

**Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

## **Effetti relativistici in Astrofisica**

Tesi di laurea

Presentata da:  
**Giulia Pepe**

Relatore:  
**Chiar.ma Prof.ssa  
Marcella Brusa**

---

Anno Accademico 2022-2023

## Sommario

Agli inizi del XX secolo i fisici erano riusciti a dare una spiegazione ai più importanti fenomeni della meccanica, della gravità e dell'elettromagnetismo; tuttavia, gli esiti di alcuni esperimenti fecero scorgere delle incongruenze nel mondo scientifico. A portare nuovamente chiarezza fu Albert Einstein con la sua teoria della relatività ristretta nel 1905 (e la relatività generale nel 1916). Grazie a questa teoria si riuscì a spiegare cosa accadesse ad oggetti che si muovevano a velocità altissime, prossime a quella della luce.

L'obiettivo di questo elaborato è quello di descrivere quali siano le basi della relatività ristretta e gli effetti che subisce una particella relativistica. Nella prima parte, infatti, vengono introdotte le *trasformazioni di Lorentz* ed alcuni effetti relativistici come il *beaming relativistico*, *effetto Doppler relativistico* e i *moti superluminali*. Segue una descrizione della radiazione di *sincrotrone*, scoperta nel 1948 alla General Electric Research Laboratory negli USA; qui gli elettroni erano accelerati in un sincrotrone ad alte energie (il nome del fenomeno si origina, appunto, dal nome dell'acceleratore di particelle). Un altro processo di emissione che coinvolge elettroni relativistici è l'*Inverse Compton*, di cui ne verrà fatta una descrizione fisica. In ultima analisi verranno presentati alcuni esempi di oggetti astrofisici: i *nuclei galattici attivi* e i *resti di supernovae*, dove avvengono efficienti meccanismi di accelerazione di particelle che permettono l'emissione di radiazione ad alte energie. La presenza di questi processi radiativi permette anche un'analisi dei *raggi cosmici*, che possono essere di origine e natura varia.

# Indice

<b>1</b>	<b>Relatività ristretta</b>	<b>2</b>
1.1	Introduzione storica . . . . .	2
1.2	Le trasformazioni di Lorentz . . . . .	2
1.3	Impulso ed energia . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Emissione di radiazione ed effetti relativistici</b>	<b>4</b>
2.1	Teoria dei campi di radiazione . . . . .	4
2.2	Beaming relativistico . . . . .	5
2.3	Effetto Doppler relativistico . . . . .	6
2.4	Moti superluminali . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Sincrotrone e Inverse Compton</b>	<b>8</b>
3.1	Particella carica in un campo magnetico . . . . .	8
3.2	Impulso della radiazione di sincrotrone . . . . .	9
3.3	Distribuzione spettrale del sincrotrone . . . . .	10
3.4	Autoassorbimento di sincrotrone . . . . .	11
3.5	Inverse Compton . . . . .	11
3.6	Potenza emessa per Inverse Compton . . . . .	12
3.7	SSC e Catastrofe Compton . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Meccanismi di accelerazione</b>	<b>14</b>
4.1	Accelerazione tramite onde d'urto . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Esempi astrofisici</b>	<b>15</b>
5.1	Nuclei Galattici Attivi . . . . .	15
5.2	Resti di Supernovae . . . . .	16
5.3	Raggi Cosmici . . . . .	16

# Capitolo 1

## Relatività ristretta

### 1.1 Introduzione storica

La formulazione della teoria della relatività ristretta da parte di Albert Einstein nacque dall'esigenza di comprendere la natura dell'elettromagnetismo. Alla fine del XIX secolo, infatti, si notò che non era possibile applicare la relatività galileiana alle equazioni di Maxwell così come si faceva alle leggi di Newton per la meccanica. I fisici dell'epoca sostenevano che lo spazio fosse immerso in un mezzo, l'*etere*, in cui la luce si propagava con una velocità  $c^1$ ; considerando un sistema di riferimento S solidale con l'etere e uno S' in movimento rispetto ad esso, si è ricavato, tramite le trasformazioni di Galileo, che la velocità della luce varia se si è in movimento rispetto all'etere e, dunque, che esiste un sistema di riferimento inerziale privilegiato in cui la velocità della luce è  $c$ .

A confutare l'esistenza di tale sistema di riferimento fu il celeberrimo esperimento di Michelson-Morley (1887), volto alla misura della velocità del "vento d'etere" attraverso l'uso dell'interferometria. Lo scopo di partenza risultò fallimentare, ma il risultato ottenuto portò ad una conclusione importante: in ogni sistema inerziale la velocità della luce è sempre  $c$ .

### 1.2 Le trasformazioni di Lorentz

Con la pubblicazione dell'articolo *Sulla elettrodinamica dei corpi in movimento* (1905), Einstein espose la sua teoria della relatività ristretta a partire da due postulati:

- Principio di relatività: lo spazio è isotropo e uniforme. Le leggi della fisica assumono la stessa forma in tutti i sistemi inerziali e non esiste un sistema di riferimento privilegiato;
- Principio della costanza della velocità della luce: la velocità della luce nel vuoto  $c$  assume lo stesso valore costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Sulla base di questi postulati, Einstein formulò delle leggi di trasformazione delle coordinate spazio-tempo tra due sistemi di riferimento inerziali S ed S', passate alla storia

---

<sup>1</sup> $c = 2,99792548 \cdot 10^8 m/s$ .

come trasformazioni di Lorentz<sup>2</sup>

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.1)$$

dove  $\gamma$  è il fattore di Lorentz e  $\beta = \frac{v}{c}$ . S' si allontana da S con una velocità costante  $\vec{v}$  verso destra; se il moto fosse verso sinistra la velocità sarebbe  $-\vec{v}$ . Dalle trasformazioni si hanno le seguenti importanti conseguenze:

- Contrazione delle lunghezze: la misura di una lunghezza di un oggetto risulta essere massima quando è effettuata nel sistema di riferimento in cui l'oggetto è a riposo. In un sistema di riferimento in moto con una certa velocità  $\vec{v}$  rispetto al sistema a riposo la lunghezza risulterà contratta di un fattore di Lorentz;
- Dilatazione dei tempi: la durata di un evento, misurata in un sistema di riferimento in moto con velocità costante rispetto al sistema solidale con l'evento stesso, viene dilatata di un fattore  $\gamma$ ;
- Perdita del concetto di simultaneità tra due sistemi di riferimento inerziali: due eventi, sincronizzati in un sistema stazionario, non lo sono in un altro sistema in moto rispetto al primo.

### 1.3 Impulso ed energia

Per generalizzare la meccanica newtoniana è stato necessario ridefinire l'impulso, in modo che la legge di conservazione della quantità di moto resti un'invariante per le trasformazioni di Lorentz

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{u} \quad (1.2)$$

dove  $\vec{u}$  e  $m_0$  sono rispettivamente la velocità e la massa a riposo del corpo, misurata nel sistema di riferimento in cui essa è a riposo. La massa di un oggetto in movimento viene ridefinita *massa relativistica*  $m = \gamma m_0$ .

In modo analogo viene introdotta una nuova formulazione per l'energia

$$E = m_0 c^2 + K = m c^2 \quad (1.3)$$

con  $E$  energia totale della particella,  $m_0 c^2$  energia a riposo della particella,  $K$  energia cinetica. L'energia, in funzione dell'impulso, è

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (1.4)$$

La meccanica classica non è altro che un'importante approssimazione nel caso in cui  $\frac{v}{c} \ll 1$ .

---

<sup>2</sup>nel 1904 ricavò le stesse trasformazioni partendo da ipotesi diverse rispetto a quelle di Einstein.

# Capitolo 2

## Emissione di radiazione ed effetti relativistici

Per avere una visione chiara dei processi di emissione di radiazione da parte di particelle che si muovono a velocità relativistiche ( $\gamma \gg 1$ ) è necessario fare un breve *excursus* su come venga prodotta tale radiazione. La trattazione standard prevede un'analisi delle equazioni di Maxwell che porta alla definizione dei potenziali ritardati; il suo seguito è presentato nel primo paragrafo di questo capitolo. Verranno anche analizzati gli effetti di una sorgente di radiazione in movimento a velocità relativistiche.

### 2.1 Teoria dei campi di radiazione

Per capire come si origina il campo di radiazione si ricavano i potenziali ritardati<sup>1</sup> dovuti a una particella di carica  $q$  che si muove con una velocità  $\vec{u}$  lungo  $\vec{r}$ : questi sono i potenziali di Liénard-Wiechert; il campo elettrico associato a essi è composto da due parti:

- Campo di velocità: si riduce alla legge di Coulomb per  $\beta \ll 1$  ed è una sua generalizzazione;
- Campo di accelerazione: detto campo di radiazione  $\vec{E}_{rad}$ , va come  $1/R$  ed esiste solo se la carica è accelerata.

La potenza emessa da una carica  $q$  con accelerazione  $\dot{\vec{u}}$ , nel caso in cui  $\beta \ll 1$ , per unità di angolo solido, è espressa dal vettore di Poynting moltiplicato per l'area  $dA = R^2 d\Omega$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cR^2}{4\pi} |\vec{E}_{rad}|^2 = \frac{q^2 \dot{u}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \quad (2.1)$$

con  $\theta$  angolo tra la direzione definita dal vettore accelerazione e quella dell'osservatore. La dipendenza da  $\sin^2 \theta$  ha il seguente effetto: se l'osservatore è posizionato a  $\theta = 0$ , ovvero parallelamente alla direzione di accelerazione della particella, non vedrà nulla; se  $\theta = \frac{\pi}{2}$  la radiazione osservata sarà massima.

La potenza totale emessa è espressa dalla formula di Larmor

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{2q^2 \dot{u}^2}{3c^3} \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>nel calcolo dei potenziali si considera il tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza fra la sorgente e la posizione dell'osservatore; per questo motivo vengono definiti *ritardati rispetto alle sorgenti*.

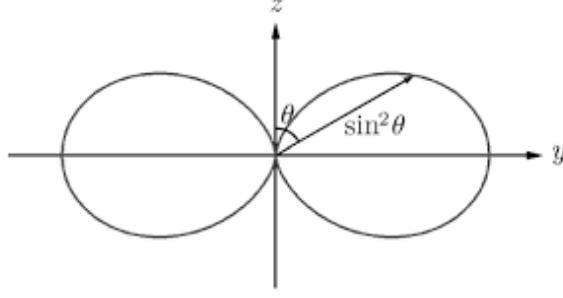


Figura 2.1: Pattern della radiazione.

Nel caso in cui la particella si muova a velocità relativistiche, con  $\gamma \gg 1$ , si generalizza la formula di Larmor in una forma invariante

$$P = \frac{2q^2}{3c^3m^2} \left[ \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \beta^2 \left( \frac{dp}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

dove  $d\tau = dt/\gamma$  (per la dilatazione dei tempi). La parentesi quadra è formata da una componente vettoriale, l'impulso, e una scalare  $dp$ , che deriva dalla definizione di quadrimpulso<sup>2</sup>. Nel caso di accelerazione lineare la componente vettoriale non è rilevante, poiché quello che varia è il modulo e non la sua direzione: vale il caso non relativistico.

$$P \simeq \frac{2q^2}{3c^3m^2} \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{dp}{d\tau} \right)^2 \simeq \frac{2q^2}{3c^3m^2} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (2.4)$$

Nel caso di accelerazione centripeta la variazione scalare è trascurabile rispetto a quella vettoriale.

$$P \simeq \frac{2q^2}{3c^3m^2} \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 \simeq \frac{2q^2}{3c^3m^2} \gamma^2 \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 \quad (2.5)$$

Nell'ultima formula considerata si osserva che l'emissione dipende sia dalla massa di una particella che da quanto essa sia enegetica.

## 2.2 Beaming relativistico

Si considera una sorgente di segnali luminosi che si muove con una velocità  $\vec{v}$ , posta all'origine del sistema di riferimento solidale con essa  $S'$ , e un sistema di riferimento  $S$  dell'osservatore. Derivando rispetto al tempo le trasformazioni di Lorentz (1.1) si ricavano le trasformazioni delle velocità; per gli assi  $x$  e  $y$  dell'esempio considerato

$$\begin{cases} u'_x = |\vec{u}'| \cos \theta = c \cdot \cos \theta = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \rightarrow u'_\parallel \\ u'_y = |\vec{u}'| \sin \theta = c \cdot \sin \theta = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \rightarrow u'_\perp \end{cases} \quad (2.6)$$

Facendo il rapporto tra le due velocità

$$\frac{u'_y}{u'_x} = \tan \theta' = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{u_x - v} = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta - \beta} \quad (2.7)$$

<sup>2</sup>è la generalizzazione quadrivettoriale della quantità di moto della meccanica classica, definito come  $\mathbf{P} := (E/c, p_x, p_y, p_z)$ .

mentre nel sistema di riferimento S dell'osservatore

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta' + \beta} \quad (2.8)$$

Se la sorgente non si muove  $\beta = 0$ , e allora i due angoli  $\theta = \theta'$ ; in genere  $\theta \ll \theta'$ . Quando il fotone viene emesso a  $90^\circ$ ,  $\theta' = \pm\pi/2 \Rightarrow \tan \theta = c/\gamma v$ . Per  $\gamma \gg 1$ , ovvero per sorgenti che si muovono a velocità ultrarelativistiche,  $\tan \theta \simeq \frac{1}{\gamma}$  e, con l'approssimazione per piccoli angoli,  $\theta \simeq 1/\gamma$ .

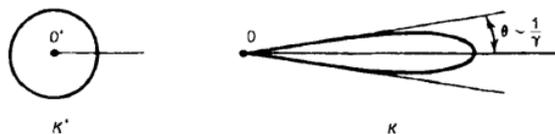


Figura 2.2: Effetto del beaming relativistico.

Si conclude che metà della radiazione prodotta da elettroni ultrarelativistici si concentra in un cono di semiapertura  $1/\gamma$  nella direzione della velocità; tutti gli altri fotoni restanti si spargono nello spazio restante, con  $\theta \gg 1/\gamma$ . Questo effetto è detto *beaming relativistico*.

## 2.3 Effetto Doppler relativistico

La lunghezza d'onda della luce può subire delle variazioni a causa del moto relativo della sorgente e dell'osservatore.

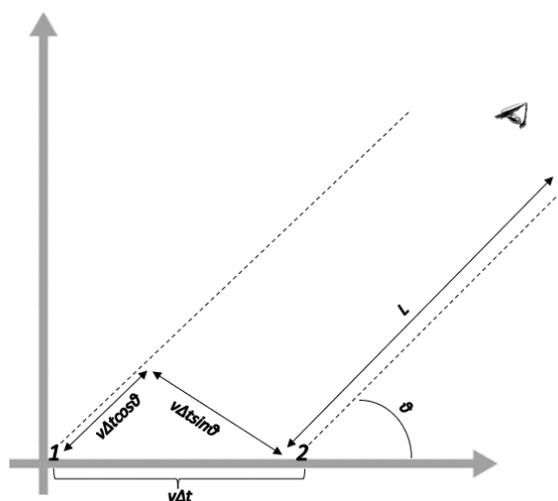


Figura 2.3: Geometria dell'effetto Doppler relativistico; la linea di vista dell'osservatore non è allineata con il moto relativo della sorgente, ma inclinata di un certo angolo  $\theta$ .

Ponendosi nel sistema di riferimento dell'osservatore (vedi figura 2.3), si analizza una sorgente in un moto con velocità  $\vec{v}$  che emette un fotone nel punto 1 al tempo  $t_1$  e un secondo fotone nel punto 2 al tempo  $t_2$ , in un intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ . I segnali dal punto 1 e dal punto 2 vengono ricevuti rispettivamente al tempo

$$t_1^a = t_1 + \frac{L + v\Delta t \cos \theta}{c} \quad (2.9)$$

$$t_2^a = t_2 + \frac{L}{c} \quad (2.10)$$

$$\Delta t^a = t_2^a - t_1^a = \Delta t \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right) \quad (2.11)$$

Invertendo la 2.11 si ricava la frequenza osservata

$$\nu = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} \quad (2.12)$$

Per effetto della dilatazione dei tempi  $\Delta t = \gamma \Delta \tau$ , dove  $\Delta \tau$  è il periodo misurato nel sistema di riferimento della sorgente; allora la 2.12 diventa

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)} = \nu_0 \mathcal{D} \quad (2.13)$$

dove  $\mathcal{D}$  è il fattore Doppler. Se  $\cos \theta > 0$ , la sorgente si avvicina all'osservatore e la radiazione viene blueshiftata; per valori positivi del coseno, infatti,  $\nu > \nu_0$ . Il valore massimo si ha per  $\theta = 0$ . Chiaramente per  $\gamma \rightarrow 1$  si ottiene la forma dell'effetto Doppler classico.

Quando si considerano velocità relativistiche, l'effetto Doppler può provocare un'amplificazione del flusso di una sorgente osservata, per un effetto noto come *Doppler boosting*. Se una sorgente emettesse radiazione in una banda di frequenza  $\Delta \nu_{obs} = \Delta \nu_{em} \cdot \mathcal{D}$ , l'intervallo di tempo impiegato dai fotoni per giungere all'osservatore per la dilatazione dei tempi e per l'effetto Doppler sarebbe  $dt_{em} = dt_{obs} \cdot \mathcal{D}$ . Per gli effetti di aberrazione relativistica, inoltre, la radiazione sarebbe concentrata principalmente in un cono di angolo solido  $d\Omega_{em} = d\Omega_{obs} \cdot \mathcal{D}^2$ . L'osservatore, nel calcolare la luminosità osservata, assume che l'emissione sia isotropa e, per questo motivo, si moltiplica per il fattore  $\mathcal{D}^2$ . Complessivamente il moto della sorgente rispetto all'osservatore ne modifica la luminosità

$$L_{obs} = L_{em} \cdot \mathcal{D}^4 \quad (2.14)$$

che diventa più rilevante per  $\theta$  piccoli e, soprattutto, per  $\beta \sim 1$ .

## 2.4 Moti superluminali

Per *moto superluminale* s'intende un moto che sembra superare la velocità della luce, ed avviene quando la sorgente di un segnale luminoso si muove con velocità prossime ad essa.

Facendo riferimento all'esempio della sorgente in un moto con velocità  $\vec{v}$  del paragrafo precedente e alla figura 2.3, si analizza la velocità trasversale della sorgente

$$v_{\perp} = \frac{v \Delta t \sin \theta}{\Delta t^a} = \frac{v \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} \quad (2.15)$$

Il suo valore massimo si raggiunge quando  $\cos \theta_{max} = v/c = \beta$ ,  $\sin \theta_{max} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{max}} = 1/\gamma \Rightarrow v_{\perp, max} = \gamma v$ . Quando  $\vec{v}$  raggiunge valori vicini a  $c$ , il moto della sorgente appare essere superluminale.

# Capitolo 3

## Sincrotrone e Inverse Compton

### 3.1 Particella carica in un campo magnetico

Consideriamo una particella di massa  $m$  con una carica  $q$  in moto in un campo magnetico  $\vec{H}$  uniforme. La sua equazione del moto è la seguente

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{H} \quad \vec{p} = m_0 \vec{v} \gamma \quad (3.1)$$

dove  $\vec{v}$  è la velocità della particella,  $\vec{p}$  la sua quantità di moto. Sulla particella agisce la forza di Lorentz, che non modifica la componente parallela della velocità<sup>1</sup> ma quella perpendicolare, generando un moto circolare uniforme; in altre parole, varia la direzione della velocità e non il suo modulo

$$m \frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{q}{c} v H \sin \theta \quad (3.2)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\vec{H}$  e  $\vec{v}$ , definito come *angolo di pitch*.

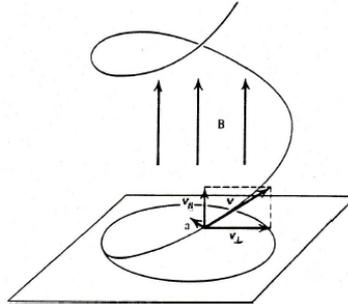


Figura 3.1: Moto di una particella in un campo magnetico uniforme.

Per il moto circolare uniforme, con velocità  $v_{\perp} = v \sin \theta$ , s'individuano il raggio di Larmor (il raggio di curvatura)  $r_L = mc v_{\perp} / qH$ , il periodo di rotazione  $T_L = 2\pi mc / qH$  e la frequenza di girazione  $\nu_L = qH / mc 2\pi$ .

Dalla combinazione del moto uniforme e di quello circolare si ottiene un moto elicoidale. Nel caso relativistico si dovrà tener conto del fattore di Lorentz<sup>2</sup>,  $m = m_0 \cdot \gamma$ .

<sup>1</sup> moto uniforme lungo le linee di forza del campo magnetico,  $\frac{d(mv_{\parallel})}{dt} = 0 \Rightarrow v_{\parallel} = \text{cost.}$

<sup>2</sup> nel caso di una particella relativistica raggio di Larmor, periodo di rotazione, frequenza di girazione saranno rinominate  $r_{L,rel}, T_{L,rel}, \nu_{L,rel}$ .

Per una carica accelerata da un campo magnetico si analizza come varia la sua emissione in base alla sua velocità:

- **Caso non relativistico** (ciclotrone): utilizzando la formula di Larmor 2.2 e sostituendo  $a = \frac{q}{m}\beta H \sin \theta$

$$P = \frac{2q^4}{3c^3m^2}\beta^2 H^2 \sin^2 \theta \quad (3.3)$$

- **Caso relativistico** (ciclotrone relativistico): gli effetti di aberrazione (2.8) provocano una deformazione della distribuzione angolare della radiazione, che si traduce in un'emissione della radiazione in armoniche superiori con frequenze ed energie

$$\nu_k = k\nu_L \left(1 - \frac{v_{\parallel} \cos \theta}{c}\right) \quad \left[\frac{dW}{dt}\right]_{k+1} \approx \beta^2 \left[\frac{dW}{dt}\right]_k \quad k = 1, \dots, n$$

e non più ad un'unica frequenza. Questo risultato si ottiene dalla scomposizione del diagramma polare tramite l'analisi di Fourier. La componente parallela della velocità, proiettata lungo la linea di vista, provoca uno spostamento Doppler che è rappresentato dalla parentesi della  $\nu_k$ . Le correzioni Doppler sulla frequenza diventano importanti tanto più una particella è relativistica, provocando un allargamento della linea di emissione tale da far sembrare lo spettro un continuo;

- **Caso ultrarelativistico** (sincrotrone): le armoniche sono molto vicine e formano un continuo. Per la formula di Larmor, la potenza emessa è pari a

$$P = \frac{2q^4}{3m_0^4c^7}\varepsilon^2 H^2 \sin^2 \theta \simeq 1,62 \cdot 10^{-15} \gamma^2 H^2 \sin^2 \theta \quad (3.4)$$

con  $\varepsilon = \gamma m_0 c^2, \beta \sim 1$ . Dalla formula 3.4 si evince una proporzionalità diretta con  $H^2$  e con  $\varepsilon^2$ .

## 3.2 Impulso della radiazione di sincrotrone

Per effetto del *beaming relativistico* (vedi 2.2), la radiazione di sincrotrone giunge all'osservatore sotto forma di impulsi, e questa sarà massima quando la linea di vista sarà diretta verso la stessa direzione della velocità dell'elettrone. Per ricavare la durata di un singolo impulso si prende in analisi un elettrone di velocità  $\vec{v}$  in un campo magnetico  $\vec{H}$  che emette radiazione in un cono di semiapertura  $1/\gamma$ ; nel sistema di riferimento dell'elettrone la durata dell'impulso, come rappresentato dalla figura 3.2, è di

$$\Delta t = \frac{2\pi\Delta\theta}{\nu_{rel}} = \frac{\Delta\theta}{\omega_{rel}} = \frac{2}{\omega_L} s \quad (3.5)$$

dove  $\Delta\theta$  è la frazione dell'orbita entro cui vediamo la radiazione. Dal punto di vista dell'osservatore, il primo fotone osservato ha percorso una distanza pari a  $c\Delta t$  partendo dal punto 1 in cui è stato emesso, mentre l'ultimo  $c\Delta t - v\Delta t$ . L'intervallo di tempo fra i due fotoni, grazie allo sviluppo in serie<sup>3</sup> di  $\beta$ , è

$$\Delta t = (1 - \beta) \Delta t \simeq \frac{5 \cdot 10^{-8}}{\gamma^2 H [G]} s \quad (3.6)$$

---

<sup>3</sup> $\beta \sim 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$

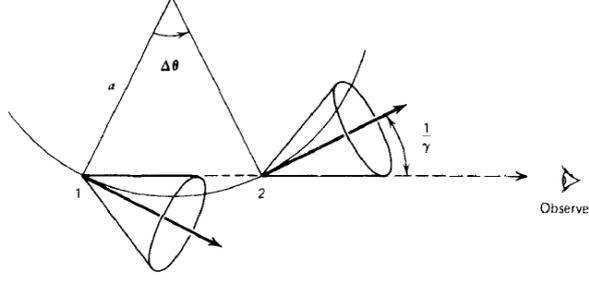


Figura 3.2: Impulsi iniziali e finali osservati.

### 3.3 Distribuzione spettrale del sincrotrone

La distribuzione spettrale di un singolo elettrone, ovvero la potenza emessa per unità di intervallo di frequenza, si ottiene con l'analisi di Fourier. Dato il grande numero di armoniche si ottiene uno spettro continuo. Si definisce una frequenza caratteristica

$$\nu_s \simeq 4,2 \cdot 10^{-9} \gamma^2 H [\mu G] \quad GHz \quad (3.7)$$

che individua due regimi:

- $\nu \ll \nu_s$ : l'emissione è proporzionale a  $\nu^{\frac{1}{3}}$ ;
- $\nu \gg \nu_s$ : la potenza emessa va come  $e^{-\frac{\nu}{\nu_s}}$ .

La distribuzione presenta un massimo per  $\nu \sim 0,3\nu_s$ . Prendendo in considerazione un campo magnetico  $H \sim 1\mu G$ ,  $\gamma \sim 10^4$  otteniamo un valore della frequenza caratteristica  $0,4 GHz$  (radio).

Prendendo ora  $N(\varepsilon)d\varepsilon$  numero di elettroni per unità di volume con energia compresa tra  $\varepsilon$  e  $\varepsilon + d\varepsilon$ , che emettono per sincrotrone in maniera indipendente tra di loro nell'intervallo di frequenze da  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ , la loro emissività specifica sarà

$$J_s(\nu) = \int_{\varepsilon_{min}}^{\varepsilon_{max}} N(\varepsilon)P(\nu, \varepsilon)d\varepsilon \quad (3.8)$$

dove  $\varepsilon_{min}$  e  $\varepsilon_{max}$  sono gli estremi dello spettro di energia della popolazione elettronica. Supponendo che gli elettroni abbiano questa distribuzione,

$$N(\varepsilon)d\varepsilon = N_0\varepsilon^{-\delta}d\varepsilon \quad N_0, \delta = cost \quad (3.9)$$

la quale è in accordo con gli spettri osservati dalle radiosorgenti<sup>4</sup>, si può ottenere l'emissività totale. Si arriva alla sua formula approssimando la frequenza con cui viene irradiata l'energia per ciascun elettrone con la frequenza caratteristica (l'emissione di ciascun elettrone è monocromatica alla frequenza caratteristica),  $\nu = \nu_s$

$$J_s(\nu) \propto N_0 H^{\alpha+1} \nu^{-\alpha} \quad (3.10)$$

con  $\alpha = \frac{\delta-1}{2}$  indice spettrale, ed esprime la pendenza della distribuzione in un grafico  $\log\nu - \log J_s(\nu)$ . Dato che  $J_s(\nu) \propto S(\nu)$  allora anche il flusso  $S(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$ . Per la Via Lattea, il valore dell'indice spettrale nel disco si aggira a  $\alpha \simeq 0.8$  ( $\nu > 400MHz$ ),  $\alpha \simeq 0.6 \pm 0.1$  ( $\nu < 400MHz$ ), mentre nell'alone  $\alpha > 0.8$  ( $\nu > 80MHz$ ).

<sup>4</sup>anche lo spettro di energia osservato nei raggi cosmici e quello del meccanismo di accelerazione di Fermi sono leggi di potenza.

### 3.4 Autoassorbimento di sincrotrone

L'autoassorbimento di sincrotrone consiste nell'acquisizione dell'energia di un elettrone da parte di un fotone, e si osserva quando il numero di fotoni che cedono la propria energia diventa importante, ovvero quando la temperatura di brillantezza ha un valore simile a quello della temperatura cinetica<sup>5</sup>; la prima non potrà mai avere un valore più grande della seconda, perché, altrimenti, si violerebbe il secondo principio della termodinamica. Fatte queste considerazioni si possono esplicitare  $T_B$  e  $T_e$  rispettivamente

$$T_B(\nu) = \frac{B(\nu)}{2k} \left(\frac{c}{\nu}\right)^2 \quad T_e \approx (6,26 \cdot 10^{18})^{-\frac{1}{2}} H_{\perp}^{-\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}}$$

Dato che  $T_B \propto \nu^{-2}$  e  $T_e \propto \nu^{1/2}$ , esiste una frequenza massima, oltre la quale si violerebbe il secondo principio della termodinamica; si ricava derivando la (3.11)

$$B_s(\nu) = \frac{J_s(\nu)}{4\pi\mu_s(\nu)} (1 - e^{-\tau_s(\nu)}) \quad (3.11)$$

$$\nu_{max} \approx S_{max}^{\frac{2}{5}} [Jy] \theta^{-\frac{4}{5}} [mas] H_{\perp}^{\frac{1}{5}} [mG] (1+z)^{\frac{1}{5}} + 2 \quad (3.12)$$

con  $\theta$  diametro apparente medio della radiosorgente (sferica),  $z$  un contributo dovuto al redshift. Nella realtà non vi sono sorgenti sferiche; è più frequente trovare sorgenti compatte formate da strutture più piccole, ciascuna delle quali ha uno spettro con picchi diversi, la cui somma non dà uno spettro con pendenza di  $\frac{5}{2}$ . Prendendo la formula 3.11, e considerando il coefficiente di assorbimento determinato dai coefficienti di Einstein<sup>6</sup>

$$\mu_s \propto H_{\perp}^{\frac{(\delta+2)}{2}} \nu^{-\frac{(\delta+4)}{2}} N_0 \quad (3.13)$$

si possono distinguere i casi di

- $\tau_s(\nu) \ll 1$  otticamente sottile  $\rightarrow B_s(\nu) \propto \nu^{\alpha} H_{\perp}^{\alpha+1}$ ;
- $\tau_s(\nu) \gg 1$  otticamente spesso  $\rightarrow B_s(\nu) \propto \nu^{\frac{5}{2}} H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}$ .

### 3.5 Inverse Compton

L'Inverse Compton è un fenomeno di scattering, ovvero un processo di diffusione della radiazione (fotoni) dovuta al suo incontro con delle particelle libere. I fenomeni di scattering si differenziano tra di loro in base alla velocità degli elettroni considerati e all'energia dei fotoni incidenti. Se l'elettrone è fermo si parla di scattering Thomson e Compton<sup>7</sup>. Quando l'elettrone si muove a velocità relativistiche si può avere l'Inverse Compton, che consiste in un trasferimento di energia dall'elettrone al fotone. Questa tipologia di scattering è molto utile per individuare sorgenti in cui vi sono campi di radiazione intensi ed elettroni molto energetici; laddove vi è scattering per Inverse Compton potrebbero esserci anche emissioni di radiazione di sincrotrone.

Per capire come funzioni questo fenomeno si prendono in considerazione i sistemi di riferimento del laboratorio e dell'elettrone, rispettivamente S ed S'. Facendo riferimento alla figura (3.3) definiamo angoli e fotoni di incidenza  $\varepsilon, \varepsilon', \theta, \theta'$  e angoli e fotoni di

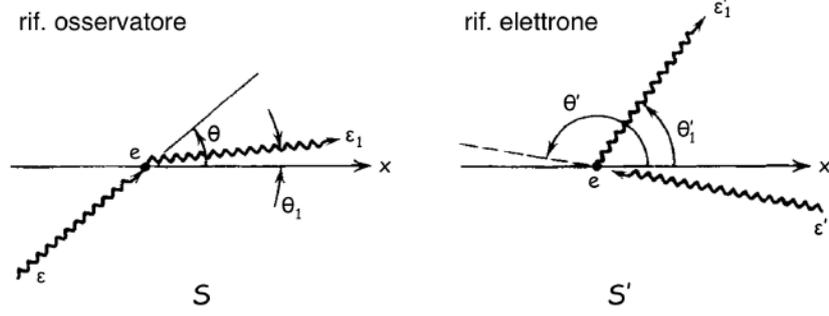


Figura 3.3: Geometria dell'Inverse Compton.

diffusione  $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \theta_1, \theta'_1$ . In  $S'$  il fotone ha energia  $h\nu' \ll m_e c^2$ ; di conseguenza si avrà scattering Thomson e il fotone verrà diffuso con la stessa frequenza iniziale  $h\nu'_i = h\nu'_f$ . Per effetto Doppler relativistico (formula 2.13) in  $S'$   $h\nu'_i = h\nu_i \gamma(1 - \beta \cos \theta)$ . In  $S$  l'energia finale, sempre per effetto Doppler, è  $h\nu_f = h\nu'_f \gamma(1 + \beta \cos \theta'_1) = \gamma^2 h\nu_i (1 - \beta \cos \theta)(1 + \beta \cos \theta'_1) \sim h\nu_i \gamma^2$ . L'energia finale del fotone dipende dall'angolo con cui incide sull'elettrone:

- urto frontale ( $\theta = \pi, \theta'_1 = 0$ ): si ha il massimo guadagno di energia  $\varepsilon'_{max} = 4\gamma^2 \varepsilon$ . Il fotone impatta sul cono di semiapertura  $1/\gamma$  e viene blueshiftato;
- urto posteriore ( $\theta = 0, \theta'_1 = \pi$ ): si ha il minimo guadagno di energia  $\varepsilon'_{min} \approx \frac{\varepsilon}{4\gamma^2}$ ; il fotone viene redshiftato.

### 3.6 Potenza emessa per Inverse Compton

Qual è la potenza emessa per Inverse Compton? Si considera un plasma di elettroni relativistici e un campo di radiazione  $E'_{rad} = E_{rad} \gamma(1 - \beta \cos \theta)$ , entrambi con distribuzione isotropa. Ricordando che  $\langle S \rangle = \langle E_{rad}^2 \rangle \langle \frac{c}{8\pi} \rangle$  è il flusso di energia elettromagnetica per unità di superficie, l'energia emessa per unità di tempo per Inverse Compton è

$$L_{IC} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon'}{dt} = \langle S \rangle \sigma_T = \langle E_{rad} \rangle \gamma^2 \sigma_T c \langle (1 + \beta \cos \theta)^2 \rangle \quad (3.14)$$

Dato che la distribuzione è isotropa si può integrare sull'angolo solido  $\langle (1 + \beta \cos \theta)^2 \rangle$  e, ricordando che  $\langle E_{rad}^2 \rangle = U_{ph}$ , si ricava

$$L_{IC} = \frac{d\varepsilon_{out}}{dt} = c \sigma_T U_{ph} \gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right) \quad (3.15)$$

Facendo la differenza fra la formula 3.15 e l'energia che avevano i fotoni prima della diffusione

$$L_{IC} = \frac{d\varepsilon_{in}}{dt} = c \sigma_T U_{ph} \quad (3.16)$$

<sup>5</sup> $T_B$  è definita come la temperatura che avrebbe un corpo nero se producesse la brillantezza superficiale della sorgente che si osserva a frequenza  $\nu$  nel regime di Rayleigh-Jeans;  $T_e$  si ricava dalla formula relativistica dell'energia.

<sup>6</sup>coefficienti usati per descrivere le interazioni radiative che riguardano transizioni elettroniche.

<sup>7</sup>per lo scattering Thomson  $h\nu \ll m_e c^2$ , per lo scattering Compton  $h\nu \sim m_e c^2$ , con  $m_e c^2 \approx 0,5 Mev$ .

si deriva una formula che rappresenta il trasferimento di energia dagli elettroni ai fotoni

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{IC} = \frac{d\varepsilon_{out}}{dt} - \frac{d\varepsilon_{in}}{dt} = \frac{4}{3}c\sigma_T U_{ph} \gamma^2 \beta^2 \quad (3.17)$$

### 3.7 SSC e Catastrofe Compton

In una regione in cui vi sono elettroni relativistici, un campo magnetico e un campo di radiazione potrebbe esserci sia emissione di sincrotrone e che scattering Inverse Compton. Confrontando le perdite radiative per entrambi i processi, utilizzando la 3.17 e la 3.4 integrata per l'angolo solido<sup>8</sup>

$$\eta = \frac{\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_S}{\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{IC}} = \frac{U_H \cdot 8\pi}{H^2} = \frac{U_H}{U_{ph}} \quad (3.18)$$

Le perdite per Inverse Compton diventano più importanti, rispetto a quelle per sincrotrone, quando  $U_{ph} > \frac{H^2}{8\pi}$ , ovvero per sorgenti compatte e luminose. Il tempo di vita media di un elettrone, che subisce perdite per entrambi i processi, è

$$t^* = \frac{\varepsilon}{d\varepsilon} dt \Rightarrow t_{IC+S}^* = \frac{3 \cdot 10^8}{\frac{H^2}{8\pi} + U_{rad}} \frac{1}{\varepsilon^*} [yr] \quad (3.19)$$

In particolare, quando gli elettroni relativistici, sorgenti di fotoni poco energetici per sincrotrone, sono anche responsabili della loro diffusione per inverse Compton si parla di *Synchrotron-Self Compton*. Avviene principalmente in sorgenti molto compatte, dove la densità dei fotoni e degli elettroni è molto alta. Per questo motivo si può esprimere la luminosità radio della sorgente di raggio  $R$  dovuta al sincrotrone, a distanza  $d$  dall'osservatore, come autoassorbita

$$L(\nu)_S = 4\pi d^2 S(\nu) = 4\pi d^2 \frac{2kT_B}{\lambda^2} \frac{R^2}{d^2} = \frac{8\pi kT_B R^2}{\lambda^2} \quad (3.20)$$

dove  $\frac{R^2}{d^2} = \Omega$  è l'angolo solido sotteso dalla sorgente e  $\gamma m_e c^2 = 3kT_e = 3kT_B$  dato che la sorgente è autoassorbita. Dalla luminosità si arriva alla densità di energia dell'emissione radio di sincrotrone  $U_{ph} = L(\nu)\nu/4\pi cR^2$ . Inserendo questi risultati nella 3.18, e ricordando che  $\nu \approx \nu_s \approx \gamma^2 \nu_L$

$$\eta = \frac{16\pi kT_B \nu^2}{H^2 c^3} \approx C \nu T_B^5 \quad \text{con } C = \frac{342e^2 k^5}{\pi m_e^6 c^{13}} \quad (3.21)$$

$\eta = 1$  definisce una temperatura critica

$$T_B = T_e = 10^{12} \nu_9^{-\frac{1}{5}} [K] \quad (3.22)$$

dove  $\nu_9$  è la frequenza misurata in unità di  $10^9$  Hz. Se  $\eta > 1$ , ovvero  $T_B > 10^{12} K$ , la vita degli elettroni sarebbe breve a causa delle grandi perdite energetiche per Inverse Compton, facendo raffreddare la sorgente rapidamente. Questo fenomeno è noto come *Catastrofe Compton*. Le osservazioni non rilevano, però, questo tipo fenomeno; questo accade perché l'effetto Doppler relativistico e l'aberrazione relativistica modificano la frequenza iniziale e la temperatura di un certo fattore che, quando assume valori troppo alti, può falsare la misurazione.

<sup>8</sup>si assume che la distribuzione degli elettroni sia isotropa.

# Capitolo 4

## Meccanismi di accelerazione

Le particelle vengono accelerate tramite due principali meccanismi: *stocastici*, in cui le particelle guadagnano/perdono energia a causa di un urto con una nube magnetizzata, o *sistematici*, che coinvolgono un'onda d'urto e sono presenti nei *resti di supernovae* e *hot spot* dei nuclei galattici attivi. La prima tipologia di meccanismo di accelerazione risulta essere poco efficiente; per questo motivo si analizzerà il secondo, noto come *meccanismo di Fermi di I specie*.

### 4.1 Accelerazione tramite onde d'urto

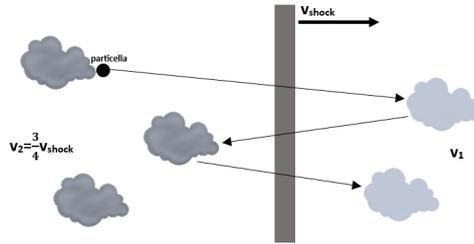


Figura 4.1: Accelerazione di una particella tramite un'onda d'urto.

Si considera una regione attraversata da un'onda d'urto, che si muove con velocità  $v_2 = 3/4 v_{shock}$ , come in figura 4.1. La particella presente in questa regione non sente l'onda d'urto<sup>1</sup> e procede con la sua velocità  $v$ . Dopo aver sorpassato lo shock, la particella urta contro le nubi non ancora attraversate dall'onda d'urto; queste sono ferme ( $v_1 = 0$ ) e, per questo motivo, la particella viene rimbalzata indietro con la velocità che aveva prima. Successivamente si ha un urto tra la particella e le nubi con velocità  $v_2$ . Il guadagno finale di energia sarà, dopo un ciclo<sup>2</sup>, di

$$v' = -v - 2 \cdot \frac{3}{4} \approx \frac{3}{2} v_{shock} \quad v \ll v_{shock} \quad (4.1)$$

Già dopo due urti la particella acquista una velocità che è superiore a  $v_{shock}$ . Dato  $l$  il libero cammino medio della particella, lo spettro prodotto da questa tipologia di meccanismo segue la legge di potenza

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\frac{t}{\tau_F}} \quad \text{con } \tau_F = \frac{4l}{3v_{shock}} \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>è una particella libera e non un fluido.

<sup>2</sup>si fa uso della formula ricavata dell'urto di particelle con nubi magnetizzate (urto stocastico).

# Capitolo 5

## Esempi astrofisici

### 5.1 Nuclei Galattici Attivi

I nuclei galattici attivi, o AGN (active galactic nuclei), sono una classe di oggetti extragalattici molto brillanti a causa di un'efficiente sorgente di energia, che si trova in una zona corrispondente al nucleo della galassia. La grande emissione di radiazione si origina dal buco nero supermassiccio che si trova al centro della galassia.

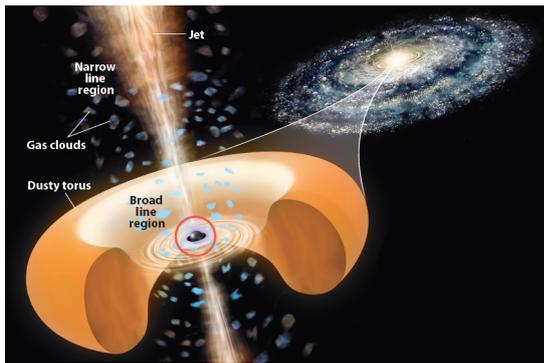


Figura 5.1: Morfologia di un AGN.

Il buco nero, che ha una massa  $10^6 M_{\odot} < M < 10^{10} M_{\odot}$ <sup>1</sup> è contornato da un disco di accrescimento, formato dal materiale che vi spiraleggia attorno. Si distinguono poi due regioni: la Broad Line Region (BLR) e la Narrow Line Region (NLR). La prima è formata da piccole nubi, a circa 1 pc dal buco nero, che hanno temperature di circa  $T = 10^4 K$ , si muovono a  $3000 km s^{-1}$  e assorbono la radiazione ionizzata del disco, per poi riemetterla; la seconda è una regione a circa 100 pc in cui vi sono delle nubi che si muovono più lentamente rispetto a quelle della BLR.

Circa il 10 % degli AGN emette getti di materiale di forma cilindrica o conica. Man mano che il gas va avanti rallenta formando i lobi. Dallo scontro del materiale con il mezzo intergalattico si genera un'onda d'urto, che forma le hot spot, regioni di qualche kpc di diametro. Il materiale lasciato indietro dalle hot spot origina i lobi, che hanno dimensioni di 10pc-1Mpc. Le particelle presenti nelle hot spot vengono accelerate dalla shock wave, ad opera del meccanismo di accelerazione di Fermi di I specie. Per questo motivo, in queste zone si osserva emissione per sincrotrone e per Inverse Compton.

La radiazione negli AGN si estende su tutto lo spettro elettromagnetico:

- Banda radio: il principale processo di emissione in questa banda è dovuta al sincrotrone;
- Infrarosso: si osserva nel toro, dove la polvere assorbe i raggi UV e ottici e li riemette nell'IR;

<sup>1</sup>i buchi neri con  $M > 10^9 M_{\odot}$  sono definiti supermassive black holes.

- Ottico-UV: l'emissione in questa banda proviene principalmente dal disco di accrescimento. Lo spettro è dato dalla sovrapposizione di spettri di corpi neri con  $T = 10^4 - 10^5 K$ ;
- Raggi X: l'emissione di raggi X è dovuta allo scattering Inverse Compton dei fotoni meno energetici del disco. In questa banda è molto importante anche la riga di emissione  $K\alpha$  del ferro: gli elettroni molto energetici ionizzano atomi di ferro, lasciando delle lacune nelle shell interne, che vengono successivamente occupate da un elettrone di una shell superiore, comportando un'emissione di un fotone X;
- Raggi  $\gamma$ : il synchrotron-self Compton nei getti è la principale causa dell'emissione di raggi  $\gamma$ .

## 5.2 Resti di Supernovae

L'emissione di sincrotrone è osservabile nei Resti di Supernova (SNR); questi hanno una forte emissione in banda radio, soprattutto nei SNR giovani (età inferiore ai 1000 yr), che seguono una legge di potenza  $S(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$ , con  $\alpha \sim 0.5$ .

L'esplosione della stella comporta l'espulsione di materiale ad altissime velocità che, scontrandosi con il mezzo interstellare, accelera le particelle (vedi capitolo 4). Prendendo dei SNR nella loro fase iniziale, con  $v_{shock} \approx 10^4 km s^{-1}$ ,  $l < 10^{-3} pc$ , utilizzando la formula 4.2 si ricava un tempo di Fermi dell'ordine del mese. Per avere un elettrone sufficientemente energetico da emettere per sincrotrone ( $\sim Gev$ ) bastano  $\sim 15\tau_F$ .

Nella Nebulosa del Granchio, un SNR osservabile nella costellazione del Toro, il principale meccanismo di emissione è il sincrotrone, sia nella banda radio ( $\alpha \sim 0.25$ ) che X ( $\alpha \sim 1.2$ ); l'accelerazione degli elettroni responsabili dell'emissione di raggi X è attribuita ad una pulsar che si trova al centro della Nebulosa.

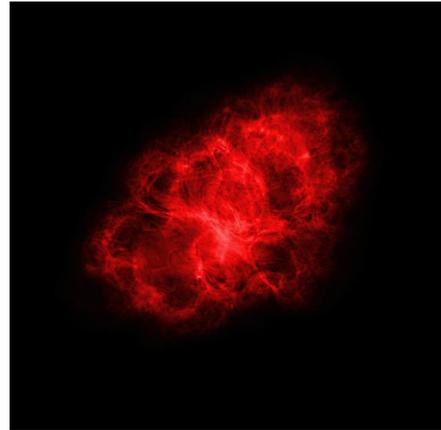


Figura 5.2: Nebulosa del Granchio in banda radio. Credit: NRAO/AUI/NSF

## 5.3 Raggi Cosmici

La componente elettronica dei raggi cosmici<sup>2</sup> può essere studiata dalla sua emissione di radiazione di sincrotrone, grazie al suo incontro con il campo magnetico della nostra galassia; questa emissione è analizzata nell'intervallo  $0.005 \leq \nu(GHz) \leq 0.1$  ( $\alpha \sim 0.6$ ) e  $0.4 \leq \nu(GHz) \leq 10$  ( $\alpha \sim 0.8$ ). Quando questi elettroni interagiscono con la radiazione cosmica di fondo 3K subiscono perdite di energia per Inverse Compton. Dalla formula (3.19) è possibile stabilire se gli elettroni in questione abbiano origine galattica o extragalattica: per elettroni di  $\varepsilon \sim 100 Gev$  la loro vita media è  $\tau \leq 10^7 yr$ ; questi elettroni possono aver percorso qualche Mpc, dunque sono di origine galattica.

<sup>2</sup>particelle ad alta energia, che hanno una componente elettronica, nucleonica e fotonica.

# Bibliografia

- [1] Resnick R., 1979, *Introduzione alla relatività ristretta*. Casa Editrice Ambrosiana
- [2] Fanti C., Fanti R., 2012, *Una finestra sull'Universo "Invisibile"*, <https://www.ira.inaf.it/Library/e-books/Fanti&Fanti-Papers.pdf>
- [3] Longair M. S., 2011, *High Energy Astrophysics Third Edition*. Cambridge University Press
- [4] Rybicki G. B., Lightman A. P., 2004, *Radiative Processes in Astrophysics*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim
- [5] Ghisellini G., 2012, *Radiative Processes in High Energy Astrophysics*
- [6] Dallacasa D., 2022/2023, *Processi di radiazione e MHD*. Appunti e slide del corso
- [7] Ciotti L., 2022/2023, *Astrofisica extragalattica*. Appunti del corso
- [8] Pasquini L., 2022/2023, *Struttura della materia*. Appunti e slide del corso