodo del segnale a dente di sega rimane  $T = 0.5$  s, ma essendo minore l'ampiezza di oscillazione, anche la frequenza del laser oscilla con ampiezza diversa. La conversione tempo frequenza ha quindi un coefficiente diverso. Considerando  $2/5$  dell'ampiezza dell'oscillazione della frequenza trovata per il caso a 5 V, si trova che per la modulazione della corrente di ampiezza 2 V la conversione risulta essere:

$$x_{\text{frequenza}}[\text{MHz}] = \frac{152 x_{\text{tempo}}[\text{s}]}{0.5[\text{s}]}$$

# Bibliografia

- [1] G. C. Bjorklund. Frequency-modulation spectroscopy: a new method for measuring weak absorptions and dispersions. *Optics letters*, 1980.
- [2] W. Demtröder. *Laser spectroscopy*. Springer, 1973.
- [3] W. Demtröder. *Laser spectroscopy*. Springer, 1982.
- [4] C. J. Foot. *Atomic physics*, volume 7. OUP Oxford, 2004.
- [5] D. J. Griffiths. Introduction to electrodynamics fourth edition. 2021.
- [6] A. Korpel. Acousto-optics—a review of fundamentals. *Proceedings of the IEEE*, pages 48–53, 1981.
- [7] Z. J. Mausolff. *Frequency Modulation Spectroscopy: Theoretical and Experimental Line Shapes*. PhD thesis, University of San Francisco San Francisco, California, 2014.
- [8] DJ McCarron, SA King, and SL Cornish. Modulation transfer spectroscopy in atomic rubidium. *Measurement science and technology*, 2008.
- [9] National Institute of Standards NIST and Technology. Atomic spectra database lines form.
- [10] A. Yariv. *Optical Electronics in Modern Communications*. Oxford University Press, 1997.