

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Emissione di Corpo Nero e Applicazioni
Astrofisiche**

Tesi di laurea

Presentata da:
Irene Ballantini

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Appello IV
Anno Accademico 2022-2023

*Alla mia famiglia che mi
ha sempre supportato e
agli amici che mi hanno
accompagnato in questo
percorso.*

Per aspera ad astra.

Sommario

“Per me la Fisica costituisce un sistema perfettamente armonioso ed essenzialmente completo. All’orizzonte scorgo solamente due piccole nubi oscure: il risultato negativo dell’esperienza di Michelson e Morley e l’insufficienza della legge di Rayleigh e Jeans se applicata alle frequenze dell’ultravioletto”

Così parlava William Thomson Kelvin alla fine del XIX secolo riguardo alla fisica conosciuta fino ad allora. Egli riteneva che la fisica avesse ormai svelato ogni aspetto legato alla Natura e al suo funzionamento. Le uniche ombre scorte all’orizzonte erano quelle legate all’esperienza di Michelson e Morley e all’insufficienza della legge di Rayleigh e Jeans. Ebbene, furono proprio queste che inaspettatamente portarono a una rivoluzione all’interno della fisica e costrinsero a rivalutare alcune assunzioni precedentemente fatte. La prima diede spunto ad Einstein per lo sviluppo della teoria sulla Relatività, mentre la seconda permise a Planck di fondare le basi della Meccanica Quantistica tramite lo studio del Corpo Nero.

Con tale introduzione il presente elaborato si pone l’obbiettivo di presentare l’emissione di Corpo Nero evidenziandone gli aspetti salienti e le proprietà più importanti. Si partirà innanzitutto dalla sua definizione, con qualche cenno storico al processo che indusse Kirchhoff all’idealizzazione di tale concetto. Successivamente verranno spiegate le leggi empiriche derivanti dalle osservazioni e verrà riportato il percorso svolto per la derivazione dello spettro di Corpo Nero, dai primi tentativi basati sulla fisica “classica”, fino all’approccio quantistico di Max Planck che permise di risolvere il problema della Catastrofe Ultravioletta.

Nella seconda parte dell’elaborato, inoltre, verranno riportate alcune applicazioni astrofisiche del modello di Corpo Nero, partendo dalla sorgente che meglio lo riproduce e arrivando a quella che se ne discosta di più: nello specifico si parlerà di Radiazione Cosmica di Fondo, stelle, pianeti e polvere.

Indice

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Il Corpo Nero | 1 |
| 1.1 | Definizione | 1 |
| 1.2 | Cenni storici e il Teorema di Kirchhoff | 1 |
| 1.3 | Leggi empiriche | 3 |
| 1.3.1 | Legge di Stefan-Boltzmann | 3 |
| 1.3.2 | Legge dello spostamento di Wien | 3 |
| 1.4 | Derivazione dello spettro di corpo nero | 4 |
| 1.4.1 | Approccio classico di Rayleigh-Jeans | 4 |
| 1.4.2 | Approccio quantistico di Planck | 5 |
| 1.5 | Caratteristiche dello spettro di Corpo Nero | 6 |
| 1.5.1 | Approssimazioni | 7 |
| 2 | Applicazioni Astrofisiche | 8 |
| 2.1 | La Radiazione Cosmica di Fondo (CMBR) | 8 |
| 2.2 | Le Stelle | 10 |
| 2.2.1 | Classificazione spettrale | 11 |
| 2.2.2 | Lo spettro del Sole | 12 |
| 2.3 | Pianeti | 13 |
| 2.4 | Polvere: corpo grigio e corpo nero a confronto | 15 |

Capitolo 1

Il Corpo Nero

1.1 Definizione

Si definisce *Corpo Nero* un oggetto ideale la cui superficie assorbe completamente, senza rifletterla¹, qualsiasi radiazione elettromagnetica che incida su di esso ed è in equilibrio termico con la radiazione stessa².

Esso può essere visto come un corpo cavo delimitato internamente da una superficie che fa rimbalzare la radiazione senza farla uscire. Quest'ultima viene assorbita³ dalle pareti che, considerate come oscillatori armonici carichi, emettono a loro volta radiazione. Trascorso un certo tempo viene raggiunto un equilibrio termico tra radiazione e pareti del corpo cavo a una temperatura T e a questo punto è possibile operare un piccolo foro, tale da non perturbare il sistema, per osservare la radiazione che ne fuoriesce, che si suppone essere un campione rappresentativo di quella in equilibrio termico interna alla cavità. I fotoni all'interno, essendo di massa nulla, non conservano il loro numero in tale processo e le interazioni fra loro sono trascurabili. Il numero di fotoni si stabilizza solo al raggiungimento dell'equilibrio alla temperatura T . Per la legge di conservazione dell'energia, la radiazione assorbita viene totalmente irradiata e per questo il Corpo Nero può essere visto come una sorgente capace di emettere a qualunque lunghezza d'onda.

1.2 Cenni storici e il Teorema di Kirchhoff

Il termine e il concetto di “Corpo Nero” vennero introdotti per la prima volta da Gustav Kirchhoff nel 1862. Egli condusse un'indagine sulle righe nere osservate da Fraunhofer nello spettro solare e avanzò l'ipotesi che queste fossero dovute al fatto che un corpo è in grado di assorbire parte della radiazione che emette. Ciò permise di trarre conclusioni anche sulla composizione dell'atmosfera solare, cosa che costituì il primo passo verso l'analisi chimica a distanza dei corpi celesti.

¹Da qui deriva il termine “nero”.

²Per questo il Corpo Nero rientra tra i processi di radiazione termica.

³Per poter definire *assorbita* una radiazione e.m. essa deve entrare a far parte dell'energia termica del corpo, ovvero, più propriamente, deve essere termalizzata.

A questo punto per la comprensione dell'analisi svolta da Kirchhoff risulta necessario introdurre due grandezze fondamentali, ovvero il potere assorbente di un corpo, $P_{ass}(\lambda, T)$, e il potere emissivo di un corpo, $P_{em}(\lambda, T)$. Questi ultimi rappresentano rispettivamente l'energia assorbita⁴ e l'energia emessa per unità di tempo e per unità di area a una data lunghezza d'onda⁵ λ ed a una data temperatura T . Kirchhoff dimostrò che ad una data temperatura e lunghezza d'onda il rapporto tra il potere emissivo e il potere assorbente è lo stesso per tutti i corpi, cioè che:

$$\frac{P_{em}(\lambda, T)}{P_{ass}(\lambda, T)} = f(\lambda, T) \quad (1.1)$$

dove $f(\lambda, T)$ è quindi una funzione universale, non dipendente dalla natura del corpo preso in considerazione.

Fu proprio allo scopo di semplificare il problema che Kirchhoff introdusse il concetto di "Corpo Nero", un corpo capace di assorbire tutta la radiazione che riceve e, quindi, con potere assorbente P_{ass} pari ad 1 per definizione. Seguiva di conseguenza che la funzione universale cercata $f(\lambda, T)$ dovesse coincidere con il potere emissivo del corpo nero, ossia:

$$\frac{P_{em}(\lambda, T)}{P_{ass}(\lambda, T)} = \frac{P_{em}^{CN}(\lambda, T)}{1} = f(\lambda, T) \quad (1.2)$$

Al contrario di quello che era l'auspicio di Kirchhoff, per la determinazione della funzione universale ci vollero circa quarant'anni, mentre per delinearne una deduzione rigorosa più di sessanta.

Ulteriori studi termodinamici portarono Kirchhoff a dimostrare che, all'equilibrio termico, la radiazione contenuta in una cavità le cui pareti siano impermeabili alla radiazione è della stessa entità di quella di un corpo nero alla stessa temperatura. Negli anni successivi questo fu alla base della realizzazione di Cavità Isoterme per lo studio della radiazione di Corpo Nero; C. Christiansen fu il primo a proporre questa applicazione delle cavità nel 1884, ma per la realizzazione materiale si dovette aspettare il 1895 con l'esperimento di Wien, Lummer e Kurlbaum.

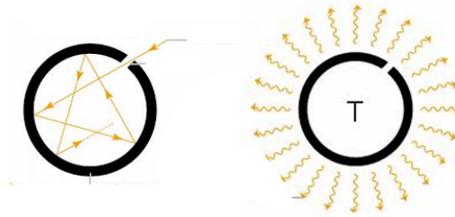


Figura 1.1: Rappresentazione grafica della cavità isoterma (Fonte: Vincenzo Zapalà, 2022, "Dall'atomo alle stelle e viceversa (8): il Corpo Nero").

⁴Un corpo investito da una radiazione e.m., in generale, può assorbire una frazione $\epsilon(\lambda, T)$ dell'energia incidente, può riflettere una frazione $\rho(\lambda, T)$ e può lasciarsi trappassare da una frazione $\tau(\lambda, T)$. In ogni caso, $\epsilon(\lambda, T) + \rho(\lambda, T) + \tau(\lambda, T) = 1$ per la legge di conservazione dell'energia. Per corpi opachi $\tau(\lambda, T) = 0$.

⁵Allo stesso modo tali grandezze possono essere date per una data frequenza ν , legata alla lunghezza d'onda λ secondo la relazione $\nu = \frac{c}{\lambda}$, dove c è la velocità della luce.

1.3 Leggi empiriche

Prima di parlare della determinazione della funzione di Corpo Nero, si riportano qui di seguito due leggi empiriche ricavate dalle osservazioni sperimentali, ovvero la legge di Stefan-Boltzmann e la legge dello spostamento di Wien. Fu nel tentativo di giustificare tali leggi che si passò da una visione “classica”, proposta da Rayleigh e Jeans e basata sulla fisica newtoniana e sull'elettromagnetismo classico, a una visione del tutto moderna della fisica, teorizzata da Planck nel 1900 e che prevedeva l'introduzione dei quanti di energia per risolvere il problema della “catastrofe ultravioletta”.

1.3.1 Legge di Stefan-Boltzmann

Nel 1879 il fisico Josef Stefan, dall'analisi dei dati sperimentali raccolti dal fisico irlandese John Tyndal nel 1864 riguardanti la misura della radiazione emessa da un corpo nero a varie temperature e lunghezze d'onda⁶, formulò la seguente legge:

$$R(T) = \int_0^{+\infty} R(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \quad \text{con } \sigma = 5.67 \times 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}^4} \quad (1.3)$$

dove $R(T)$ è la radianza spettrale integrata su tutto lo spettro di frequenze, ovvero l'energia irradiata per unità di tempo e unità di superficie, T è la temperatura e σ è la costante chiamata in seguito di Stefan-Boltzmann. Da tale legge fu, quindi, possibile constatare la proporzionalità tra l'energia R e la quarta potenza della temperatura T .

Tale risultato fu dimostrato teoricamente nel 1884 da Ludwig Boltzmann tramite considerazioni termodinamiche⁷.

1.3.2 Legge dello spostamento di Wien

La legge di Wien consente di individuare la lunghezza d'onda λ_{max} per la quale si ha il massimo della distribuzione $I(\lambda)$ di energia di Corpo Nero e mette in evidenza come quest'ultimo dipenda dalla temperatura T .

Nel 1893 Wien dimostrò che la densità di energia di radiazione in una cavità isoterma è data dall'espressione:

$$u(\nu, T) = \nu^3 f(\nu, T) \quad (1.4)$$

Da questa egli ricavò la legge di spostamento del picco di emissione e ottenne:

$$\lambda_{max} = \frac{\alpha}{T} \quad \text{con } \alpha = 0.29 \text{ cm} \cdot \text{K} \quad (1.5)$$

La stessa formula può essere riscritta per ricavare la frequenza di picco ν_{max} :

$$\nu_{max} = 5.88 \cdot 10^{10} T \quad \text{Hz K}^{-1} \quad (1.6)$$

La legge di Wien rappresentò un'evidenza sperimentale della correttezza del modello di Planck, in contrasto con il modello di Rayleigh-Jeans che non prevedeva presenza di massimi nello spettro.

⁶I dati sperimentali ottenuti da Tyndal provenivano da misure effettuate con fili di platino incandescenti che erano ben lungi dal potere essere considerati “corpi neri”. Solide basi sperimentali si ottennero solo nel 1897 ad opera di Paschen, Lummer e Pringsheim, Mendenhall e Saunders.

⁷Da cui legge di Stefan-Boltzmann.

1.4 Derivazione dello spettro di corpo nero

Come anticipato, il processo di derivazione dello spettro di Corpo Nero fu un percorso lungo e tortuoso che vide il nascere di svariati studi. L'oggetto di studio era questo corpo ideale che assorbe il 100% della radiazione incidente. In natura nessun materiale soddisfa questo requisito: l'unico che si avvicina è la grafite con una percentuale di assorbimento della radiazione incidente del 97% .

In ambito astrofisico vi è un esempio di corpo nero quasi perfetto, di cui si tratterà più avanti.

1.4.1 Approccio classico di Rayleigh-Jeans

Tra i tentativi che si prefiggevano di trovare la distribuzione dello spettro di Corpo Nero spicca quello di Rayleigh e Jeans, basato sulla fisica "classica". Essi proposero una legge per l'intensità di luce $I(\lambda)$ in funzione della lunghezza d'onda λ del tipo:

$$I(\lambda) \propto \frac{T}{\lambda^4} \quad (1.7)$$

corretta per grandi λ , ma errata per piccole λ . Allo scopo di ottenere tale relazione si calcola la densità di energia di radiazione, contenuta nella cavità, di frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$

$$\rho(\nu)d\nu = \bar{\varepsilon}N(\nu)d\nu \quad (1.8)$$

dove $\bar{\varepsilon}$ è l'energia media degli oscillatori delle pareti della cavità in risonanza con la frequenza ν e $N(\nu)d\nu$ è il numero di onde stazionarie all'interno della cavità, assunta di forma cubica e di lato L . Le onde si propagano in tutte le direzioni con vettore di propagazione di componenti $(\cos \vartheta_1, \cos \vartheta_2, \cos \vartheta_3)$. In una dimensione un'onda stazionaria deve avere un numero intero di mezzelunghezze d'onda pari al lato L , cioè $n\frac{\lambda}{2} = L$; questo in tre dimensioni va applicato in tutte e tre le direzioni del cubo e da ciò si ottiene il numero di nodi⁸ di un'onda stazionaria risonante

$$n_i = \frac{2L}{\lambda} \cos \theta_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.9)$$

da cui, se ne sommiamo i quadrati, si ottiene

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2} = \frac{4\nu^2}{c^2} L^2 \quad (1.10)$$

che descrive l'equazione dei punti a coordinate intere positive o nulle sulla sfera di raggio $R = \frac{2\nu L}{c}$. Il numero di onde stazionarie tra ν e $\nu + d\nu$, nel limite termodinamico⁹, approssima il volume dell'ottante positivo del guscio sferico compreso tra R e $R + dR$ e si ottiene:

$$\frac{1}{8}4\pi R^2 dR = \frac{1}{8}4\pi \left(\frac{2\nu L}{c}\right)^2 \frac{2Ld\nu}{c} = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} L^3 d\nu \quad (1.11)$$

⁸I nodi di un'onda stazionaria sono quei punti che rimangono fissi nel tempo, pertanto in essi la funzione è sempre nulla.

⁹In un sistema il limite termodinamico viene raggiunto quando il numero delle particelle N e il volume V tendono all'infinito e il loro rapporto rimane costante e finito.

A questo punto la densità di modi di vibrazione permessi è pari al numero di onde stazionarie diviso il volume della cavità cubica moltiplicato per 2 (due infatti sono le direzioni di polarizzazione indipendenti per le onde e.m.), ovvero:

$$N(\nu)d\nu = 8\pi \frac{\nu^2 d\nu}{c^3} \quad (1.12)$$

A questo punto si procede con il calcolo di $\bar{\varepsilon}$, tramite la procedura di media statistica con la distribuzione di Boltzmann $f(\varepsilon) = Ce^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$, ove $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/K è la costante di Boltzmann. Questa funzione fornisce la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$. Il valor medio dell'energia degli oscillatori sarà quindi:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon} \quad (1.13)$$

Introducendo la notazione $\beta = 1/kT$ si ottiene pertanto:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \log \int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = \frac{d}{d\beta} \log \beta = \frac{1}{\beta} = kT \quad (1.14)$$

Così si ricava il teorema fondamentale di meccanica statistica detto “di equipartizione di energia”, grazie al quale è possibile scrivere la densità di energia moltiplicando la (1.12) per la (1.14):

$$\rho(\nu)d\nu = 8\pi kT \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \quad (1.15)$$

Ricordando come la frequenza ν è legata alla lunghezza d'onda λ , si ricava $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$. Ciò permette di esprimere la densità di energia in funzione di λ ottenendo finalmente la legge di Rayleigh-Jeans

$$\rho(\lambda) = 8\pi \frac{kT}{\lambda^4} \quad (1.16)$$

Questa legge, la quale è stata ricavata considerando la radiazione come un'onda che, ad ogni frequenza, può essere emessa con qualunque energia, ha un'evidente problema. Essa, infatti, non solo è in contraddizione con i risultati sperimentali, ma diverge per piccole lunghezze d'onda (e quindi alte frequenze ed elevate energie), prevedendo così una emissione enorme per le regioni dello spettro corrispondenti all'ultravioletto e ai raggi X. Tale problema fu definito **catastrofe ultravioletta**, la quale non poteva essere contemplata in una corretta teoria del corpo nero.

1.4.2 Approccio quantistico di Planck

Fu Planck ad introdurre una rivoluzione nel campo della fisica nel 1900, risolvendo così il problema della catastrofe ultravioletta. Nel tentativo di ricavare una legge di Corpo Nero consistente con la legge di spostamento di Wien e con gli studi fatti da Boltzmann sulla teoria cinetica dei gas, egli si rese conto che assumendo l'energia come una variabile discreta anziché continua si risolveva la questione della divergenza dell'energia per piccole λ .

Nello specifico egli ipotizzò che la radiazione potesse essere emessa dagli oscillatori delle pareti solo a pacchetti discreti detti **quanti**, che, per ogni frequenza, potevano trasportare solo una ben precisa energia $\varepsilon = h\nu$, con h costante universale. In altre parole l'emissione a una data frequenza può essere solo del tipo

$$\varepsilon_n = n\varepsilon = nh\nu \quad (1.17)$$

L'unica modifica che questo porta nei calcoli di Rayleigh e Jeans riguarda il calcolo del valor medio dell'energia degli oscillatori, dove gli integrali vengono sostituiti da sommatorie, dato che adesso l'energia è una variabile discreta. Si ha quindi¹⁰:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}} = -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n} = \\ &= -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n = -\frac{d}{d\beta} \log \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Da questo si ottengono i seguenti risultati per l'energia media $\bar{\varepsilon}$ e la densità $\rho(\nu)$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad \rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (1.19)$$

Passando dalla $\rho(\nu)$ alla $\rho(\lambda)$ si ha:

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (1.20)$$

Quest'ultima formula è la **legge di Planck** per l'intensità di spettro di corpo nero, che risulta in perfetto accordo con i risultati sperimentali se h viene fissata al valore $h = 6.62618 \cdot 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{s}$. Tale costante viene definita **costante di Planck** e ha le dimensioni di un'energia per tempo, ovvero di un'azione.

In ambito astrofisico la legge di Planck, anche detta **Planckiana**, è di solito espressa in termini di brillantezza in funzione sia della frequenza che della lunghezza d'onda e presenta, quindi, la forma

$$\boxed{B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}}, \quad \boxed{B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}} \quad (1.21)$$

1.5 Caratteristiche dello spettro di Corpo Nero

Come è emerso più volte nel corso di questa trattazione, la radiazione di corpo nero per una data lunghezza d'onda o frequenza dipende solo dalla sua temperatura. Ciò significa che essa determina in maniera univoca la curva di corpo nero e che, quindi, curve di corpo nero a diverse temperature non si intersecano mai, come è riportato in figura (1.2).

¹⁰Nell'ultimo passaggio della formula (1.18) si è usata la proprietà della serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

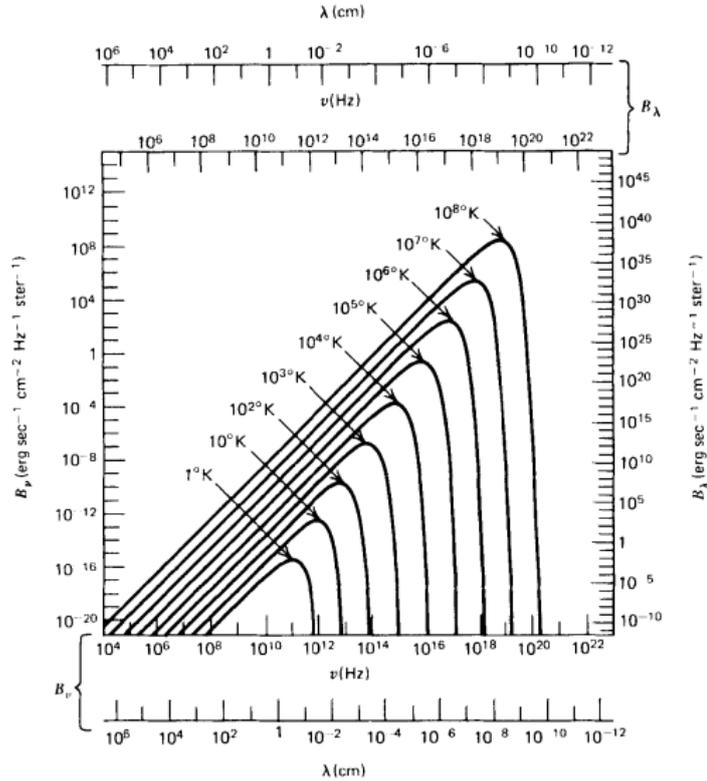


Figura 1.2: Spettro della radiazione di corpo nero a varie temperature in scala logaritmica (Fonte: M. S. Rybicki e A. P. Lightman. Radiative Processes in Astrophysics. Vol. 2. WILEY-VCH Verlag GmbH 62 Co. KGaA, 2004).

I fotoni, quindi, seguono la legge di Planck definendo uno spettro continuo.

1.5.1 Approssimazioni

La formula dello spettro di corpo nero può essere studiata nel regime di bassa energia e in quello di alta energia, ottenendo due approssimazioni della formula (1.21).

Approssimazione di Rayleigh-Jeans

Questa approssimazione vale per basse energie, ovvero, quando $\lambda \gg \lambda_{max}$ (e quindi $hc/(\lambda kT) \ll 1$). Attraverso l'espansione in serie di Taylor di $e^{hc/(\lambda kT)}$ ¹¹, si ottiene:

$$B_{\lambda}(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{2ckT}{\lambda^4} \quad (1.22)$$

Approssimazione di Wien

Per alte energie, ovvero quando $\lambda \ll \lambda_{max}$ (e quindi $hc/(\lambda kT) \gg 1$) vale, invece, l'approssimazione¹²

$$B_{\lambda}(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/(\lambda kT)} \quad (1.23)$$

¹¹Infatti si ha: $e^{hc/(\lambda kT)} \approx 1 + hc/(\lambda kT)$

¹²Qui invece per il calcolo si tiene conto che $e^{hc/(\lambda kT)} \gg 1$

Capitolo 2

Applicazioni Astrofisiche

In astrofisica la radiazione di Corpo Nero è un modello ideale che approssima molto bene l'emissione di radiazione di tante sorgenti e, pertanto, ha molte applicazioni. In tale ambito i concetti appena espressi si traducono nel seguente modo: si ha radiazione di Corpo Nero quando il mezzo osservato è otticamente spesso e, di conseguenza, i fotoni contenuti all'interno vengono diffusi molte volte prima di emergere dalla regione¹. Sotto tali condizioni, le particelle ed i fotoni si scambiano continuamente energia cinetica.

In perfetto equilibrio termico, l'energia cinetica media è uguale all'energia media dei fotoni ed è possibile definire una temperatura univoca T . Dalla teoria cinetica dei gas per particelle monoatomiche non relativistiche si ha la seguente definizione:

$$\frac{3}{2}kT = \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)_{av} = h\nu_{av} \quad (2.1)$$

dove T in questo caso rappresenta la temperatura cinetica.

Gli esempi di sorgente sono ordinati partendo da quello che meglio riproduce lo spettro di corpo nero fino a quello, invece, che se ne discosta di più.

2.1 La Radiazione Cosmica di Fondo (CMBR)

La Radiazione Cosmica di Fondo (Cosmic Microwave Background Radiation, *CMBR*) è la radiazione fossile testimonianza del Big Bang che pervade tutto l'Universo. Essa è stata scoperta nel 1965 da due ricercatori dei Bell Laboratories, Arno Penzias e Robert Wilson, mentre stavano studiando le proprietà del rumore radio dovuto all'atmosfera. Essi rilevarono un "disturbo" uniforme alle frequenze delle microonde che non poteva essere dovuto ad alcun rumore strumentale o sorgente radio nota. Tale segnale, inoltre, era isotropo, ovvero presentava sempre la stessa intensità indipendentemente dalla direzione verso cui si guardava. L'origine della radiazione fu identificata di natura extraterrestre e per questa scoperta Penzias e Wilson ricevettero il Premio Nobel nel 1978².

¹Solo in questo caso la radiazione termica diventa radiazione di Corpo Nero. Va sottolineato, inoltre, che non è possibile irradiare termicamente più energia di quella di Corpo Nero: processi che emettono più energia, infatti, non sono all'equilibrio termico.

²L'esistenza di tale radiazione era stata descritta dal fisico George Gamow a metà degli anni 40', ma tale predizione non era nota a Penzias e Wilson.

Tra i progetti recenti riguardanti lo studio della CMB di importante rilievo è il satellite COBE³, lanciato nel 1989. Esso ha prodotto la prima misurazione dello spettro della CMB al di fuori dell'atmosfera⁴.

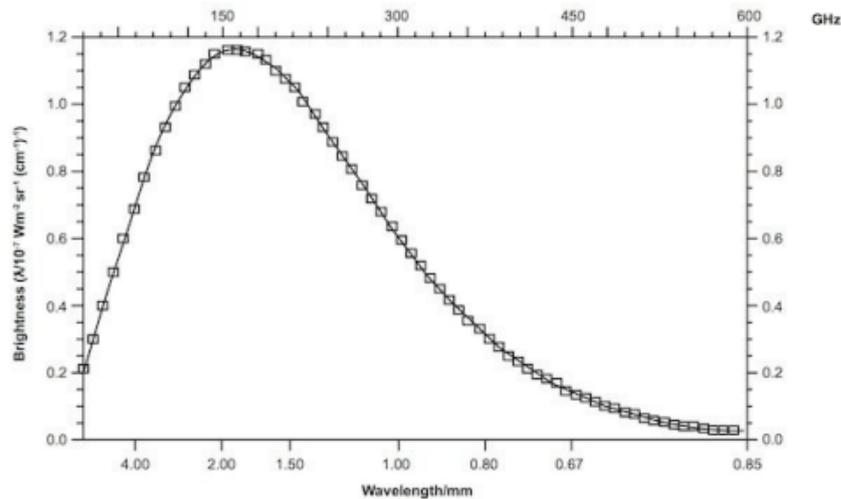


Figura 2.1: Confronto tra lo spettro della CMB rilevato dal satellite COBE e la curva teorica di corpo nero a $T = 2.726$ K (Fonte: Dispense del corso *Processi di Radiazione e MHD* del Prof. Daniele Dallacasa)

Come si vede dalla figura 2.1 lo spettro sperimentale è indistinguibile da uno spettro di corpo nero alla temperatura $T = 2.726$ K. Dalla legge di Wien, inoltre, si può calcolare il picco di emissione, che si trova nella zona delle microonde alla frequenza di 160.2 GHz, corrispondenti a una lunghezza d'onda di 1.9 mm.

Tale radiazione proviene dall'epoca del disaccoppiamento avvenuto tra materia e fotoni ai primordi dell'universo. Quest'ultimo inizialmente presentava valori di densità e temperatura enormi, essendo confinato in uno spazio molto piccolo, e per questo era otticamente spesso alla radiazione. I fotoni urtavano ripetutamente con la materia e di conseguenza la radiazione assunse lo spettro di corpo nero. Con il progredire dell'espansione dell'Universo, ci fu la transizione al regime otticamente sottile e la radiazione poté iniziare ad espandersi in uno spazio sempre più grande riempiendolo in maniera uniforme. La CMB, quindi, è la testimonianza di questo momento di transizione. Ovviamente la temperatura iniziale di questa radiazione era molto maggiore, ma con l'espansione dell'Universo la densità media di energia della radiazione è andata diminuendo, causando il raffreddamento di quest'ultima da una temperatura di centinaia di migliaia di miliardi di gradi nei primi istanti fino all'attuale infimo valore.

Negli anni successivi il satellite COBE fu anche in grado di rilevare delle disomogeneità nella temperatura della radiazione di fondo dell'ordine di 10^{-5} K (ovvero le differenze di temperatura osservate erano di $10 \mu\text{K}$), corrispondenti a disomogeneità di densità. In seguito, nel 2002 fu mandato in orbita un altro satellite chiamato WMAP⁵, che dette conferma dei risultati ottenuti dal primo satellite migliorandone

³La sigla sta per Cosmic Background Explorer.

⁴In questo modo si evitava l'assorbimento atmosferico che disturba le osservazioni da terra a lunghezze d'onda submillimetriche

⁵La sigla sta per Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.

la risoluzione. Tale scoperta è importante, perché permette di ottenere informazioni sulle origini delle galassie. Infatti, se il neonato Universo fosse stato perfettamente uniforme, ciascun elemento sarebbe stato attratto gravitazionalmente in ugual misura in ogni direzione dagli elementi circostanti, non permettendo alla materia di aggregarsi e formare le prime strutture dell'Universo.

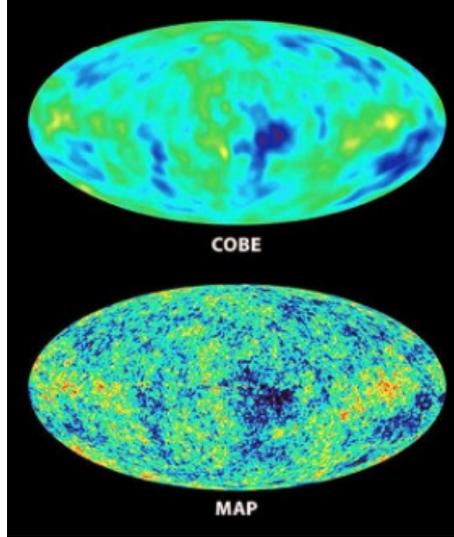


Figura 2.2: Confronto tra la mappa ottenuta da COBE e quella ottenuta da WMAP: in blu sono rappresentate le zone più fredde, mentre in giallo-rosso quelle più calde (Fonte: E. Daddi e J. Grocchia, dispense, *Missione Planck: Misura della Radiazione Cosmica di Fondo*)

2.2 Le Stelle

Altre sorgenti la cui radiazione può essere approssimata a quella di corpo nero sono le stelle. Infatti, la radiazione prodotta sotto la fotosfera, ovvero lo strato più esterno della superficie della stella, dove si passa dal regime otticamente spesso al regime otticamente sottile, riesce ad uscire solo in minima parte e localmente si ha equilibrio termico⁶. Inoltre le uniche onde elettromagnetiche che non sono assorbite dalla superficie sono quelle aventi una lunghezza d'onda di dimensione pari o maggiore al diametro della stella.

Dall'analisi dello spettro della radiazione proveniente dalla fotosfera si possono ricavare importanti informazioni riguardanti la stella, come la temperatura, il colore e la composizione chimica.

Se si approssima la stella ad una sfera di raggio R e di luminosità L , dall'equazione (1.3) si ottiene:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (2.2)$$

dove T_{eff} è la temperatura effettiva, il cui utilizzo è dovuto al fatto che le stelle non sono corpi neri perfetti. Essa viene definita come la temperatura della superficie di un Corpo Nero che ha lo stesso flusso totale della stella presa in considerazione.

⁶La temperatura nell'atmosfera delle stelle varia con l'altezza rispetto alla fotosfera. Per questo il gas e i fotoni possono essere considerati in equilibrio termodinamico solo in regioni locali (*local thermodynamic equilibrium, LTE*).

Sfruttando, poi, la relazione del flusso $F = \frac{L}{4\pi R^2}$, dalla (2.2) si può ricavare il flusso superficiale di una stella in funzione della temperatura effettiva⁷:

$$F_{sup} = \sigma T_{eff}^4 \quad (2.3)$$

La temperatura in tale contesto assume un ruolo ancora più cruciale, poiché essa, oltre a determinare il picco di emissione dello spettro di corpo nero, in questo caso è responsabile anche delle righe di assorbimento dovute a transizioni elettroniche tra diversi livelli energetici degli atomi presenti nell'atmosfera stellare. La temperatura, infatti, determina quali sono i livelli energetici più popolati per una specie chimica e, pertanto, rende alcune transizioni più probabili di altre. La presenza di queste righe è ciò che maggiormente distingue uno spettro stellare da quello di un corpo nero perfetto: in corrispondenza di queste, infatti, è sottratta radiazione al continuo. In particolare in stelle con alta metallicità⁸, le numerose righe generate dai metalli possono essere tanto fitte da causare una significativa diminuzione del continuo nella regione ultravioletta dello spettro, detta **line blanketing**, con conseguente rafforzamento della regione rossa e infrarossa dello stesso.

2.2.1 Classificazione spettrale

Il primo sistema di classificazione spettrale fu realizzato da padre Angelo Secchi durante gli anni sessanta e settanta dell'Ottocento e si basava sulla presenza o meno di determinate righe dell'idrogeno o di alcuni metalli⁹.

Tale classificazione, però, fu abbandonata a favore di quella di Harvard sviluppata nei primi anni del Novecento da Annie Jump Cannon e dai suoi colleghi dell'Harvard Observatory. Essi ordinarono in una sequenza continua una grande quantità di spettri, molti dei quali provenienti dal *Draper Catalogue of stellar spectra*¹⁰, anche in questo caso basandosi sulla presenza o assenza di righe in assorbimento. Grazie agli studi successivi sulla ionizzazione, condotti principalmente da Saha, fu possibile scoprire che tale sequenza era in realtà una sequenza di temperatura¹¹.

Questa classificazione, che divideva le stelle in classi di temperatura, fu poi perfezionata aggiungendo anche la luminosità come altro parametro importante per la descrizione di uno spettro stellare. La combinazione di queste due grandezze, quindi, portò ad introdurre il sistema di classificazione spettrale usato ancora oggi e conosciuto come *Classificazione spettrale di Yerkes*.

In relazione alla temperatura le classi spettrali originariamente erano sette ed erano denotate dalle lettere O, B, A, F, G, K, M, ognuna a sua volta suddivisa in 10 sottoclassi identificate da una cifra da 0 a 9. In tale sequenza la temperatura decresce dalle stelle di classe O, la cui temperatura è maggiore di 25000 K, a quelle di classe M, che, invece, hanno temperature inferiori a 3500 K. Solo successivamente furono aggiunte due ulteriori classi, denominate L e T, a cui appartengono stelle¹²

⁷Tale formula altro non è che la legge di Stefan-Boltzmann.

⁸La metallicità è la quantità adimensionale che indica la frazione in massa di elementi di materia diversi da Idrogeno ed Elio.

⁹Tale sistema divideva le stelle in cinque classi denotate con i numeri romani I-V.

¹⁰Henry Draper fu uno dei pionieri dell'astrofotografia. Nel 1872 ottene la prima immagine dello spettro di Vega. Dopo la sua morte la vedova finanziò la Medaglia Henry Draper per i contributi allo sviluppo dell'astrofisica e la costruzione di un telescopio, che fu utilizzato per creare il Catalogo.

¹¹Per temperatura qui si intende la temperatura effettiva della stella.

¹²Queste sono dette "nane brune".

con temperature ancora inferiori e il cui picco di emissione è più spostato verso l'infrarosso. Ulteriori notazioni utilizzate sono Q per le novae, P per le nebulose planetarie e W per le stelle di Wolf-Rayet.

Invece, le classi spettrali di luminosità sono sei e sono denominate Ia, Ib, II, III, IV e V; si passa da stelle supergiganti luminose (Ia) a stelle appartenenti alla sequenza principale (V). Tale classificazione si basa sul fatto che la luminosità è legata all'accelerazione gravitazionale sulla superficie della stella¹³. È proprio quest'ultima, infatti, che influisce sulla forma delle righe spettrali; nello specifico per una stella supergigante le righe spettrali saranno molto più sottili rispetto a quelle di una in sequenza principale con la stessa massa, in quanto l'accelerazione gravitazionale superficiale per la prima è più piccola.

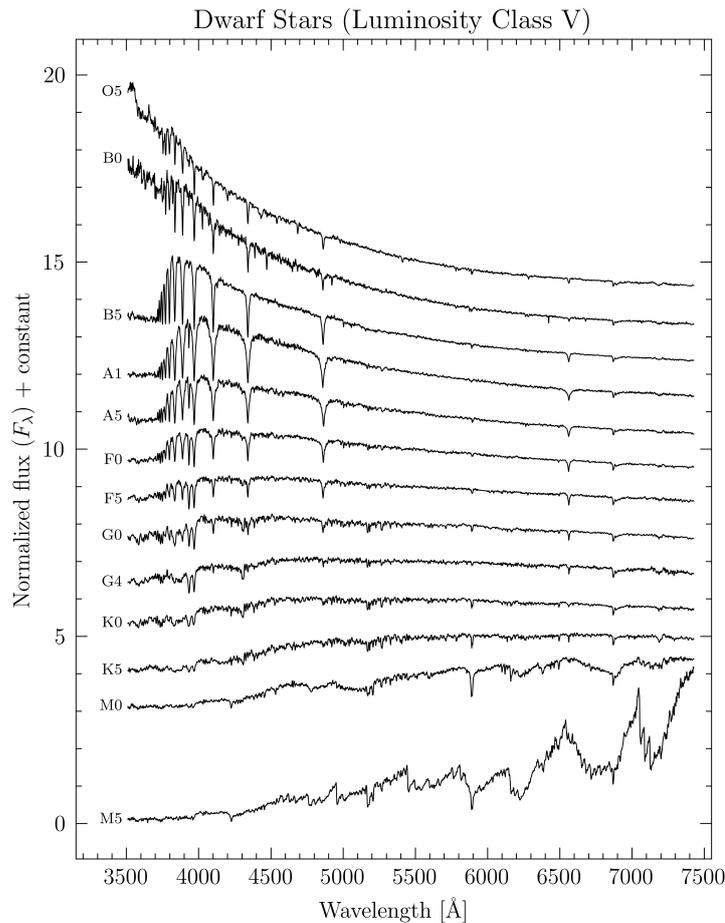


Figura 2.3: Spettri di stelle di sequenza principale con diverse classi spettrali, da O5 a M5 (Fonte: Richard Pogge, 2022, *Characteristics of the Stellar Spectral Types*, <https://www.astronomy.ohio-state.edu/pogge.1/Ast162/Unit1/SpTypes/index.html>).

2.2.2 Lo spettro del Sole

Applicando i concetti visti sopra al caso del Sole e sapendo che la luminosità solare è $L_{\odot} = 3.839 \cdot 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$ e il raggio solare è $R_{\odot} = 6.960 \cdot 10^{10} \text{ cm}$, possiamo ricavare

¹³In quanto per la legge di Stefan-Boltzmann la luminosità è legata al raggio della stella e la formula per l'accelerazione gravitazionale superficiale è $g = GM/R^2$.

la temperatura superficiale effettiva e , di conseguenza, anche la lunghezza d'onda del picco di emissione per vedere in quale regione dello spettro esso cade. Quindi, invertendo la (2.2) e usando il risultato di questa nella (1.5), si ottiene:

$$T_{\odot} = \left(\frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma} \right)^{1/4} \simeq 5777\text{K} \quad , \quad \lambda_{max} = \frac{\alpha}{T_{\odot}} \simeq 5014\text{\AA} \quad (2.4)$$

Il picco dell'emissione si trova nella regione dello spettro che corrisponde alla luce verde¹⁴. Da quanto appena emerso si deduce che il Sole appartiene alla classe spettrale G2 V (ovvero è una nana gialla).

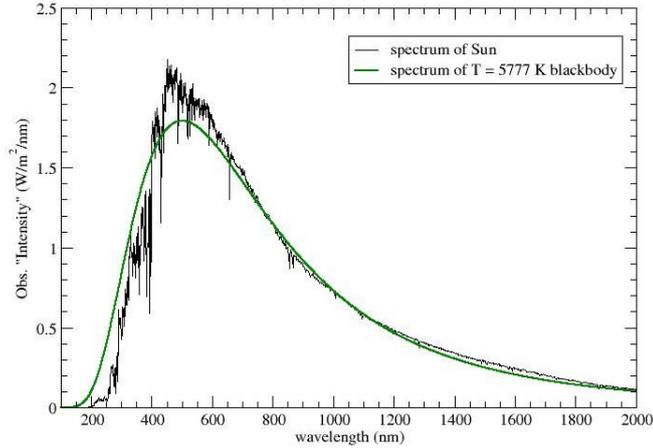


Figura 2.4: Confronto tra spettro solare e spettro di corpo nero a $T = 5777\text{ K}$ (Fonte: Emanuele Balboni, 2016, *Di che colore è il Sole*).

2.3 Pianeti

Come le stelle, anche i pianeti hanno uno spettro che può essere approssimato a quello di corpo nero. Il processo fisico che sta alla base dell'emissione, però, è ovviamente diverso, perché i pianeti ricevono la radiazione emessa in maniera isotropa dalla stella¹⁵, la assorbono e la riemettono non più nel visibile, ma nell'infrarosso, date le temperature certamente più basse. Quindi, dato un pianeta con la relativa atmosfera, esso riesce a rimanere approssimativamente in equilibrio termico grazie alla riemissione di radiazione nello spazio da parte della superficie e dell'atmosfera. Nell'analisi del problema è necessario introdurre una grandezza fondamentale, ovvero l'albedo (A), corrispondente alla frazione di radiazione solare riflessa dal pianeta rispetto a quella totale incidente proveniente dalla stella ($A = \frac{F_{scattered}}{F_{total}}$)¹⁶.

Da quanto appena scritto, quindi, si deduce che la frazione di radiazione solare assorbita dal pianeta è $1 - A = \frac{F_{absorbed}}{F_{total}}$. A questo punto, dato un pianeta di raggio R ad una distanza r dal Sole, esso intercetta una frazione geometrica $f_{int} = \frac{\pi R^2}{4\pi r^2}$ della

¹⁴È lo scattering causato dalle particelle dell'atmosfera a carico soprattutto della radiazione blu che sposta il picco verso il giallo e fa sì che all'occhio umano il Sole non appaia verde, ma giallo.

¹⁵Come già detto, la radiazione proveniente dalle stelle presenta il picco di emissione nel visibile.

¹⁶In verità, per puntualizzare, vi sono due tipi di albedo: quella appena citata è l'albedo sferica, mentre l'altra, di più difficile derivazione e che non viene riportata in questa trattazione, è l'albedo geometrica.

luce emessa isotropicamente dal Sole e distribuita su tutta la superficie della sfera di raggio r ($4\pi r^2$). Combinando le informazioni appena ricavate si può calcolare la quantità di energia assorbita dal pianeta per unità di tempo nel seguente modo:

$$L_{abs} = f_{int}L_{\odot}(1 - A) = \frac{\pi R^2}{4\pi r^2}4\pi R_{\odot}^2\sigma T_{\odot}^4(1 - A) = \frac{R_{\odot}^2\sigma T_{\odot}^4\pi R^2}{r^2}(1 - A) \quad (2.5)$$

Nel caso di un pianeta in equilibrio termico l'energia assorbita per unità di tempo deve essere uguale all'energia emessa per unità di tempo, ovvero $L_{abs} = L_{em}$. Da quest'ultima formula, descrivendo la riemissione del pianeta tramite la legge di Stefan-Boltzmann, infine, è possibile calcolare la temperatura effettiva di quest'ultimo. Si distinguono, quindi, due casi limite:

- **Pianeta con rotazione lenta:** l'emisfero del pianeta non illuminato ha il tempo di raffreddarsi e, pertanto, solo quello illuminato può emettere radiazione. In tal caso quindi:

$$L_{em} = \frac{1}{2}4\pi R^2\sigma T^4 = 2\pi R^2\sigma T^4 = L_{abs} = \frac{R_{\odot}^2\sigma T_{\odot}^4\pi R^2}{r^2}(1 - A) \quad (2.6)$$

dove R e T sono i parametri relativi al pianeta. Allora:

$$2T^4 = \frac{R_{\odot}^2 T_{\odot}^4}{r^2}(1 - A) \quad \Rightarrow \quad T = T_{\odot} \left(\frac{1 - A}{2} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

- **Pianeta con rotazione veloce:** entrambi gli emisferi emettono radiazione, pertanto:

$$L_{em} = 4\pi R^2\sigma T^4 \quad \Rightarrow \quad T = T_{\odot} \left(\frac{1 - A}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

Molto spesso, tuttavia, le temperature ricavate tramite le formule sopra non sono del tutto accurate, perché ci sono altri importanti fattori che influiscono su di esse, come il calore interno di un pianeta e l'effetto serra dell'atmosfera¹⁷. Prendendo ad esempio il caso del pianeta Venere, l'effetto serra su di esso è di gran lunga significativo. Senza tenere in considerazione tale fattore, infatti, con solo l'albedo, che per Venere è circa $A = 0.76$, si otterrebbe un valore di temperatura superficiale completamente sbagliato rispetto a quello reale. La temperatura teorica risultante dalle formule sopra sarebbe intorno a 250 K, mentre il valore osservato è molto più alto, ovvero 750 K. Tale effetto, anche se di impatto certamente inferiore, è presente anche sulla Terra (in questo caso la temperatura reale è maggiore di circa 30 K rispetto a quella teorica).

Assieme ai pianeti, anche i satelliti maggiori hanno una radiazione che può essere approssimata a quella di un corpo nero. Riportando brevemente l'esempio della Luna, questa ha una radiazione la cui distribuzione è simile a un corpo nero con temperatura fisica dell'ordine di 200 K.

¹⁷L'effetto serra è un fenomeno di regolazione della temperatura di un pianeta (o satellite) provvisto di atmosfera, che consiste nell'accumulo all'interno della stessa atmosfera di energia termica. Tale processo è dovuto alla presenza di alcuni gas che rendono l'atmosfera otticamente spessa alla radiazione infrarossa riemessa dalla superficie: quest'ultima in parte viene riflessa e rimane così intrappolata. Ciò contribuisce all'incremento della temperatura superficiale del pianeta.

2.4 Polvere: corpo grigio e corpo nero a confronto

Per concludere tale elaborato si riporta, infine, il caso dell'emissione termica della polvere, che non è descritta propriamente da uno spettro di corpo nero, ma da una versione modificata e generalizzata di quest'ultimo. Infatti, si parla di "corpo grigio", ovvero un corpo il cui potere emissivo è inferiore rispetto a quello di corpo nero. Tale concetto fu sempre introdotto da Kirchhoff nel 1884 per indicare tutti quei corpi nei quali i valori di emissività e assorbimento sono uguali e costanti nell'intero spettro, ma sono inferiori all'unità.

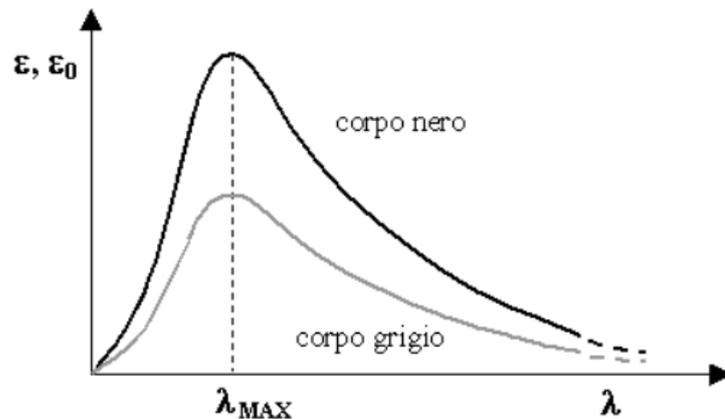


Figura 2.5: Spettri di emissione alla stessa temperatura (Fonte: Rocco Petrolini, 1998, *Corpi Grigi - Irraggiamento-Applicazioni*).

Dalla figura (2.5) si osserva che, se si rappresentano le emissioni di un corpo nero (ϵ_0) e di uno grigio (ϵ) alla stessa temperatura, ad ogni lunghezza d'onda il corpo grigio emette sempre una frazione costante di quella del corpo nero.

Generalizzando la legge di Stefan-Boltzmann (Eq. 1.3) si ottiene, quindi, che la radianza spettrale integrata su tutto lo spettro per un corpo grigio è:

$$R(T) = \epsilon \sigma T^4 \quad (2.9)$$

dove ϵ indica l'emissività del corpo compresa nell'intervallo $0 < \epsilon < 1$.

È attraverso questo procedimento che la polvere, la cui temperatura varia nell'intervallo 10-100 K, emette radiazione termica. Essa assorbe radiazione ultravioletta e visibile proveniente principalmente dal campo di radiazione interstellare, per poi riemetterla nel lontano infrarosso come un corpo grigio. In questo caso, diversamente da quello che accadeva per il corpo nero, l'emissività è fortemente dipendente dalla lunghezza d'onda; nello specifico, infatti, la polvere risulta un radiatore non efficiente per grandi lunghezze d'onda, data la proporzionalità $Q_{em} \propto \lambda^{-1} - \lambda^{-2}$, dove Q_{em} è la frazione di energia emessa. Questo, pertanto, significa che i grani di polvere avranno una temperatura maggiore rispetto a quella di un corpo nero perfetto immerso nello stesso campo di radiazione.

L'emissione di corpo grigio della polvere nell'infrarosso è fondamentale per l'osservazione di galassie ad alto redshift.

Bibliografia

Libri

- [1] George B. Ribicki e Alan P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics*. Vol. 2. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004.
- [2] H. Bradt. *Astrophysics Processes-The Physics of Astronomical Phenomena*. Cambridge University Press, 2008.
- [10] Hannu Karttunen et al. *Fundamental Astronomy*. 6^a ed. Springer Nature, 2016.

Dispense

- [3] A. Cimatti. *Astronomia*. Università degli Studi di Bologna, 2021.
- [4] D. Dallacasa. *Processi di radiazione e MHD*. Università degli Studi di Bologna, 2022.
- [5] C. Fanti e R. Fanti. *Una finestra sull'Universo "Invisibile"-Lezioni di Radioastronomia*. Università degli Studi di Bologna, 2012.
- [6] F. R. Ferraro. *Astrofisica stellare*. Università degli Studi di Bologna, 2022.
- [7] G. Giuliani. *La teoria della radiazione di corpo nero: il percorso di Planck*. Università degli Studi di Pavia, pp. 1–5.
- [8] C. Gruppioni. *On the absorption and emission properties of interstellar dust grains*. Università degli Studi di Bologna, 2013.
- [9] E. Daddi e J. Groccia. *Missione Planck: Misura della Radiazione Cosmica di Fondo*, pp. 4–7, 20–23.
- [11] R. Petrolini. *Corpi Grigi - Irraggiamento-Applicazioni*. Università degli Studi di Parma, 1998.
- [12] F. Ravanini. *Istituzioni di fisica teorica*. Università degli Studi di Bologna, 2022.
- [14] S. Zuccher. *Un approccio alla radiazione di corpo nero*. Università degli Studi di Verona, 2015, pp. 1–2.

Articoli

- [13] Nadia Robotti. “Una catastrofe evitata”. In: *Asimmetrie* (2016).