

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**AMBIENTI DI APPRENDIMENTO DIGITALI
E STORIA DELLA MATEMATICA:
UNA PROPOSTA DIDATTICA**

Tesi di Laurea Magistrale in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.
MARIA GIULIA LUGARESI

Presentata da:
MATTIA COSSU

V Sessione

Anno Accademico 2022/2023

Sommario

Introduzione	5
Capitolo 1. Ambienti di apprendimento digitali per l'insegnamento della matematica	9
1.1 Le potenzialità di GeoGebra	9
1.2 La mediazione semiotica di GeoGebra per introdurre il concetto di Teorema	18
1.3 Problemi di costruibilità con GeoGebra	27
Capitolo 2. La storia della matematica nella pratica d'aula	34
Capitolo 3. La mia attività in aula	41
3.1 Presentazione dell'attività	41
3.2 Attività 1 – Il completamento del quadrato di Al Khwarizmi	45
3.3 Attività 2 – L'approccio geometrico di Abu Kamil	51
3.4 Considerazioni dopo la sperimentazione in aula	60
Appendice 1	67
Appendice 2	70
Bibliografia	79

Introduzione

Con la presente tesi si vogliono mostrare le potenzialità didattiche sia dell'utilizzo degli ambienti di apprendimento digitali, sia della storia della matematica.

Nel Capitolo 1 esaminerò alcune delle principali ricerche, nell'ambito della didattica della matematica, che mettono in luce come gli ambienti di apprendimento digitali siano uno strumento di fondamentale importanza per l'apprendimento della disciplina; nel Capitolo 2 discuterò di alcuni risultati che mostrano la forza e le potenzialità dell'introduzione della storia della matematica a scuola.

Il Capitolo 3 invece conterrà un'attività didattica da me progettata, che ha lo scopo di applicare in un caso concreto tutte le tesi raccolte nel Capitolo 1.

È ormai evidente che le tecnologie informatiche facciano parte della nostra quotidianità, ed il loro impiego nella didattica è sempre più frequente: le istituzioni, come gli stessi insegnanti, si sono ormai rese conto di quanto gli strumenti informatici abbiano la capacità di potenziare l'esperienza di apprendimento di tutti gli studenti nonostante l'introduzione dei software nella scuola sia iniziata soprattutto con l'obiettivo di agevolare l'apprendimento degli studenti con DSA; ma al giorno d'oggi non si può fare a meno del loro impiego per potenziare l'apprendimento di tutti gli studenti.

Dal punto di vista degli ambienti di apprendimento per la didattica della matematica ci sono due tipologie particolarmente utilizzate a scuola che permettono sia il

rinforzo di concetti già appresi, sia la costruzione di nuovi concetti matematici e la loro manipolazione.

La prima tipologia è rappresentata da tutti quegli ambienti digitali chiamati *Drill & Practice* che sostanzialmente propongono delle schede di esercizi da risolvere, e man mano che lo studente procede nella risoluzione riceve feedback dal software; questo consente agli studenti di consolidare i concetti visti in aula durante la lezione frontale e perfezionare le tecniche di risoluzione di determinati esercizi.

Il software Aplusix è l'esempio calzante di ambiente *Drill & Practice* e nasce come sostegno allo studente per la risoluzione di esercizi di algebra di base.

La seconda tipologia di ambiente di apprendimento invece basa tutto sul concetto di "micromondo": questo tipo di software consente agli studenti di esplorare nello specifico un determinato oggetto matematico attraverso la manipolazione quasi concreta di quest'ultimo.

Con il termine "micromondo" intendiamo ambienti di lavoro informali, nei quali gli studenti possono interagire in maniera diretta con oggetti matematici, ed individuarne le principali proprietà e relazioni che lo caratterizzano; è possibile quindi per lo studente non solo costruire ed apprendere dei nuovi concetti matematici ma anche sviluppare più consapevolezza a livello metacognitivo nel rapporto fra *ipotesi e tesi*.

Il concetto di *micromondo* è stato introdotto da Seymour Papert (1928-2016), un matematico e pedagogista sudafricano che durante i suoi studi assieme al noto pedagogista Jean Piaget (1896-1980) ha sviluppato l'idea di apprendimento come processo di costruzione di rappresentazioni del mondo che si vive; è proprio da qua che nasce quella costola della teoria costruttivista detta *costruzionismo*: il processo di apprendimento diventa strettamente legato alla costruzione vera e propria di un oggetto, che una volta finito si può giudicare e discutere. Secondo Papert, lo studente che esplora l'ambiente digitale per apprendere un concetto matematico è come se "vivesse nel paese della matematica", dove apprendere nuovi concetti matematici diventa naturale come lo è imparare una lingua vivendo in un paese straniero.

In ogni caso, la sola interazione studente-software non è sufficiente per raggiungere determinati traguardi formativi o comunque può essere complesso per lo studente arrivare ai risultati d'apprendimento richiesti in autonomia. Il ruolo del docente sta sia nella progettazione della lezione vera e propria sia nella mediazione tra l'attività pratica che si sta svolgendo e i reali obiettivi didattici d'apprendimento.

In questa tesi, in particolare, verranno sfruttate alcune potenzialità di un noto software di geometria dinamica: GeoGebra.

Questo infatti ci permette, grazie ad una relazione utente-software molto stretta, di mediare concetti geometrici, scoprire teoremi, ma anche imparare delle definizioni o delle proprietà.

La caratteristica principale di GeoGebra, infatti, è proprio la presenza della “doppia visualizzazione” algebrica e geometrica: non solo c’è la possibilità di creare oggetti geometrici come punti, rette o poligoni per modificarli in tempo reale e visualizzarne determinate relazioni e proprietà, ma è possibile anche digitare equazioni di rette, curve o coniche ed individuarne le proprietà analitiche e algebriche.

Capitolo 1. Ambienti di apprendimento digitali per

l'insegnamento della matematica

1.1 Le potenzialità di GeoGebra

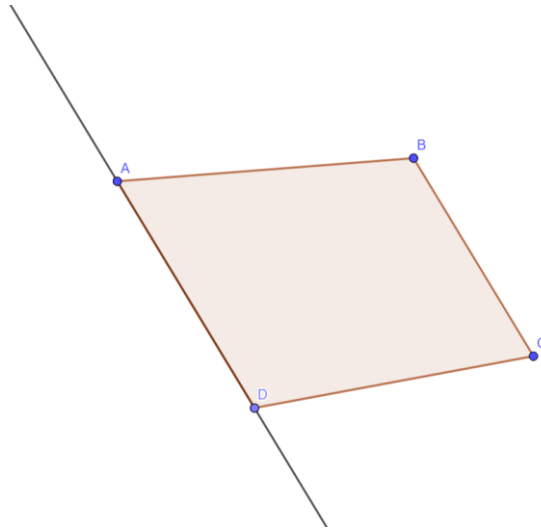
In questo primo paragrafo verranno esposti e analizzati esempi di consegne ed attività eseguibili con GeoGebra che è possibile proporre agli studenti in aula. Ogni attività verrà analizzata dal punto di vista della sua utilità didattica, facendo particolare attenzione a quali sono gli effettivi punti di forza di ognuna di queste nell'apprendimento.

Vediamo prima di tutto delle attività introduttive, che hanno lo scopo di scoprire alcune basi dell'ambiente digitale di apprendimento GeoGebra e danno subito l'idea di un nuovo modo di apprendere determinati concetti matematici.

Consegna 1

Costruire un quadrilatero ABCD in cui D è un punto scelto sulla retta parallela a BC e passante per A.

Quali tipi di quadrilatero può diventare ABCD?



Clicca sull'immagine per svolgere l'attività

Il primo aspetto di considerevole importanza didattica che l'allievo può notare svolgendo l'attività è la presenza di due tipologie ben distinte di punti:

- Punti base: tutti quei punti dai quali si parte per la costruzione dell'oggetto geometrico (in questo caso possono esserlo ad esempio B e C). Questi punti possono essere spostati come si vuole nel piano di GeoGebra e i loro movimenti causano lo spostamento di altre parti dell'oggetto.
- Punti dipendenti: i punti che nascono come conseguenza dell'intersezione fra gli oggetti costruiti partendo dai punti base.

Questi punti non possono essere spostati come si vuole ma sono vincolati alla figura, infatti si muovono solo come conseguenza dello spostamento di punti base. Sono fondamentalmente dei punti che “nascono” spontaneamente durante la costruzione della figura stessa, cioè non è l'utente che determina la loro esistenza.

La differenza sostanziale fra queste due tipologie di punti è dovuta al fatto che l'allievo trascinando i punti base può riuscire ad osservare determinate proprietà e relazioni che appartengono all'oggetto geometrico in questione: ad esempio, trascinando il punto B arbitrariamente nel piano si può vedere come il segmento AD si muove di conseguenza mantenendo la direzione di BC, ovvero si nota che il quadrilatero ABCD è sicuramente un trapezio (in linea più generale). Mentre trascinando un punto dipendente (che in realtà è anche un punto base della figura), ad esempio D, si nota come questo rimane vincolato a stare sulla retta in cui "vive", e le uniche cose che cambiano di conseguenza ai suoi movimenti sono i segmenti AD e CD.

Si individuano quindi delle forti proprietà a seconda della parte di oggetto che si considera e si trascina. In generale abbiamo visto che ABCD è un trapezio, ma lo studente potrebbe notare senza problemi che la figura nel particolare può anche essere un parallelogramma, un rettangolo o un quadrato.

L'obiettivo dell'insegnante, e più in generale della scuola, dovrebbe essere quello di mostrare gli oggetti geometrici come *entità il cui comportamento d'insieme viene investigato e descritto* ovvero come una *rappresentazione materializzata di un oggetto geometrico ideale caratterizzato soltanto dalle sue relazioni interne*.

Non è però affatto scontato che l'allievo riesca ad avere una visione d'insieme dell'oggetto come caratterizzato dalle relazioni che lo compongono.

È evidente che in attività del genere l'esperienza utente è potenziata rispetto ad un normale lavoro "carta e penna", infatti l'allievo percepisce sensazioni di *dinamismo* vedendo il quadrilatero mutare nel piano e anche sicuramente la sensazione di poter agire sull'oggetto per controllarne i suoi cambiamenti.

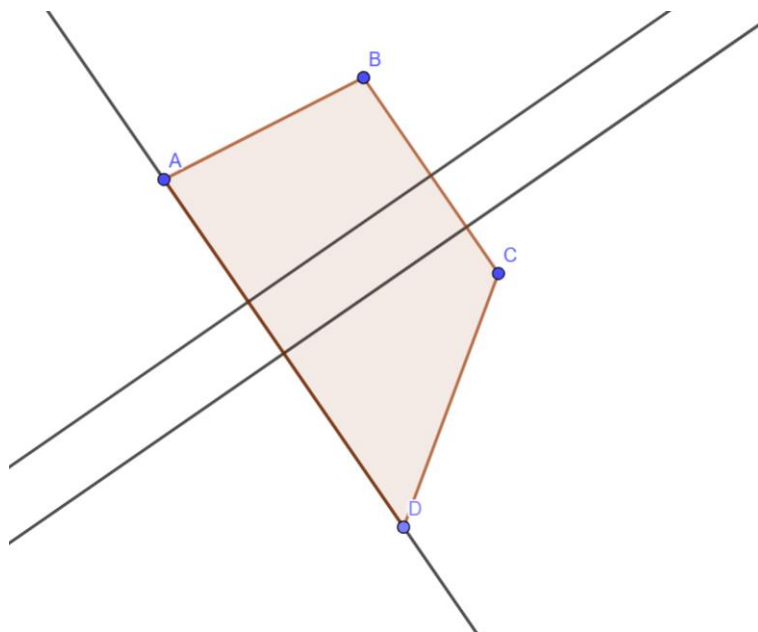
Vediamo adesso una variante della *Consegna 1* che ha come obiettivo quello di far visualizzare allo studente determinate proprietà invarianti della figura. Riconoscere le proprietà invarianti aiuta l'allievo a capire meglio come si muove la figura e quali sono le conseguenze dello spostamento di alcuni punti.

Consegna 2

Costruire un quadrilatero ABCD in cui D è un punto scelto sulla retta parallela a BC e passante per A.

Tracciare gli assi dei segmenti AD e BC.

È possibile far coincidere gli assi? Quando?



Clicca sull'immagine per svolgere l'attività

Muovendo i punti del quadrilatero lo studente riconosce immediatamente alcune proprietà invarianti della figura:

- parallelismo tra gli assi (*invariante derivata*)
- parallelismo tra BC e AD (*invariante di costruzione*)

Inoltre, se si muove per esempio il punto B si possono far coincidere i due assi di simmetria. Si nota abbastanza intuitivamente come la coincidenza fra i due assi sia necessariamente correlata alla simmetria della figura stessa.

Anche in questa seconda consegna l'allievo prende coscienza di quali sono le relazioni che compongono l'oggetto geometrico in questione, sviluppa la capacità di visualizzare i movimenti delle parti dell'oggetto e riesce a “prevedere” la causalità dei movimenti.

Un altro caso interessante che si può prendere in considerazione è estratto da una ricerca sulla mediazione semiotica nelle lezioni di matematica svolte da Maria Giuseppina Bartolini Bussi e Maria Alessandra Mariotti. Fra i vari aspetti trattati nel documento è utile soffermarsi sul paragrafo relativo alla lezione progettata con Cabri che ha l'obiettivo di introdurre il concetto di funzione, ovvero di covariazione tra due variabili numeriche continue.

Uno degli aspetti più delicati quando si introduce il concetto di funzione è infatti quello di riuscire a trasmettere agli studenti il rapporto tra le due variabili x e y in relazione fra loro, e quindi il concetto di *variabile indipendente x* e *variabile dipendente y* .

Oltre questo è spesso frainteso dagli studenti il modo in cui le variabili algebriche possano appunto “variare” in maniera continua, e non per forza discreta.

Dalla ricerca emerge come l'utilizzo di un software come Cabri possa facilitare l'apprendimento di questi concetti sfruttando una mediazione più geometrica del concetto di funzione e di correlazione tra variabili.

Per approfondire meglio i risultati ottenuti da Bussi e Mariotti nella loro ricerca analizziamo le consegne proposte in classe (nel caso di questa tesi saranno tutte svolte con GeoGebra). La prima di queste è una semplice attività che con la semplice aggiunta della traccia di un punto ha come obiettivo quello di mediare i concetti di variabile dipendente e indipendente.

Consegna 3

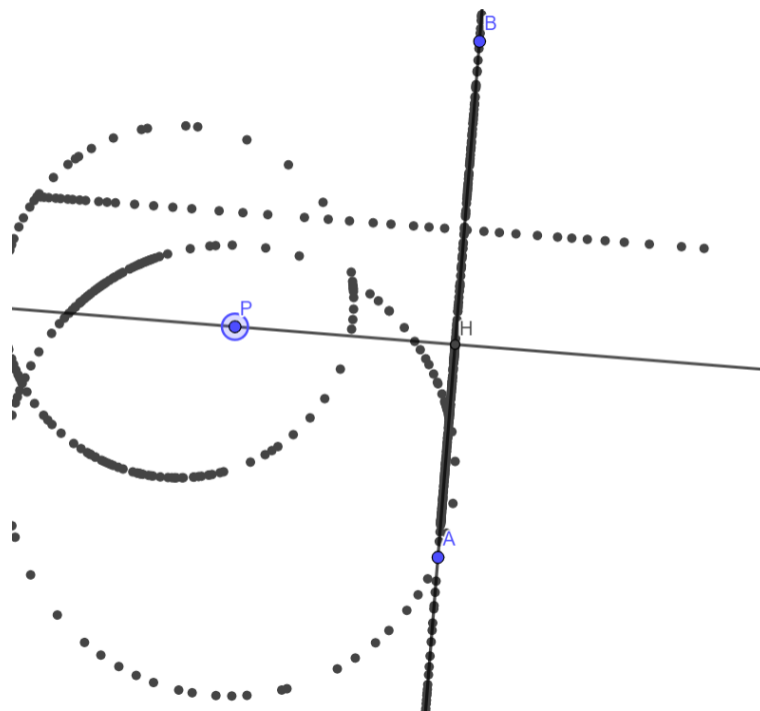
Disegnare tre punti A, B, P a piacere sul piano.

Tracciare la retta AB e la perpendicolare ad AB passante per P.

Individuare il punto H di intersezione fra AB e la perpendicolare disegnata.

Muovere i diversi punti e descrivere cosa succede per ognuno di essi.

Visualizzare la traccia di P e di H e provare a muovere ancora i punti.



Clicca sull'immagine per svolgere l'attività

Durante il laboratorio gli studenti sono riusciti a differenziare il ruolo dei diversi punti, e hanno compreso la correlazione dell'attività con i concetti di *variabile indipendente* e *variabile dipendente*.

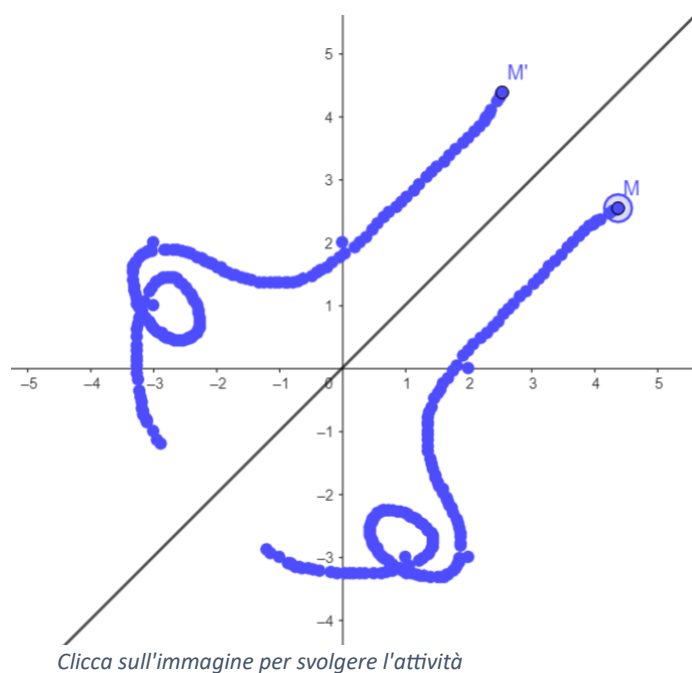
Non tutti gli studenti sono riusciti subito ad individuare bene le differenze tra le variabili in gioco, ma dopo l'aggiunta della traccia gli studenti in questione arrivano ai risultati attesi.

Nonostante non sia una richiesta esplicita dell'attività, possiamo pensare che la visualizzazione della traccia del punto H trasmette, anche se in maniera indiretta, il concetto di vincolo e quindi il concetto di dominio di una variabile. Infatti, vedere H potersi muovere solo su una retta (nel caso in cui muoviamo P) o solo su una circonferenza (nel caso in cui muoviamo A o B) è la prima cosa che viene notata dagli studenti.

La seconda parte dell'attività procede con l'obiettivo di mediare l'idea di funzione. L'insegnante propone una seconda attività su Cabri che consiste nel descrivere la *funzione* che vige fra i punti M ed M'.

Consegna 4

Descrivere la funzione che vige fra i punti M ed M' e darle un nome.



Nello schermo di due studentesse presenti all'attività si vede una situazione simile a quella proposta sopra: senza che l'insegnante abbia esplicitato di attivare la traccia dei punti M ed M' le due studentesse hanno comunque utilizzato lo strumento appreso durante la Consegna 3 e lo hanno sfruttato per carpire informazioni riguardo l'evidente relazione presente tra i punti M ed M'.

M viene inquadrato subito come la *variabile indipendente*, mentre M' come la *variabile dipendente*. La funzione descritta dalle due studentesse è proprio quella corretta, ovvero la riflessione rispetto alla retta bisettrice del I e III quadrante.

L'attivazione della traccia non è stato uno strumento utilizzato solamente come modo per risolvere la nuova attività proposta, ma anche come strumento di mediazione semiotica per capire il ruolo delle due variabili. Il fatto che buona parte

degli studenti abbia appreso rapidamente che il ruolo principale della funzione dipende proprio dalle relazioni *punto a punto* fra gli elementi del dominio e quelli del codominio fa ben pensare sull'utilità di uno strumento semplice ed intuitivo come la traccia.

1.2 La mediazione semiotica di GeoGebra per introdurre il concetto di

Teorema

Varie ricerche mostrano che anche concetti più astratti e complessi come quelli di “Teorema” e “Dimostrazione” possono essere insegnati in aula con l’approccio della mediazione semiotica; in particolare possiamo sfruttare sempre un Ambiente di Geometria Dinamica (d’ora in avanti indicato brevemente con AGD) come GeoGebra per mediare concetti più metamatematici.

Non è semplice per un insegnante concepire delle lezioni che possano mediare in maniera efficace un concetto così astratto come quello di Teorema. Spesso si ricorre alla definizione formale, cioè quella che presenta il teorema come un enunciato, seguito da una dimostrazione, all’interno di una teoria ben definita (a questo punto bisognerebbe definire anche il concetto di “Teoria”). È chiaro che gli strumenti teorici in mano agli insegnanti non sono sufficienti per mediare un concetto così complesso e astratto.

L'obiettivo della scuola e degli insegnanti però non è solo quello di introdurre il concetto di teorema dal punto di vista più teorico e formale, ma anche e soprattutto quello di trasmettere l'idea di cosa è un teorema nella sua essenza, ovvero da un punto di vista più concreto: è utile, ad esempio, che uno studente sappia formulare esplicitamente delle congetture utilizzando il costrutto "se... allora...".

È necessario quindi che l'insegnante utilizzi un approccio didattico volto a trasmettere ai propri studenti le capacità necessarie per saper riconoscere i concetti di "premessa" e "conclusione", e quindi individuare le conseguenze dovute a una certa ipotesi, o persino il viceversa.

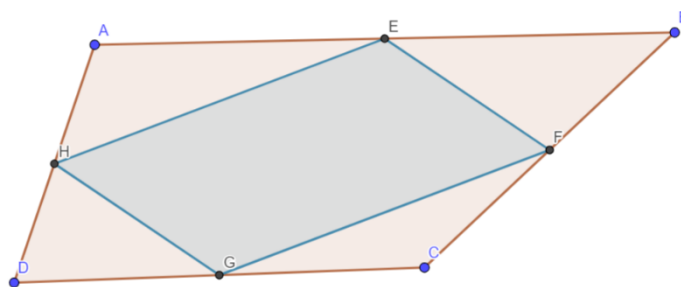
L'utilizzo di un AGD diventa, ancora una volta, utile per la mediazione di questa tipologia di concetto. Abbiamo visto, all'interno dell'analisi delle prime due consegne presentate, che lo studente raggiunge traguardi d'apprendimento soprattutto relativi alle conseguenze dei movimenti degli oggetti geometrici presenti.

La consegna seguente è un problema aperto, che racchiude un po' gli obiettivi didattici appena discussi.

Consegna 5

Sia dato un quadrilatero ABCD e siano E, F, G, H rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA.

Quali proprietà ha il quadrilatero EFGH? (associa un enunciato alla figura che hai costruito).



Clicca sull'immagine per svolgere l'attività

Gli unici punti indipendenti che possiamo muovere in questa attività sono i vertici A, B, C e D del quadrilatero esterno. Il movimento di questi vertici rende evidente ad ogni studente che sta svolgendo l'attività che il quadrilatero dei punti medi EFGH è e rimane sempre un parallelogramma.

La forza di questa attività non è solo legata al dinamismo della figura e alla differenziazione tra punti dipendenti ed indipendenti come abbiamo visto invece nelle consegne 1 e 2 all'inizio del capitolo, ma mira soprattutto a quei traguardi formativi utili alla formulazione di congetture, con particolare attenzione alla scoperta di come certe conseguenze derivino da alcune ipotesi costruite, o persino ad

apprendere quali sono le condizioni sotto le quali una determinata proprietà è verificata.

Oltre questo, il fatto che il quadrilatero EFGH sia sempre un parallelogramma, è di solito sorprendente per gli studenti; quindi può essere un buon motivo per l'insegnante di chiedere *perché* succede questo, introducendo l'idea di teorema e di dimostrazione.

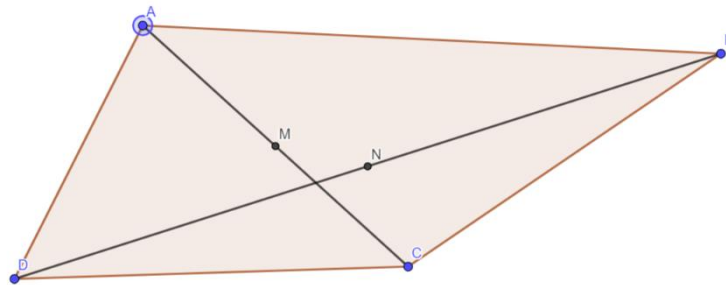
Una consegna simile alla precedente, ma che richiede un approccio quasi opposto, è la seguente.

Consegna 6

Costruire un quadrilatero ABCD.

Costruire le diagonali e i punti medi M e N su di esse.

Sotto quali condizioni M coincide con N? (associa enunciati condizionali alla figura ottenuta).



Clicca sull'immagine per svolgere l'attività

Il problema è aperto anche in questo caso, con la differenza però che ci viene richiesto di trovare delle condizioni sotto cui una certa proprietà è verificata; al contrario di prima che invece bisognava trovare le conseguenze di determinate ipotesi date.

Il movimento dei punti M ed N è indiretto, e viene indotto dal movimento dei quattro vertici del quadrilatero ABCD. Proprio per questo motivo, lo studente costruisce la capacità di scoprire ipotesi sotto le quali la figura ottiene determinate proprietà.

Le tipiche risposte degli studenti possono essere generali o più particolari, ad esempio:

- *se ABCD è un quadrato allora M ed N coincidono.*
- *N e M coincidono quando ABCD è un rettangolo.*

- *Quando ABCD è un parallelogramma i punti M ed N
coincidono.*

Alcuni studenti riescono subito ad utilizzare il costrutto “se... allora...”, dimostrando di aver appreso dall’attività il significato di *premessa* e *conclusione*; altri invece hanno utilizzato avverbi temporali come “quando...”, che nonostante siano meno rigorosi, sono spesso utilizzati in matematica seppur il loro significato matematico non sia mai facile da trasmettere agli studenti.

Un’ultima attività relativa alla mediazione del concetto di teorema e dell’utilizzo della dimostrazione è la seguente.

Consegna 7

Costruire:

Un punto P e una retta r per P,

la perpendicolare s ad r per P e un punto C sulla perpendicolare s,

un punto A simmetrico di C rispetto a P,

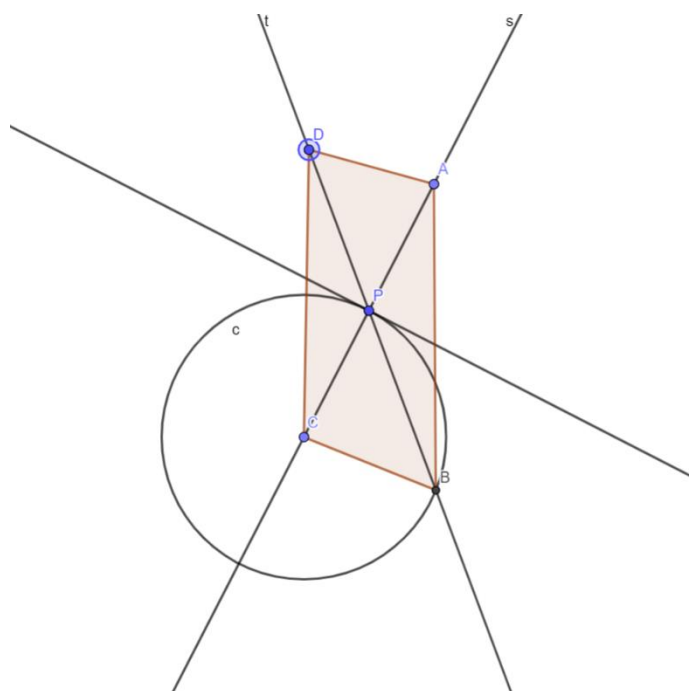
un punto D nel semipiano individuato da r e contenente A,

la retta per P e D e la circonferenza di centro C e raggio CP,

B come seconda intersezione della circonferenza con la retta per P e D.

Considerare il quadrilatero ABCD e fare congetture su **tutti** i tipi di quadrilatero che può diventare cercando di descrivere le ipotesi sotto le quali ABCD è un certo tipo di quadrilatero.

Dimostrare le congetture fatte.



Clicca sull'immagine per svolgere l'attività

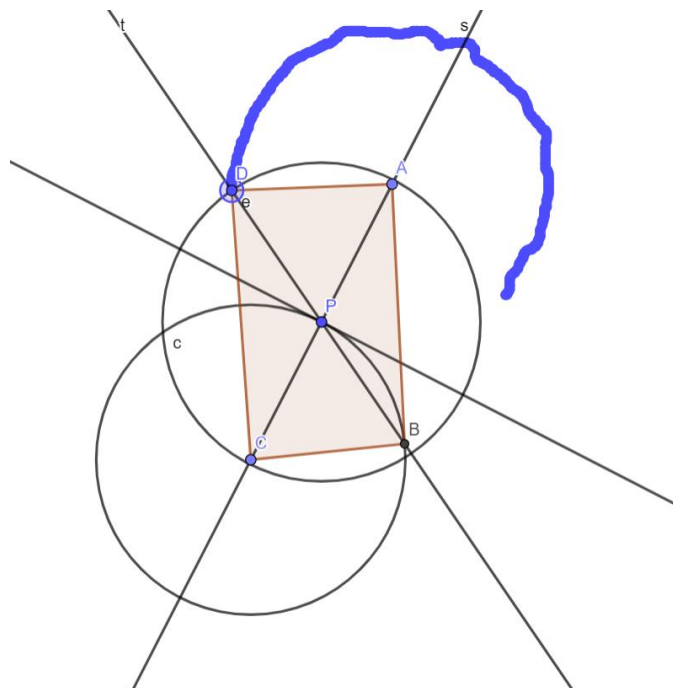
Questo tipo di problema aperto permette agli studenti di lavorare sempre sul *trascinamento* dei punti liberi della figura in questione e riesce a forzarli sulla ricerca di condizioni (o ipotesi) particolari sotto le quali una determinata proprietà è soddisfatta.

In consegne come queste gli studenti utilizzano il trascinamento in una maniera particolare, detta *trascinamento di mantenimento*: questo modo di utilizzare il trascinamento viene chiamato così perché gli studenti muovono determinati punti cercando appunto di *mantenere* una certa proprietà della figura in esame. Nel caso specifico di questa attività gli studenti si rendono conto che muovendo D lungo una certa curva il quadrilatero ABCD rimane un parallelogramma.

Il fatto che nella consegna sia scritto “descrivere **tutti** i modi in cui è possibile ottenere un certo quadrilatero” produce negli studenti una modalità di ricerca come quella descritta sopra, nella quale viene analizzato nel dettaglio il comportamento del punto D e dei punti e delle rette coinvolte nel trascinamento di mantenimento.

Una coppia di studenti oggetto della ricerca dal quale è stata estratta l'attività ha cercato un modo particolarmente efficace per mantenere ABCD come parallelogramma: hanno costruito la circonferenza C_{PD} di centro P e raggio PD, e hanno provato a muovere il punto D in maniera tale che B rimanesse su quest'ultima circonferenza; in questo modo avrebbero avuto $PD=BP$.

Successivamente attivano la traccia di D e si rendono conto che il percorso fatto da D, lungo il quale B rimane sulla circonferenza C_{PD} , è a sua volta ancora una circonferenza ma con centro in A e raggio AD.



Clicca sull'immagine per svolgere l'attività

Gli studenti sono riusciti quindi a produrre un enunciato condizionale, costruendo delle ipotesi sotto le quali il quadrilatero ABCD sarebbe rimasto un parallelogramma: “ABCD è un parallelogramma se $PA=AD$ ”.

In conclusione, hanno generato una catena di deduzioni corrette e coerenti che li ha portati a dimostrare il loro enunciato.

1.3 Problemi di costruibilità con GeoGebra

Con queste attività è stato messo in evidenza come gli strumenti a disposizione degli studenti quando svolgono attività didattiche su un AGD fungono da potenziamento alle competenze cognitive già possedute; non solo a livello di conoscenza “pratica”, ma anche “teorica”.

Il potenziale dell’AGD, soprattutto in questo tipo di attività, è quello di sfruttare il trascinarsi di un punto per permettere una distinzione forte tra le nozioni di “premessa” e “conclusione” in un enunciato condizionale. Il fatto che gli studenti possano o meno muovere un punto stabilisce una sorta di *gerarchia*, che si ripercuote poi sul differenziare le ipotesi dalla tesi: il movimento del punto D è sotto il controllo dello studente, che sa quindi quali sono le ipotesi in questione (mantenere il punto D sulla circonferenza C_{AP} equivale a riconoscere le ipotesi) e vede contemporaneamente qual è la tesi associata (ABCD resta sempre un parallelogramma). Questo tipo di associazione quasi “fisica” sembra essere particolarmente efficace anche a livello metamatematico per il concetto di Teorema.

Un’altra classe di problemi che hanno forte valore didattico dal punto di vista dell’utilizzo di un AGD sono i *problemi di costruibilità*.

Nei problemi di costruibilità si chiede allo studente appunto di costruire una figura geometrica con delle determinate proprietà e in caso non si possa costruire di dimostrare perché.

La costruibilità in geometria euclidea è legata all'uso di strumenti come riga e compasso, che non sono altro che gli oggetti base da cui si parte per definire gli assiomi del sistema teorico costruito da Euclide. Inoltre, ogni teorema o proposizione, viene costruita con riga e compasso.

Desti particolare curiosità la questione della **non** costruibilità di una determinata figura geometrica. A livello puramente teorico la non costruibilità può presentarsi in due maniere differenti:

- non costruibilità di un oggetto partendo da un insieme determinato di strumenti
- non costruibilità di un oggetto dovuta alla non esistenza dell'oggetto stesso

Per quanto riguarda la prima: conosciamo vari problemi relativi ad oggetti non costruibili con riga e compasso, quali la trisezione dell'angolo o la quadratura del cerchio.

Nonostante i problemi sopra citati siano anch'essi interessanti da un punto di vista divulgativo e della storia della matematica, in questo caso cercheremo solamente di parlare della seconda categoria di problemi di non costruibilità, che sicuramente

hanno un maggiore riscontro didattico, soprattutto per quanto riguarda lo sviluppo di attività laboratoriali con l'utilizzo di un ambiente di geometria dinamica.

Il grande punto di forza di questo tipo di attività è quello di affrontare, in maniera più concreta, il concetto di dimostrazione per assurdo (argomento particolarmente ostico per tutte le tipologie di studenti). Dimostrare la non costruibilità di un determinato oggetto matematico è infatti proprio una dimostrazione per assurdo; si suppone che la figura esista e si cercano delle contraddizioni logiche.

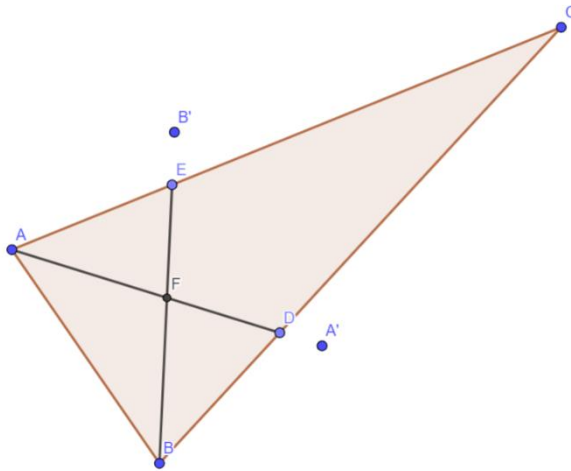
Con le seguenti attività vedremo come l'utilizzo di un AGD può potenziare l'apprendimento di questo concetto di fondamentale importanza dal punto di vista dello sviluppo di un pensiero matematico.

Per la consegna seguente vedremo due costruzioni differenti, entrambe possono essere costruite da uno studente che fa un ragionamento corretto, ma sono molto diverse tra loro a livello di impostazione del problema.

Consegna 8

È possibile costruire un triangolo ABC con due segmenti (corde) AE e CD, con E sul lato BC e D sul lato AB, che si intersecano rispettivamente nei punti medi?

Se sì, costruirne uno, se no spiegare perché non è possibile.



Clicca sull'immagine per svolgere l'attività

Questo primo tentativo parte con la costruzione di un triangolo ABC, successivamente vengono vincolati due punti D ed E rispettivamente nei lati BC e AC. A questo punto potrebbe essere utile l'idea di costruire i segmenti (corde) BE e AD e segnare con F il loro punto di intersezione.

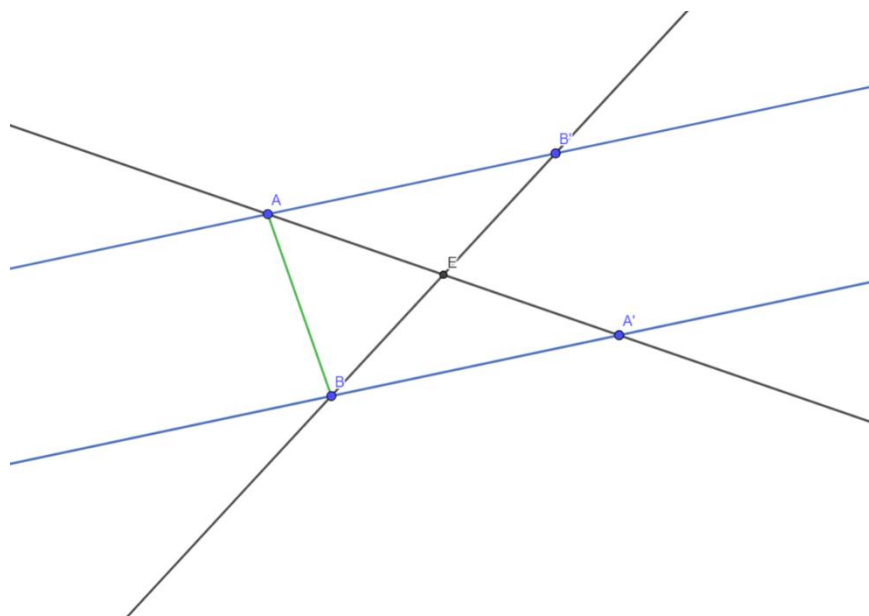
Quello che si vuole ottenere è la proprietà $BF=FE$ e $AF=FD$. Per verificare che questa proprietà venga soddisfatta è possibile, per esempio, costruire i simmetrici A' di A e B' di B entrambi rispetto al punto F, in seguito verificare *quando* i punti A' e B' coincidono rispettivamente coi punti D ed E.

Lo studente, a questo punto, proverà a muovere i punti liberi, e si renderà conto, dopo qualche tentativo, che per soddisfare la condizione cercata il triangolo deve degenerare. Segue quindi l'impossibilità della costruzione.

Verificare *quando* la proprietà viene soddisfatta, può essere tradotto, nel linguaggio di un AGD come l'attività di *trascinamento*. Infatti è proprio muovendo i punti liberi che lo studente percepisce il dinamismo della figura e riceve feedback su come questa cambia contemporaneamente al movimento diretto di certi punti.

L'esplorazione del *quando* contribuisce, da un punto di vista didattico, a formulare delle congetture e scoprire proprietà dell'oggetto in questione; il tutto visto nell'insieme può diventare elemento fondamentale per l'approccio ad una dimostrazione per assurdo. Dipende molto anche da che tipo di approccio avrà lo studente su un'attività come questa.

Vediamo adesso un possibile secondo approccio.



Clicca sull'immagine per svolgere l'attività

In questo secondo tentativo di costruzione della figura non si parte dal triangolo, ma da un suo lato AB.

L'idea è quella di una dimostrazione per assurdo: si parte supponendo che le due corde richieste esistano. Lo studente inizia la costruzione prendendo due rette incidenti passanti rispettivamente per A e per B; queste si incontreranno in un punto E, quindi se le due corde di lunghezza uguale esistessero avrei sicuramente che incontrano rispettivamente gli altri due lati del triangolo in due punti A' e B' tali che $AE=EA'$ e $BE=EB'$. In sostanza i punti A' e B' in cui le corde dovrebbero intersecare gli altri due lati del triangolo sono i punti simmetrici di A e B rispetto al centro di simmetria E.

Ma per lo studente è immediato vedere che le rette AB' e BA' sono parallele, cioè non possono essere due lati di un triangolo, infatti, costruendole come in figura, si

ricava subito che il triangolo non può essere costruito per nessun trascinamento dei punti A e B.

La dimostrazione per assurdo è spesso “non soddisfacente” per alcuni studenti, nel senso che è complicato a volte trovare in essa una prova del fatto che l’enunciato proposto sia vero. È però di grande aiuto l’utilizzo di un AGD, che permette agli studenti di visualizzare concretamente la degenerazione della figura sotto determinate ipotesi.

Capitolo 2. La storia della matematica nella pratica d'aula

Le potenzialità legate all'introduzione della storia della matematica nell'insegnamento di quest'ultima sono note ormai da decenni ma ancora oggi gli insegnanti in tutto il mondo non danno abbastanza importanza a questo aspetto.

È importante innanzitutto capire perché ancora oggi la scuola non prende in considerazione la storia della matematica come strumento fondamentale per l'apprendimento della disciplina: nello studio di Rosa Antónia Tomás Ferreira e Beverly S. Rich (2001) si parla proprio di questi motivi.

Un primo aspetto che si può osservare facilmente è che già nei piani di studio dei corsi di laurea in matematica non si dà abbastanza importanza allo studio della storia della matematica; spesso i corsi d'esame sono facoltativi e non sono organizzati in modo tale da descrivere le potenzialità didattiche della materia. Quindi è chiaro che i neo-docenti, che sono spesso e volentieri già poco preparati su "cosa è" la storia della matematica, sono sicuramente poco o per nulla a conoscenza del "come" utilizzare la storia in aula.

Un secondo problema può derivare da alcuni pregiudizi sulla matematica, che anche studenti universitari e docenti della materia hanno. Se la matematica viene spesso interpretata come una disciplina fissa, chiusa e che ha smesso di variare nel tempo, è chiaro che la percezione sarà quella di vedere la storia come una variabile del tutto inutile.

Questi aspetti hanno quindi influenzato il sistema didattico anche da un punto di vista editoriale: si può notare come raramente viene data importanza alla storia per l'apprendimento della matematica; i testi scolastici presentano solamente piccoli paragrafi a fine capitolo riguardo la storia di un argomento o di un autore, oppure delle ricerche da svolgere in autonomia, a dimostrazione di come l'aspetto storico sia messo in secondo piano rispetto alla presentazione dei contenuti puramente matematici.

Nel testo *Matematica Verde 5* di Bergamini, Trifone, Barozzi (Zanichelli, 2013) viene proposto, all'interno del capitolo sugli integrali, un paragrafo storico sul metodo di esaurimento di Archimede, con un'attività da svolgere in autonomia.



Archimede e gli integrali ante litteram

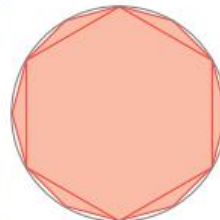
Archimede di Siracusa, vissuto tra il 287 e il 212 a.C. circa, è stato una figura di riferimento per gli analisti del Seicento. Sfruttando il *metodo di esaustione*, già elaborato da Eudosso di Cnido (408-355 a.C. circa), egli determinò con buona approssimazione la misura della lunghezza della circonferenza, dell'area del cerchio, del segmento parabolico e di numerose altre superfici e volumi di rotazione.

Possiamo pensare il metodo di esaustione come una prima versione di calcolo integrale, perché si basava sull'idea di approssimare una superficie curva attraverso una sequenza di poligoni inscritti e circoscritti dal numero di lati via via crescente. Ai matematici greci però mancava il concetto di limite. Il metodo di esaustione non comprendeva alcun passaggio al limite e si arrivava a dimostrare la tesi, che doveva già essere nota a priori per altre vie, attraverso un ragionamento per assurdo.



L'area del cerchio

Per determinare l'area del cerchio, Archimede considerò una successione di poligoni inscritti e una successione di poligoni circoscritti, le cui aree rappresentavano rispettivamente una stima per difetto e una stima per eccesso dell'area del cerchio. Per esempio, all'aumentare del numero dei lati, l'area dei poligoni regolari inscritti approssima sempre meglio quella del cerchio. Ottenuta una buona stima dell'area del cerchio, sfruttò il principio di esaustione per la prova rigorosa. In termini moderni noi diremmo che, comunque preso ϵ piccolo a piacere, esiste sempre un poligono inscritto tale che la differenza tra l'area A del cerchio e l'area del poligono è inferiore a ϵ (cioè è possibile avvicinarsi al cerchio tanto quanto si vuole). La tesi si prova poi per assurdo: se si suppone che il cerchio abbia un'area A' inferiore ad A , allora esiste un poligono inscritto la cui area è maggiore di A' , ma, essendo un poligono inscritto, la sua area non può superare quella del cerchio. Un ragionamento analogo vale per i poligoni circoscritti.



◀ Archimede o Euclide? L'identità del personaggio che usa il compasso nell'affresco cinquecentesco *La scuola di Atene* è controversa. In figura, un particolare dell'affresco dove Raffaello raffigurò Platone, Aristotele e altri celebri filosofi dell'antichità.

Attività

L'ultimo problema di Archimede

Nel 212 a.C. Siracusa fu saccheggiata dai Romani. Plutarco narra che al soldato che gli ordinava di seguirlo, Archimede rispose di aspettare perché doveva finire di risolvere un problema geometrico. Il soldato si infuriò e lo uccise.

Per suo volere nella sua tomba vennero scolpite una sfera inscritta in un cilindro e la scritta «due terzi».

- Cerca maggiori notizie sulla morte di Archimede, sulla sua tomba e sul suo contributo allo studio della sfera e del cilindro.



Cerca nel Web:

Archimede, Plutarco, Cicerone, sfera, cilindro

È stata una buona idea, da parte degli autori, quella di introdurre una pagina intera su Archimede e sul metodo di esaustione: questo può essere utile agli studenti per conoscere le origini del calcolo integrale e/o per ragionare su alcuni concetti astratti come quello di quantità piccola a piacere.

Inoltre sarebbe stato probabilmente più utile un paragrafo storico che mettesse in evidenza tutti i punti principali che hanno portato all'introduzione del calcolo integrale, ad esempio facendo riferimento anche all'opera di Bonaventura Cavalieri, *La Geometria indivisibilibus* (1635), all'interno della quale l'autore tratta la geometria degli indivisibili che consiste nel ridurre il confronto fra oggetti "continui" al confronto dei rispettivi elementi indivisibili, ovvero le sezioni di spessore infinitesimo dell'oggetto (per esempio l'area di una figura piana viene vista come composta da infiniti segmenti di spessore infinitesimo ottenuti trascinando una retta parallelamente attraverso la figura stessa); questa idea getta le basi del calcolo integrale e ha permesso a Bonaventura Cavalieri di ricavare diverse formule utili per il calcolo di aree e volumi.

Inoltre, dando un'occhiata ai capitoli successivi, i riferimenti storici sono scarsi o nulli.

È chiaro quindi che al giorno d'oggi la storia della matematica durante le lezioni non viene praticamente mai utilizzata.

Vediamo però adesso quali sono i principali punti di forza di questa disciplina.

Un primo aspetto da tenere in considerazione è sicuramente la motivazione: introdurre la storia nella pratica d'aula può essere fonte di nuova curiosità e interesse nei confronti della matematica sia per gli studenti che per gli insegnanti.

Gli studenti iniziano infatti a interpretare la disciplina come un qualcosa di più vicino all'uomo, di più reale. Oltre ciò, affrontare lo studio delle diverse vicende storiche può essere sicuramente più d'impatto rispetto alla (spesso) fredda spiegazione di un concetto puramente astratto: parlare di come i matematici arabi risolvevano le equazioni di secondo grado per via geometrica; raccontare della disputa fra Tartaglia e Cardano dopo aver introdotto le equazioni di grado superiore al secondo; presentare la storia sulle diverse notazioni di Newton e Leibnitz in riferimento alla definizione di derivata di una funzione. Sono tanti i cenni storici che si possono raccontare per far avvicinare gli studenti alla matematica da un punto di vista anche emotivo.

Anche gli insegnanti stessi in realtà possono trarre giovamento da ciò: studiare la storia di un determinato argomento permette ai docenti di approfondire ulteriormente la materia ma anche di comprendere meglio la difficoltà epistemologica di alcuni concetti: questa consapevolezza non può fare altro che aiutare il docente nelle scelte organizzative.

Inoltre, da alcune ricerche (Bakker & Gravemeijer, 2006, p. 149; Bartolini Bussi & Bazzini, 2003, p. 206; Fauvel, 1991, p. 4; Tzanakis & Thomaidis, 2000, p. 49) emerge come l'introduzione della storia della matematica può ridurre le ansie degli studenti nei confronti della matematica. Sappiamo quanto i fattori emotivi siano importanti in una materia come la matematica, con la quale gli studenti non hanno mediamente un buon rapporto. L'ansia di dover affrontare un esercizio o un

problema matematico è un fattore da non sottovalutare: introdurre la storia può avvicinare emotivamente lo studente e scardinare quelle barriere psicologiche che si vengono a creare.

Oltre a queste motivazioni può essere utile ricordare anche quanto può essere importante per uno studente vedere le molteplici connessioni esistenti fra le materie che studia a scuola (in questo caso fra la matematica e la storia); e anche l'importanza di vedere la matematica come scienza "viva", che cambia nel tempo, e non come disciplina fissa della quale conosciamo tutto.

La matematica, nel suo senso più profondo, non è solamente una struttura teorica ben organizzata, ma è anche un modo di pensare e di ragionare che l'umanità ha sfruttato nei secoli per capire il mondo che lo circondava; è quindi evidente che gli obiettivi e le modalità di pensiero dei matematici della storia siano sempre cambiati col tempo: è necessario quindi che gli studenti conoscano questi cambiamenti per capire a fondo il senso della disciplina.

Conoscere la matematica non è infatti solo conoscere delle definizioni, saper maneggiare dei simboli o saper applicare un metodo, ma è anche saper riconoscere i motivi e le modalità per cui si è voluti arrivare a certi risultati.

Riassumendo in una frase: *“per imparare e padroneggiare veramente la matematica, la mente deve attraversare le stesse fasi che la matematica ha attraversato durante*

la sua evoluzione” (A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education, Jankvist, Uffe Thomas, 2009, p. 5).

Capitolo 3. La mia attività in aula

3.1 Presentazione dell'attività

Questo terzo capitolo ha l'obiettivo di presentare ed analizzare (da un punto di vista didattico) un'attività didattica da me progettata con l'aiuto della relatrice prof.ssa Maria Giulia Lugaresi.

Lo scopo dell'attività è quello di mostrare ulteriormente l'utilità degli ambienti di geometria dinamica (nello specifico di GeoGebra), e più in generale della mediazione semiotica, per l'apprendimento della matematica.

Sarà di fondamentale importanza per l'attività il contesto storico nel quale gli studenti che svolgeranno l'attività saranno immersi; infatti l'idea che abbiamo sviluppato è quella di presentare quella parte di storia della matematica relativa alla risoluzione delle equazioni di secondo grado portata avanti dai grandi matematici arabi.

L'attività si concentrerà su due aspetti preponderanti: il docente avrà il compito di coinvolgere gli studenti trasmettendo loro gli aspetti più importanti del contesto storico designato, che saranno di fondamentale importanza per comprendere a fondo la natura dell'algebra moderna e nello specifico della teoria relativa alla risoluzione delle equazioni per radicali. Gli studenti invece dovranno svolgere a gruppi l'attività laboratoriale guidata, che oltre ai vari vantaggi d'apprendimento che verranno successivamente esposti, avrà anche lo scopo di trasmettere l'idea di quanto l'algebra

e la geometria, nonostante siano spesso viste dagli studenti come due discipline ben distinte e lontane fra loro, siano sempre state interpretate nel corso della storia, come un'unica disciplina; e questo legame (magari oggi meno evidente) è ancora presente.

Visti e considerati gli obiettivi appena discussi ho pensato che potesse essere molto più utile e stimolante sperimentare l'attività su una classe di studenti con un bagaglio di conoscenze matematiche non particolarmente ampio e con un'affezione nei confronti della matematica minore rispetto alla media; per questo motivo ho scelto una classe quarta di un Istituto Professionale. Nella scuola che ho scelto il livello degli studenti in matematica è particolarmente basso già al momento dell'iscrizione alla classe prima, e nonostante il monte ore di matematica sia di 4 ore settimanali per tutto il primo biennio e 3 ore settimanali per il restante triennio, la matematica ricopre comunque un ruolo marginale nell'idea degli studenti che possono quindi trarre più vantaggio, rispetto per esempio a studenti di un Liceo, da questa attività.

Target: Scuola Secondaria di secondo grado – Classe quarta dell'Istituto IPSAR – IPSEOA di Sassari

Tempistiche: ~ 2,5 ore

Topic: La risoluzione delle equazioni di secondo grado con i diversi metodi di Al Khwarizmi e Abu Kamil.

L'argomento generale esaminato all'interno delle Linee Guida per gli Istituti Professionali rientra fra le conoscenze relative al Primo Biennio, in particolare troviamo scritto:

Relazioni e Funzioni:

- Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi di equazioni e di disequazioni.

Geometria:

- Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione. Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. Le principali figure del piano e dello spazio.
- Il piano euclideo: relazioni tra rette, congruenza di figure, poligoni e loro proprietà. Circonferenza e cerchio. Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora

Per quanto riguarda invece le abilità è scritto:

Aritmetica e algebra:

- Padroneggiare l'uso della lettera come mero simbolo e come variabile; eseguire le operazioni con i polinomi; fattorizzare un polinomio.

Geometria:

- Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando la riga e il compasso e/o strumenti informatici.
- Conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area e volume delle principali figure geometriche del piano e dello spazio.
- Porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie. Comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive.

Relazioni e funzioni:

- Risolvere equazioni e disequazioni di primo e secondo grado; risolvere sistemi di equazioni e disequazioni.
- Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica.

Nello specifico verranno discussi i seguenti argomenti:

- La storia della matematica araba (800-900 d.C.), con riferimenti ad Euclide;
- Le equazioni di secondo grado risolte da Al-Khwarizmi;
- Le equazioni di secondo grado risolte da Abu Kamil;
- La dimostrazione della prop. II, 5 dal libro degli *Elementi* di Euclide;

Programmazione dell'attività: La prima parte dell'attività si concentrerà su una lezione frontale classica nella quale il docente parlerà del contesto storico entro il quale verterà l'attività.

In secondo luogo, gli studenti lavoreranno a coppie con GeoGebra e dovranno dimostrare, tramite un'attività guidata, la formula risolutiva di Al-Khwarizmi.

Dopodiché gli studenti dovranno dimostrare geometricamente la proposizione II, 5 di Euclide.

Infine, sarà il docente a spiegare l'utilità della proposizione rispetto alla risoluzione delle equazioni di secondo grado da parte di Abu Kamil.

Conclusa l'attività il docente raccoglierà dei feedback in formato anonimo dagli studenti per valutare l'efficacia didattica di quanto fatto.

3.2 Attività 1 – Il completamento del quadrato di Al Khwarizmi

Inizia la prima parte di lezione frontale

L'espansione geografica delle popolazioni arabe avvenuta fra il 600 e 700 d.C., dovuta prevalentemente alla crescita esponenziale dell'Islam con Maometto, fu tra le principali cause dello sviluppo culturale ed economico del Medio Oriente. Anche il commercio con India, Cina, Russia e gli stati del Mediterraneo ebbe sicuramente conseguenze più che positive.

Il crollo dei centri culturali e scientifici in Grecia coincide con la costante espansione delle scuole scientifiche in Siria, Mesopotamia e Iran; nelle quali si insegnano le scienze naturali, la filosofia, ma anche la matematica. In queste scuole venivano trasmesse e tradotte le grandi opere greche.

L'epicentro della cultura islamica fu sicuramente Baghdad, nella quale la dinastia abbaside trasferì buona parte delle scuole del Medio Oriente e istituì la Casa del Sapere (830), un'accademia nella quale si sviluppò in breve tempo interesse per le scienze naturali, l'astronomia e la matematica.

Lo studio e la traduzione di grandi opere come quelle di Euclide, Archimede e Diofanto portò un forte sviluppo della matematica nei paesi islamici; troviamo studi sull'algebra dei polinomi, la teoria delle equazioni di 2° e 3° grado, i postulati di Euclide e le costruzioni con riga e compasso, fino ad arrivare a vere e proprie rivoluzioni: fu infatti introdotto il sistema di numerazione posizionale in base 10, proprio quello che usiamo noi ancora oggi.

Fra i matematici più importanti del tempo non si può non menzionare Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, nato attorno al 780 d.C. nella zona del Khwarezm (oggi Uzbekistan), dal quale prende il nome.

Nelle sue opere più importanti, Al-Khwarizmi descrive le operazioni di calcolo principali e sulla moltiplicazione propone di imparare a memoria le tabelline dal 1*1 fino al 9*9; ancora oggi nelle scuole viene utilizzata questa modalità!

Fra i suoi più grandi contributi all'aritmetica non si può non menzionare il fatto che è stato lui il primo ad utilizzare la notazione posizionale in base 10, ancora oggi la più diffusa nel mondo.

I suoi studi sull'algebra sono noti soprattutto per i risultati ottenuti sulle equazioni di secondo grado. Al suo tempo non era ancora stata introdotta la notazione compatta con l'utilizzo dell'incognita x (che arriverà solo nel 1600 grazie a Cartesio) come la conosciamo oggi, ma le quantità presenti nelle equazioni erano chiamate proprio per nome:

- *Dirham* – Numero
- *Gizr* o *Say'* – Incognita (radice)
- *Mal* – Quadrato dell'incognita

Un altro fatto molto diverso da ciò che conosciamo oggi è che 1200 anni fa non esisteva la formula risolutiva per una generica equazione di secondo grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ come adesso; i matematici studiavano casi particolari di equazioni di secondo grado, e cercavano di trovare le formule risolutive caso per caso.

Questo dipese prevalentemente dal fatto che per secoli (fin dai Babilonesi, primi risolutori di equazioni) non venivano accettate soluzioni negative o nulle per le equazioni di secondo grado, e quindi si cercava sempre di considerare equazioni che avessero coefficienti positivi o nulli.

Al Khwarizmi decise di suddividere le equazioni di secondo grado in sei forme canoniche:

1. $ax^2 = bx$

3. $ax^2 + bx = c$

5. $bx + c = ax^2$

2. $ax^2 = c$

4. $ax^2 + c = bx$

6. $bx = c$

Il modo in cui gli arabi trovavano le formule risolutive per queste equazioni è molto affascinante e sorprendente; infatti la maggior parte dei loro ragionamenti era di tipo geometrico! Per esempio x^2 veniva interpretato come l'area di un quadrato di lato x , e i prodotti bx venivano interpretati come aree di rettangoli di dimensioni b e x .

Svolgimento della prima attività su GeoGebra

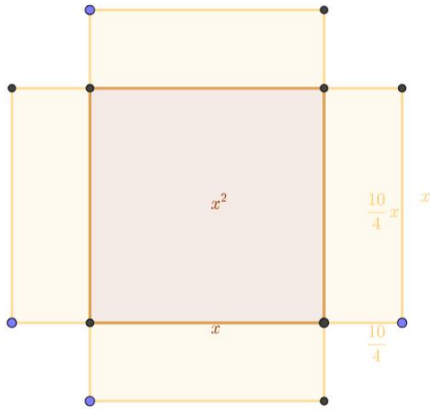
Agli studenti viene proposta un'equazione di secondo grado che ricade nella forma canonica 3 presentata sopra.

L'equazione è $x^2 + 10x = 39$.

Il metodo risolutivo utilizzato da Al Khwarizmi verrà presentato poi tramite un'attività guidata su GeoGebra che si svolgerà come segue. Lo studente che apre GeoGebra troverà questa schermata:

Attività 1. Il completamento del quadrato di Al Khwarizmi

$$x^2 + 10x = 39$$



Ragionando sul disegno: quanto vale la x ?

Aiuto: quanto valgono i 4 quadratini mancanti?

Clicca sull'immagine per andare all'attività

Nei fatti non c'è una vera e propria attività che si può svolgere su GeoGebra, ma questo software ci servirà solo per mostrare la figura utile alla risoluzione dell'esercizio.

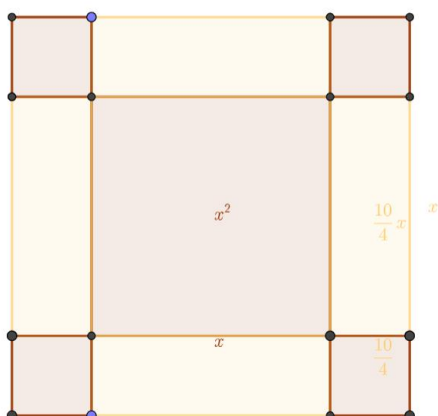
La consegna per gli studenti sarà proprio quella di risolvere l'equazione, ovvero trovare la x , senza utilizzare i classici metodi che si conoscono (cioè senza utilizzare formule risolutive) ma provando a ragionare sulla figura utilizzando competenze e metodologie geometriche per trovare, sostanzialmente, il lato di ampiezza x .

L'aiuto che viene suggerito dal testo della consegna può servire allo studente per completare la figura (completare il quadrato) aggiungendo i quattro quadratini mancanti di lato $\frac{10}{4}$.

L'attività mette a disposizione dello studente anche quattro quadratini già preimpostati, questo dovrebbe quantomeno favorire l'idea di spostarli negli spazi mancanti per completare il quadrato.

Attività 1. Il completamento del quadrato di Al Khwarizmi

$$x^2 + 10x = 39$$



Ragionando sul disegno: quanto vale la x ?
Aiuto: quanto valgono i 4 quadratini mancanti?

Una volta completato il quadrato, lo studente si può rendere facilmente conto che determinare la x vuol dire trovare quel segmento arancione, parte del lato del quadrato più esterno.

Immediatamente lo studente è pronto a determinare il lato del quadrato più esterno, al quale poi dovrà sottrarre i lati dei due quadratini sugli angoli, cioè $2 \cdot \frac{10}{4}$.

Trovare il lato del quadrato esterno è semplice perché si può estrarre la radice dell'area che è fondamentalmente $39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 39 + 25 = 64$.

Si ottiene quindi che il segmento x richiesto è $x = \sqrt{64} - 2 \cdot \frac{10}{4} = 8 - 5 = 3$.

Sarà ora il docente ad intervenire e chiedere agli studenti di generalizzare il procedimento appena fatto per un'equazione del tipo 3 qualsiasi, che può essere scritta come $x^2 + px = q$.

Basterà fare il parallelismo con ciò che si è appena fatto per trovare che ogni equazione del terzo tipo ha formula risolutiva $x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$.

3.3 Attività 2 – L'approccio geometrico di Abu Kamil

Secondo intervento del docente

Il secondo matematico di cui parleremo è Abu Kamil Shuja, nato intorno al 850 d.C. in Egitto, uno dei successori di Al Khwarizmi.

Sulla vita di Abu Kamil si hanno pochissime informazioni, ma gli storici della matematica conoscono le sue opere e per questo è considerato uno dei più grandi matematici della cultura islamica; continuò il lavoro iniziato da Al Khwarizmi sviluppando ulteriormente l'algebra delle equazioni e scrisse varie opere che furono di fondamentale importanza per la matematica del tempo e non solo.

Abu Kamil fu infatti uno dei principali punti di riferimento per le opere di Fibonacci, uno dei più grandi matematici del XIII secolo che studiò le opere più importanti della matematica islamica e le trasmise in Europa.

Se pensiamo ai motivi per i quali Abu Kamil viene ricordato con così tanta importanza non possiamo non citare il fatto che fu il primo matematico in assoluto a introdurre i coefficienti e soluzioni irrazionali nello studio delle equazioni di secondo grado.

Ma quello che più interessa a noi, per la comprensione di questa attività, è il modo in cui Abu Kamil tentava di risolvere le equazioni di secondo grado: infatti lui utilizzava alcune proposizioni degli *Elementi* di Euclide per risolvere geometricamente delle equazioni algebriche di secondo grado.

Nell'attività su GeoGebra vedremo come Abu Kamil risolse una tipologia di equazione di secondo grado:

$$x^2 + c = bx$$

Per questa equazione venne sfruttata la proposizione 5 del libro II degli *Elementi* di Euclide, che afferma che:

“Dato un segmento AB, il cui punto medio è C, preso un altro punto D su AB, si ha che $AD \cdot DB + CD^2 = AC^2$ ”.

Per osservare la proposizione da un punto di vista più geometrico potrebbe essere più utile riscriverla come $AD \cdot DB = AC^2 - CD^2$.

Svolgimento seconda attività su GeoGebra

In questa seconda attività il docente proporrà agli studenti di dimostrare la proposizione II, 5 degli *Elementi* di Euclide per via geometrica.

La costruzione che verrà eseguita su GeoGebra permetterà agli studenti non solo di mostrare l'uguaglianza proposta nell'enunciato, ma anche di mettere in evidenza come è possibile costruire un quadrato di lato x (la nostra incognita) semplicemente partendo da un segmento AB di ampiezza b , e un segmento CP di ampiezza c .

La consegna dell'attività è la seguente:

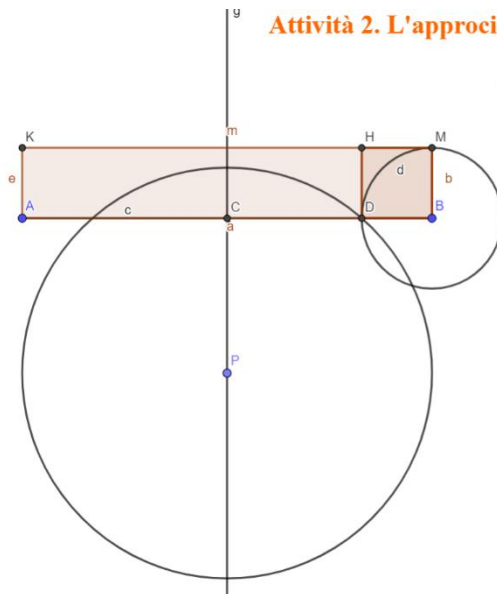
Consegna 1.

- *Tracciare un segmento AB e bisecarlo in C*
- *Abbassare da C una perpendicolare CP ad AB*
- *Tracciare una circonferenza di centro P e raggio $\frac{AB}{2}$ che
interseca AB in un punto D*
- *Tracciare il rettangolo $ABMK$ dove $BM=BD$*
- *Completare il quadrato $DBMH$*

Una volta completata la costruzione, lo studente dovrebbe visualizzare

su GeoGebra la seguente schermata:

Attività 2. L'approccio geometrico di Abu Kamil



$$x^2 + c = bx$$

$$AD * DB = AC^2 - CD^2$$

Consegna 1.

Tracciare un segmento AB e bisecarlo in C.

Abbassare da C una perpendicolare CP ad AB.

Tracciare una circonferenza di centro P e raggio $\frac{AB}{2}$ che interseca AB in D.

Tracciare il rettangolo ABMK dove BM=BD.

Si completi il quadrato DBMH.

Osserva:

AB può essere visto come b
 CP può essere visto come c
 BD è l'incognita x



Clicca sull'immagine per andare all'attività

Durante lo svolgimento della consegna il docente farà da guida ai gruppi di studenti, soprattutto per indirizzarli all'utilizzo delle giuste funzioni di GeoGebra, che comunque verranno precedentemente mostrate.

L'attività lascia anche un po' di libertà allo studente, ad esempio per lo sviluppo del penultimo punto, quando si deve costruire il rettangolo ABMK, è necessaria della creatività per capire come costruire il terzo vertice M a partire dal lato AB.

La costruzione finale da ottenere è proprio quella che si vede nell'immagine ma in realtà per dimostrare la proposizione bisogna confrontare delle aree: bisognerebbe di fatti determinare che l'area del rettangolo ADHK ($AD * DB$) sia uguale alla differenza fra l'area del quadrato di lato AC (AC^2) e l'area del quadrato di lato CD (CD^2).

Gli studenti dovranno quindi costruire il rettangolo e i due quadrati tramite le opportune funzioni GeoGebra.

Qua il docente mostrerà alla lavagna un possibile modo per dimostrare, per via geometrica, l'uguaglianza fra quelle aree; ma in realtà gli studenti saranno invitati ad utilizzare la funzione GeoGebra di area.

La schermata da visualizzare sarà la seguente:

Attività 2. L'approccio geometrico di Abu Kamil

$x^2 + c = bx$

$AD * DB = AC^2 - CD^2$

Conseguenza 1.

Tracciare un segmento AB e bisecarlo in C.

Abbassare da C una perpendicolare CP ad AB.


Tracciare una circonferenza di centro P e raggio $\frac{AB}{2}$ che interseca AB in D.

Tracciare il rettangolo ABMK dove BM=BD.

Si completi il quadrato DBMH.

Osserva:

AB può essere visto come b
 CP può essere visto come c
 BD è l'incognita x



Si può notare facilmente che sottraendo le aree dei due quadrati si ottiene quella del rettangolo.

Conclusione frontale del docente

Adesso che abbiamo dimostrato la proposizione II, 5 degli *Elementi* di Euclide dobbiamo capire come Abu Kamil decise di utilizzarla per determinare la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado proposta.

Questo in realtà è abbastanza semplice, basterà utilizzare le osservazioni proposte nell'attività GeoGebra e applicarle all'uguaglianza II, 5 per trovare un'uguaglianza dove è possibile isolare la x in funzione dei coefficienti b e c dell'equazione.

Vogliamo quindi riscrivere rispetto b , c e x l'uguaglianza $AD \cdot DB = AC^2 - CD^2$.

Sapendo che $AB = b$, $DB = x$ si ottiene che $AD = b - x$; inoltre dal disegno si ha

che $AC = \frac{b}{2}$ e $CD = \frac{b}{2} - x$.

Quindi sostituendo nell'uguaglianza iniziale si ottiene $(b - x)x = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 \rightarrow bx - x^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 \rightarrow c = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 \rightarrow \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \rightarrow \frac{b}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \rightarrow x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.

Con queste brevi attività abbiamo ripercorso alcuni passaggi storici molto importanti per lo sviluppo dell'algebra. La dimostrazione che abbiamo svolto assieme su GeoGebra mette in luce la forte relazione presente fra l'algebra e la geometria: è infatti uno stereotipo molto frequente, soprattutto fra gli studenti di scuola (e più in generale fra tutti i non matematici) quello di studiare la geometria e l'algebra come discipline senza alcun punto di contatto.

È molto importante cogliere un aspetto fondamentale dell'attività didattica svolta: le equazioni di secondo grado come le conosciamo oggi sono uno strumento molto utile e allo stesso tempo molto semplice da capire per come ci vengono insegnate a scuola; la formula risolutiva di un'equazione di secondo grado viene spesso presentata non

curandosi di organizzare una giusta introduzione sull'argomento; ma in realtà, come abbiamo potuto constatare insieme, per secoli i matematici che hanno studiato la teoria delle equazioni di secondo grado hanno affrontato il problema della loro risoluzione in maniera lenta e difficoltosa: prima risolvendo equazioni specifiche, poi suddividendo le equazioni in casi noti e trovando le formule risolutive per ognuno di essi.

Il procedimento risolutivo che fa uso del completamento del quadrato descritto da Al-Khwarismi è ancora oggi presente nei libri di testo in uso nelle scuole secondarie di secondo grado. Nel volume *Manuale di algebra* di Bergamini, Trifone, Barozzi (Zanichelli, 2004) la risoluzione di un'equazione completa di secondo grado viene così presentata:

3. LA RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE COMPLETA DI SECONDO GRADO

IL METODO DEL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

Risolviamo in \mathbb{R} l'equazione:

$$x^2 + 10x - 24 = 0.$$

Ricordiamo che il quadrato del binomio $(a + b)^2$ è uguale al trinomio $a^2 + 2ab + b^2$. Il trinomio $x^2 + 10x - 24$ non può dunque essere il quadrato di un binomio di quel tipo, a causa del segno $-$.

Vogliamo però trasformare l'equazione $x^2 + 10x - 24 = 0$ in una equivalente del tipo:

$$(x + \textcircled{?})^2 = k,$$

dove $\textcircled{?}$ e k rappresentano numeri reali. Questo renderà semplice trovare le soluzioni dell'equazione.

101 H*

Procediamo in questo modo.

- Isoliamo il termine noto:

$$x^2 + 10x = 24.$$

- Scriviamo $10x$ come doppio prodotto $2 \cdot (5) \cdot (x)$:

$$x^2 + 2 \cdot (5) \cdot (x) = 24.$$

- Il secondo termine del binomio che cerchiamo è dunque 5; aggiungiamo ai due membri il quadrato di 5:

$$x^2 + 2 \cdot (5) \cdot (x) + 5^2 = 24 + 5^2.$$

- Il trinomio $x^2 + 2 \cdot (5) \cdot (x) + 5^2$ è il quadrato del binomio $x + 5$; quindi possiamo scrivere:

$$(x + 5)^2 = 24 + 25 \rightarrow (x + 5)^2 = 49.$$

A questo punto possiamo ricavare due equazioni di primo grado:

$$(x + 5)^2 = 49 \begin{cases} x + 5 = \sqrt{49} & \rightarrow x + 5 = 7 & \rightarrow x_1 = 2 \\ x + 5 = -\sqrt{49} & \rightarrow x + 5 = -7 & \rightarrow x_2 = -12 \end{cases}$$

Completamento del quadrato e geometria

Il metodo del completamento del quadrato ha una facile interpretazione geometrica.

Consideriamo l'equazione:

$$x^2 + 10x - 24 = 0.$$

Se la scriviamo come $x^2 + 2(5x) = 24$, il termine x^2 può essere visto come area di un quadrato di lato x , e il termine $2(5x)$ come area di due rettangoli di lati x e 5 (figura a). L'equazione ci dice che la somma delle aree del quadrato e dei rettangoli misura 24.

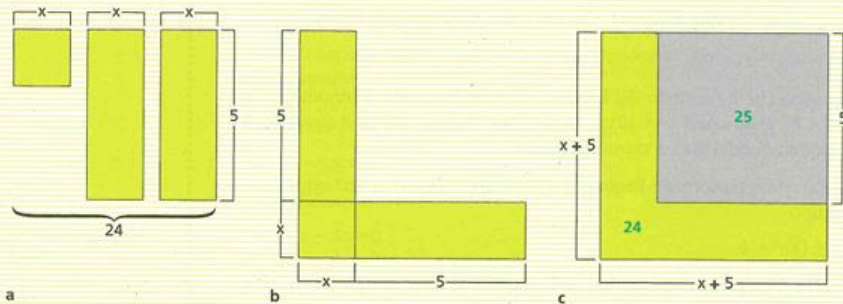
Se avviciniamo il quadrato e i rettangoli come nella figura b, possiamo poi aggiungere un quadrato di lato 5 (figura c) per «completare» un nuovo quadrato.

Il lato del quadrato grande è $x + 5$ e l'area misura $24 + 25 = 49$ (l'area iniziale sommata all'area del quadrato aggiunto).

Il lato del quadrato grande, $x + 5$, si ottiene estraendo la radice quadrata dell'area, quindi $x + 5 = \sqrt{49} = 7$, e quindi $x = 2$.

Questo metodo di risoluzione geometrica venne utilizzato per la prima volta, a quanto ne sappiamo, dal matematico arabo Al-Khuwarizmi, circa nell'800 d.C.

Esso non porta alla seconda soluzione dell'equazione (quella negativa), in quanto non è possibile pensare a un quadrato di area con misura negativa.



Applichiamo ora il metodo del completamento del quadrato per cercare le soluzioni nel caso generale:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0).$$

- Portiamo a secondo membro il termine noto:

$$ax^2 + bx = -c.$$

- Dividiamo tutti i termini per a (che abbiamo supposto $\neq 0$):

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

- Scriviamo il termine $\frac{b}{a}x$ come doppio prodotto:

$$\frac{b}{a}x = 2(x) \frac{b}{2a}$$

$$x^2 + 2(x) \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}.$$

- Aggiungiamo ai due membri il termine $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, completando così il quadrato:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

- Il trinomio del primo membro è il quadrato del binomio $x + \frac{b}{2a}$; quindi:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \text{ossia} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

L'espressione al primo membro è un quadrato; quindi è sempre positiva o nulla. Affinché l'equazione ammetta soluzioni reali, anche la frazione al secondo membro deve essere non negativa.

Poiché il denominatore della frazione è sempre positivo, il numeratore deve essere non negativo, cioè deve essere $b^2 - 4ac \geq 0$.

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, possiamo estrarre la radice quadrata:

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

viene detta **formula risolutiva** dell'equazione di secondo grado.

Le soluzioni dell'equazione sono:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

■ La formula risolutiva è valida anche per le equazioni incomplete. Consigliamo però di usarla solo per le equazioni

L'idea sviluppata in questo libro è, a mio avviso, molto buona. La formula risolutiva per una generica equazione di secondo grado viene ricavata utilizzando il metodo del completamento del quadrato e si fa riferimento anche alla storia di Al Khwarizmi e al suo metodo di risoluzione. Questo modo di presentare l'argomento è abbastanza completo e ricco di deduzioni logiche che portano alla formula risolutiva.

Una possibile critica che si potrebbe muovere potrebbe derivare dal fatto che il metodo di Al Khwarizmi viene presentato solo da un punto di vista puramente matematico, senza fare riferimenti più approfonditi alla storia delle equazioni di secondo grado di quel tempo; per esempio poteva essere discusso come a quei tempi la risoluzione di equazioni era prettamente geometrica proprio perché quest'ultime rappresentavano sempre problemi reali di misurazioni; oppure che, come i Babilonesi, gli arabi risolvevano le equazioni di secondo grado suddivise in diversi casi perché non concepivano soluzioni e/o coefficienti negativi.

3.4 Considerazioni dopo la sperimentazione in aula

L'attività è stata svolta nel laboratorio di informatica utilizzato solitamente dalla classe, così che tutti gli studenti potessero avere il loro computer per poter utilizzare GeoGebra.

Gli studenti presenti durante l'attività erano 9, e sono stati suddivisi in tre gruppi da 2 e un gruppo da 3. Ho cercato di mettere nello stesso gruppo studenti che avessero circa lo stesso livello di matematica (ho chiesto loro di autovalutarsi attribuendosi un valore da 1 a 3 che potesse rappresentare la loro competenza in matematica) in modo tale da non avere lo studente esperto che lavora per tutto il gruppo in autonomia.

Nonostante la classe fosse una quarta il livello in matematica era comunque molto basso, e questo probabilmente ha inciso anche solo sull'approccio che ogni studente ha adottato nello svolgimento dell'attività; tutti sono partiti con il presupposto di non avere le capacità per riuscire a svolgere le consegne proposte.

La prima attività su Al Khwarizmi ha evidenziato più problematiche del previsto, con buona parte degli studenti che non riusciva a interpretare in maniera corretta la consegna; sono serviti un po' di aiuti per permettere a tutti di procedere e ultimare il conto finale. Un fatto curioso è che ci sono stati 4 studenti (tutti e 4 si sono autovalutati come poveri di conoscenze matematiche, quindi "livello 1") che in realtà hanno compreso subito l'attività e l'hanno svolta abbastanza rapidamente, anche rispetto ad altri loro compagni (tra i quali alcuni di "livello 2").

La seconda attività, su Abu Kamil, ha subito portato a galla le varie lacune sull'utilizzo di GeoGebra, quindi ho preferito proiettare sulla LIM la mia schermata GeoGebra, così da seguire tutti contemporaneamente ed accompagnarli alla risoluzione della consegna. Da tenere in considerazione c'è sicuramente il fatto che, nonostante sia stato complesso per me trasmettere l'idea che effettuare le costruzioni delle consegne significasse dimostrare la proposizione, ci sono stati alcuni studenti che hanno compreso il senso profondo dell'attività, apprezzandone sia l'aspetto pratico di costruzioni geometriche con GeoGebra, sia l'aspetto più formale di essere riusciti a dimostrare la proposizione.

Analizziamo ora i risultati del questionario e cerchiamo di interpretarli.

La prima cosa che è possibile osservare dai risultati del questionario, con riferimento al Grafico 2 e Grafico 4, è la poca autostima degli studenti. È comprensibile che in un Istituto Professionale ci sia un livello mediamente basso in matematica, ma nonostante sia stato fatto presente a tutti gli studenti che l'attività poteva essere compresa e svolta senza particolari requisiti, se non qualcuno di base, loro si sono approcciati all'attività in maniera negativa; probabilmente questo dipende da un luogo comune molto presente soprattutto nelle scuole all'interno delle quali la matematica è ritenuta marginale dagli studenti, ovvero che "la matematica è difficile".

Questo approccio negativo si osserva anche nel Grafico 12 e Grafico 14, sulle domande relative a come gli studenti pensano di aver svolto l'attività e quanto hanno appreso da essa: nessuno si è sbilanciato sul "Decisamente Sì" né sul "Decisamente no".

Nella realtà dei fatti l'attività è stata svolta mediamente bene da tutti i gruppi, e infatti qualcuno lo ha espresso nel sondaggio; ma è sorprendente il fatto che circa la metà degli studenti dichiara di non aver svolto correttamente l'attività: questo dipende probabilmente dal fatto che molti di loro non si sentono adatti ad affrontare problemi di matematica, e non riescono ad accettare di aver completato positivamente l'attività neanche dopo che il docente ha messo in evidenza la buona riuscita generale del

compito. Anche in questo caso però, nessuno studente si è mai sbilanciato, ed è probabilmente questo il dato più importante, che ci induce a pensare che effettivamente nessuno pensa di aver “fallito” ma nemmeno accetta di essere andato bene o di aver compreso l’attività.

Analizziamo adesso i risultati forse più importanti del questionario, ovvero quelli relativi all’utilizzo di GeoGebra e all’introduzione della storia della matematica.

Innanzitutto, con riferimento a Grafico 1, Grafico 3 e Grafico 16, è importante mettere in evidenza che tutti gli studenti o quasi hanno concluso l’attività con un ricordo positivo di quanto quest’ultima sia stata utile e/o interessante; questo ci dà delle piccole conferme sulle analisi fatte nei capitoli 1 e 2 rispetto alle molteplici utilità sia degli ambienti di apprendimento digitali, sia dell’introduzione della storia della matematica per l’insegnamento della matematica stessa. Questo fatto è messo bene in evidenza anche leggendo i Grafico 5, Grafico 6 e Grafico 7.

In particolare, nella parte di risposta aperta della Domanda 2, uno studente ha scritto “L’attività è stata difficile perché è difficile la matematica”. È interessante dal mio punto di vista inserire questa risposta nel contesto analizzato sopra: lo studente attribuisce a qualsiasi attività collegata alla matematica una difficoltà intrinseca che lo porterà ad incontrare degli ostacoli. Questo fatto è una delle più grandi mancanze dell’insegnamento della matematica: una disciplina che dovrebbe trasmettere

sicurezza e metodo per la risoluzione di problemi, si trasforma automaticamente in un dispensatore di ansia e stress nell'affrontare i problemi stessi.

Un aspetto molto positivo però è che lo stesso studente ha risposto anche alla Domanda 3 scrivendo “Mi ha interessato molto la storia dei matematici arabi” a dimostrazione di come la storia può servire sia per avvicinare gli studenti alla matematica, sia per trasmettere curiosità nei confronti di altre discipline.

Guardando il Grafico 10 si osserva una cosa molto interessante, gli studenti si distribuiscono circa uniformemente fra chi vorrebbe utilizzare più spesso delle introduzioni storiche in matematica e chi non. Questo fatto è probabilmente dovuto ai diversi interessi degli studenti: coloro che hanno già un brutto rapporto con la storia, o non ne apprezzano l'insegnamento in classe, probabilmente preferiscono non ascoltare delle introduzioni storiche anche in altre discipline. Anche il Grafico 17 ci dà informazioni su questo: infatti solo 1 studente su 9 vorrebbe più inquadramento storico nell'insegnamento della matematica.

Nella Domanda 13 lo stesso studente citato prima ha espresso “Ho imparato che la geometria e l'algebra sono due discipline collegate”. Questa risposta è di fondamentale importanza proprio perché uno degli obiettivi dell'attività era proprio quello di far sì che gli studenti si rendessero conto che le equazioni di secondo grado, argomento tipicamente studiato in algebra, si potevano interpretare anche da un

punto di vista geometrico; il fatto che uno studente lo abbia notato e abbia voluto scriverlo è un grande risultato.

Altri studenti nella stessa domanda hanno scritto di aver imparato ad usare GeoGebra, e considerando il successo generale che l'utilizzo di GeoGebra ha avuto fra gli studenti, è bene osservare che qualcuno abbia anche imparato qualcosa su come utilizzarlo.

Dal Grafico 14 e Grafico 15, relativi alle due domande più profonde del questionario, vengono fuori dei risultati molto positivi: 6 studenti su 9 pensano di aver capito meglio l'argomento delle equazioni di secondo grado; che considerando quanto l'attività sia stata alternativa e originale per loro, è un bene che la maggior parte si sia resa conto dell'utilità di quest'ultima rispetto all'argomento trattato. Sempre 6 studenti su 9 pensano che l'attività sia stata utile a capire meglio cosa sia la matematica: anche in questo senso fortunatamente l'attività ha avuto un riscontro molto positivo probabilmente dovuto all'introduzione storica che ha mostrato agli studenti l'evoluzione della matematica nei secoli e le connessioni fra algebra e geometria.

Analizzando il Grafico 17 invece troviamo che la maggior parte degli studenti vorrebbe che si desse più attenzione alle relazioni con le altre discipline e alle applicazioni tecnologiche e anche all'aspetto formale e pratico.

Per quanto riguarda le relazioni con le altre discipline e le applicazioni tecnologiche, questo potrebbe essere causato dalla parte di attività svolta al computer: tutti gli studenti hanno trovato piacevole ed utile lavorare al computer su GeoGebra. Invece per quanto riguarda l'aspetto formale e pratico: questa richiesta probabilmente è dovuta al fatto che in un Istituto Professionale il peso che viene dato alla matematica non è sufficiente e molti studenti si sentono privi di conoscenze di base o comunque senza la preparazione adeguata. Probabilmente in altre tipologie di scuole come nei licei o anche in alcuni istituti tecnici pochi studenti avrebbero chiesto più importanza all'aspetto formale e teorico della matematica (già abbastanza trattato in queste scuole); ma in questo caso è perfettamente comprensibile.

Appendice 1

Questionario di valutazione dell'attività

Il presente questionario (anonimo) ha l'utilità di raccogliere dati sull'efficacia dell'attività proposta con l'obiettivo di comprendere gli aspetti positivi e negativi di quest'ultima dal punto di vista degli studenti.

L'attività proposta si è rivelata utile? Motiva nella riga sotto cosa è stato/non è stato utile.

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Hai trovato l'attività difficile? Elenca i punti che ti hanno messo più in difficoltà.

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Hai trovato l'attività interessante o curiosa? Scrivi cosa ti ha interessato in particolare.

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

La tua preparazione scolastica è stata sufficiente per seguire l'attività?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Hai trovato piacevole lavorare in gruppo?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Hai trovato piacevole lavorare su GeoGebra?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Hai trovato piacevoli gli interventi storici del docente?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Il materiale fornito dal docente (consegne e attività) era chiaro?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Il docente è stato chiaro nell'esposizione?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Pensi che sarebbe utile utilizzare più spesso delle introduzioni storiche in matematica?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Pensi che sarebbe utile utilizzare più spesso software didattici come GeoGebra?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Credi di aver svolto in maniera corretta l'attività?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Credi di aver imparato qualcosa dall'attività? Scrivi cosa hai imparato.

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Credi di aver compreso meglio l'argomento trattato nell'attività?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

La attività svolta è stata utile per capire meglio COSA è la matematica?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Sei generalmente soddisfatto dell'attività svolta?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si

Vorrei che nell'insegnamento della matematica si desse maggiore attenzione

(indicare al massimo 3 opzioni)

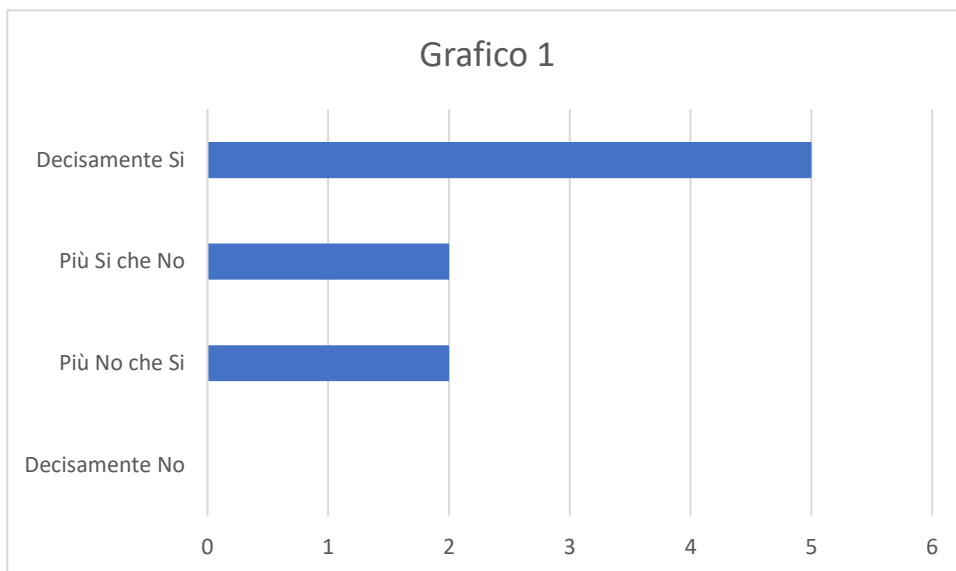
- all'aspetto sperimentale e pratico
- all'aspetto formale e teorico
- all'inquadramento storico

- alle scoperte più recenti
- alle relazioni con le altre discipline ed alle applicazioni tecnologiche
- alle implicazioni nella vita quotidiana

Appendice 2

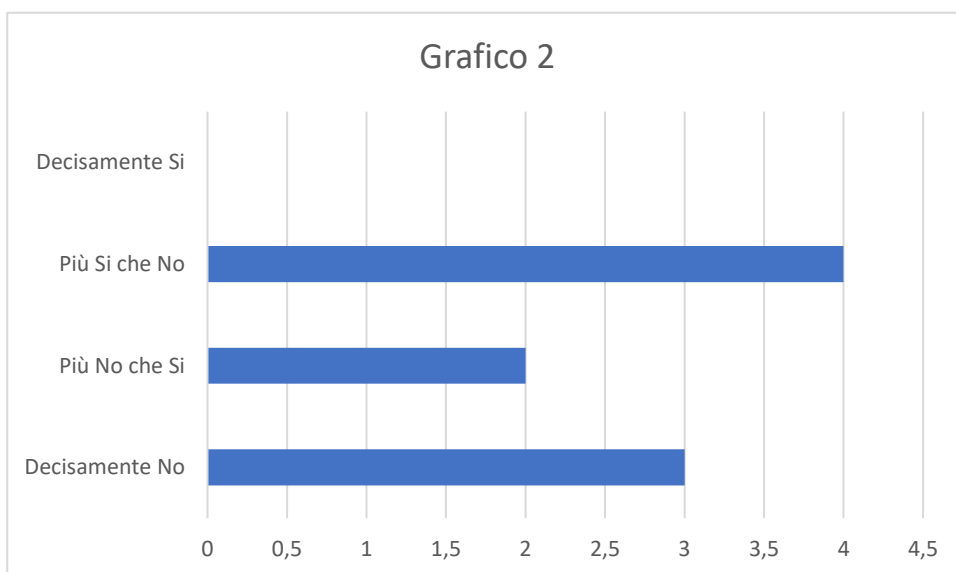
- 1. L'attività proposta si è rivelata utile? Motiva nella riga sotto cosa è stato/non è stato utile.**

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



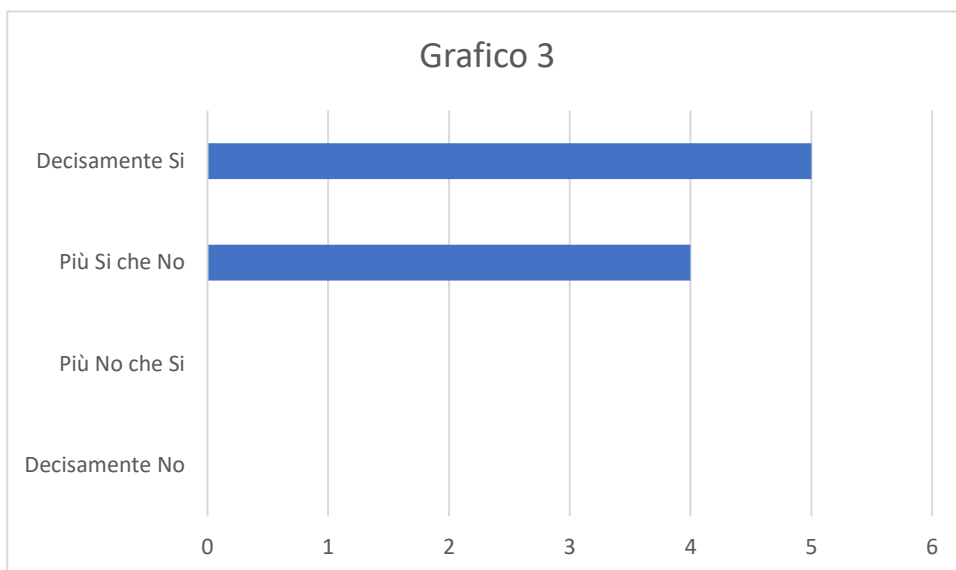
- 2. Hai trovato l'attività difficile? Elenca i punti che ti hanno messo più in difficoltà.**

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



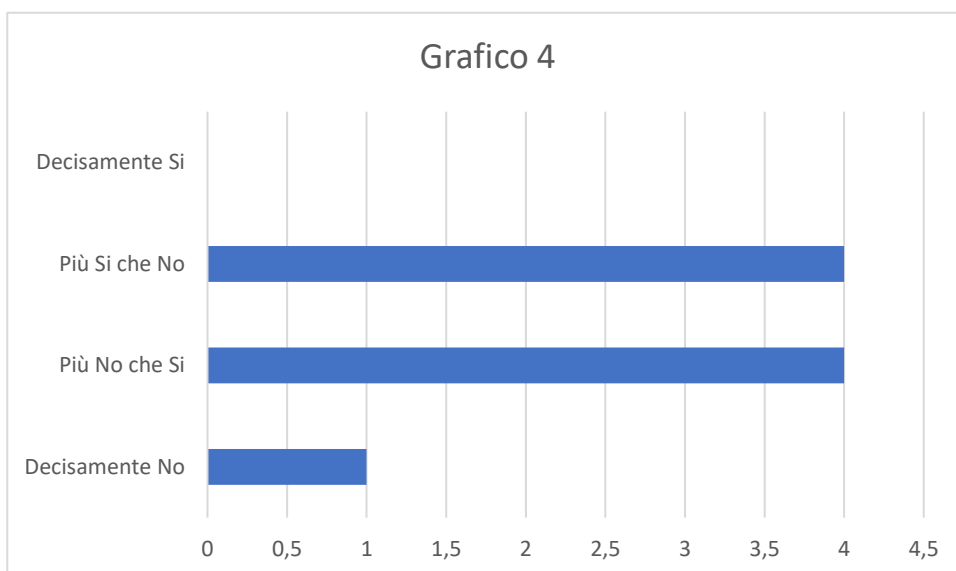
3. Hai trovato l'attività interessante o curiosa? Scrivi cosa ti ha interessato in particolare.

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



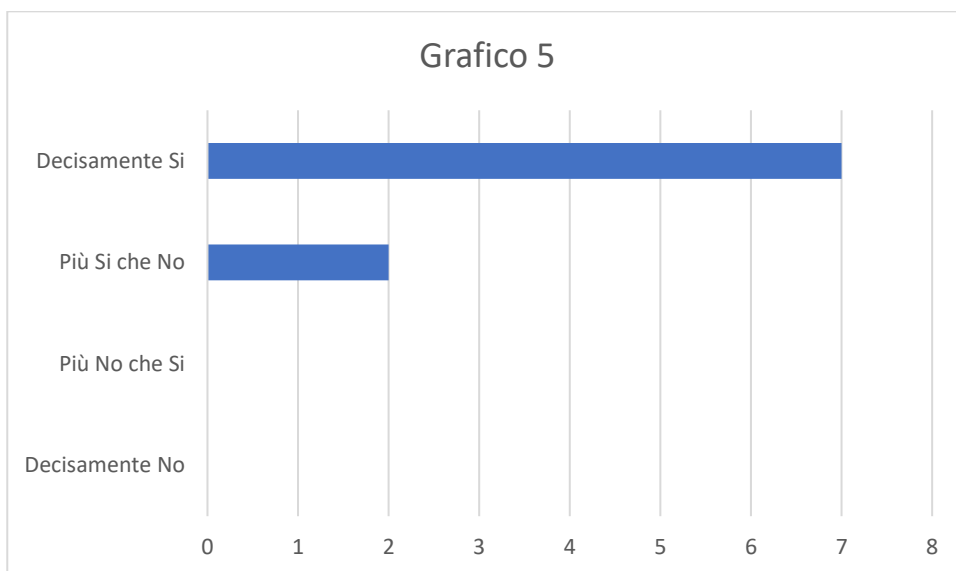
4. La tua preparazione scolastica è stata sufficiente per seguire l'attività?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



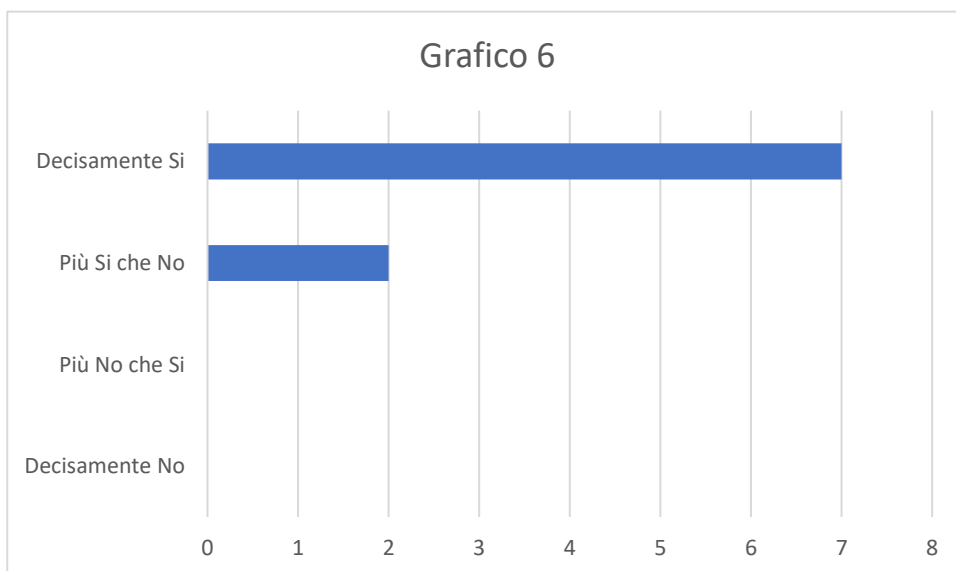
5. Hai trovato piacevole lavorare in gruppo?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



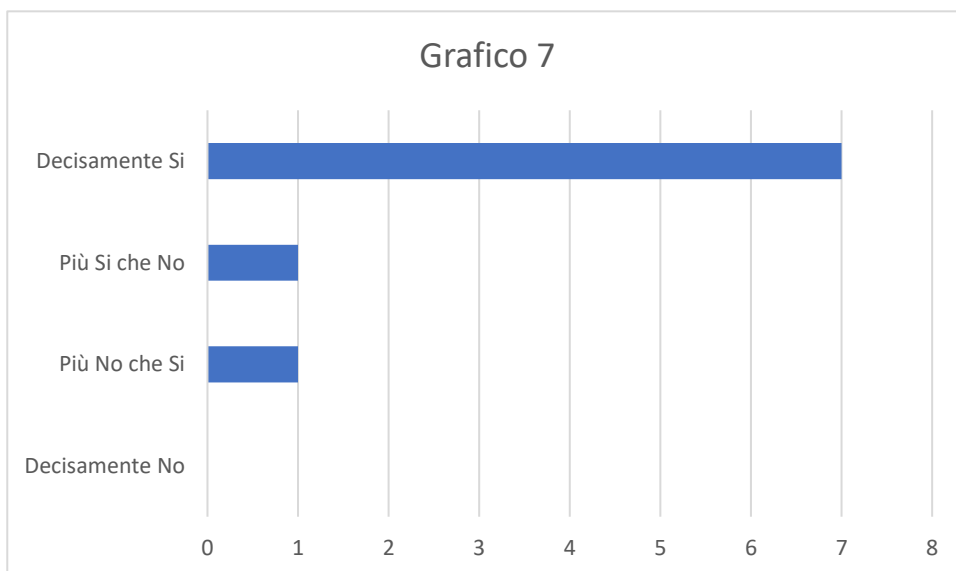
6. Hai trovato piacevole lavorare su GeoGebra?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



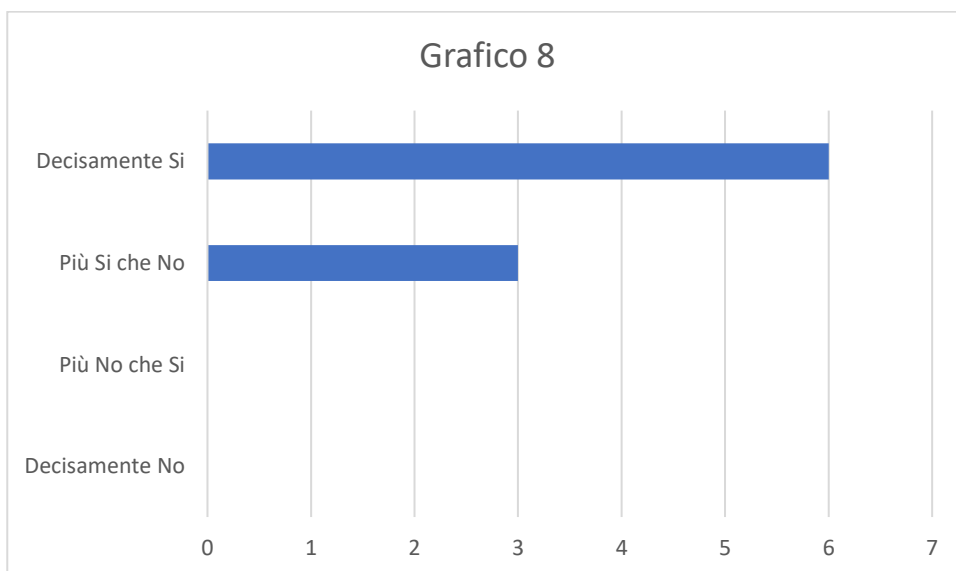
7. Hai trovato piacevoli gli interventi storici del docente?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



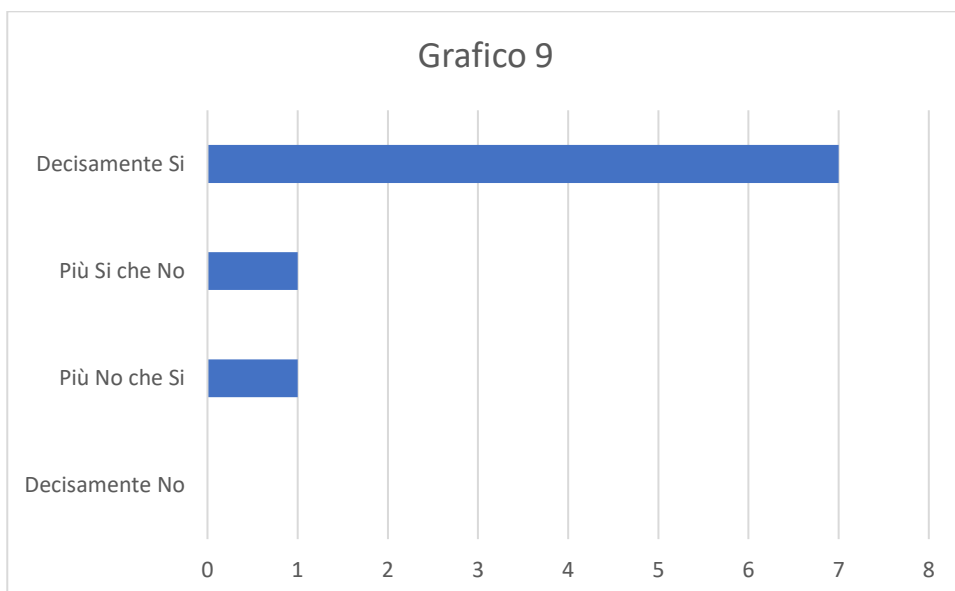
8. Il materiale fornito dal docente (consegne e attività) era chiaro?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



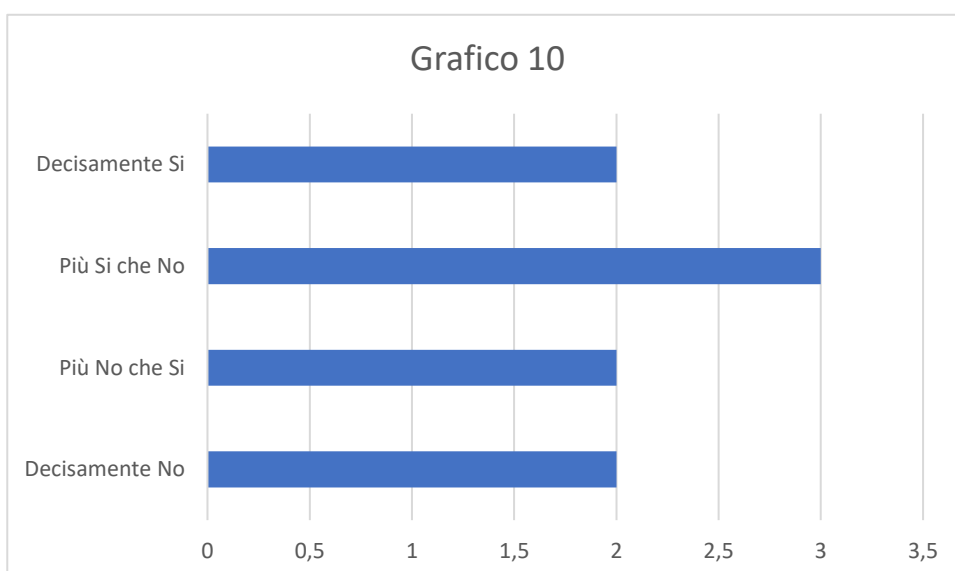
9. Il docente è stato chiaro nell'esposizione?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



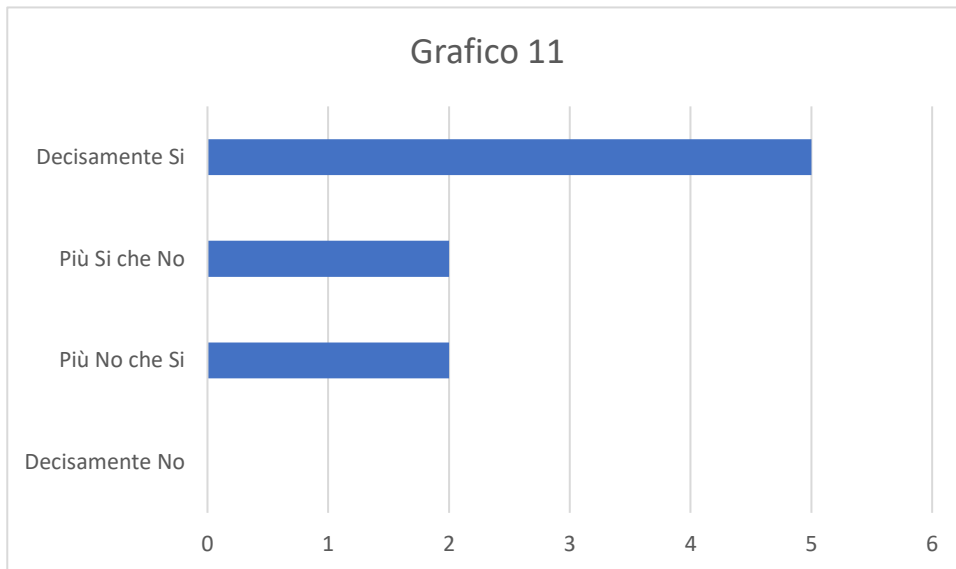
10. Pensi che sarebbe utile utilizzare più spesso delle introduzioni storiche in matematica?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



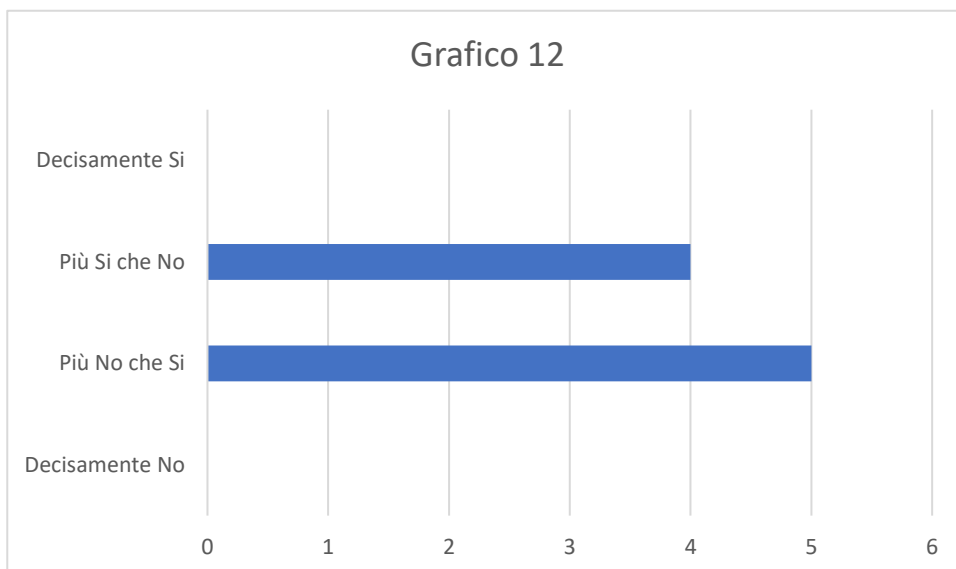
11. Pensi che sarebbe utile utilizzare più spesso software didattici come GeoGebra?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



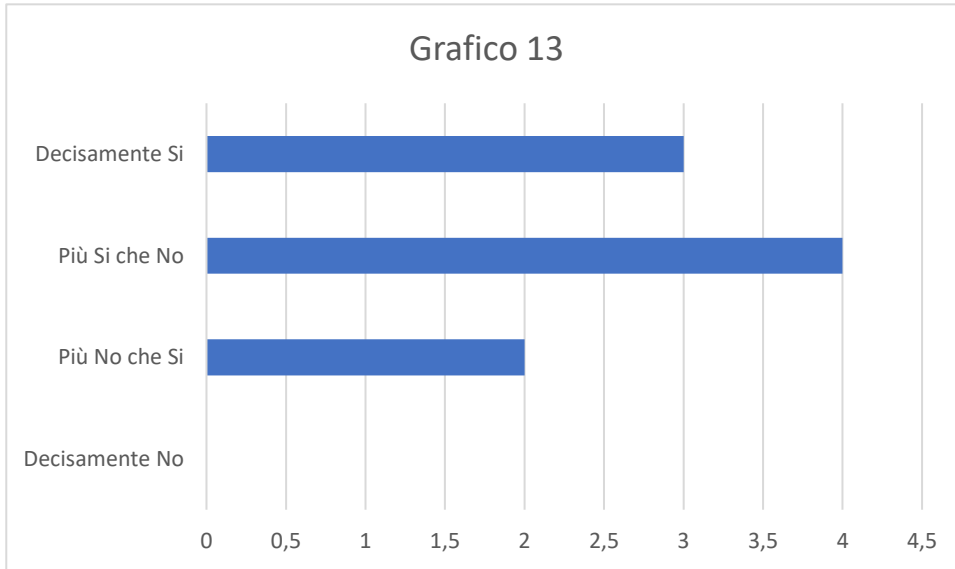
12. Credi di aver svolto in maniera corretta l'attività?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



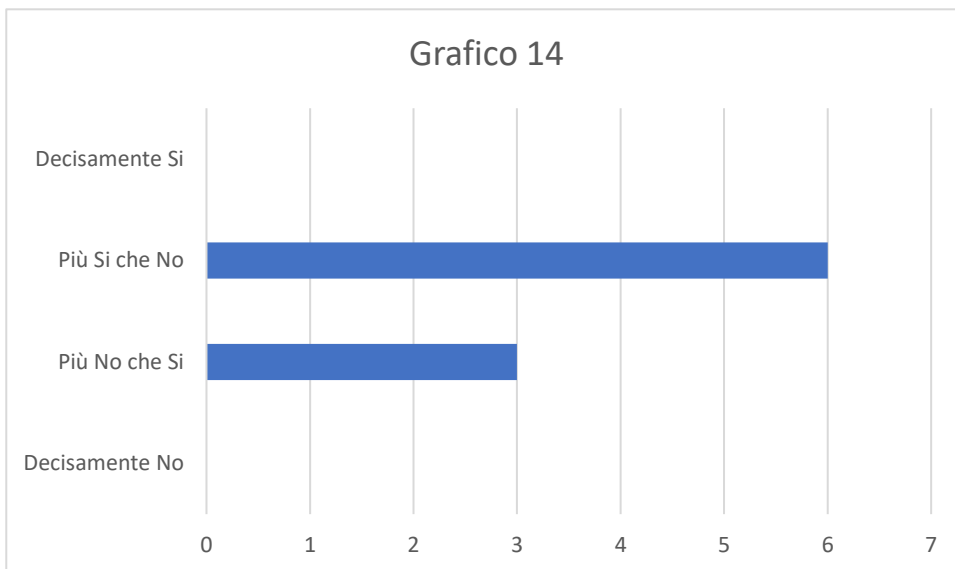
13. Credi di aver imparato qualcosa dall'attività? Scrivi cosa hai imparato.

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



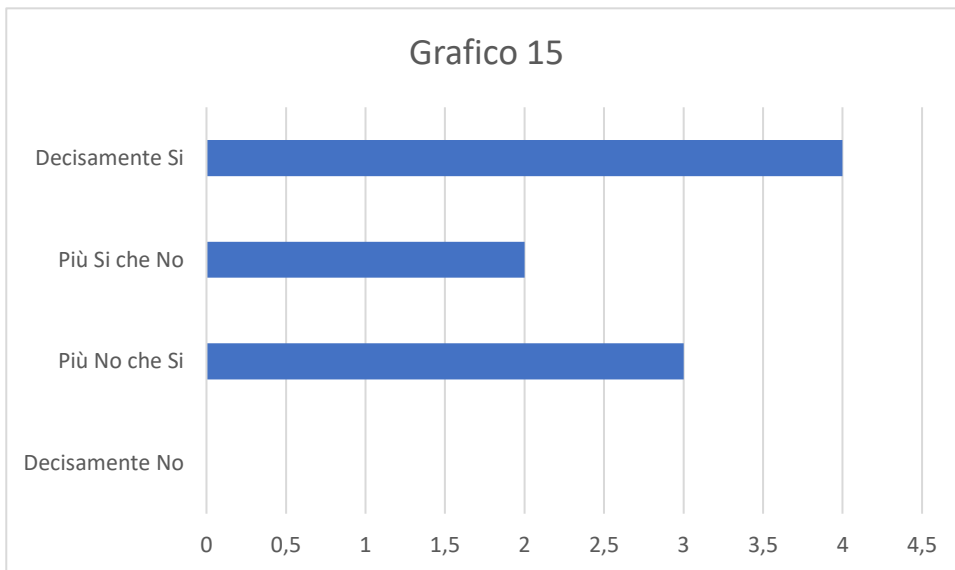
14. Credi di aver compreso meglio l'argomento trattato nell'attività?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



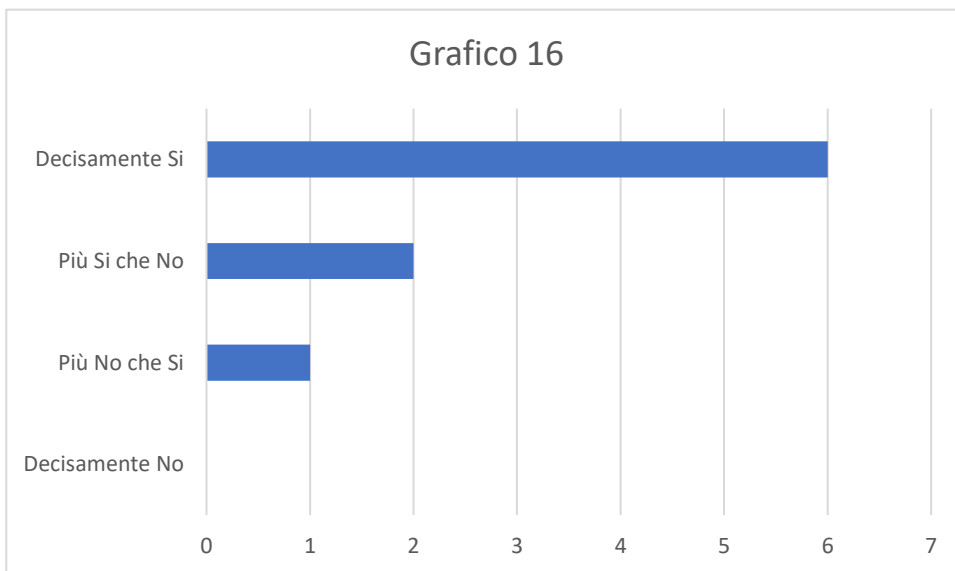
15. La attività svolta è stata utile per capire meglio COSA è la matematica?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



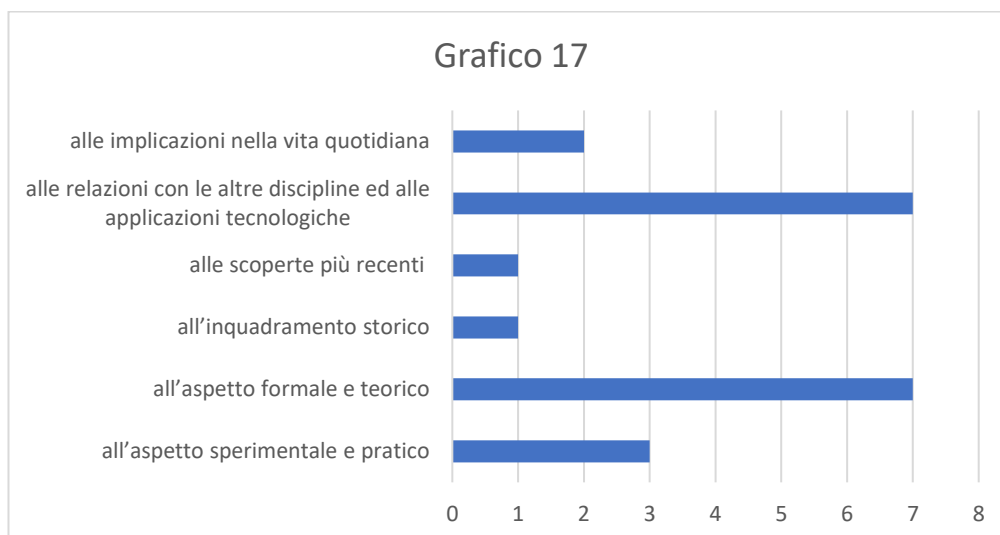
16. Sei generalmente soddisfatto dell'attività svolta?

Decisamente No Più No che Si Più Si che No Decisamente Si



17. Vorrei che nell'insegnamento della matematica si desse maggiore attenzione (indicare al massimo 3 opzioni)

- all'aspetto sperimentale e pratico
- all'aspetto formale e teorico
- all'inquadramento storico
- alle scoperte più recenti
- alle relazioni con le altre discipline ed alle applicazioni tecnologiche
- alle implicazioni nella vita quotidiana



Bibliografia

Baccaglioni Frank, Anna. *Didattica Della Matematica*. Milano Firenze: Mondadori

Università, 2018. Print.

Abu Kamil Shuja—*Biography*. (s.d.). Maths History. Recuperato 2 ottobre 2023,

da https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abu_Kamil/

Al-Khwarizmi—*Biography*. (s.d.). Maths History. Recuperato 3 ottobre 2023, da

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/>

Bottino, R. M., & Chiappini, G. (1998). Tecnologia e innovazione nella didattica della matematica. *Italian Journal of Educational Technology*, 6(1), Articolo

1. <https://doi.org/10.17471/2499-4324/634>

Chiappini, G. (2007). Didattica della matematica e ICT. *Italian Journal of*

Educational Technology, 15(2), Articolo 2. [https://doi.org/10.17471/2499-](https://doi.org/10.17471/2499-4324/368)

[4324/368](https://doi.org/10.17471/2499-4324/368)

Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in

mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM –*

Mathematics Education, 54(7), 1407–1420.

<https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7>

Costruzionismo (teoria dell'apprendimento). (2023). In *Wikipedia*.

[https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Costruzionismo_\(teoria_dell%2](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Costruzionismo_(teoria_dell%27apprendimento)&oldid=134927434)

[7apprendimento\)&oldid=134927434](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Costruzionismo_(teoria_dell%27apprendimento)&oldid=134927434)

Equazione di secondo grado. (2023). In *Wikipedia*.

[https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Equazione_di_secondo_grado&](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Equazione_di_secondo_grado&oldid=136551340#Storia)

[oldid=136551340#Storia](https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Equazione_di_secondo_grado&oldid=136551340#Storia)

Euclid—Biography. (s.d.). Maths History. Recuperato 2 ottobre 2023, da

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/>

Ferreira, R. A. T. (2001). *Integrating history of mathematics into the mathematics classroom*. 10.

GeoGebra. (2022). In *Wikipedia*.

<https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=GeoGebra&oldid=127411522>

Il trascinarsi di mantenimento nella formulazione di congetture in ambienti di geometria dinamica. (s.d.). Recuperato 22 agosto 2023, da

<https://iris.uniroma1.it/handle/11573/787822>

Integrale. (2023). In *Wikipedia*.

<https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Integrale&oldid=135050925#Storia>

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>

La matematica del mondo islamico. (s.d.). Recuperato 3 ottobre 2023, da

https://www.arab.it/islam/la_matematica_del_mondo_islamico.htm

LIBRO II - prop 5. (s.d.). Recuperato 30 settembre 2023, da

<https://www.scienzaatscuola.it/euclide/prop2-5.html>

LIBRO II - prop 6. (s.d.). Recuperato 30 settembre 2023, da

<https://www.scienzaatscuola.it/euclide/prop2-6.html>

Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics*

Education, 14(2), 163–185.

<https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282>

Mariotti, M. A., Laborde, C., & Falcade, R. (s.d.). *FUNCTION AND GRAPH IN DGS ENVIRONMENT*.

Quadratic formula. (2023). In *Wikipedia*.

https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quadratic_formula&oldid=1179948986#Historical_development

Seymour Papert. (2023). In *Wikipedia*.

https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Seymour_Papert&oldid=134312982

