Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

MATEMATICA TRA ARTE E MUSICA: UN PROGETTO DIDATTICO

Presentata da:
Francesco Bernardo Forcellini

Relatore:
Chiar.mo Prof. **Giorgio Bolondi**

Sessione III

Anno Accademico 2010-2011

Indice

Introduzione

La simmetria esercita una forte attrazione tanto sugli artisti quanto sugli scienziati: essa è intimamente associata al fatto che gli uomini preferiscono istintivamente la regolarità. L'intento di questa tesi è quello di realizzare un'unità didattica rivolta ad una classe di terza media, incentrata sullo studio della simmetria: partiremo dall'osservazione delle arti decorative, nella fattispecie dei fregi, fino ad approdare all'analisi di particolari composizioni musicali.

Nel primo capitolo ci proponiamo di classificare i *gruppi dei fregi*, ovvero i sottogruppi discreti dell'insieme delle isometrie del piano euclideo in cui le traslazioni formano un sottogruppo ciclico infinito. Per fare ciò partiremo dal modo canonico di rappresentare tutte le isometrie del piano e dalla loro classificazione tramite il Teorema di Chasles. Analizzeremo quindi le proprietà delle composizioni di riflessioni e vedremo che qualsiasi isometria è esprimibile come prodotto di riflessioni. Utilizzando queste conoscenze, potremo quindi mostrare che esistono solo sette tipi di gruppi dei fregi geometricamente differenti.

Nel secondo capitolo trasferiremo i concetti introdotti nel primo capitolo dal piano euclideo a quello musicale. Vedremo come la simmetria è uno strumento molto utilizzato dai compositori. Investigheremo le simmetrie che appaiono in musica, utilizzando per descriverle il linguaggio matematico della geometria e della teoria dei gruppi introdotti in precedenza. Inoltre considerando il tempo potenzialmente infinito ed essendo l'insieme delle altezze udibili limitato, analizzeremo le corrispondenze tra i fregi e le capacità simmetriche di un brano musicale ripetuto.

Infine, nel terzo capitolo troveremo la descrizione della proposta didattica costruita sulla base dei contenuti raccolti nei primi due capitoli. Tale laboratorio è stato ideato nel tentativo di assolvere un triplice compito: primo, fornire uno strumento in più per lo studio matematico delle isometrie e delle simmetrie; secondo, mostrare in che modo un processo fisico come la musica può essere rappresentato sul piano cartesiano come funzione del tempo, offrendo un primo assaggio di ciò che molti ragazzi dovranno affrontare nel proseguo dei loro studi; terzo, introdurre lo studente ad un approccio più critico e "scientifico" all'arte in generale, e in particolare alla musica.

Capitolo 1

Gruppi dei fregi

1.1 Spazi metrici, gruppi, isometrie e simmetrie

Prima di poter iniziare a parlare dei gruppi dei fregi, è necessario discutere alcuni concetti preliminari. Partiamo dal concetto di distanza tra due punti in un insieme.

Definizione 1.1. Una **metrica** su un insieme X è una mappa $d : X \to X$ tale che:

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;

iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.

Un insieme X con una metrica d è chiamato **spazio metrico** e si indica con (X, d). Noi siamo interessati a mappe (funzioni) da uno spazio metrico in se stesso che preservano la distanza, quindi introduciamo la seguente definizione.

Definizione 1.2. Un'**isometria** di uno spazio metrico (X, d) è una biezione $u : X \to X$ tale che, per ogni $x, y \in X$, $d(x, y) = d(u(x), u(y))$ (*Notazione*: per una mappa $u : X \to Y$ e un elemento $x \in X$ denoteremo l'immagine di x con ux invece di $u(x)$).

Indichiamo con $Isom(X, d)$ l'insieme delle isometrie di uno spazio metrico (X, d). In altre parole, $Isom(X, d)$ è l'insieme delle funzioni dall'insieme in se stesso che preservano la distanza. Di questo tipo di insiemi ne esistono molti esempi, noi però ci occuperemo quasi esclusivamente dell'insieme delle isometrie del piano euclideo sotto la metrica pitagorica. Ci riferiremo a questo insieme con $\mathbb{E}$, formalmente definito come $\mathbb{E} := Isom(\mathbb{R}^2, d)$ con $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

Cambiamo ora argomento per presentare le seguenti definizioni, formalizzazioni di fondamentali concetti algebrici.

Definizione 1.3. Un **gruppo** è una coppia $(G, \cdot)$ costituita da un insieme G e da un'operazione binaria in G, cioè un'applicazione $\cdot : G \times G \to G$ che associa ad ogni $(g, g') \in G \times G$ un elemento $g \cdot g' \in G$, chiamato prodotto di g per g', in modo che siano soddisfatti i seguenti assiomi:

G1 *(Associatività)* $(g \cdot g') \cdot g'' = g \cdot (g' \cdot g'')$ per ogni $g, g', g'' \in G$.

G2 *(Esistenza dell'elemento neutro)* Esiste $e \in G$ tale che $e \cdot g = g \cdot e = g$ per ogni $g \in G$.

G3 *(Esistenza dell'inverso)* Per ogni $g \in G$ esiste $g^{-1} \in G$ tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Un gruppo $(G, \cdot)$ si dice commutativo o abeliano se soddisfa il seguente assioma:

G4 *(Commutatività)* $g \cdot g' = g' \cdot g$ per ogni $g, g' \in G$.

Definizione 1.4. Un sottoinsieme F di un gruppo G si dice **sottogruppo** di G se soddisfa le seguenti condizioni:

SG1 Per ogni $f, f' \in F$ il prodotto $f \cdot f' \in F$.

SG2 L'identità $e \in F$.

SG3 Se $f \in F$, allora $f^{-1} \in F$.

Definizione 1.5. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice **normale** se $Hx = xH$ per ogni $x \in G$. Indichiamo un sottogruppo normale H di G scrivendo $H \lhd G$.

C'è un'ulteriore equivalente definizione di un sottogruppo normale che sarà utile in seguito, espressa col seguente Teorema.

Teorema 1.1. *$H \lhd G$ se e solo se $x^{-1}Hx = H$ per ogni $x \in G$.*

I concetti di isometrie e gruppi vanno ora a combinarsi nel prossimo Teorema (*Notazione*: indicheremo la composizione di mappe $f \circ g$ con fg e $f \circ g(x) = f(g(x))$ con fgx).

Teorema 1.2. *L'insieme delle isometrie di uno spazio metrico X, Isom(X), forma un gruppo con la composizione di mappe.*

Dimostrazione. Per prima cosa mostriamo l'esistenza di un elemento neutro. Considero la mappa identità $i : X \to X$, $x \mapsto x$. Ovviamente la mappa identità i è una biezione. Inoltre, per ogni $x, y \in X$, $d(ix, iy) = d(x, y)$ essendo $ix = x$ e $iy = y$. Di conseguenza $i \in Isom(X)$. Poichè $f(ix) = fx = i(fx)$, la mappa identità $i \in Isom(X)$ è l'elemento neutro: per ogni $f \in Isom(X)$, $fi = if = f$.

La composizione di mappe è certamente associativa: $h(gf)x = h(g(fx)) = hg(fx)$.

Ora dobbiamo mostrare l'esisteza degli inversi, sia $u \in Isom(X)$. Poichè $u \in Isom(X)$, u è una biezione. Di conseguenza esiste una mappa u^{-1} tale che $uu^{-1} = u^{-1}u = i$. Siano $x, y \in X$. Poichè vale $d(u^{-1}x, u^{-1}y) = d(uu^{-1}x, uu^{-1}y) = d(ix, iy) = d(x, y)$ allora anche $u^{-1} \in Isom(X)$. Quindi, per ogni $u \in Isom(X)$, esiste un $u^{-1} \in Isom(X)$ tale che $uu^{-1} = u^{-1}u = i$.

Per completare la dimostrazione, mostriamo che $Isom(X)$ è chiuso rispetto alla composizione di mappe. In altre parole, dobbiamo mostrare che, per ogni $u, v \in Isom(X)$, $vu \in Isom(X)$. Siano $x, y \in X$. Per definizione $d(x, y) = d(ux, uy)$ e $ux, uy \in X$. Di conseguenza $d(vx, vy) = d(vux, vuy)$. Quindi vale $d(vux, vuy) = d(x, y)$. Perciò, $vu \in Isom(X)$. □

Consideriamo ora una figura, ovvero un insieme di punti sul piano. È interessante osservare le isometrie che lasciano l'aspetto dell'oggetto in questione immutato, che mandano cioè la figura in se stessa. L'insieme di queste isometrie, come vedremo nel prossimo teorema, formano un sottogruppo di $\mathbb{E}$.

Definizione 1.6. $u \in \mathbb{E}$ è una **simmetria** per la figura F se $uF = F$.

Teorema 1.3. *L'insieme di tutte le simmetrie di una figura F è un sottogruppo di $\mathbb{E}$, e si chiama* ***gruppo di simmetria*** *di F.*

Dimostrazione. Sia $S = \{u \in \mathbb{E} | uF = F\}$ l'insieme di tutte le simmetrie di F. L'identità i è chiaramente una simmetria di F, quindi appartiene a S che di conseguenza non è vuoto. Supponiamo $u, v \in S$, mostriamo che $vu \in S$: per ipotesi $uF = F$ e $vF = F$ quindi $vuF = v(uF) = vF = F$, la composta è quindi una simmetria. Inoltre se $u \in S$ allora anche l'inversa $u^{-1} \in S$, infatti $u^{-1}F = u^{-1}uF = iF = F$. Quindi S è un sottogruppo di $\mathbb{E}$. □

1.2 $\mathbb{E}$ ed il teorema di Chasles

In questo paragrafo tratteremo esclusivamente $\mathbb{E}$, l'insieme delle isometrie del piano euclideo (con metrica pitagorica). Iniziamo definendo formalmente le isometrie più conosciute: la traslazione, la rotazione e la riflessione. Più tardi, il Teorema di Chasles ci mostrerà come qualsiasi isometria di $\mathbb{R}^2$ può essere scritta come composizione di una riflessione, rotazione e traslazione.

Definizione 1.7. Una **traslazione** t è una mappa che muove ogni punto di una fissata distanza secondo una fissata direzione. Quindi, per qualche $x \in \mathbb{R}^2$ di coordinate cartesiane (x_1, x_2)

$$t : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + a_1, x_2 + a_2)$$

dove a_1 e a_2 sono costanti che definiscono il vettore costante $\underline{a} = (a_1, a_2)$. Indichiamo la traslazione con $t(\underline{a})$ e chiamiamo $\underline{a}$ l'**asse** di t.

Le traslazioni sono trasformazioni che mantengono l'orientamento e non hanno punti fissi, tranne naturalmente il caso della traslazione di vettore nullo.

Le traslazioni si compongono secondo la seguente regola: se $\underline{a} = (a_1, a_2)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2)$ sono due vettori costanti in $\mathbb{R}^2$, allora $t(\underline{a})t(\underline{b}) = t(\underline{a} + \underline{b})$ dove t manda un punto del piano $x = (x_1, x_2)$ nel punto $tx = (x_1 + a_1 + b_1, x_2 + a_2 + b_2)$. Di conseguenza *l'insieme delle traslazioni in $\mathbb{E}$ forma un sottogruppo di $\mathbb{E}$.*

Definizione 1.8. Una **rotazione** s del piano è una mappa che muove ogni punto di un certo angolo fissato rispetto ad un punto fissato, chiamato **centro**. Considerando O l'origine di un sistema di riferimento a coordinate polari,

$$s : (\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + \alpha)$$

dove (ρ, θ) sono le coordinate polari di un generico punto in $\mathbb{R}^2$ e α è un angolo fissato. Indichiamo tale rotazione con $s = s(O, \alpha)$.

Le rotazioni preservano l'orientazione[1] e le rotazioni non banali (cioè di angolo non nullo) hanno un unico punto fisso, il centro. Le rotazioni con lo stesso centro si compongono secondo la seguente regola:

$$s(O, \alpha)s(O, \beta) = s(O, \alpha + \beta)$$

[1] Si dice che una isometria *preserva l'orientazione* quando, dato un poligono G con n lati i cui vertici siano numerati da 1 a n in senso orario, la sua immagine tramite l'isometria mantiene i vertici numerati nello stesso ordine (in senso orario). Si dice invece che l'isometria *non preserva l'orientazione* se l'immagine del poligono ha i vertici numerati in senso antiorario.

dove $s(O, \alpha + \beta) : (\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + \alpha + \beta)$ e α e β sono angoli costanti. Segue che *le rotazioni aventi lo stesso centro O formano un sottogruppo di* $\mathbb{E}$.

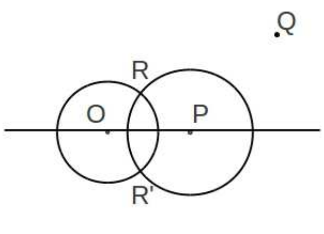
Definizione 1.9. Una **riflessione** r è una mappa che manda ogni punto del piano nella sua immagine specchiata lungo una linea l. Questa linea è chiamata **asse** di r e indichiamo tale riflesione scrivendo $r(l)$. In altre parole, dato un punto $P \in \mathbb{R}^2$, se $P \in l$ allora $rP = P$, altrimenti rP è l'unico punto di $\mathbb{R}^2$ tale che l è la retta perpendicolare al segmento $\overline{PrP}$ passante per il suo punto medio.

Le riflessioni non preservano l'orientazione e fissano solo i punti sull'asse di riflessione. L'inversa di una riflessione è la riflessione stessa: $r(l)^2 = i$. Discuteremo della composizione di riflessioni con differenti assi nei prossimi paragrafi.

Cercheremo di mostrare che ogni isometria del piano può essere scritta come composizione di riflessione, rotazione e traslazione. Al fine di raggiungere tale obiettivo utilizziamo il seguente risultato.

Lemma 1.4. *Siano O, P, Q tre punti non allineati di $\mathbb{R}^2$ e siano $u_1, u_2 \in \mathbb{E}$ tali che $u_1O = u_2O$, $u_1P = u_2P$ e $u_1Q = u_2Q$. Allora $u_1 = u_2$.*

Dimostrazione. Sia $u = u_2^{-1}u_1$. Quindi, $O = uO$, $P = uP$ e $Q = uQ$. $\mathbb{E}$ è un gruppo, quindi $u \in \mathbb{E}$. Sia $R \in \mathbb{R}^2$. Poichè $u \in \mathbb{E}$, $d(O, R) = d(uO, uR) = d(O, uR)$. Quindi, uR sta su un cerchio C_1 centrato in O di raggio $d(O, R)$. Analogamente, uR sta su un cerchio C_2 centrato in P di raggio $d(P, R)$. Quindi, $R, uR \in C_1 \cap C_2$. Poichè O, P, Q non sono allineati, $O \neq P$. Segue che $|C_1 \cap C_2| \in \{1, 2\}$. Se $|C_1 \cap C_2| = 1$, allora $R = uR$ e la dimostrazione è finita. Se invece $|C_1 \cap C_2| = 2$, $C_1 \cap C_2 = \{R, R'\}$, e $uR \in \{R, R'\}$. Seque che la linea $\overline{OP}$ è perpendicolare a $\overline{RR'}$ e lo divide a metà. Equivalentemente per ogni punto $S \in \mathbb{R}^2$, $d(S, R) = d(S, R')$ se e solo se $S \in \overline{OP}$. Poichè O, P, Q non sono allineati, $Q \notin \overline{OP}$, quindi $d(Q, R) \neq d(Q, R')$. Poichè $d(Q, R) = d(uQ, uR) = d(Q, uR)$, $R' \neq uR$. Quindi, $R = uR$ per ogni $R \in \mathbb{R}^2$ e il lemma è dimostrato. □



Teorema 1.5 (di Chasles)**.** *Fissata una linea l e un punto $O \in \mathbb{R}^2$ tale che $O \in l$. Qualsiasi $u \in \mathbb{E}$ può essere univocamente scritto come*

$$u = tsr^\epsilon$$

dove r è una riflessione rispetto all'asse l, $\epsilon \in \{0,1\}$, s è una rotazione di centro O e t è una traslazione.

Dimostrazione. Sia t una traslazione tale che $uO = tO$. Quindi $t^{-1}uO = O$. Sia $P \in l$ tale che $P \neq O$. Segue che $0 < d(O,P) = d(t^{-1}uO, t^{-1}uP) = d(O, t^{-1}uP)$. Quindi, sia P che $t^{-1}uP$ stanno su un cerchio di centro O e di raggio $d(O,P) = d(O,t^{-1}uP)$. Segue che esiste una rotazione s centrata in O tale che $sP = t^{-1}uP$. Quindi, $P = s^{-1}t^{-1}uO$. Poichè s è una rotazione di centro O, $sO = O$, quindi $O = s^{-1}t^{-1}uO$. Sia $Q \notin l$. Certamente, $d(O,Q) = d(s^{-1}t^{-1}uO, s^{-1}t^{-1}uQ) = d(O, s^{-1}t^{-1}uQ)$ e $d(P,Q) = d(s^{-1}t^{-1}uP, s^{-1}t^{-1}uQ) = d(P, s^{-1}t^{-1}uQ)$. Analogamente al ragionamento nel Lemma 1.4, $s^{-1}t^{-1}uQ$ è uguale o a Q o al riflesso di Q rispetto alla linea l. Nel primo caso $\epsilon = 0$. Nel secondo invece $\epsilon = 1$. In entrambi i casi comunque O e P rimangono fissati. Di conseguenza, essendo O, P, Q non allineati, per il Lemma 1.4, $u = tsr^\epsilon$.

Per dimostrare l'unicità, supponiamo $tsr^\epsilon = t's'r^\delta$ con $\epsilon, \delta \in \{0,1\}$, s, s' sono rotazioni di centro O, e t, t' sono traslazioni. Se questa isometria preserva l'orientazione, allora $\epsilon = \delta = 0$. Se invece l'isometria inverte l'orientazione $\epsilon = \delta = 1$. Certamente moltiplicando entrambi i lati per r rimarrà $ts = t's'$. Ancora, con opportune semplici moltiplicazioni, otteniamo $t'^{-1}t = s's^{-1}$ che è sia una traslazione che una rotazione intorno a O. Poichè la rotazione fissa O e l'unica traslazione avente punti fissi è quella banale, $t'^{-1}t = s's^{-1}$ deve essere la mappa identica i. Segue che $s = s'$ e $t = t'$. □

1.3 Presentazione di un gruppo

Sospendiamo temporaneamente il discorso relativo alle isometrie del piano euclideo per introdurre le notazioni che utilizzeremo per descrivere e classificare i gruppi dei fregi.

L'insieme dei **generatori** X è un insieme formato da simboli, generalmente in numero finito, $x_1, x_2, ..., x_n$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dobbiamo pensare ai simboli $x_i^{\pm 1}$, $1 \leq i \leq n$, come lettere di un alfabeto $X^\pm$ da cui possono essere formate **parole**. La **lunghezza** di una parola è il numero delle lettere di cui è composta, assumendo tale numero finito. Includiamo all'insieme la parola vuota e di lunghezza zero. Una parola è detta **ridotta** se non esistono due elementi x_i e x_i^{-1} contigui, per ogni $i \in \{1, ..., n\}$. È sempre possibile ottenere una parola ridotta eliminando tali elementi contigui (ovvero sostituendoli con la parola vuota). Indichiamo con $F(X)$ l'insieme di tutte le parole ridotte.

L'insieme delle **relazioni** R è l'insieme dei relatori, ovvero delle equazioni tra le parole, generalmente in numero finito, tipo $u_i = v_i$, con $u_i, v_i \in F(X)$, $i \in 1, ..., m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Diciamo che $< X|R >$ è una **presentazione** del gruppo G o, equivalentemente, $G =< X|R >$, se sono soddisfatte le seguenti tre condizioni:

i) ogni elemento di G può essere scritto cone una parola in $X^{\pm}$;

ii) le equazioni in R sono tutte contenute in G;

iii) ogni equazione tra parole in $X^{\pm}$ contenuta in G è conseguenza delle relazioni in R.

Il seguente lemma sarà utile in seguito per la classificazione dei gruppi dei fregi.

Lemma 1.6. *Sia $T \subseteq G$, t un generatore di T e sia $r \in G$. Allora, $r^{-1}tr$ è un generatore del gruppo $r^{-1}Tr = \{r^{-1}xr | x \in T\}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in r^{-1}Tr$. Poichè t è un generatore di T, segue che $x = r^{-1}t^l r$ per qualche $l \in \mathbb{Z}$. Notiamo che $(r^{-1}tr)^l = r^{-1}trr^{-1}tr...r^{-1}tr = r^{-1}t^l r$, quindi $x = (r^{-1}tr)^l$. Poichè x è un arbitrario elemento di $r^{-1}Tr$, allora $r^{-1}tr$ è un generatore di $r^{-1}Tr$. □

1.4 Composizione di riflessioni lungo assi distinti

Ritorniamo alle isometrie del piano: analizziamo ora le composizioni di riflessioni lungo differenti assi. In questo modo saremo in grado di comporre e classificare le isometrie in $\mathbb{E}$ e inoltre semplificheremo la classificazione dei gruppi dei fregi. Iniziamo con la composizione di due riflessioni con assi diversi.

Teorema 1.7. *Siano $r, r' \in \mathbb{E}$ riflessioni lungo le rispettive linee distinte l ed l'. Se $l \nparallel l'$, allora $r'r$ è una rotazione di angolo uguale al doppio dell'angolo formato da l ed l', avente come centro il punto di intersezione di l ed l'. Se $l \parallel l'$, allora $r'r$ è una traslazione nella direzione perpendicolare alle due rette, di una distanza uguale al doppio della distanza che separa l da l'.*

Dimostrazione. Siano r, r' riflessioni lungo le linee l ed l' rispettivamente. Assumiamo $l \neq l'$, quindi o $l \nparallel l'$ oppure $l \parallel l'$.

Caso 1: supponiamo $l \nparallel l'$. Sia α l'angolo formato dalle due rette e chiamiamo O il loro punto d'intersezione: $l \cap l' = \{O\}$. Sia $P \in \mathbb{R}^2$. Se consideriamo O come origine e l come asse, possiamo scrivere P in termini di coordinate polari, $P = (\rho, \theta)$, ed $r : (\rho, \theta) \to (\rho, -\theta)$. Sia $r'P = P' = (\rho, \phi)$. Poichè, per costruzione, l' divide esattamente a metà l'angolo $\widehat{POP'}$, $\frac{\theta+\phi}{2} = \alpha$ e segue che $\phi = 2\alpha - \theta$. Quindi, $r'r : (\rho, \theta) \to (\rho, 2\alpha + \theta)$ e cioè $r'r = s(O, 2\alpha)$. In altre parole $r'r$ è una rotazione con centro O e di due volte l'angolo tra l ed l'.

Caso 2: supponiamo $l \parallel l'$. Sia a la distanza tra le due rette e sia P un generico punto di $\mathbb{R}^2$. Se consideriamo l come asse delle ascisse, possiamo scrivere P in termini di coordinate cartesiane, $P = (x, y)$, $r : (x, y) \to (x, -y)$ ed $r' : (x, y) \to (x, z)$. Notiamo che essendo $\frac{y+z}{2} = a$, allora $z = 2a - y$. Segue che $r'r = (x, y) \to (x, 2a + y)$. Quindi $r'r = t(0, 2a)$, ovvero una traslazione di modulo due volte la distanza tra l ed l'. □

Naturalmente, segue dal teorema appena enunciato che ogni traslazione o rotazione può essere scritta come composizione di due riflessioni.

Prima di continuare introduciamo una nuova isometria, che comparirà nel prossimo teorema.

Definizione 1.10. Dati due punti distinti P e P' su una linea l, l'isometria $q(P, P') = r(l)t(\overrightarrow{PP'})$ si chiama **glissoriflesione**. (Nota: $t(\overrightarrow{PP'})$ è l'unica traslazione tale che $tP = P'$).

Le glissoriflessioni non preservano l'orientazione e non hanno punti fissi. Come evince dal seguente Teorema, la glissoriflessione può anche essere espressa come composizione di tre riflessioni lungo linee distinte.

Teorema 1.8. *Il prodotto di 3 riflessioni in $\mathbb{E}$ è o una riflessione o una glissoriflessione, a seconda che il numero di punti d'intersezione dei distinti assi sia minore o maggiore di $\frac{3}{2}$.*

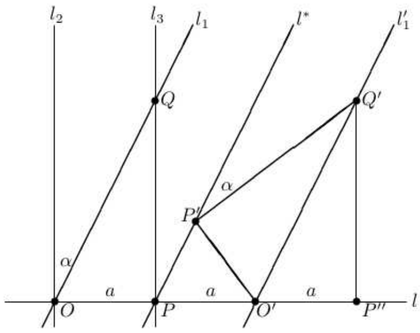
Dimostrazione. Siano $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{E}$ riflessioni lungo le tre rispettive rette l_1, l_2, l_3. Poichè due rette distinte possono avere al massimo un solo punto in comune, segue che il numero n di punti d'intersezione di 3 rette può essere o 0 o 1 o 2 o 3.

Supponiamo $n = 0$. In virtù del Teorema 1.7 r_2r_1 è una traslazione nella direzione ortogonale a l_1 di modulo $2a$, dove a è la distanza tra l_1 e l_2. Per il Teorema 1.7 esiste una linea l tale che la riflessione r lungo questa linea, composta alla riflessione r_3 è una traslazione nella direzione ortogonale a l

di modulo $2a$. Poichè $l \parallel l_3 \parallel l_1$, $r_2r_1 = r_3r$. Quindi $r_3r_2r_1 = r_3r_3r = r$ (ogni riflessione composta con se stessa dà l'identità), cioè $r_3r_2r_1$ è la riflessione r lungo la retta l. Analogamente, nel caso in cui $n = 1$, possiamo scegliere la retta l in modo che $r_2r_1 = r_3r$, dove r è una riflessione lungo l. Come prima, $r_3r_2r_1$ è la riflessione r lungo la retta l.

Consideriamo il caso $n \geq 2$. Notiamo che ruotando gli assi l_1 ed l_2 rispetto al loro punto di intersezione, e lasciando fissa l_3, non cambia r_2r_1. Quindi possiamo trasformare tutti i casi con $n \geq 2$ nel caso in cui $n = 2$ e $l_2 \parallel l_3$ senza modificare la composizione $r_3r_2r_1$. Quindi assumiamo $n = 2$ e $l_2 \parallel l_3$. Sia O il punto d'intersezione delle rette l_1 e l_2 e sia Q il punto d'intersezione delle rette l_1 e l_3. Tracciamo la retta l in modo che $O \in l$ e $l \perp l_2$. Notiamo che $l \perp l_3$. Sia P il punto d'intersezione delle linee l ed l_3. Di conseguenza o $P = Q$ oppure $P \neq Q$.

Supponiamo $P \neq Q$. Sia $O' = r_3r_2r_1O$ e analogamente definiamo Q'. Poichè r_1 fissa O, $O' = r_3r_2r_1O = r_3r_2O$. Analogamente $Q' = r_3r_2Q$. Per il Teorema 1.7, O' e Q' sono semplicemente le immagini rispettivamente di O e Q, secondo la traslazione nella direzione di l di modulo $2a$ dove a è la distanza tra l_2 ed l_1. Poichè $r_3r_2r_1 \in \mathbb{E}$, $d(O, P) = d(r_3r_2r_1O, r_3r_2r_1P)$, $d(O, Q) = d(r_3r_2r_1O, r_3r_2r_1Q)$, e $d(P, Q) = d(r_3r_2r_1P, r_3r_2r_1Q)$. Segue che, avendo i rispettivi lati tra loro congruenti, i triangoli OPQ e $O'P'Q'$ sono a loro volta congruenti. Quindi $r_3r_2r_1P$ può essere uno dei due punti indicati con P' e P'' nella figura sotto. Tuttavia, poichè $r_3r_2r_1$ inverte l'orientazione, segue che $r_3r_2r_1P = P'$. Ora, tracciamo la retta l^* passante per P e P'. Sia q la composizione della traslazione t lungo la direzione di l^* di modulo $d(P, P')$, seguita dalla riflessione r rispetto alla retta l^*. Notiamo che $q = rt = tr$, $O' = qO$, $Q' = qQ$ e $P' = qP$. Per il Lemma 1.4, $q = r_3r_2r_1 = rt = tr$. Quindi, $r_3r_2r_1$ è una glissoriflessione.



Supponiamo $P = Q$. Avremo $l = l_1$, $l_1 \perp l_2$ e $l_1 \perp l_3$. Segue che r_1 è la riflessione r lungo la retta l e r_2r_1 è una traslazione t lungo la linea l di modulo $2a$. Come nel caso precedente, abbiamo $r_3r_2r_1 = tr = rt$ e $r_3r_2r_1$ è una glissoriflessione. $\square$

Teorema 1.9. *Ogni isometria non banale in $\mathbb{R}^2$ è la composizione di al massimo 3 riflessioni, ed è o una rotazione o una traslazione o una riflessione o una glissoriflessione, in accordo con la seguente tabella:*

Punti fissi?	*Si*	*No*
Preserva l'orientamento	*Rotazione*	*Traslazione*
Inverte l'orientamento	*Riflessione*	*Glissoriflessione*

Dimostrazione. Consideriamo u, il prodotto di quattro riflessioni. Per il Teorema 1.7, u può essere o la composizione di due traslazioni, o di due rotazioni, o di una traslazione e una rotazione. Se u è la composizione di due traslazioni, allora è una traslazione.

Supponiamo $u = ts$, dove $s = s(O, \alpha)$ è una rotazione, mentre $t = t(a)$ una traslazione. Sia l la retta passante per O ortogonale alla direzione a. Sia l' la retta passante per O tale che l'angolo tra l ed l' sia $\frac{\alpha}{2}$. Sia l'' la retta ortogonale alla retta passante per O e tO, e che divide a metà il segmento OtO. In virtù del Teorema 1.7, $s = r(l)r(l')$ e $t = r(l)r(l'')$. Quindi $u = ts = r(l'')r(l)r(l)r(l') = r(l'')r(l')$. Poichè $l' \nparallel l''$, u è una rotazione.

Supponiamo invece $u = st$. Allora $u^{-1} = t^{-1}s^{-1}$. Per quanto mostrato precedentemente u^{-1} è una rotazione, e quindi anche u è una rotazione.

Supponiamo che u sia la composizione di due rotazioni $s(O, \alpha)$ e $s'(O', \alpha')$. Se $O = O'$, allora u è una rotazione di angolo $\alpha + \alpha'$. Se invece $O \neq O'$, sia l la retta passante per O e O'. Sia l' la retta passante per O tale che l'angolo formato con l sia $\frac{\alpha}{2}$. Sia l'' la retta passante per O' tale che l'angolo tra l e l'' sia $\frac{\alpha}{2}$. Segue dal Teorema 1.7 che $s = r(l)r(l')$ e $s' = r(l'')r(l)$. Quindi $u = r(l'')r(l')$ essendo $r(l)r(l) = i$. Abbiamo ora due casi: $l' \parallel l''$ e $l' \nparallel l''$. Se $l' \parallel l''$, allora u è una traslazione per il Teorema 1.7, e ciò si verifica se e solo se gli angoli $\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\alpha}{2}$ sono supplementari (ovvero la loro somma è l'angolo π). Se invece $l' \nparallel l''$, in questo caso u è la rotazione $s(P, 2\phi)$, dove $P = l' \cap l''$ e $2\phi = \alpha + \alpha'$.

Riassumendo, il prodotto di quattro riflessioni è o una traslazione o una rotazione che, a sua volta, è il prodotto di due riflessioni per il Teorema 1.7. Segue che, quando $n \geq 4$, il prodotto di n riflessioni è in realtà il prodotto di $n - 2$ riflessioni. Per induzione quindi, quando $n \geq 4$, il prodotto di n riflessioni è il prodotto di al massimo 3 riflessioni.

Ora, consideriamo il Teorema 1.5 (di Chasles), il quale mostra come ogni isometria in $\mathbb{E}$ può essere scritta come la composizione di una riflessione, di una rotazione e di una traslazione. Segue dal Teorema 1.7 che ogni isometria in $\mathbb{E}$ può essere scritta come il prodotto di cinque riflessioni che, a loro volta, possono essere ridotte al prodotto di al massimo tre riflessioni. I casi già discussi nei Teoremi 1.7 e 1.8 completano la dimostrazione. □

1.5 Classificazione dei gruppi dei fregi

Definizione 1.11. Un sottogruppo G di $\mathbb{E}$ si dice **discreto** se, per ogni punto $O \in \mathbb{R}^2$, ogni cerchio centrato in O contiene solo un numero finito di punti di $\{gO|g \in G\}$.

In altre parole G è discreto se esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che:

- se la traslazione $t(\underline{a}) \in G$ allora il modulo di $\underline{a}$ è maggiore o uguale a ε;
- se la rotazione $s(O, \theta) \in G$ allora l'ampiezza di θ è maggiore o uguale a ε.

I sottogruppi discreti di $\mathbb{E}$ vengono classificati a seconda del loro sottogruppo delle traslazioni. Di seguito i loro nomi vengono attribuiti per mettere in rilievo le figure di cui sono i gruppi di simmetria. Se il sottogruppo delle traslazioni è il sottogruppo banale (cioè l'unica traslazione è l'identità) abbiamo i cosiddetti **gruppi dei rosoni**[2] contenenti solo rotazioni e riflessioni. Se il sottogruppo delle traslazioni è invece generato da una traslazione i modelli di simmetria si estendono, indefinitamente ripetuti, in una direzione riempiendo una striscia di piano. Tali gruppi discreti vengono detti **gruppi dei fregi**[3] (*frieze groups*). Nel caso invece in cui il sottogruppo delle traslazioni è generato da due traslazioni indipendenti si hanno i cosiddetti **gruppi cristallografici piani**[4] (*wallpaper groups*). Ad esempio, sono gruppi cristallografici piani i gruppi di simmetria delle decorazioni dell'Alhambra di Granada, dei piastrellamenti di alcuni quadri di Escher e più in generale di un qualsiasi piastrellamento regolare del piano.

Ricapitolando, un sottogruppo discreto G di $\mathbb{E}$ viene classificato in base al suo sottogruppo delle traslazioni nel seguente modo:

◇ **gruppi dei rosoni**: non contengono nessuna traslazione, ma rotazioni e riflessioni;

[2]Elementi decorativi delle facciate delle chiese in stile romanico e gotico.

[3]In arte il termine "fregio" indica un motivo pittorico lineare decorativo. Veniva utilizzato in architettura per abbellire la parte fra architrave e cornice e, per analogia, si può trovare in porte o finestre sormontate da una cornice di coronamento (sulla fascia fra questa e la riquadratura).

[4]Il nome deriva dagli studi cristallografici: i cristalli in stato solido, infatti, sono contraddistinti dalla proprietà della ripetizione regolare di un motivo nella loro struttura molecolare (scoperta ipotizzata già nel diciottesimo secolo da R. J. Haüy).

- ♢ **gruppi dei fregi**: contengono traslazioni di vettori collineari, cioè il sottogruppo $T = \{t(\underline{a}) | \underline{a} = n\underline{v}, n \in \mathbb{Z}\}$;
- ♢ **gruppi cristallografici**: contengono traslazioni di vettori non collineari, cioè il sottogruppo $T = \{t(\underline{a}) | \underline{a} = n\underline{v} + m\underline{w}, \underline{v} \nparallel \underline{w}, n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Limiteremo la nostra discussione a gruppi aventi sottogruppi delle traslazioni del secondo tipo, ovvero ai gruppi dei fregi. Cominciamo formalizzandone la definizione.

Definizione 1.12. Un **gruppo dei fregi** è un sottogruppo discreto di $\mathbb{E}$ il cui sottogruppo delle tralazioni è ciclico infinito, ovvero un sottogruppo di $\mathbb{E}$ generato da un'unica traslazione.

Esistono solo sette tipi di gruppi dei fregi. Per classificarli, abbiamo bisogno di due lemmi che mostrano alcune utili proprietà delle traslazioni.

Lemma 1.10. *Sia r una glissoriflessione e t una traslazione tali che gli assi di r e di t siano paralleli. Allora r e t commutano.*

Dimostrazione. Per semplicità poniamo che l'asse di r sia l'asse delle ascisse. Possiamo quindi scrivere $t = t(\underline{a})$ dove $\underline{a} = (a_1, 0)$. Entrambi rt e tr mandano un arbitrario punto del piano di coordinate (x, y) in $(x + a_1, -y)$. Quindi r e t commutano. □

Lemma 1.11. *Sia G un sottogruppo di $\mathbb{E}$ e sia T il sottogruppo delle traslazioni di G. Allora T è un sottogruppo normale di G.*

Dimostrazione. Sia r una riflessione e $t = t(\underline{a})$ una traslazione. Sia P un arbitrario punto di $\mathbb{R}^2$. Considerando come asse di r l'asse delle ascisse possiamo descrivere il punto P e il vettore $\underline{a}$ in termini di coordinate cartesiane: rispettivamente $P = (x, y)$ e $\underline{a} = (a_1, a_2)$. L'immagine di P rispetto alla trasformazione rtr si scriverà quindi: $(x, y) \mapsto (x, -y) \mapsto (x+a_1, -y+a_2) \mapsto (x + a_1, y - a_2)$. Risulta quindi $rtrP = t'P$, dove t' è la traslazione di vettore $\underline{a}^* = (a_1, -a_2)$. Abbiamo mostrato che se r è una riflessione e t è una traslazione allora rtr è una traslazione.

Ora, sia $u \in G$ un'arbitraria isometria di $\mathbb{R}^2$ e sia t un'arbitraria traslazione. Se u è l'identità, allora utu^{-1} è chiaramente la traslazione t. D'altronde, per il Teorema 1.9, u è il prodotto di al massimo tre riflessioni. Possiamo quindi riscrivere u come il prodotto di riflessioni: $u = r_3r_2r_1$. Di conseguenza $utu^{-1} = r_3r_2r_1tr_1r_2r_3$. Abbiamo già mostrato che se r è una riflessione allora rtr è una traslazione, quindi, per associatività, $r_3r_2r_1tr_1r_2r_3$ è anche una traslazione. Analogamente, se u è il prodotto di una o due riflessioni. allora utu^{-1} è una traslazione e come tale appartiene a T, che quindi è un sottogruppo normale. □

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per classificare i gruppi dei fregi.

Teorema 1.12. *Se F è un gruppo dei fregi, allora F è uno dei sette possibili gruppi:*

$F_1 =< t| >$
$F_1^1 =< t, r|r^2 = i, rtr^{-1} = t >$
$F_1^2 =< t, r|r^2 = i, rtr^{-1} = t^{-1} >$
$F_1^3 =< t, r|r^2 = t, rtr^{-1} = t >$
$F_2 =< t, s|t^s = t^{-1}, r^2 = i >$
$F_2^1 =< t, s, r|s^2 = i, t^s = t^{-1}, r^2 = i, t^r = t, (rs)^2 = i >$
$F_2^2 =< t, s, r|s^2 = i, t^s = t^{-1}, r^2 = t, t^r = t, (rs)^2 = i >$

Dimostrazione. Sia F un gruppo dei fregi, e sia T il suo sottogruppo delle traslazioni. Poichè F è un gruppo dei fregi, $T =< t| >$ dove t è una traslazione che genera T.

Caso 1: supponiamo che F non contenga rotazioni non banali. Se F non contiene riflessioni, allora $F =< t| >$. Alternativamente F conterrà una riflessione o una glissoriflessione. Supponiamo F contenga una riflessione r. Per il Lemma 1.6, rtr^{-1} genera rTr^{-1}. Ricordiamo che per il Lemma 1.11 T è un sottogruppo normale, quindi $rTr^{-1} = T$, per il Teorema 1.1, e rtr^{-1} genera T. Perciò, $rtr^{-1} = t^{\pm 1}$. Ciascuno dei due casi genera un differente gruppo dei fregi, quindi o $F = F_1^1 =< t, r|r^2 = i, rtr^{-1} = t >$, oppure $F = F_1^2 =< t, r|r^2 = i, rtr^{-1} = t^{-1} >$. (Nota: se F contiene anche una glissoriflessione q, allora qr sarà una isometria senza punti fissi che preserva l'orientazione, ovvero una traslazione in F. Segue che q può già essere generata da r e t, e quindi non genera un nuovo gruppo dei fregi).

Esiste tuttavia il caso in cui F contiene una glissoriflessione senza contenere riflessioni. Quindi, invece di una riflessione, supponiamo F contenga la glissoriflessione r. Allora $r^2 = t^h$ per qualche $h \in \mathbb{Z}$. Poichè r e t commutano in virtù del Lemma 1.10, segue che $(t^k r)^2 = t^{2k} r^2 = t^{2k+h}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Scegliamo $k \in \mathbb{Z}$ tale che $2k+h = 0$ o 1 e definiamo $r' = t^k r$. Essendo $r'^2 = t^{2k+h}$, $r'^2 = 1$ o t. Inoltre, poichè $r' = t^k r$, segue che il gruppo generato da r e t è uguale al gruppo generato da r' e t, cioè $< r, t| >=< r', t| >$. Se $r'^2 = i$, allora il gruppo generato è F_1^1. Altrimenti, $r'^2 = t$ e abbiamo un nuovo gruppo dei fregi: $F_1^3 =< t, r|r^2 = t, rtr^{-1} = t >$.

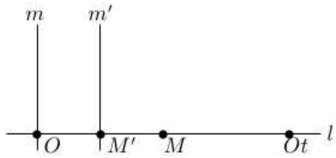
Caso 2: supponiamo F contenga una rotazione non banale s. Per un ragionamento analogo a quello per il Caso 1, varrà $sts^{-1} = t^{\pm 1}$. Quindi s è una rotazione di angolo π e, di conseguenza, $s^2 = i$. Supponiamo esista una qualche rotazione $s' \in F$ tale che $s \neq s'$. Per lo stesso ragionameno s è una rotazione di angolo π. Poichè $s \neq s'$, $s's$ è una traslazione, per quanto visto nella dimostrazione del Teorema 1.9, e quindi $s's \in T$. Moltiplicando entrambi i lati per s si ottiene $s' \in Ts$, e quindi s' è generato da s e t. Allora F non contiene riflessioni, e $F = F_2 =< t, s | t^s = t^{-1}, s^2 = 1 >$.

Supponiamo che F contenga una riflessione o una glissoriflessione r con asse l'. Come sopra, $rtr^{-1} = t^{\pm 1}$. Quindi, o $l' \parallel l$ oppure $l' \perp l$, dove l è l'asse di t. Supponiamo $l' \perp l$. Segue che $(rs)t(rs)^{-1} = t$ e rs è un'isometria che non preserva l'orientazione (quindi una riflessione o una glissoriflessione) con asse l'' parallelo a l.Poichè $(rs)t(rs)^{-1} = t$ e $rtr = t^{-1}$, segue che $tstsr = r$ e $rtst = (rs)$. Allora possiamo riscrivere i generatori senza cambiare il gruppo, con (rs) che sostituisce il generatore r. Questo semplifica le due alternative o $l' \parallel l$ o $l' \perp l$ al solo caso $l' \parallel l$, con rs una isometria che inverte l'orientazione avente asse parallelo a l.

Asseriamo ora che $l' = l$ dove l' denota l'asse di r, un'isometria che inverte l'orientazione, e dimostriamo tale affermazione per assurdo. Supponiamo $l' \neq l$ e consideriamo il punto rO e l'isometria rsr^{-1}. Segue che $rsr^{-1}rO = rsO = rO$ con O centro di s. Giacchè rsr^{-1} preserva l'orientazione e fissa rO, rsr^{-1} deve essere una rotazione per il Teorema 1.9. Per mostrare che rsr^{-1} è una rotazione non banale, consideriamo un punto $P \in \mathbb{R}^2$ tale che $P \neq O$. L'immagine di rP rispetto a rsr^{-1} è rsP. Poichè $P \neq O$, $sP \neq P$ e quindi $rsP \neq rP$ (l'isometria r preserva la distanza). Dunque rP non è fissato da rsr^{-1}, ovvero rsr^{-1} è una rotazione non banale del piano. Abbiamo già visto che rO è fisso e sappiamo che tutte le rotazioni non banali contenute nei gruppi dei fregi sono rotazioni di angolo π, di conseguenza $rsr^{-1} = s(rO, \pi)$. Poichè $O \neq rO$ e $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ sono supplementari, secondo l'analisi delle composizioni tra rotazioni che abbiamo effettuato nel Teorema 1.9 $s(rO, \pi)s(O, \pi)$ è una traslazione τ. Osservando l'immagine di O rispetto a τ, notiamo che $\tau = t(2\overrightarrow{OrO})$. Poichè $l \parallel l'$ e $l \neq l'$, τ è una traslazione che non appartiene al gruppo sei fregi. Questa contraddizione prova che $l = l'$.

Segue ora che se r è una riflessione allora rs deve essere una riflessione, in virtù del Teorema 1.8, con asse $m \perp l$ in O. Quindi $F = F_2^1 =< t, s, r | s^2 = i, t^s = t^{-1}, r^2 = i, t^r = t, (rs)^2 = i >$.

Se invece r è una glissoriflessione. Analogamente al Caso 1, possiamo cambiare i generatori affinchè $r^2 = t$, ed l diventa l'asse sia di r che di t. Sia O il centro della rotazione s. Sia M il punto medio del segmento $\overline{OtO}$ e sia M' il punto medio del segmento $\overline{OM}$. Sia m la retta contenente O tale che $m \perp l$ e sia m' la linea contenente M' tale che $m' \perp l$ come illustrato nella prossima figura.



Per il Teorema 1.7 $s = r(l)r(m)$ e $r = r(m')r(m)r(l)$. Quindi $rs = r(m')$ e, di conseguenza, $(rs)^2 = i$. Questo ci definisce l'ultimo gruppo dei fregi $F_2^2 =< t, s, r|s^2 = i, t^s = t^{-1}, r^2 = t, t^r = t, (rs)^2 = i >$. $\square$

I sette gruppi dei fregi si possono elencare mediante un nome simbolico composto da quattro caratteri che trae le sue origini in cristallografia ed è così costruito:

- Il primo segno è sempre una "p".
- Il secondo segno può essere "m" (che sta per *mirror* = specchio) se il gruppo di simmetria contiene riflessioni rispetto a rette verticali, oppure "1" se non ne contiene.
- Il terzo segno può essere "m" se il gruppo di simmetria contiene una riflessione rispetto ad una retta orizzontale, oppure una "a" se contiene una glissoriflessione rispetto ad una retta orizzontale, oppure "1" se non contiene nessuno dei due precedenti tipi di trasformazione.
- Il quarto segno può essere "2" se il gruppo di simmetria della figura contiene rotazioni di 180°, altrimenti è "1".

In questa nuova notazione i sette gruppi che abbiamo individuato con il precedente Teorema si chiamano:

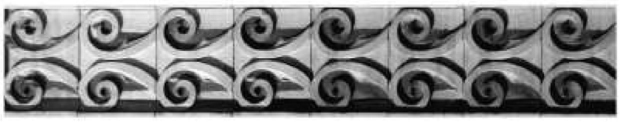
$F_1 =< t| > =$ p111
$F_1^1 =< t, r|r^2 = i, rtr^{-1} = t > =$ p1m1
$F_1^2 =< t, r|r^2 = i, rtr^{-1} = t^{-1} > =$ pm11
$F_1^3 =< t, r|r^2 = t, rtr^{-1} = t > =$ p1a1
$F_2 =< t, s|t^s = t^{-1}, r^2 = i > =$ p112
$F_2^1 =< t, s, r|s^2 = i, t^s = t^{-1}, r^2 = i, t^r = t, (rs)^2 = i > =$ pmm2
$F_2^2 =< t, s, r|s^2 = i, t^s = t^{-1}, r^2 = t, t^r = t, (rs)^2 = i > =$ pma2

Spesso i sette gruppi dei fregi vengono rappresentati graficamente con delle orme e vengono associati a nomi che richiamano questi disegni:

p111 (hop)	solo traslazione	
p1a1 (step)	traslazione e glissoriflessione	
p1m1 (jump)	traslazione, riflessione rispetto ad un asse orizzontale, e glissoriflessione	
pm11 (sidle)	traslazione e riflessione rispetto ad un asse verticale	
p112 (dizzy hop)	traslazione e rotazione di 180°	
pma2 (dizzy sidle)	traslazione, rotazione 180°, riflessione con asse verticale, glissoriflessione	
pmm2 (dizzy jump)	traslazione, rotazione 180°, riflessione con asse orizzontale, riflessione con asse verticale, glissoriflessione	

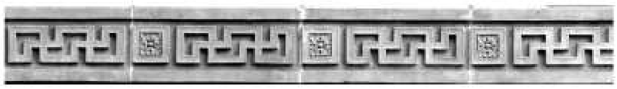
(a) p111 - Hop

(b) pm11 - Sidle

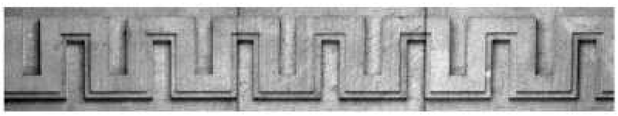


(c) p1m1 - Jump

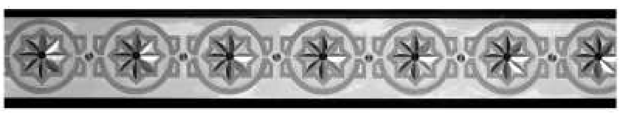
(d) p1a1 - Step



(e) p112 - Dizzy hop



(f) pma2 - Dizzy sidle



(g) pmm2 - Dizzy jump

Figura 1.1: I sette fregi nell'arte decorativa

Capitolo 2

Simmetria e trasformazioni nel piano musicale

Da secoli, in musica, la simmetria è uno strumento molto usato dai compositori. A volte ciò avviene su piccola scala, come quando in una fuga di Bach un arpeggio viene ripetuto prima dal basso verso l'alto e subito nella battuta successiva dall'alto verso il basso. Altre volte invece avviene su larga scala, come nei cosiddetti "canoni cancrizzanti", quando le stesse note sono suonate in avanti e all'indietro allo stesso tempo (gli esempi più famosi si possono trovare nella celebre *Offerta musicale*[1] di J.S.Bach).

In questo capitolo investigheremo le simmetrie che appaiono in musica, utilizzando per descriverle il linguaggio matematico della geometria e della teoria dei gruppi.

Per prima cosa, il nostro ambiente di lavoro sarà il **piano musicale**, le cui due dimensioni sono il **tempo** e le **altezze** (frequenze, pitch) dei suoni che possono essere suonati dal musicista. In questo nuovo spazio di due dimensioni un insieme di note può essere pensato come un insieme di punti e lo spartito diventa la rappresentazione grafica di una funzione (la melodia) dipendente dal tempo.

Il piano musicale possiede un'importante differenza rispetto al piano geometrico canonico: le due dimensioni non sono identiche, ma bensì diverse e non comparabili tra loro. Infatti il tempo è differente dallo spazio, sia in senso fisico che, cosa più importante, nella nostra percezione. Di conseguenza, sul piano musicale si hanno meno simmetrie rispetto che sul piano euclideo: per esempio si possono avere solo assi di simmetria orizzontali o verticali.

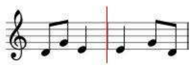
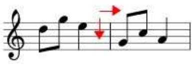
[1] Titolo tedesco *Musikalisches Opfer* o *Das Musikalische Opfer*. È una raccolta musicale formata da due fughe, dieci canoni e una trio sonata a quattro frasi di Johann Sebastian Bach, nata da un incontro del compositore col re di Prussia nella prima metà di maggio del 1747 a Potsdam.

Le altezze possono essere misurate in più modi. La maggior parte della musica è scritta tonalmente all'interno di una certa scala, di conseguenza ha senso utilizzare uno scalino di tale scala come unità di misura quando applichiamo una trasformazione. In tal caso la trasformazione si dice *diatonica*[2] ed è il tipo più comune e facile da visualizzare (sarà il più utillizzato per i nostri esempi). D'altra parte, una trasformazione *reale* utilizza come unità di misura delle altezze lo scalino della scala cromatica.

2.1 Isometrie in dimensioni diseguali

Come abbiamo discusso nel capitolo precedente, nel piano euclideo ci sono tre tipi di **isometrie**, trasformazioni che preservano le distanze tra tutti i punti: le traslazioni, le riflessioni e le rotazioni. Nel piano musicale, siccome per ogni trasformazione le singole dimensioni devono essere trattate separatamente, sono permesse solo queste possibili isometrie: le traslazioni orizzontali (ripetizione di un motivo, inteso come insieme di note), le traslazioni verticali (che in musica prendono il nome di trasposizioni), le riflessioni orizzontali (le retrogradazioni in linguaggio musicale), le riflessioni verticali (le inversioni), più le combinazioni di queste. Una rotazione di 180° può essere ottenuta come combinazione di due riflessione e in termini musicali viene chiamata inversione retrograda. Così pure le traslazioni verticali e orizzontali possono essere combinate per ripetere un motivo in differenti tonalità (ancora trasposizioni). L'ultima combinazione possibile è la glissoriflessione (una traslazione più una riflessione), che può essere di due tipi: se l'asse della glissoriflessione è orizzontale il motivo verrà seguito dal suo inverso, mentre se l'asse è verticale il motivo è seguito dal retrogrado trasposto. Ecco tutte e otto le trasformazioni isometriche nel piano musicale.

[2] Una scala diatonica è una scala musicale formata da sette delle dodici note che compongono la scala cromatica, susseguentisi secondo una precisa successione di sette intervalli, cinque toni due semitoni. Tale successione caratteristica non è univoca, ma può essere specificata in sette diverse combinazioni definite modi aventi la caratteristica che ognuna di queste può essere costruita a partire dalle altre, usando come prima nota (solitamente chiamata Tonica) una delle note intermedie delle altre.

Traslazione orizzontale = *ripetizione*	
Traslazione verticale = *trasposizione*	
Riflessione orizzontale = *inversione*	
Riflessione verticale = *retrogradazione*	
Rotazione di 180° = *inversione retrograda*	
Doppia traslazione = *trasposizione*	
Glissoriflessione = combinazione tra *ripetizione* e *inversione*, oppure tra *trasposizione* e *retrogradazione*	 

2.2 Simmetria in musica

La definizione di simmetria sul piano musicale è del tutto analoga a quella sul piano euclideo discussa nel capitolo precedente.

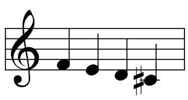
Definizione 2.1. Dato un insieme di note M, una simmetria per M è un'isometria u del piano musicale (tra le otto precedentemente elencate) tale che $uM = M$, ovvero che lascia il motivo immutato.

Per esempio, la seguente battuta tratta dal *Quinto quartetto* per archi di Béla Bartòk espone una simmetria rispetto alla riflessione orizzontale, cioè l'inversione del motivo, considerando come asse la nota $B\flat$.

È anche possibile avere una simmetria *temporale*, rispetto a una riflessione verticale. Per esempio, una scala ascendente seguita da una scala discendente ha questo tipo di simmetria per riflessione.

Questo è l'equivalente del *palindromo*. Un esempio di forma musicale che coinvolge questo tipo di simmetria è il *Canone retrogrado* o *canone cancrizzato* precedentemente menzionato. Per esempio il primo canone dell'*Offerta musicale* di J.S.Bach è un canone di questo tipo basato sul tema regale di Federico il Grande, che consiste nelle seguenti 18 battute suonate contemporaneamente in avanti e all'indietro.

Le seguenti quattro note invece, sono simmetriche rispetto alla rotazione di 180° attorno alla nota $D\natural$.



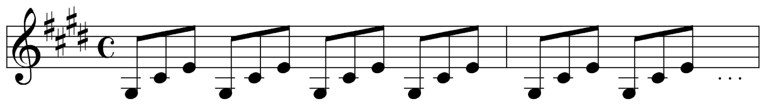
Quest'ultima simmetria si può ritrovare nei cosiddetti *canoni da tavolo* (*table canon*): lo spartito, contenente un'unica linea musicale, viene posto su un tavolo in mezzo ai due musicisti che siendono uno di fronte all'altro; entrambi leggeranno la stessa linea, ma in direzione opposta. Ne segue che ognuno dei due suonerà la linea dell'altro riflessa sia verticalmente che orizzontalmente, ovvero ruotata di 180°, generando una simmetria rispetto a questa trasformazione. Un esempio di questo tipo di canone è il *Der Spiegel* (lo specchio) attribuito a W. A. Mozart (figura 2.1).

La ragione dell'importanza della simmetria in musica è che la regolarità dei campioni creano un'aspettativa rispetto a ciò che viene dopo. È però

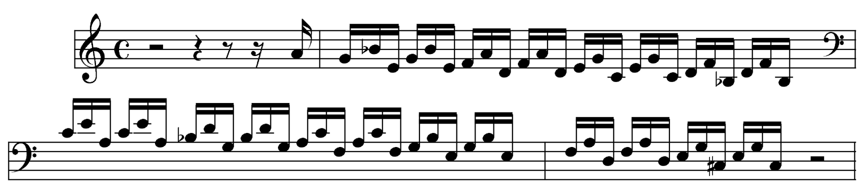
Figura 2.1: *Der Spiegel*, W. A. Mozart

importante rompere queste attese di volta in volta, per prevenire la noia. La buona musica contiene il giusto equilibrio tra predicibilità e sorpresa.

La simmetria per traslazione, come abbiamo visto nel capitolo precedente, genera un *sottogruppo ciclico infinito.* In musica ciò è rappresentato dalla *ripetizione* di un qualche ritmo o melodia. Un celebre esempio è l'inizio della mano destra della *Sonata al chiaro di luna* di Beethoven



Certamente, un brano musicale ha una lunghezza finita, quindi non si può realmente parlare di simmetria per traslazione. Effettivamente, in musica, le simmetrie approssimate sono molto più comuni delle simmetrie perfette. La nozione musicale di *sequenza* è un buon esempio di questo: il motivo viene traslato non solo orizzontalmente (attraverso la ripetizione) ma anche verticalmente, una pratica che imperversa in musica classica. Così come una sequenza aritmetica somma un fissato numero ad ogni successivo numero della successione, una sequenza musicale somma un fissato intervallo ad ogni ripetizione del motivo. Tuttavia spesso gli intervalli non sono sempre gli stessi ma vengono modificati per seguire l'armonia del brano. Per esempio la sequenza



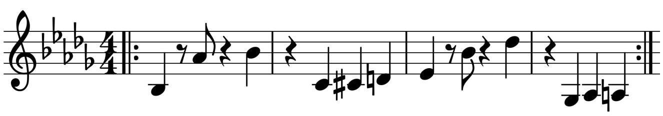
è tratta dalla *Toccata e fuga in D*, BWV 565, per organo di J.S.Bach. L'andamento generale è verso il basso ed il numero di semitoni tra le note nelle triplette varia costantemente così da calcare in maniera appropriata la struttura armonica.

Se fino ad ora gli esempi discussi sono stati tratti dalla musica classica, possiamo trovare tracce di simmetria per traslazione (approssimata, per quanto precedentemente detto) anche in altri generi.

Se per esempio consideriamo la musica da ballo in generale, dalla disco al folk popolare, questa necessita di una parte ritmica il più regolare possibile al fine di permettere la danza. Nella *black music* e suoi derivati questa idea del ritmo si traduce con la parola inglese **groove**[3], che indica una serie ritmica che si ripete ciclicamente, generalmente ogni battuta. Per citare un esempio, il seguente groove di batteria è tratto da *Funky Drummer*, di James Brown con Clyde Stubblefield alla batteria.

In questo caso il piano musicale mantiene in ascisse il tempo, mentre in verticale non si hanno le altezze delle note, come negli esempi precedenti, ma bensì i vari pezzi della batteria: la x sul primo spazio in alto è il *charleston*, il secondo spazio dall'alto è riservato al *rullante*, mentre le note sul primo spazio dal basso rappresentano il pulsare della *cassa*.

Il groove generalmente coinvolge insieme alla batteria il basso. In un certo tipo di *Jazz* elettrico degli anni '70, batteria e basso suonano la stessa cellula ripetuta per tutta la durata del pezzo. In questo modo agevolano i solisti, che in contemporanea eseguono i soli, e allo stesso tempo creano un'atmosfera ipnotica e introspettiva. Un esempio celebre è il groove di basso in *Chameleon*, di Herbie Hancock (dall'album *Head Hunters* del 1973), in cui il basso ripete le stesse quattro battute praticamente per tutto il pezzo, generando, insieme alla batteria, una evidente simmetria per traslazione.



Un esempio analogo lo troviamo in *Red Barron*, di Billy Cobham (dall'album *Spectrum* del 1973) in cui il bassista ripete ciclicamente le stesse due note.

Attraverso la simmetria per traslazione viene creata una base solida (senza sorprese) su cui il chitarrista e il tastierista possono costruire i propri soli. Nel prossimo paragrafo vedremo i casi in cui la simmetria per traslazione si accompagna ad altre simmetrie creando dei veri e propri fregi.

[3] Termine popolare, in uso già dagli anni sessanta, la cui traduzione letterale è solco e in ambito musicale indica il solco dei dischi in vinile. Si usa anche per definire un certo portamento del ritmo tipico di taluni generi come per esempio il *funk*, e l'*r'n'b*.

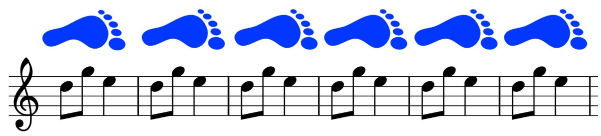
2.3 Fregio musicale

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto i sette gruppi di simmetria dei fregi, modelli ripetuti infinitamente lungo una direzione sul piano euclideo. Come precedentemente discusso, questi modelli spesso appaiono come cornici o bordi in arte ed in architettura, e si addicono perfettamente alla musica in quanto condividono la proprietà di avere le proprie due dimensioni non uguali (una è infinita e una no). Come la musica, un fregio può contenere solo simmetrie che usano la traslazione, la glissoriflessione, la riflessione verticale, la riflessione orizzontale e la rotazione di 180°, in varie combinazioni. Considerando il tempo potenzialmente infinito ed essendo l'insieme delle altezze udibili limitato, allora c'è una corrispondenza tra i fregi e le capacità simmetriche di un brano musicale ripetuto. Come già detto, nessuna musica può ripetersi senza fine nel tempo così come in architettura un fregio non può essere infinitamente lungo, quindi per forza avremo solo un numero finito di ripetizioni del modello.

Di seguito, vediamo come appare ognuno dei sette fregi sul pentagramma musicale utilizzando il seguente motivo campione.

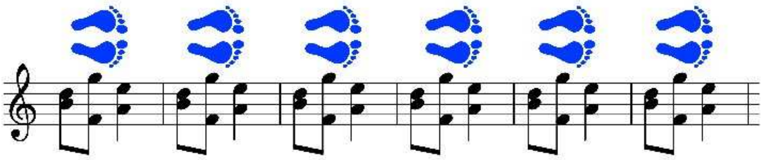
Per distinguere i diversi gruppi utilizziamo la notazione simbolica e la rappresentazione tramite orme introdotte nel capitolo precedente.

p111 - Hop È la semplice ripetizione del motivo.



p1a1 - Step Glissoriflessione: il motivo e la sua inversione.

p1m1 - Jump Ovvero hop con una riflessione orizzontale: il motivo e la sua inversione sono suonati simultaneamente.



pm11 - Sidle Due riflessioni verticali: il motivo si alterna con il suo retrogrado.

p112 - Dizzy hop Rotazione di 180°: il motivo si alterna con l'inversione retrograda.

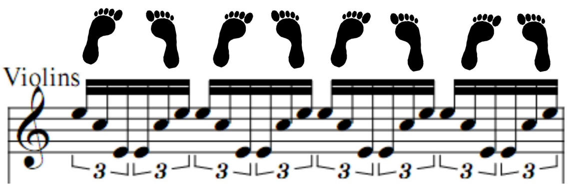
pma2 - Dizzy sidle Riflessione verticale combinata con una rotazione di 180°.

pmm2 - Dizzy jump Tutte le possibili simmetrie: il motivo e la sua inversione vengono suonati simultaneamente e poi il retrogrado e la sua inversione vengono suonati simultaneamente.

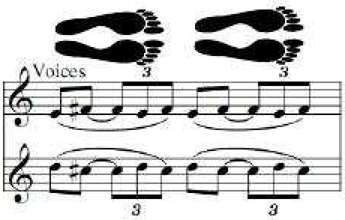
Ecco alcuni esempi che ritroviamo in musica classica: nei *Tre Notturni* di Debussy si possono ritrovare tutti e sette i tipi. Di seguito, alcuni classici motivi che si utilizzano per accompagnare il *blues*.

(a) *Hop.*

(b) *Step.*



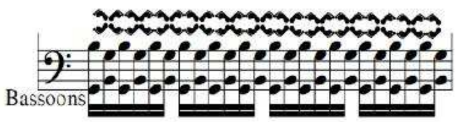
(c) *Sidle.*



(d) *Jump.*

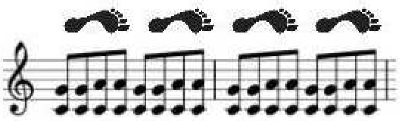
(e) *Dizzy Hop.*

(f) *Dizzy Sidle.*



(g) *Dizzy Jump.*

Figura 2.2: I sette fregi nei *Tre Notturni* di Debussy



(a) *Hop*.

(b) *Sidle*.

(c) *Sidle*.

Figura 2.3: Esempi di fregi musicali nel *blues*

Capitolo 3

Laboratorio

Sulla base dei contenuti raccolti nei primi due capitoli di questa tesi, si è scelto di ideare una proposta didattica da rivolgere ad una classe di terza media con l'obiettivo di assolvere un triplice compito: primo, fornire uno strumento in più per lo studio matematico delle isometrie e delle simmetrie; secondo, mostrare in che modo un processo fisico come la musica può essere rappresentato sul piano cartesiano come funzione del tempo, offrendo un primo assaggio di ciò che molti ragazzi dovranno affrontare nel proseguo dei loro studi; terzo, introdurre lo studente ad un approccio più critico e "scientifico" all'arte, in generale, e in particolare alla musica.

Il laboratorio, composto dalle attività descritte nei seguenti paragrafi, è stato sperimentato con la classe *Terza A* della scuola media statale Galileo Galilei di Santa Sofia (FC), composta da venti studenti. Gli incontri si sono svolti nei giorni Giovedì 16, Lunedì 20 e Mercoledì 22 Febbraio 2012, grazie alla disponibilità dei dirigenti dell'istituto e del professore di matematica Ivan Graziani.

3.1 Obiettivi

♦ Contribuire alla formazione di una mentalità scientifica: ottenere un rigore logico e una chiarezza di argomenti, utilizzando l'immaginazione e l'intuizione; sviluppare una visione matematico-geometrica del mondo; familiarizzare con strumenti che possono descrivere e spiegare ciò che ci circonda.

♦ Sviluppare l'intuizione geometrica del piano.

⧫ Familiarizzare con la rappresentazione grafica di fenomeni fisici (quali la musica) lungo l'asse temporale.

Obiettivi specifici d'apprendimento:

- Saper riconoscere un'isometria e saperla applicare ad un oggetto.
- Saper individuare varianti ed invarianti di una isometria.
- Saper riconoscere una simmetria in un oggetto.
- Saper riconoscere un fregio.
- Saper rappresentare sul piano cartesiano (tempo per altezze/frequenze) la linea musicale intesa come funzione della variabile tempo.
- Saper riconoscere la presenza di una "regolarità" nella musica così come nella geometria.
- Conoscere le regole del linguaggio visivo: individuare e descrivere le caratteristiche della simmetria nella realtà, nelle immagini e nelle opere d'arte.

3.2 Temporizzazione

La durata totale del laboratorio è di circa **6 ore** diviso in tre moduli come segue:

Primo modulo	1h 45m
Secondo modulo	1h 50m
Terzo modulo	1h 45m

Tabella 3.1: Temporizzazione

3.3 Contenuti

◊ **Primo modulo**:
Il piano geometrico - Le isometrie - La composizione di isometrie - Oggetti isometrici - Le simmetrie - Oggetti simmetrici - Le simmetrie nel mondo:

arte, architettura, natura - La simmetria per traslazione - I sette fregi

◊ **Secondo modulo**:
Rappresentare il tempo: la freccia del tempo - Il piano Tempo×Eventi: isometrie e simmetrie - Simmetria per traslazione sul piano Tempo×Eventi - I fregi sul piano Tempo×Eventi

◊ **Terzo modulo**:
Il piano musicale - La rappresentazione della musica sul piano musicale - Le isometrie sul piano musicale - Le simmetrie sul piano musicale - I fregi sul piano musicale - I canoni

3.4 Attività

3.4.1 Primo modulo - 1h 45m

1.a) Introduzione (10 min.)

1.b) Le isometrie (15 min.)

1.c) Le simmetrie (50 min.)

1.d) La simmetria per traslazione, i fregi (30 min.)

3.4.2 Secondo modulo - 1h 50m

2.a) Ripasso degli argomenti del modulo precedente (10 min.)

2.b) La freccia del tempo (15 min.)

2.c) Groove Cell (50 min.)

2.d) Il piano Tempo×Eventi (10 min.)

2.e) La Fattoria (25 min.)

3.4.3 Terzo modulo - 1h 45m

3.a) Ripasso degli argomenti dei moduli precedenti (10 min.)

3.b) Il piano musicale (15 min.)

3.c) Isometrie sul piano musicale (25 min.)

3.d) Simmetrie sul piano musicale (10 min.)

3.e) Il *blues*: una musica geometrica (20 min.)

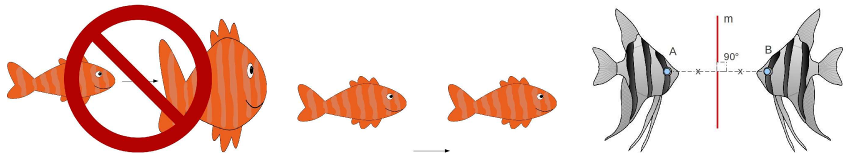
3.f) Canoni e fregi sul piano musicale (25 min.)

3.5 Descrizione delle attività

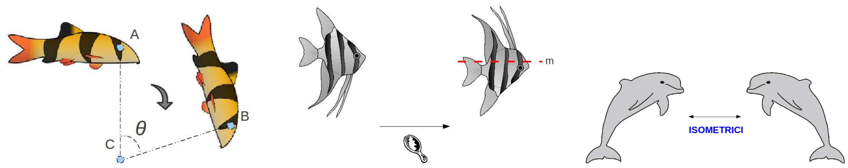
1.a Introduzione
Presentazioni varie e spiegazione di quello che avverrà nelle 6 ore del laboratorio.

1.b Le isometrie
Questa parte è un ripasso di argomenti già studiati dagli studenti nel corso dell'anno scolastico. Con il supporto di alcune immagini (figura 3.1) discutiamo le definizioni di trasformazione geometrica sul piano euclideo (intesa come corrispondenza tra punti del piano) e introduciamo il concetto di isometria: una particolare trasformazione che preserva le distanze. Elenchiamo quindi le principali isometrie: la traslazione, la riflessione, la rotazione e la glissoriflessione; spieghiamo cosa significa comporre più isometrie. Infine indichiamo due oggetti come isometrici quando possono essere messi in corrispondenza da un'isometria.

1.c Le simmetrie
Lo scopo della prima fase di questa attività è guidare gli studenti per giungere insieme alla definizione di simmetria di una figura: un'isometria che trasforma l'oggetto in se stesso. In questa parte ci concentreremo sulle simmetrie rispetto a rotazione e riflessione, lasciando la traslazione per l'ultima attività dell'incontro. Poniamo la classe di fronte a figure che presentano simmetrie e chiediamo di collegare le evidenti regolarità delle immagini con ciò che è stato detto sulle isometrie.



(a) *Proprietà delle isometrie.* (b) *Traslazione.* (c) *Riflessione.*



(d) *Rotazione.* (e) *Glissoriflessione.* (f) *Oggetti isometrici.*

Figura 3.1: Le isometrie sul piano

Proponiamo quindi le due seguenti attività per sperimentare la simmetria per rotazione e quella per riflessione.

(*Simmetria per rotazione*) Usiamo un tabellone con un piccolo perno nel centro, su cui sono segnati diversi angoli con dei colori, come supporto per fare ruotare alcune sagome di cartone (figura 3.2). Per ogni sagoma chiediamo ai ragazzi la rotazione secondo quale angolo lascia la tale figura invariata, dopo di che verifichiamo facendo ruotare la sagoma.

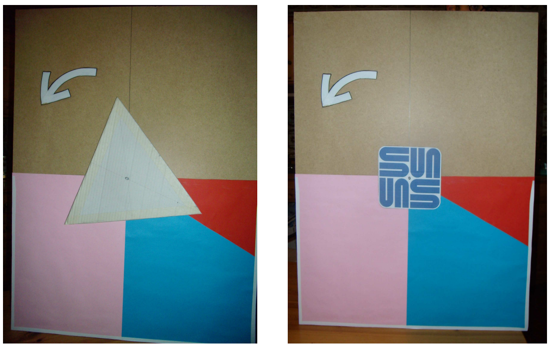
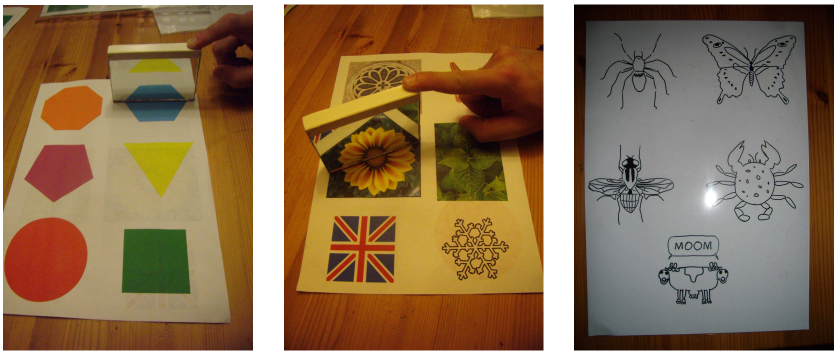


Figura 3.2: Simmetria per rotazione

(*Simmetria per riflessione*) Dividiamo la classe in 4 gruppi. Ad ogni gruppo diamo due fogli: sul primo vi sono alcuni poligoni regolari, sul secondo foglio ci sono figure che presentano simmetrie per riflessione. Chiediamo ai ragazzi di tracciare con una matita gli assi di simmetria di ogni figura. Per verificare che effettivamente le linee tracciate siano assi di simmetria viene dato un piccolo specchio ad ogni gruppo: appoggiando lo specchio sul foglio lungo l'asse, la parte di figura sul foglio, insieme al suo riflesso, deve ricomporre la forma originale dell'oggetto (figura 3.3,*a* e *b*).

Un altro modo per verificare la simmetria per riflessione è disegnare la figura su un foglio trasparente: girando il foglio l'immagine non cambia. L'esempio in figura 3.3 (*c*) può essere fatto girare tra i ragazzi.



(a) (b) (c)

Figura 3.3: Simmetria per riflessione

1.d La simmetria per traslazione, i fregi

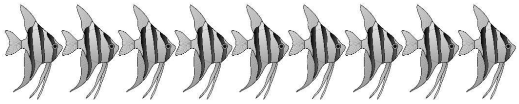
La simmetria per traslazione si manifesta nella ripetizione infinita di un motivo (una figura), lungo una striscia di piano. Si ritrova in architettura e nell'arte decorativa in generale, però sempre in forma approssimata in quanto è chiaramente impossibile avere una ripetizione *infinita* nella pratica. Mostriamo alcune immagini famigliari di motivi semplici ripetuti (figura 3.4), e guidiamo gli studenti a ricollegarsi alle isometrie (traslazione) e alle simmetrie (simmetria per traslazione).

Discutiamo altri esempi, in cui oltre alla simmetria per traslazione si presentano anche le altre simmetrie: quella per riflessione, per rotazione di 180° e per glissoriflessione (figura 3.4, *b* e *c*).

Infine spieghiamo che questo tipo di figure si chiamano fregi e mostriamo che ne esistono solo sette tipi. Per chi volesse provare a casa, è possibile costruire i 7 fregi piegando opportunamente e poi ritagliando una striscia di carta (figura 3.4, *g*).

2.b La freccia del tempo

Nel secondo modulo ci spostiamo dal piano geometrico convenzionale ad un

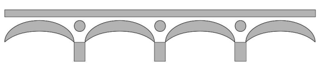


(a)

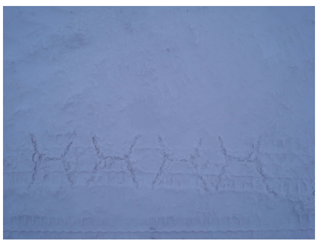
(b)

(c)

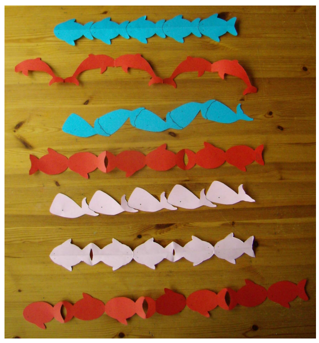
(d) Santa Sofia (FC)



(e)



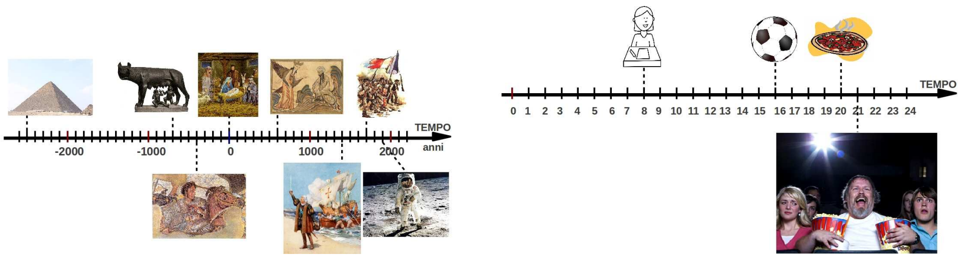
(f)



(g)

Figura 3.4: Simmetria per traslazione

più insolito piano avente come dimensioni il tempo in orizzontale e degli eventi fisici (per esempio un battito di mani) in verticale. Rappresentiamo il tempo come una freccia (una dimensione, un verso) su cui è possibile posizionare avvenimenti passati o futuri, proprio come si fa in Storia quando si vogliono mettere in ordine i grandi eventi del passato (figura 3.5, a). Una rappresentazione del tempo di questo tipo può anche servire per fissare eventi non ancora accaduti (figura 3.5, b).



(a) (b)

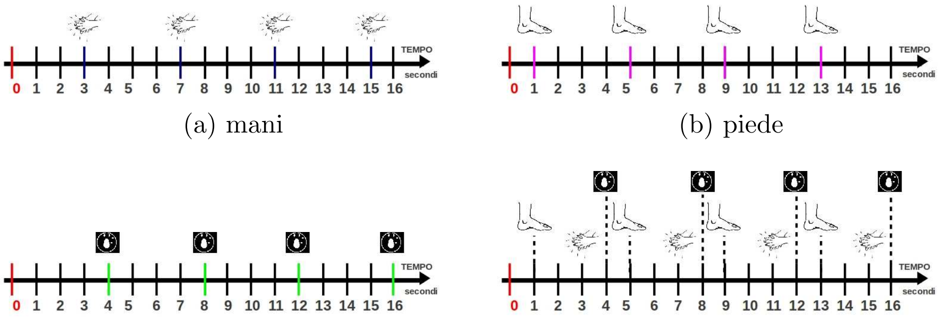
Figura 3.5: Rappresentare il tempo

2.c Groove Cell

Si tratta di un esercizio di coordinazione ritmica: consiste nel riprodurre con alcune parti del corpo una successione di eventi ciclica. Come notazione usiamo la retta del tempo introdotta precedentemente su cui poniamo la combinazione di tre eventi: il battito delle mani, il battere del piede, la voce (pronuncia di una vocale). Scegliamo quattro volontari. Ad ognuno viene assegnato uno "spartito": chi la parte del battito delle mani, chi la parte del piede, chi la parte della voce e infine il "direttore d'orchestra" che dovrà contare il tempo e ha uno spartito con tutte e tre le parti (vedi figura 3.6).

Al termine dell'esperimento (che si può riproporre su diversi ritmi e con diversi volontari) osserviamo che ognuno dei quattro spartiti è un'immagine simmetrica rispetto alla traslazione.

Operiamo un cambio di notazione ponendo tutti gli eventi allineati in verticale a sinistra lungo quella che chiameremo la retta degli eventi e indichiamo con un pallino il momento in cui avviene l'evento, come in figura 3.7. In questo modo siamo passati in un vero e proprio piano *tempo*$\times$*eventi*, ed i nostri ritmi diventano dei veri e propri fregi come quelli visti nell'incontro precedente. Sperimentiamo la simmetria per traslazione cambiando il punto di partenza per scoprire che suona uguale. Possiamo sperimentare la riflessione verticale (riflessione rispetto al tempo) eseguendo lo spartito dal-



(a) mani (b) piede

(c) voce (d) direttore d'orchestra

Figura 3.6: Spartiti della *groove cell*

la fine all'inizio. Quella invece orizzontale (riflessione rispetto agli eventi) scambiando gli spartiti tra gli "strumenti".

Con la figura 3.7 (d) mostriamo come il nostro esperimento con piedi, mani e voce, sia del tutto analogo alla notazione per un *groove* di batteria: basta sostituire il piede con la *cassa*, le mani con il *rullante* e invece la voce con il *charleston*. Ne evince la regolarità (la ciclicità) della parte del batterista all'interno di un brano e di come il ritmo in se si basa sul concetto di ripetizione e dunque presenta una simmetria rispetto alla traslazione.

2.d Il piano Tempo×Eventi

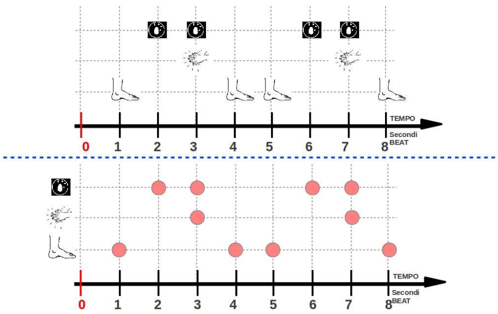
Formalizziamo ciò che è stato detto nell'attività precedente: abbiamo aggiunto alla freccia del tempo una seconda dimensione per la nostra rappresentazione, una retta verticale su cui abbiamo disposto l'insieme dei possibili eventi (*retta degli eventi*) come ad esempio dei movimenti da eseguire con il corpo o il viso (figura 3.7, *c*).

2.e La fattoria

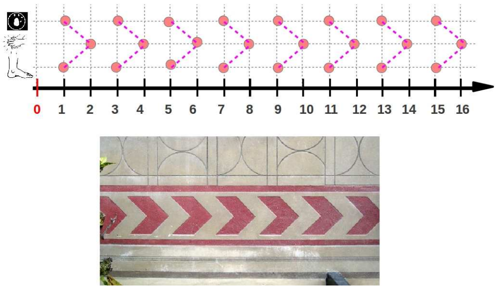
L'attività "La fattoria" è una *groove cell* più grande, a cui può partecipare tutta la classe. Dividiamo i ragazzi in 5 gruppi. Ad ogni gruppo assegnamo il verso di un animale della fattoria. Seguendo lo schema proiettato alla lavagna (figura3.8) si mette in scena un dialogo fra i vari animali. Si osserverà alla fine che lo "spartito" era in realtà costituito da figure geometriche e isometrie.

3.b Il piano musicale

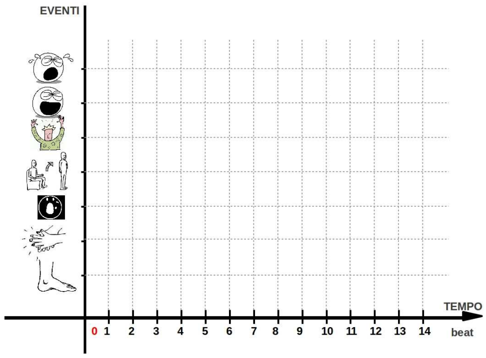
Introduciamo il piano musicale, formato dall'asse del tempo, in orizzontale, e da quello delle note, delle altezze dei suoni, in verticale. Su questo costruiamo, nota per nota insieme agli studenti, la melodia del famoso *Fra Martino campanaro*, che diventa una linea sul piano musicale (figura 3.9).



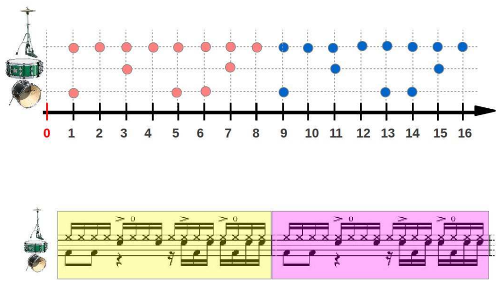
(a) Cambio di notazione



(b) Fregio ritmico



(c) Il piano



(d) Groove di batteria

Figura 3.7: Il piano tempo×eventi

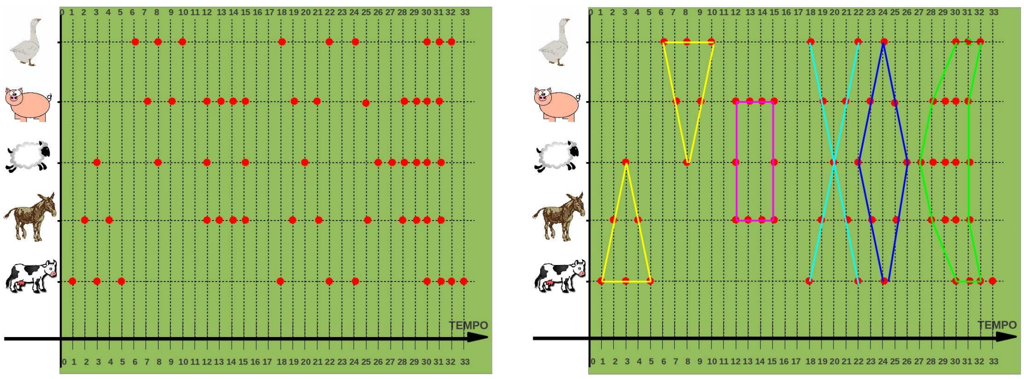


Figura 3.8: La fattoria

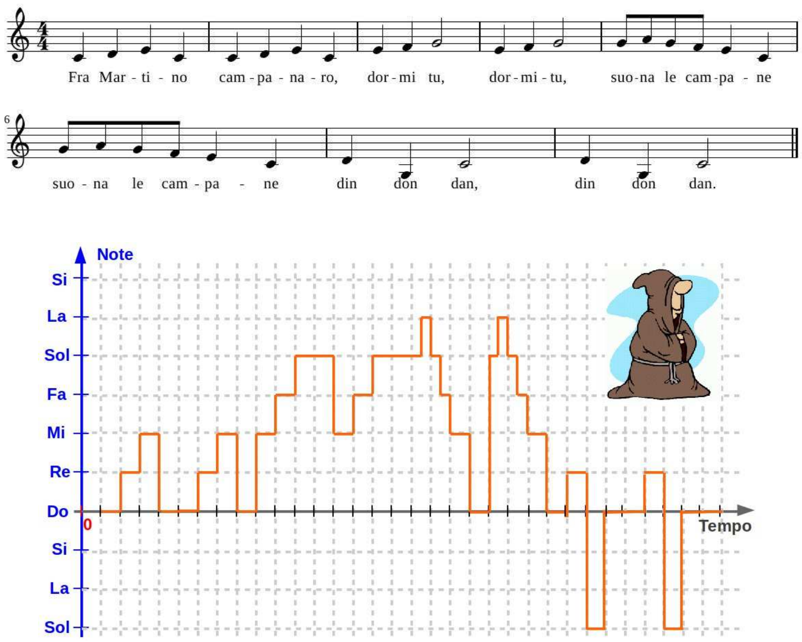


Figura 3.9: Il tema *Fra Martino campanaro*

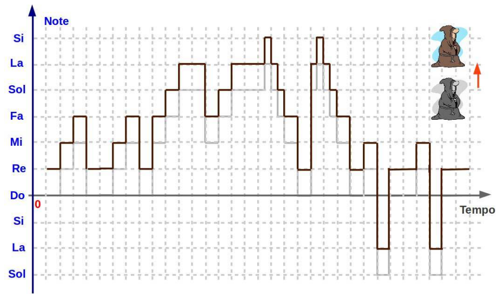
3.c Isometrie sul piano musicale

Applichiamo le quattro isometrie al tema *Fra Martino campanaro*: la traslazione verticale, la riflessione con asse verticale, la riflessione con asse orizzontale e la rotazione di 180°. Ognuna di queste trasformazioni da vita ad una nuova versione del motivo di partenza. Insieme agli studenti costruiamo le linee delle nuove melodie partendo da quella originale. Ascoltiamo l'esecuzione del risultato e valutiamo l'effetto musicale dato da ogni trasformazione.

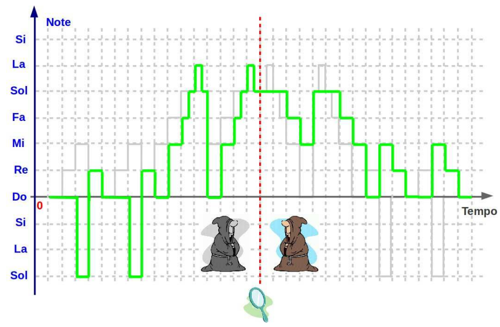
Come esempio di isometria applicata a un tema un po' più "contemporaneo", analizziamo il brano *Love on top* di Beyonce (brano di musica pop molto recente e molto conosciuto) che presenta un uso sistematico della traslazione verticale (figura 3.11).

3.d Simmetrie sul piano musicale

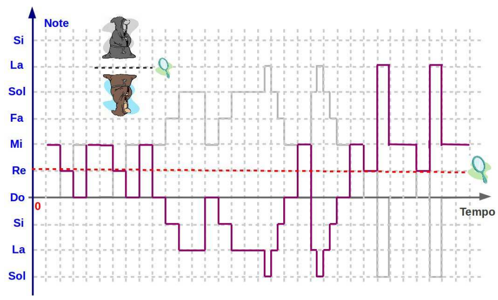
Analizziamo la possibilità di riscontrare una simmetria in un brano musicale. Se consideriamo la simmetria rispetto alla riflessione verticale, una musica con tale proprietà risulterà invariante rispetto a tale trasformazione, di conseguenza se suonata dall'inizio alla fine o all'indietro partendo dalla fine, la melodia rimarrà la stessa. Notiamo che qualsiasi melodia diventa simmetrica rispetto alla riflessione verticale se viene suonata contemporaneamente in



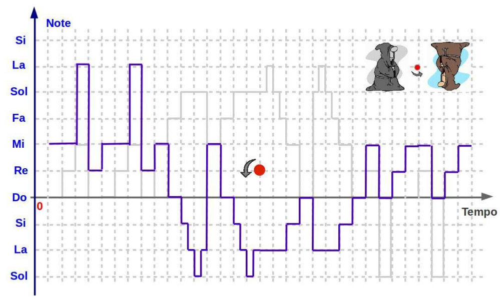
(a) traslazione



(b) riflessione verticale



(c) riflessione orizzontale



(d) rotazione di 180°

Figura 3.10: Le isometrie applicate a *Fra Martino campanaro*

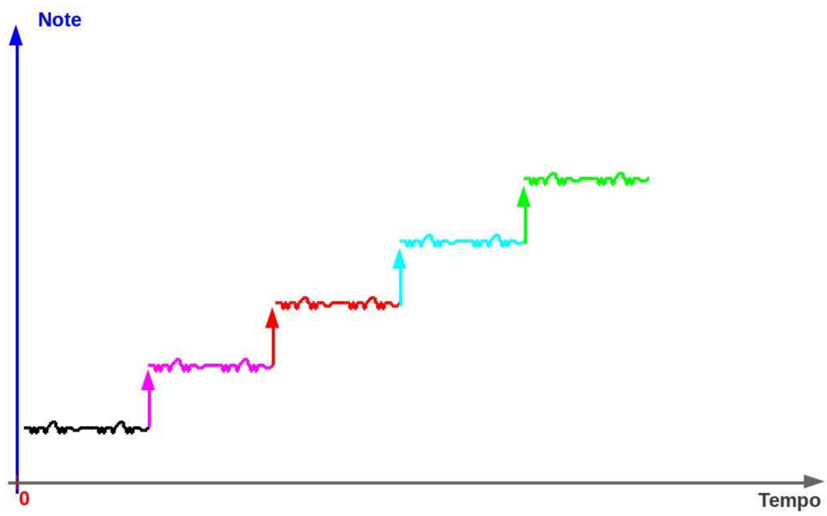


Figura 3.11: *Love on top*, Beyonce

avanti e all'indietro, ovvero se sul piano la linea della melodia viene sovrapposta alla sua riflessione. Questo tipo di artificio è utilizzato in musica e prende il nome di *canone inverso* (o *cancrizzato*). Ne è un esempio il primo canone dell'*Offerta musicale* di J. S. Bach di cui proponiamo l'ascolto.

Utilizzando lo stesso procedimento possiamo rendere un tema isometrico rispetto alla riflessione orizzontale (figura 3.12) o alla rotazione di 180°. Quest'ultimo è il caso dei *canoni da tavolo* (*table canon*): lo spartito, contenente un'unica linea musicale, viene posto su un tavolo in mezzo ai due musicisti che siendono uno di fronte all'altro; entrambi leggeranno la stessa linea, ma in direzione opposta. Ne segue che ognuno dei due suonerà la linea dell'altro riflessa sia verticalmente che orizzontalmente, ovvero ruotata di 180°, generando una simmetria rispetto a questa trasformazione. Un esempio di questo tipo di canone è il *Der Spiegel* (lo specchio) attribuito a W. A. Mozart, di cui possiamo mostrare il singolare spartito (figura 2.1 a pagina 27: le chiavi di violino e gli accidenti in chiave compaiono ruotati di 180° alla fine di ogni rigo) e che proponiamo di ascoltare.

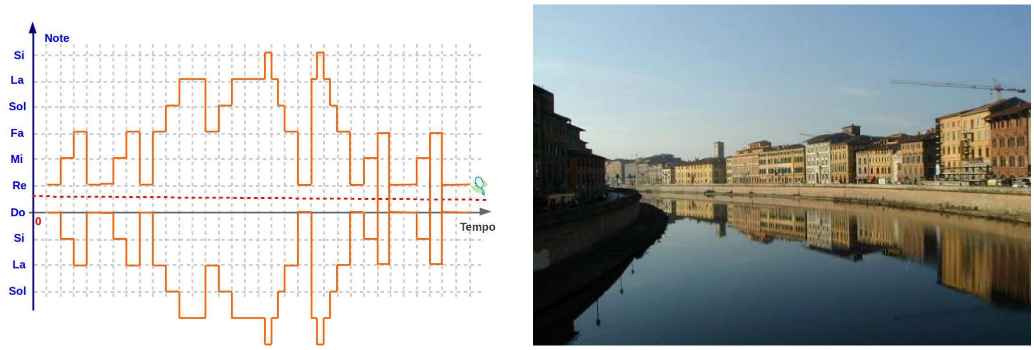


Figura 3.12: "Simmetrizzazione" rispetto alla riflessione orizzontale di *Fra Martino campanaro*

3.e Il *Blues*: una musica geometrica

Il Blues è una forma musicale con una forte presenza di traslazioni orizzontali e verticali. Nella sua forma originale è infatti caratterizzato da una struttura ripetitiva di dodici battute e, come abbiamo visto, la ripetizione in musica si associa alla traslazione orizzontale. All'interno di queste dodici battute l'armonia si sviluppa intorno a tre diversi centri tonali: il primo, il quarto e il quinto grado della scala. La voce (o lo strumento solista) vengono accompagnati da una ripetizione (traslazione orizzontale) della stessa cellula melodica traslata (verticalmente) rispetto ai tre centri tonali. In figura 3.13 abbiamo due esempi di motivi base per l'accompagnamento (a,c), e in (b) l'applicazione del motivo base (a) alla struttura blues. Il motivo base (a) è un classico del genere e si può ascoltare in *Sweet Home Chicago* di Robert Johnson.

3.f Canone e fregi sul piano musicale
Mostriamo come un certo tipo di fregio può essere tradotto sul piano musicale. Consideriamo il fregio in figura 3.14: è formato da due diverse linee che ripetono lo stesso motivo campione. Le due linee sono tra loro sfasate in orizzontale formando così un intreccio. Possiamo trasportare questo fregio sul piano musicale utilizzando come motivo campione il tema *Fra Martino campanaro*: utilizzando una traslazione orizzontale, costruiamo una seconda voce sfasata rispetto alla prima rispetto al tempo. Possiamo dividere in due la classe, assegnare ad ogni gruppo una voce ed eseguire i due temi sfasati. Discutiamo con la classe il risultato. In musica quello che abbiamo ottenuto si chiama *canone unisono* a due voci.

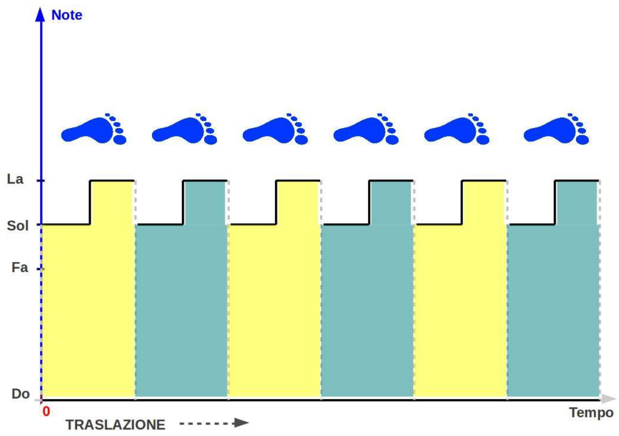
È possibili generalizzare il ragionamento a più voci: in figura 3.15 abbiamo un fregio a quattro linee che diventa, sul piano musicale, un *canone unisono* a quattro voci.

3.6 Diario del laboratorio

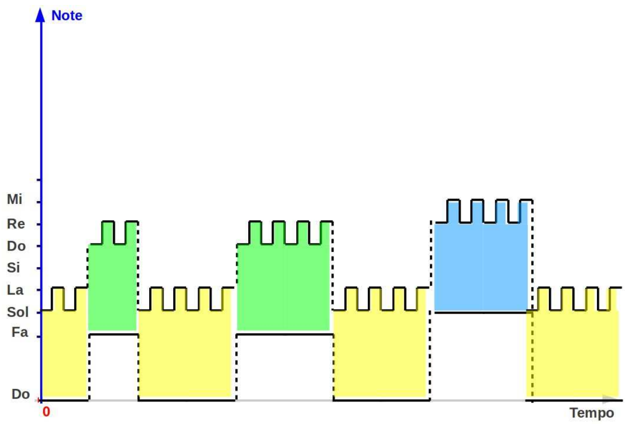
3.6.1 Primo modulo

L'incontro inizia, dopo le dovute presentazioni, con la definizione di isometria come movimento rigido del piano e con le determinazione delle tre principali isometrie (traslazione, rotazione, riflessione). In questa prima fase i ragazzi partecipano alla spiegazione mostrando di conoscere già queste nozioni, che quindi ho potuto trattare velocemente.

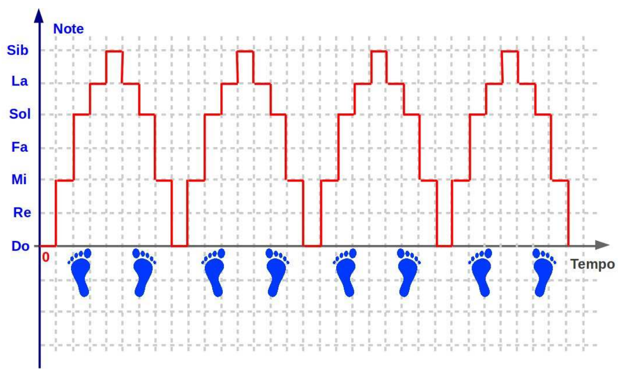
Passando invece alla simmetria, come ci si aspettava fin dal momento dell'ideazione di questo laboratorio si presenta un problema riguardante la sua definizione. Ci sono infatti due concetti distinti, che confondono i ragazzi. Da un lato c'è la simmetria come "trasformazione geometrica" (quindi una isometria), e allora abbiamo la simmetria assiale o quella centrale (che in questa tesi e in generale vengono chiamate "riflessioni").Dall'altro c'è la simmetria come proprietà di una figura, e questa è sostanzialmente l'essere la figura invariante rispetto a una trasformazione geometrica. In questo senso, avere un asse di simmetria significa che la figura è invariante (cioè viene trasformata in se stessa) dalla trasformazione geometrica simmetria rispetto a quell'asse; mentre essere simmetrico per un fregio significa essere invariante (cioè trasformato in se stesso) dalla trasformazione geometrica traslazione.



(a) motivo di base



(b) struttura



(c) altro motivo di base

Figura 3.13: Blues

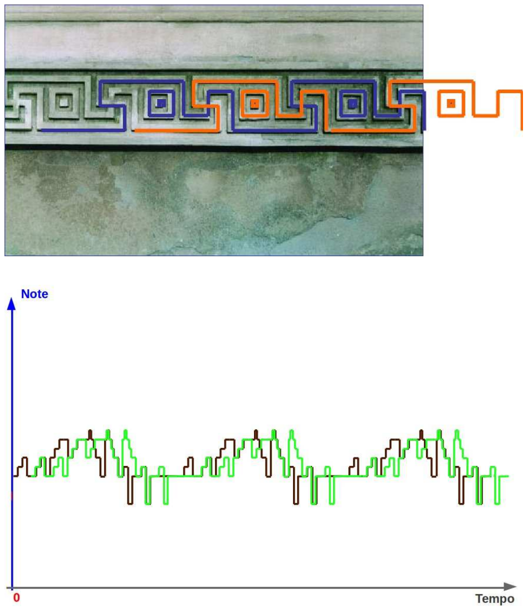


Figura 3.14: Canone a due voci

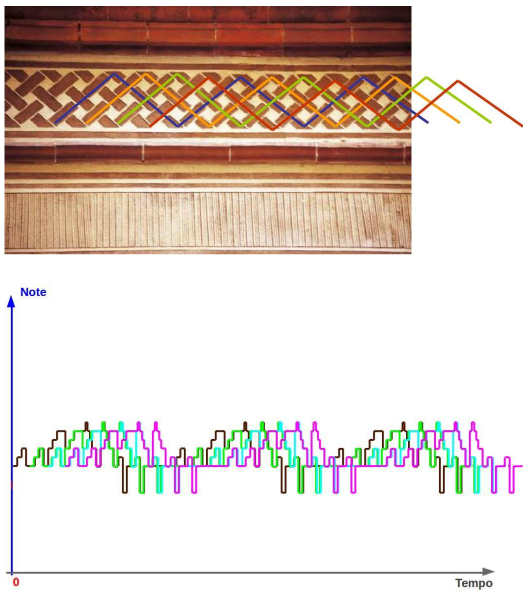


Figura 3.15: Canone a quattro voci

Questa ambiguità (presente nei libri di testo e nella pratica scolastica) crea disorientamento tra gli studenti.

Passando alle due attività più pratiche sulle simmetrie, descritte nel paragrafo 3.5 a pagina 38, queste mi sono sembrate piuttosto efficaci: il tabellone per far ruotare le forme, nella sua semplicità, ha aiutato a spiegare un tema apparentemente nuovo come la simmetria per rotazione, e ha permesso di individuare gli angoli rispetto a cui sono simmetrici il cerchio, il quadrato, il triangolo equilatero e altre forme e figure. Anche gli specchi hanno raggiunto il loro scopo: rendere evidente e alla portata di tutti la riflessione e la simmetria per riflessione. In quest'ultima attività i ragazzi sono stati divisi in gruppi. Ho notato che non tutti gli studenti si sono sentiti coinvolti: in quasi tutti i gruppi i ragazzi più intraprendenti e irruenti hanno monopolizzato i fogli con le forme lasciando qualcuno in disparte. Si poteva ovviare a questo prevedibile problema portando più fogli, più specchi e facendo gruppi meno numerosi (ho diviso la classe in tre gruppi da cinque ragazzi e uno da quattro, avendo a disposizione quattro specchi).

La simmetria per traslazione è stata una novità: è una terminologia che sicuramente non viene utilizzata a scuola, tuttavia il concetto di ripetizione di un motivo base è abbastanza semplice ed è sembrato essere stato accolto bene dagli studenti. Gli esempi con i fregi sembrano aver fissato il concetto: per ogni esempio i ragazzi hanno partecipato attivamente nell'individuazione del motivo ripetuto e delle eventuali simmetrie presenti insieme alla traslazione.

3.6.2 Secondo modulo

Per prima cosa abbiamo effettuato un ripasso: insieme abbiamo ricordato i nomi delle tre isometrie (traslazione, riflessione e rotazione), abbiamo ridiscusso quando due oggetti si dicono tra loro isometrici e quando una figura si dice simmetrica rispetto ad una certa isometria. Durante il ripasso abbiamo rivisto alcune immagini di figure simmetriche (di quelle analizzate nel primo incontro).

Dal momento in cui mi è sembrato non ci fossero troppi dubbi ho introdotto l'argomento successivo: la rappresentazione del tempo. Ho chiesto ai ragazzi come secondo loro fosse possibile rappresentare la dimensione tempo e, avendo loro stessi già affrontato questo problema in altre materie come per esempio Storia, siamo giunti alla conclusione che una freccia potesse risolvere la questione. Ho mostrato loro un'immagine con alcuni eventi storici (la nascita di Cristo, la fondazione di Roma...) ordinati sulla freccia del tempo (figura 3.5) e abbiamo giocato a riconoscerli, osservando l'importanza di prendere un evento particolare come punto di riferimento, ovvero inserire sulla freccia lo 0, il momento in cui iniziare a contare. Il passo successivo è stato mostrare come la freccia del tempo può essere utilizzata per accordarsi su eventi non ancora accaduti, ma che vogliamo fare accadere insieme come per esempio un appuntamento al cinema, oppure più semplicemente decidere un istante futuro in cui battere le mani tutti assieme.

Inseriamo quindi un'altra dimensione che insieme al tempo formi uno spazio bidimensionale. Avvalendomi dell'aiuto dell'insegnante, ho scelto quattro volontari tra i ragazzi e ho proposto l'attività *Groove cell* descritta nel paragrafo 3.5 a pagina 42.L'esecuzione è riuscita dopo qualche tentativo, ma comunque il gioco è stato capito in fretta. A questo punto ho chiesto quale collegamento si poteva trovare tra l'esperimento appena concluso e le isometrie e simmetrie. Abbastanza spontaneamente qualcuno si è ricordato della simmetria per traslazione, così abbiamo osservato insieme come gli spartiti dei singoli musicisti così come lo spartito del direttore d'orchestra rappresentavano dei veri e propri fregi, invarianti cioè per traslazione. Solo che ora i fregi erano in due dimensioni nuove: il tempo in orizzontale e quelli che abbiamo chiamato "eventi" in verticale (mani, piede e voce).

Ho rimandato a posto i primi quattro e ripetuto l'esperimento con altri quattro volontari. Questa volta però, per mettere maggiormente in evidenza la dimensione verticale degli eventi, ho distribuito degli spartiti come in figura 3.7 ((a) in basso e (b)), aventi gli eventi allineati in verticale a sinistra e dei pallini, esattamente come sul piano cartesiano, a indicare le coppie di coordinate (*tempo*,*evento*). Anche in questo caso l'esperimento riesce dopo un paio di tentativi.

A questo punto ho domandato alla classe cosa succede se faccio una riflessione orizzontale rispetto all'evento "battere le mani" (che è l'evento centrale). Una studentessa qui ha capito dove volevo arrivare: la riflessione orizzontale inverte gli spartiti della voce e del piede. Proviamo a rieseguire il brano con le parti invertite e ne risulta un nuovo motivo, quindi deduciamo che il brano non è simmetrico rispetto a questa trasformazione.

Con un ragionamento analogo scopriamo che la riflessione verticale fa eseguire il brano al contrario (dalla fine all'inizio) mentre la rotazione di 180° equivale a entrambe le riflessioni, quindi inverte le parti tra gli strumenti e fa suonare il brano al contrario.

Per chiarire il concetto ho mostrato ritmi semplici con diverse simmetrie, in tutto e per tutto uguali, nella loro rappresentazione, ai fregi visti nel primo incontro.

Come da copione ho collegato l'esperimento appena eseguito alla *batteria* mostrando attraverso la figura 3.7 (d) l'analogia tra uno spartito per questo strumento e quello che abbiamo utilizzato per il direttore d'orchestra in classe. Mostrando il video di un batterista che riproduce gli spartiti in figura 3.7 ho chiarito il concetto.

Infine ho proposto l'esperimento che ha coinvolto tutta la classe descritto nel paragrafo 3.5 a pagina 43: *la fattoria*. Quando alla fine ho unito i puntini dello spartito e sono venute fuori alcune forme geometriche (figura 3.8) qualcuno è rimasto sorpreso, tuttavia l'esperimento è risultato molto confusionario e poco incisivo, probabilmente da evitare.

3.6.3 Terzo modulo

Per questo ultimo incontro oltre al proiettore per le slide della presentazione ho preso in prestito un pianoforte elettrico dall'aula di musica.

Ho incominciato la lezione presentando un nuovo sistema di riferimento, molto simile al piano *tempo*$\times$*eventi* del secondo incontro: il *piano musicale*, formato dal tempo in orizzontale e dalle altezze delle note in verticale. Ho preso quindi come motivo campione il tema *Fra Martino campanaro* e l'ho eseguito al pianoforte; i ragazzi ovviamente lo ricordavano e lo hanno cantato. Insieme ai ragazzi, nota per nota, ho segnato la melodia sul piano musicale disegnando così una linea che rappresenta il tema (figura 3.9).

Ricordati i nomi delle isometrie che abbiamo visto nei due incontri precedenti, una alla volta le abbiamo applicate alla melodia. Abbiamo quindi discusso come cambia la linea (come cambiano le note) graficamente e, dopo averla suonata, musicalmente sotto l'effetto delle trasformazioni. Come descritto nel paragrafo 3.5 a pagina 45 si è analizzato il brano conosciuto da tutta la classe *Love on top* fornendo così un aggancio a qualcosa di famigliare ai ragazzi e introducendo il passaggio successivo: le isometrie possono essere usate come dei "colori" per creare variazioni al tema. Ho suonato in successione, senza pause, il tema *Fra Martino campanaro* seguito dalle sue variazioni ottenute tramite isometria e insieme abbiamo concordato sull'efficacia musicale della nuova "composizione".

Siamo passati quindi a discutere su come potrebbe "suonare" un tema simmetrico, ed abbiamo ascoltato gli esempi descritti nel paragrafo precedente.

Ho preso come esempio il Blues in quanto si possono ritrovare nella sua struttura e nelle parti degli strumenti che accompagnano traslazioni e simmetrie per traslazione riconducibili ai fregi. In questa attività ho notato una perdita di attenzione da parte degli studenti: probabilmente alcuni esempi sono stati da me introdotti con eccessiva superficialità sopravvalutando le capacità di ascolto dei ragazzi.

Queste due ultime attività, sulla simmetria e sul blues, non mi sono sembrate particolarmente efficaci. Ho notato che l'ascolto delle tracce audio che accompagnavano i due argomenti ha contribuito a far perdere l'attenzione di una buona parte degli studenti. Questo non è successo invece quando sono stato io ad eseguire le melodie con il pianoforte elettrico: suonando l'esempio c'è molto più controllo sul brano (puoi rallentare, ripetere una determinata parte per enfatizzarne le caratteristiche...); inoltre il fascino provocato dal vedere suonare uno strumento da una persona competente genera di per se attenzione nell'ascoltatore. Questi fattori mi sembrano aver influito sul fatto che la prima attività, sulle isometrie, sia stata meglio seguita rispetto alla parte sulle simmetrie e sul blues.

L'ultima attività è stata confrontare due particolari fregi con il canone unisono a due e a quattro voci (figure 3.14 e 3.15). Abbiamo provato a esguire entrambi i canoni dividendoci in gruppi, con buoni risultati.

3.7 Conclusioni

Alla fine di questo lavoro penso di potermi ritenere soddisfatto del materiale prodotto per il laboratorio. Alcune cose sono andate bene, e vanno certamente mantenute e riproposte: l'attività con gli specchi è semplice ma chiarisce molti dubbi riguardo la riflessione; l'utilizzo della *Groove cell* (un'esercizio che viene proposto nello studio della musica) mi è sembrato funzionare come primo esempio di *piano musicale* e ha avuto il merito di coinvolgere attivamente i ragazzi. Un'altra idea positiva è stata quella di usare il pianoforte elettrico nel terzo incontro: il fatto di suonare personalmente i vari esempi (piuttosto che ascoltarne la registrazione) ha permesso un maggior controllo della situazione (rallentare, ripetere una determinata parte per enfatizzarne le caratteristiche...); inoltre il fascino provocato dal vedere suonare uno strumento da una persona competente genera di per se attenzione nell'ascoltatore. Questo ha sicuramente influito sul fatto che la prima attività del terzo incontro, riguardante le isometrie, sia stata meglio seguita rispetto ad altre parti in cui gli esempi erano costituiti da registrazioni.

Ci sono state comunque anche attività che non hanno funzionato o che hanno funzionato solo in parte: nel terzo modulo, per esempio, le due attività sulla simmetria nel piano musicale e sul blues non mi sono sembrate particolarmente efficaci. Per quanto riguarda la prima, penso che l'argomento andasse affrontato più gradualmente, partendo da esempi più chiari: piuttosto che affrontare subito un tema di diverse battute si poteva iniziare da piccoli gruppi di note (quattro note in scala, un arpeggio...). Anche l'attività sul blues andava semplificata, magari concentrandosi semplicemente sulla ripetizione del motivo base d'accompagnamento e lasciando perdere l'aspetto armonico.

Un'attività invece che non rifarei è certamente *La fattoria*: troppa confusione, è impossibile pensare di cogliere la geometria che c'è dietro lo spartito.

Bibliografia

[1] D.L. Johnson, *Symmetries.* Springer, 2001

[2] M. Stolarski, *Frieze groups in* $\mathbb{R}^2$.
Documento online:
http://math.uchicago.edu/~may/

[3] E. Sernesi, *Geometria 1.* Bollati Boringhieri, 2000

[4] C. Rousseau, Y. Saint-Aubin, *Mathematics and Technology.*
Springer, 2008

[5] V. Hart, *Symmetry and Transformations in the Musical Plane.*
Documento online:
http://vihart.com/papers/symmetry/MusicalSymmetry.pdf

[6] W. Hodges, *Music and mathematics: from Pitagora to fractals.*
Oxford university press, 2003

[7] C. Duffy, *Simmetrical musical pieces.*
Documento online:
http://www.math.rutgers.edu/duffyc/research/SymmetricalMusical2b.doc

[8] N. Sala, *Matematica e arte: simmetria e rottura di simmetria.*
Documento online:
http://galileo.cincom.unical.it/

[9] M. di Maggio, *Gruppi cristallografici nell'opera di M.C. Escher.*
Documento online:
http://www.mat.uniroma3.it

[10] D. Benson, *Music: a mathematical offering.*
Documento online:
http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/

[11] Sito web di *Matematita*:
Centro Interuniversitario di Ricerca per la Comunicazione e l'Apprendimento Informale della Matematica.
`http://www.matematita.it`

[12] Sito web di *Wikipedia*:
L'enciclopedia libera e collaborativa.
`http://www.wikipedia.org`

[13] Sito web di *Progetto Matematica*:
Un progetto del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.
`http://www.progettomatematica.dm.unibo.it`