

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Teoria dei Grafi e Polinomio Cromatico

Tesi di Laurea in Teoria dei Grafi

Relatrice:
Prof.ssa
Alessia Cattabriga

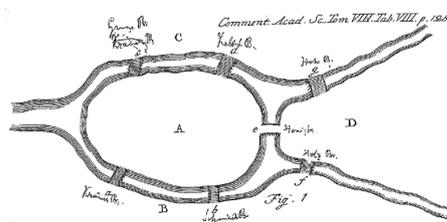
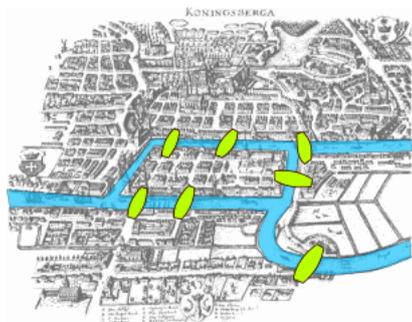
Presentata da:
Fabio Gaddoni

Anno Accademico 2022/2023

*A Milo, Clara, famiglia e amici
a meno di permutazioni*

Introduzione

Il termine grafo viene utilizzato per la prima volta nel 1736, anno in cui Eulero pubblica “Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis”, testo in cui veniva risolto il famoso “Problema dei sette ponti di Königsberg”. Il problema consiste nel sapere se sia possibile effettuare una passeggiata per la città prussiana di Königsberg che attraversi ogni ponte una ed una sola volta. Per rispondere, Eulero schematizzò il problema tramite una serie di nodi e di archi, ricorrendo ad una struttura che egli, per la prima volta, chiamò grafo. Eulero sostituì ogni area urbana delimitata dal fiume con un nodo e ogni ponte con un arco. La situazione iniziale è mostrata in Figura 1 e il grafo ottenuto in Figura 2.



(a) I sette ponti della città (la figura è presa da [11]). (b) La mappa disegnata da Eulero (la figura è presa da [5]).

Figura 1: I sette ponti di Königsberg.

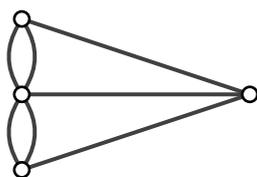


Figura 2: Il problema dei sette ponti di Königsberg tradotto in un grafo.

Egli osservò che ogni area, che non sia punto di inizio o fine della passeggiata, deve necessariamente essere attraversata sia in entrata che in uscita e, poiché i ponti possono essere usati solo una volta, ciò è possibile solo se queste sono toccate da un numero pari di ponti. Inoltre, se la passeggiata inizia e finisce nella stessa area, anche quest'ultima deve avere un numero pari di ponti. Se, invece, inizio e fine sono distinti, le due aree devono avere un numero dispari di ponti ed essere per quanto osservato sulle zone di passaggio, le uniche con tale caratteristica. Utilizzando un linguaggio più tecnico (si veda il Capitolo 1), si può riassumere questo fatto dicendo che è possibile percorrere un grafo in questo modo se e solo se i vertici hanno tutti grado pari oppure quelli con grado dispari sono esattamente due. Osservando la Figura 2 è facile, a questo punto, affermare che una tale passeggiata non è possibile.

Un secolo più tardi, venne presentato un altro problema estremamente importante per lo sviluppo della teoria dei grafi. È il 1852 quando Francis Guthrie, studente dell'University College di Londra, si accorse che per colorare una mappa delle contee britanniche bastavano quattro colori. Anche questo problema può essere affrontato ricorrendo all'utilizzo di un grafo¹, rappresentando ogni regione con un nodo e l'adiacenza tra due regioni con un arco. La cosiddetta "Congettura dei quattro colori" verrà dimostrata, grazie all'utilizzo del computer, solo nel 1976 da Happel e Aken e, sebbene non sia oggetto della nostra trattazione, ci permette di anticipare l'argomento su cui quest'ultima poggia: la colorazione dei vertici di un grafo (si veda Capitolo 2).

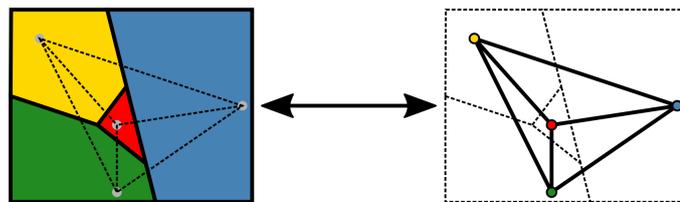


Figura 3: Grafo associato ad una mappa. Ad ogni regione si associa un nodo e se due regioni sono adiacenti si collegano i nodi con un arco (la figura è presa da [10]).

¹I grafi di questo tipo si chiamano planari e non sono oggetto del seguente studio.

La teoria dei grafi è dunque basata su oggetti semplici che sono, almeno in un primo momento, di facile intuizione anche per tutti coloro, per così dire, non addetti ai lavori. Il fascino, personalmente, risiede nel fatto che da ciò si sviluppi poi una teoria molto vasta, profonda e grazie ai passi avanti compiuti nella seconda metà del secolo scorso, anche di forte impatto applicativo. Questa trattazione intende essere uno studio di base volto a far conoscere e indagare uno dei tanti aspetti della teoria: la colorazione dei vertici ed in particolare il polinomio cromatico di un grafo, che costituisce il cuore dello studio.

Nel Capitolo 1 si introducono le basi della teoria dei grafi. L'intento è quello di non rinunciare a presentare gli aspetti basilari più noti, ponendo però l'attenzione, in particolare, a ciò che risulta indispensabile conoscere al meglio per poter proseguire nella comprensione.

Nel Capitolo 2 si presenta la colorazione dei vertici. Essa costituisce un caso della più generale colorazione dei grafi ed è l'unica che studieremo. Anche qui, l'interesse è volto a fornire gli strumenti necessari per giungere allo studio di uno dei suoi aspetti più importanti: il polinomio cromatico.

Nel Capitolo 3 si presenta il cuore di questa trattazione: il polinomio cromatico. Si parte dalle sue definizioni (ne daremo più di una), si studia come calcolarlo per alcuni casi base sino a giungere ad un algoritmo utile nel caso di un grafo qualsiasi. Infine si studia la forma di tali polinomi e ci si concentra sulle proprietà di un grafo che sono deducibili dal suo polinomio cromatico e viceversa.

Indice

Introduzione	i
1 Teoria dei grafi	1
1.1 Alcuni prerequisiti	1
1.2 Definizioni e terminologia	2
1.3 Invarianti	7
1.4 Grafi noti	10
2 Colorazione di un grafo	15
2.1 Prime definizioni	15
2.2 Limitazioni del numero cromatico	16
2.3 Algoritmo per la determinazione del numero cromatico	20
3 Polinomio cromatico	23
3.1 Definizione	23
3.2 Calcolo del polinomio	25
3.2.1 Per grafi noti	25
3.2.2 Un metodo per il caso generale	27
3.3 Proprietà del polinomio cromatico	31
3.4 Proprietà deducibili dal polinomio cromatico	34
3.4.1 Equivalenza e unicità cromatica	35
Bibliografia	38

Elenco delle figure

1	I sette ponti di Königsberg.	i
2	Il problema dei sette ponti di Königsberg tradotto in un grafo.	i
3	Grafo associato ad una mappa. Ad ogni regione si associa un nodo e se due regioni sono adiacenti si collegano i nodi con un arco (la figura è presa da [10]).	ii
1.1	Ambiguità grafica. Non è chiaro se ciò che è rappresentato sia un unico grafo, due raffigurazioni differenti dello stesso o due grafi distinti.	1
1.2	Un esempio di multi-grafo orientato. Le frecce rappresentano il verso degli archi, e.g. l'arco corrispondente all'elemento (v_1, v_2) ha origine in v_1 e arrivo in v_2	3
1.3	Un grafo e le sue matrici di incidenza $M(G)$ e adiacenza $A(G)$	6
1.4	Rappresentazioni diverse dello stesso grafo.	7
1.5	Stessa rappresentazione di grafi diversi.	8
1.6	Rappresentazione più comune di un grafo.	9
1.7	Grafi con stesso ordine e dimensione ma non isomorfi.	9
1.8	Grafi con tre invarianti uguali, ma non isomorfi.	10
1.9	Grafo completo K_5	11
1.10	Alcuni esempi di grafi ciclo.	11
1.11	Gli alberi con 6 vertici.	12
2.1	Colorazioni distinte di K_3	16
2.2	La figura di sinistra si riferisce all'Osservazione 2.15, quella di destra all'Osservazione 2.16 della prova del Teorema di Brooks.	19
2.3	Le 3-colorazioni del grafo G	21
2.4	Le 3-colorazioni di $G.uv$ (prima riga) e $G + uv$ (seconda riga).	21
2.5	Applicazione dell'algoritmo basato sul principio di connessione e contrazione per il grafo C_4 . Esso genera quattro grafi completi K_4 , K_3 (due volte) e K_2	22

3.1	Polinomi cromatici di tutti e soli i grafi con 3 vertici. Si riportano anche le rispettive χ -colorazioni. Si osservi che χ corrisponde al più piccolo intero positivo che non sia una radice di $P(G, k)$ e il polinomio valutato in χ restituisce il numero delle χ -colorazioni (la figura è presa da [9]).	26
3.2	Iterazioni della formula di delezione e contrazione per il grafo C_4 sino al termine dell'algoritmo. I passaggi sono da riferire ai polinomi cromatici dei grafi rappresentati.	29
3.3	Iterazioni della formula di delezione e contrazione sul grafo H dell'Esempio 3.18 applicate in modo efficiente.	30
3.4	Tutte le diciotto 3-colorazioni del grafo H	30
3.5	Polinomio cromatico del grafo H di Figura 3.3. Esso mostra anche che $\chi(H) = 3$ e $P(H, 3) = p(H, 3) = 18$	31
3.6	Il ciclo C_r e i rami T_j del grafo G nella seconda parte della dimostrazione del Teorema 3.32.	38

Capitolo 1

Teoria dei grafi

In questo capitolo si introducono le basi della teoria dei grafi. L'intento è quello di non rinunciare a presentare gli aspetti basilari più noti, ponendo però l'attenzione, in particolare, a ciò che risulta indispensabile conoscere al meglio per poter proseguire nella comprensione (quanto riportato è tratto da [1, 4, 6]).

Un grafo è una struttura che può essere visualizzata in modo molto intuitivo come un insieme di punti che possono essere collegati o meno tra loro. Per comodità, si raffigurano solitamente i punti come piccoli cerchi e i collegamenti tra di loro come segmenti di retta o (se necessario) linee curve. Tuttavia, aldilà dell'ovvia difficoltà di trattare in questo modo grafi molto "grandi", la rappresentazione grafica porta con sé altri limiti e risulta indispensabile fornire definizioni rigorose per potersi addentrare nello studio. Non possiamo dire, ad esempio, se, in Figura 1.1, siano raffigurati due grafi differenti, due disegni differenti dello stesso grafo o un unico grafo.

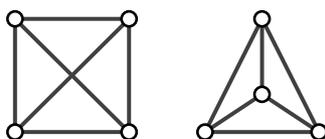


Figura 1.1: *Ambiguità grafica. Non è chiaro se ciò che è rappresentato sia un unico grafo, due raffigurazioni differenti dello stesso o due grafi distinti.*

1.1 Alcuni prerequisiti

Per definire rigorosamente un grafo è opportuno ricordare brevemente alcuni concetti di teoria degli insiemi.

Definizione 1.1. *Dati due insiemi A e B , si chiama prodotto cartesiano tra A e B , l'insieme:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Il prodotto cartesiano $A \times A$ si denota anche con A^2 .

Definizione 1.2. *Una relazione binaria su A è un sottoinsieme R di $A \times A$. Se $(x, y) \in R$ si scrive xRy .*

Definizione 1.3. *Una relazione di equivalenza su A è una relazione binaria, generalmente indicata col simbolo \sim , che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, ossia vale:*

1. $a \sim a \quad \forall a \in A$,
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a \quad \forall a, b \in A$,
3. $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c \quad \forall a, b, c \in A$.

Il sottoinsieme di A costituito da tutti e soli gli elementi equivalenti a un qualche elemento a prende il nome di classe di equivalenza di a e si indica con $[a]$. L'insieme delle classi di equivalenza di A si chiama insieme quoziente e si indica solitamente con A/\sim . Si dimostra che esso costituisce una partizione di A .

Definizione 1.4. *Un multi-insieme è una coppia $M = (A, m)$, ove A è un insieme, detto supporto del multi-insieme, e $m : A \rightarrow \mathbb{N}$ un'applicazione che associa ad ogni elemento $a \in A$ un naturale¹ che rappresenta quante volte quell'elemento è ripetuto in M . In altre parole, esso è un modo per formalizzare il concetto di insieme che può contenere elementi ripetuti. Si può rappresentare M come $\{(a, m(a)) : a \in A\}$.*

Esempio 1.5. Una lista di elementi del tipo a, a, a, b, b, c può essere formalizzata come multi-insieme $M = (A, m)$ con $A = \{a, b, c\}$ e $m(a) = 3$, $m(b) = 2$ e $m(c) = 1$. Si scrive anche $M = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$.

1.2 Definizioni e terminologia

Definizione 1.6. *Un multi-grafo orientato $G=(V,E)$ è una coppia ordinata definita da:*

1. *un insieme finito² V , detto insieme dei vertici (o nodi, o punti);*

¹Assumiamo che \mathbb{N} non contenga 0.

²Non trattiamo il caso infinito.

2. un multi-insieme E , detto insieme degli archi (o lati, o spigoli), il cui supporto è un sottoinsieme di V^2 .

In caso di ambiguità di notazione, ci si riferisce agli insiemi sopra definiti con $V(G)$ e $E(G)$.

Esempio 1.7. Considerando l'insieme $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e il multi-insieme $E = \{((v_1, v_1), 1), ((v_1, v_2), 1), ((v_3, v_2), 2)\}$, il multi-grafo orientato $G = (V, E)$ può essere rappresentato come in Figura 1.2.

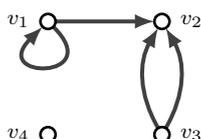


Figura 1.2: Un esempio di multi-grafo orientato. Le frecce rappresentano il verso degli archi, e.g. l'arco corrispondente all'elemento (v_1, v_2) ha origine in v_1 e arrivo in v_2 .

Definizione 1.8. Due vertici u e v connessi da un arco (u, v) si dicono estremi dell'arco; il vertice u si chiama testa dell'arco mentre v coda. Si dice anche che l'arco (u, v) è incidente in u e in v . Due vertici come u e v , inoltre, si dicono adiacenti; viceversa, si dicono adiacenti due archi con almeno un estremo in comune.

Definizione 1.9. Un arco e tale che $e = (u, u)$ si dice cappio.

Definizione 1.10. Un vertice che non ha archi in esso incidenti si dice isolato.

Definizione 1.11. Due o più archi che hanno la stessa coppia di vertici come estremi si dicono archi multipli.

Il caso del multi-grafo orientato è utile per comprendere la maggior parte delle caratteristiche basilari che si possono attribuire in generale ad un grafo. Tuttavia questa tipologia non sarà oggetto della nostra trattazione e a tal proposito vediamo di definire opportunamente ciò di cui ci occuperemo.

Definizione 1.12. Chiamiamo grafo un multi-grafo che non presenta archi multipli, ossia tale per cui ogni coppia di vertici adiacenti è collegata da un solo arco.

Definizione 1.13. Un grafo (o un multi-grafo) si dice non orientato se non è rilevante il verso degli archi, ossia se la scrittura (u, v) per un arco tra i vertici u e v è equivalente alla scrittura (v, u) .

Osservazione 1.14. Gli archi di un grafo (o multi-grafo) non orientato sono raffigurati privi di frecce.

Definizione 1.15. *Un grafo non orientato e privo di cappi si dice semplice.*

Quest'ultima definizione è cruciale per la nostra trattazione poiché riguarda la tipologia di grafi su cui esclusivamente lavoreremo. A tal proposito si propone una definizione rigorosa che caratterizza esclusivamente i grafi semplici. Per farlo, definiamo l'insieme

$$[V]^2 := (V^2 \setminus \Delta V) / \sim,$$

dove $\Delta V := \{(v, v) : v \in V\}$ e \sim indica la relazione di equivalenza su $V^2 \setminus \Delta V$ tale che:

$$(u_1, u_2) \sim (v_1, v_2) \Leftrightarrow (u_1, u_2) = (v_1, v_2) \vee u_1 = v_2 \wedge u_2 = v_1.$$

In altre parole, stiamo identificando gli archi (u, v) e (v, u) ed escludendo la presenza di cappi.

Definizione 1.16. *Un grafo semplice $G = (V, E)$ è una coppia ordinata definita da:*

1. *un insieme finito V , detto insieme dei vertici (o nodi, o punti);*
2. *un insieme $E \subseteq [V]^2$, detto insieme degli archi (o lati, o spigoli).*

Come già detto, in caso di ambiguità, denotiamo gli insiemi con $V(G)$ e $E(G)$.

Osservazione 1.17. L'insieme dei vertici è solitamente indicato come un insieme del tipo $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e per indicare un generico vertice di G si usa la notazione $v \in V$ o, talvolta, più direttamente, $v \in G$. Per indicare un arco tra i vertici u e v si usa la notazione $uv := (u, v)$. Si noti che $uv \equiv vu$. Per riferirsi ad un generico arco, si scrive $e \in E$, o, analogamente a sopra, $e \in G$.

Esempio 1.18. Gli insiemi $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4, v_2v_3\}$ definiscono un grafo semplice G . In Figura 1.1 sono mostrate due sue possibili rappresentazioni grafiche.

Procediamo a questo punto riportando altre definizioni fondamentali e lo facciamo tenendo presente che l'oggetto della nostra trattazione saranno esclusivamente i grafi semplici. Per semplicità di notazione ometteremo d'ora in poi il termine "semplice".

Osservazione 1.19. Le definizioni seguenti non sono esclusive dei grafi semplici. Molte valgono identiche per i casi più generali, altre necessitano semplicemente di piccoli accorgimenti. Ci riconduciamo già al caso di nostro interesse per dare più ordine e coerenza con la trattazione.

Definizione 1.20. Dato un grafo $G = (V, E)$, la cardinalità dell'insieme V è chiamata ordine di G e si indica con $|V|$ o con $\dim V$. La cardinalità di E è chiamata dimensione di G e si indica con $|E|$ o $\dim E$.

Definizione 1.21. Il grado di un vertice v in G , indicato con $d_G(v)$ o con $d(v)$ quando non vi è ambiguità, è il numero di archi incidenti in esso o, equivalentemente, il numero di vertici ad esso adiacenti. Si indicano rispettivamente con $\delta(G)$ e $\Delta(G)$, il grado minimo e quello massimo tra i gradi dei vertici di G . Se tutti i vertici di G hanno lo stesso grado k , si dice che G è k -regolare o semplicemente regolare.

Osservazione 1.22. Sia n l'ordine di G . Poiché in tal caso un vertice non può essere adiacente a più di $n - 1$ vertici, vale sempre:

$$\Delta(G) \leq n - 1.$$

Proposizione 1.23. Sia $G = (V, E)$ un grafo, allora:

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v).$$

Dimostrazione. Ogni arco ha due vertici adiacenti ed è perciò contato nel grado di entrambi. Da ciò segue immediatamente la tesi. \square

Proposizione 1.24. Il numero di vertici di grado dispari è sempre pari.

Dimostrazione. Suddividiamo V in V_p e V_d , rispettivamente l'insieme dei vertici di grado pari e di grado dispari. Dalla proposizione precedente segue che, poiché $|E|$ è intero, $\sum_{v \in V} d(v)$ è pari. Ora, scrivendo:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_p} d(v) + \sum_{v \in V_d} d(v),$$

poiché il primo addendo è pari, deve esserlo anche il secondo e ciò è possibile solo se $|V_d|$ è pari. \square

Definizione 1.25. Sia $G = (V, E)$ un grafo e $u, v \in V$. Si dice cammino³ di lunghezza n tra u e v in G una sequenza (v_0, \dots, v_n) di vertici distinti tali che $v_0 = u$, $v_n = v$ e $v_i v_{i+1} \in E$, per ogni $i \in \{0, \dots, n - 1\}$.

Osservazione 1.26. I vertici di un cammino di lunghezza n sono $n + 1$.

³In alcuni testi un cammino con i vertici tutti distinti è chiamato cammino elementare oppure percorso. Noi useremo semplicemente cammino.

Osservazione 1.27. Ad una lista ordinata di vertici adiacenti corrisponde una lista ordinata di archi. Si può intendere un cammino di lunghezza n anche come una sequenza $(v_0v_1, \dots, v_{n-1}v_n)$ di n archi. Per tale motivo aggiungere opportunamente ad un cammino un vertice oppure un arco è equivalente.

Definizione 1.28. Si dice ciclo un cammino che ha lo stesso vertice di inizio e di fine.

Definizione 1.29. Siano $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ grafi. Se $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$, il grafo H si dice sottografo di G . Dato $W \subseteq V$, il sottografo di G indotto da W è

$$G[W] = (W, E \cap [W]^2).$$

Definizione 1.30. Un grafo $G = (V, E)$ si dice connesso se per ogni coppia di vertici u, v , esiste un cammino tra u e v . Una componente connessa di G è un sottografo indotto $H = G[W]$ tale che H è connesso ma $G[X]$ non lo è, per ogni X con $W \subsetneq X \subseteq V$. Un grafo non connesso è detto disconnesso.

Osservazione 1.31. Si possono definire la connessione e le componenti anche osservando che la relazione: “ $u \sim v$ se esiste un cammino tra u e v ” è una relazione di equivalenza su $V(G)$. Le componenti connesse di G sono i sottografi indotti $G[W]$, con W classe di equivalenza di $V(G)$ e G è connesso se e solo se ha un’unica componente connessa.

Definizione 1.32. Dato un grafo $G=(V,E)$, ad esso si possono associare:

1. una matrice $M(G) = [m_{ij}]$, di dimensione $|V| \times |E|$, detta matrice di incidenza, ove m_{ij} indica il numero di volte in cui e_j è incidente con v_i ;
2. una matrice $A(G) = [a_{ij}]$, di dimensione $|V| \times |V|$, detta matrice di adiacenza, ove a_{ij} è il numero di archi tra v_i e v_j .

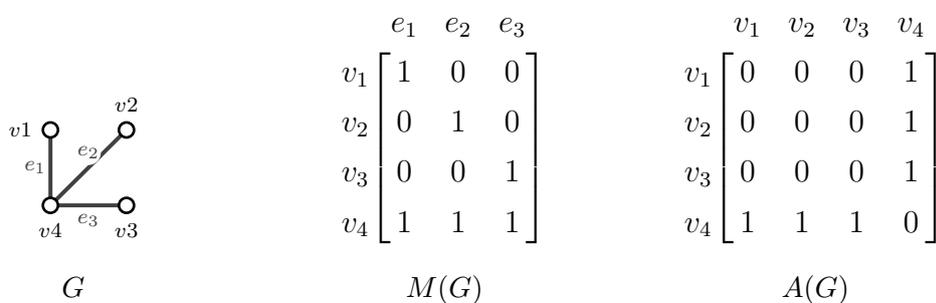


Figura 1.3: Un grafo e le sue matrici di incidenza $M(G)$ e adiacenza $A(G)$.

Esempio 1.33. In Figura 1.3, si riportano un grafo e le sue matrici di incidenza e adiacenza. Si noti che non hanno necessariamente stessa dimensione e che le matrici di adiacenza sono simmetriche e a diagonale nulla. Queste, inoltre, sono solitamente utilizzate per memorizzare i grafi nei calcolatori.

1.3 Invarianti

Quanto fino ad ora introdotto sul grafo, come volevamo, prescinde e permette di prescindere dalla sua rappresentazione grafica. Appare chiaro, arrivati a questo punto, che per riferirsi ad un grafo, sia sufficiente riportare l'insieme V dei suoi vertici e l'insieme E degli archi. Questa scrittura però, sebbene definisca in modo rigoroso un grafo, non è detto permetta di lavorare in modo comodo su altri aspetti che introdurremo nel seguito. Perciò, se per definire un grafo non è necessario disegnarlo, questo si rivela comunque molto utile per facilitarne lo studio ed è uso, quando possibile, farlo. A tal proposito è importante fare un ulteriore passo per chiarire del tutto le ambiguità che ancora possono esserci.

Abbiamo già visto nell'Esempio 1.18 che la rappresentazione di uno stesso grafo non è unica. Per chiarire ulteriormente questo concetto, consideriamo un grafo $G = (V, E)$ definito dagli insiemi $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E = \{v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_2v_5, v_4v_5\}$. In Figura 1.4 sono riportate due rappresentazioni differenti, entrambe corrispondenti al grafo G , come si può facilmente osservare.

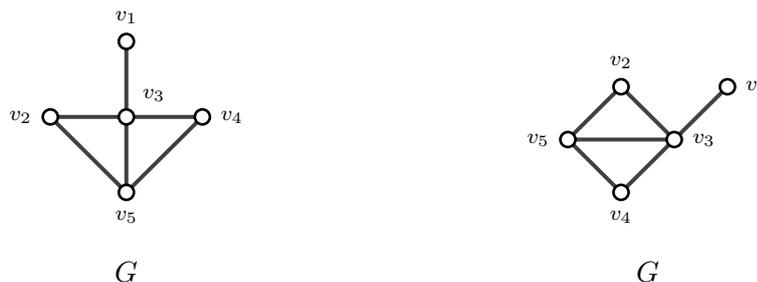


Figura 1.4: *Rappresentazioni diverse dello stesso grafo.*

Siano ora $F = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5\}$ e $W = V$ gli insiemi degli archi e dei vertici del grafo $H = (W, F)$. Poiché $F \neq E$, possiamo ritenere che i grafi G e H siano diversi. Tuttavia, raffigurando il grafo H come in Figura 1.5, otteniamo una rappresentazione uguale a quella grafo G . Dunque, ciò che viene spontaneo chiedersi, è se questi due grafi siano davvero differenti oppure no. Per rispondere, introduciamo il concetto di grafi isomorfi e invarianti di un grafo.



Figura 1.5: *Stessa rappresentazione di grafi diversi.*

Definizione 1.34. *Siano $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ grafi. Essi si dicono isomorfi se esiste un'applicazione biunivoca $f : V \rightarrow W$ tale che $uv \in E$ se e solo se $f(u)f(v) \in F$. La mappa f è detta isomorfismo tra G e H e si scrive $G \cong H$.*

Definizione 1.35. *Si chiamano invarianti (per isomorfismo) le proprietà che devono necessariamente mantenersi tra grafi isomorfi. Il mantenimento di tali proprietà è, in altre parole, una condizione necessaria affinché due grafi siano isomorfi ma, in generale, non è sufficiente.*

Riprendendo i due grafi riportati in Figura 1.5 e considerando l'applicazione $f : V \rightarrow W$ tale che $f(v_1) = v_4$, $f(v_2) = v_3$, $f(v_3) = v_1$, $f(v_4) = v_5$ e $f(v_5) = v_2$, si osserva facilmente che questa rispetta la definizione di isomorfismo appena data. Dunque G e H , precedentemente introdotti come grafi diversi, sono in realtà grafi isomorfi. In altre parole, H è semplicemente ottenuto da G permutando il nome dei vertici (e degli archi) e per tale motivo i due grafi sono sostanzialmente lo stesso. Più rigorosamente, si dice che i due grafi sono uguali a meno di isomorfismo o, anche, che appartengono alla stessa classe di equivalenza per isomorfismo⁴. Da ciò deriva il fatto che possono essere rappresentati con la stessa struttura e per questo, a meno di necessità particolari, un grafo G si rappresenta solitamente senza etichette sui vertici o sui lati e tale rappresentazione vale per tutti i grafi isomorfi a esso.

Esempio 1.36. I grafi G e H delle Figure 1.4 e 1.5 possono semplicemente essere rappresentati come in Figura 1.6.

Abbiamo visto dunque come il concetto di grafi uguali o diversi possa essere poco chiaro; più significativo è invece parlare di grafi isomorfi o non isomorfi e per fare questo spostiamo l'interesse allo studio degli invarianti.

Osservazione 1.37. È facile osservare che l'ordine e la dimensione di un grafo sono invarianti. Tuttavia, sapere che $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ sono grafi con $|V| = |W|$ e

⁴Si osserva facilmente che la relazione di isomorfismo tra grafi è una relazione di equivalenza.

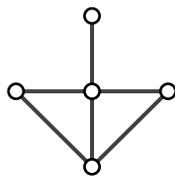


Figura 1.6: *Rappresentazione più comune di un grafo.*

$|E| = |F|$, non è sufficiente in generale per concludere se siano isomorfi o meno. I grafi riportati in Figura 1.7 hanno stesso numero di vertici e di archi ma non sono isomorfi poiché, per definizione, l'isomorfismo è un'applicazione che rispetta le adiacenze tra vertici. Poiché G non ha vertici isolati, mentre H sì, una tale applicazione non può esistere.



Figura 1.7: *Grafi con stesso ordine e dimensione ma non isomorfi.*

Definizione 1.38. *Dato un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, si può definire il vettore dei gradi $\bar{d}(G) = (d_1, \dots, d_n)$, dove $\Delta(G) = d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \delta(G)$ sono i gradi dei vertici di G .*

Proposizione 1.39. *Il vettore $\bar{d}(G)$ è un invariante.*

Dimostrazione. Siano $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ grafi isomorfi e $f : V \rightarrow W$ l'isomorfismo. Dato $u \in V$, sappiamo che $f(u) \in W$ e $uv \in E$ se e solo se $f(u)f(v) \in F$. Da ciò si deduce che il numero di vertici adiacenti a u in G è uguale al numero di vertici adiacenti a $f(u)$ in H . Poiché, per definizione, tali numeri sono rispettivamente il grado di u e $f(u)$ e avendo scelto u in modo arbitrario, si ha la tesi. \square

Osservazione 1.40. La Proposizione 1.39 ci dice in particolare che un isomorfismo tra due grafi G e H manda ogni vertice v di G in un vertice w di H con $d_G(v) = d_H(w)$.

Abbiamo già osservato che un invariante non è una condizione sufficiente per determinare se due grafi siano isomorfi o meno. Possiamo però chiederci se una lista di invarianti lo diventi. Ci chiediamo, ad esempio, se avere stesso ordine, stessa dimensione e stesso vettore dei gradi permetta di concludere che due grafi siano isomorfi. L'Esempio 1.41 mostra che la risposta alla domanda è negativa e fa intuire come trovare una tale

lista, detta lista di invarianti completa, non sia scontato. Nella nostra trattazione ci limiteremo a considerare gli invarianti come una condizione comoda per dedurre se due grafi siano non isomorfi, piuttosto che isomorfi.

Esempio 1.41. Siano dati i grafi $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ come in Figura 1.8. Si osserva facilmente che $|V| = |W|$, $|E| = |F|$ e $\bar{d}(G) = \bar{d}(H)$. Tuttavia, G e H non sono isomorfi: chiamando v_1 e v_2 gli unici due vertici di grado 1 in G e w_1 e w_2 gli unici due vertici di grado 1 in H , se esistesse un isomorfismo f , per l'Osservazione 1.40, necessariamente $f(v_1), f(v_2) = w_1, w_2$. Ora, per definizione di isomorfismo, poiché $v_1v_2 \notin E$, deve essere $w_1w_2 \notin F$, ma ciò non può succedere e dunque tale f non esiste.



Figura 1.8: Grafi con tre invarianti uguali, ma non isomorfi.

Proposizione 1.42. *Il numero di componenti connesse è un invariante.*

Dimostrazione. Siano $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ grafi isomorfi e $f : V \rightarrow W$ l'isomorfismo. Siano $u, v \in V$ e sia (v_0, \dots, v_r) un cammino in G da $u = v_0$ a $v = v_r$. Allora, per definizione di isomorfismo, vale che $f(u), f(v) \in W$ e $(f(v_0), \dots, f(v_r))$ è un cammino in H da $f(u)$ a $f(v)$. Dunque u e v sono nella stessa componente connessa di G se e solo se $f(u)$ e $f(v)$ sono nella stessa componente di H , da cui la tesi. \square

Osservazione 1.43. Ritornando all'Esempio 1.41, si può concludere più rapidamente che i grafi G e H non sono isomorfi in quanto G ha una sola componente connessa mentre H ne ha due.

1.4 Grafi noti

In questa sezione vengono presentate le tipologie di grafo più comuni, alcune delle quali, come si vedrà nel seguito, saranno di aiuto per valutare alcuni aspetti di un grafo qualsiasi, come le colorazioni e il polinomio cromatico. Per quanto osservato nella sezione precedente, è opportuno ricordare che quando ci riferiamo ad un grafo ci stiamo riferendo ad un rappresentante della sua classe di isomorfismo.

Definizione 1.44. Un grafo di ordine zero, ossia privo di vertici e perciò anche di archi, si dice grafo nullo ed è indicato con K_0 .

Definizione 1.45. Un grafo di ordine n , ma dimensione zero, ossia privo di archi, si dice grafo vuoto e si scrive \overline{K}_n .

Definizione 1.46. Un grafo di ordine n si dice completo se ogni coppia di vertici è connessa da un arco. Esso si indica con K_n .

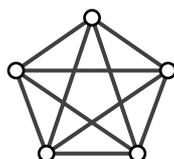


Figura 1.9: Grafo completo K_5 .

Proposizione 1.47. La dimensione di K_n è:

$$\dim E = \frac{n(n-1)}{2}.$$

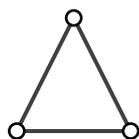
Dimostrazione. Basta osservare che ogni vertice ha grado $n-1$ e applicare il risultato della Proposizione 1.23. Si ha:

$$\dim E = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} \underbrace{(n-1) + \cdots + (n-1)}_{n \text{ volte}} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

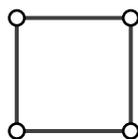
□

Definizione 1.48. Un grafo 2-regolare di ordine $n \geq 3$ è chiamato grafo ciclo e indicato con C_n . Spesso si dice semplicemente ciclo oppure ciclo pari o ciclo dispari a seconda che il numero di vertici (che osserviamo coincidere con quello degli archi) sia pari o dispari.

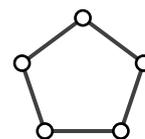
Osservazione 1.49. Nel caso di $n = 3$, K_3 e C_3 coincidono.



$C_3 = K_3$



C_4



C_5

Figura 1.10: Alcuni esempi di grafi ciclo.

Definizione 1.50. *Un grafo che non contiene cicli, ossia tale che, comunque scegliamo un suo vertice, non possiamo tornare ad esso percorrendo una sola volta gli archi del grafo, si dice aciclico.*

Definizione 1.51. *Un grafo connesso e aciclico si chiama albero. Si indica spesso con la lettera T .*

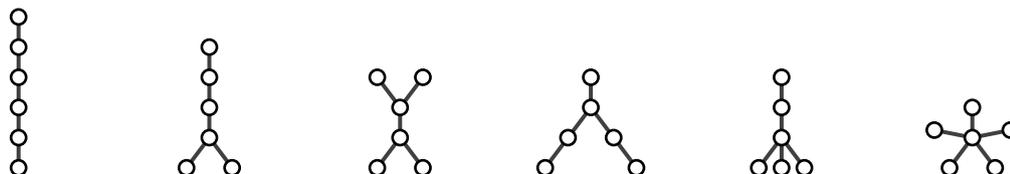


Figura 1.11: *Gli alberi con 6 vertici.*

Proposizione 1.52. *Per $T = (V, E)$ sono equivalenti le seguenti affermazioni.*

1. T è un albero.
2. T è connesso minimale, i.e. T è connesso ma $T - e$ non lo è, per un qualsiasi arco $e \in T$, ove con $T - e$ si indica il grafo T privato dell'arco e .
3. Due vertici qualsiasi di T sono connessi da un unico cammino.
4. T è aciclico massimale, i.e. T è aciclico ma $T + uv$ non lo è, per una qualsiasi coppia di vertici non adiacenti $u, v \in T$. Con $T + uv$ indichiamo il grafo T con l'aggiunta dell'arco uv .
5. T è aciclico e $|E| = |V| - 1$.
6. T è connesso e $|E| = |V| - 1$.

Dimostrazione. (1 \Rightarrow 2) Supponiamo per assurdo che $T - e$ sia connesso, con $e = uv$. Dunque, esiste un cammino in $T - e$ tra u e v . Sia $P = (u, v_1, \dots, v_k, v)$ tale cammino. Poiché $e \notin T - e$, e non è un arco tra quelli del cammino P . Aggiungendo l'arco e al cammino P si ottiene un cammino da u in u , ossia un ciclo in T , ma ciò contraddice l'ipotesi.

(2 \Rightarrow 3) Dall'ipotesi di connessione segue l'esistenza di un cammino tra una qualunque coppia di vertici di T . L'unicità segue, per assurdo, sfruttando l'ipotesi di minimalità. Siano, infatti, $P_1 = (u, v_1, \dots, v_k, v)$ e $P_2 = (u, w_1, \dots, w_r, v)$ due cammini distinti tra u e v , in particolare tali che $v_i \neq w_j$ per ogni $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, r$ (possiamo sempre ricondurci a questo caso, a patto di cambiare scelta degli estremi). Prendiamo $e = v_i v_{i+1}$

(analogo nel caso di un arco su P_2) e consideriamo il cammino Q costituito dalla sequenza di cammini (v_i, v_{i-1}, \dots, u) , P_2 e $(v, v_k, v_{k-1}, \dots, v_{i+1})$. Esso è un cammino da v_i a v_{i+1} che non contiene l'arco e . Consideriamo $T - e$ e mostriamo che esso risulta connesso, contro l'ipotesi di minimalità di T . Siano x e y due vertici di $T - e$ e R il cammino che li connette in T . Se l'arco e non appartiene a R , x e y sono connessi banalmente anche in $T - e$. Se, invece, R contiene e , sostituendo e con il cammino Q otteniamo una sequenza di vertici adiacenti in $T - e$, anche ripetuti, che connettono x a y . Da questa sequenza, è facile osservare che si può sempre estrarre un cammino da x a y in $T - e$ e questo porta l'assurdo.

(3 \Rightarrow 4) Innanzitutto mostriamo che T è aciclico. Questo segue facilmente dall'ipotesi di unicità, poiché, se esistesse un ciclo in T , non esisterebbe un unico cammino tra due vertici. Dunque T è aciclico. Mostriamo ora la massimalità. Siano u e v due vertici non adiacenti di T . Per ipotesi, esiste un unico cammino P che li connette. Considero $T + uv$. In $T + uv$, u e v sono connessi sia da P che da uv e P non contiene uv poiché in T i due vertici non sono adiacenti. Il cammino ottenuto aggiungendo l'arco uv a P è perciò un ciclo in $T + uv$.

(4 \Rightarrow 5) Dobbiamo dimostrare solamente che $|E| = |V| - 1$. Per farlo, mostriamo innanzitutto che un grafo aciclico T ha almeno un vertice v con $d(v) \leq 1$. Se T ha un vertice isolato, la tesi segue banalmente. Supponiamo, quindi, che T non abbia vertici isolati e consideriamo un cammino massimale P , ossia tale che non si possa prolungare ulteriormente (ciò è sempre possibile perché $|V|$ è finito). Sia v un suo estremo. Esso ha un vertice w adiacente in P . Supponiamo che v sia adiacente anche a $x \neq w$, ossia che $d(v) > 1$. Se $x \in P$, si ottiene un ciclo contro le ipotesi. Sia dunque $x \notin P$. In tal caso il cammino P con l'aggiunta dell'arco vx è un prolungamento di P ma ciò contraddice l'ipotesi. Da ciò segue che $d(v) \leq 1$.

(5 \Rightarrow 6) Proviamo che T è connesso per induzione sul numero dei vertici. Se $|V| = 2$, poiché $|E| = 1$, il grafo è connesso. Dimostriamo dunque che un grafo aciclico con $|E| = |V| - 1$ è connesso per $|V| = n$, supponendolo vero per $|V| \leq n - 1$. Sia, dunque, T aciclico con n vertici e $n - 1$ archi. Come già osservato, un grafo aciclico ha almeno un vertice v con $d(v) \leq 1$. In questo caso, se ci fosse un vertice v con $d(v) = 0$, potremmo considerare il grafo T privato di v . Esso ha $n - 1$ vertici e $n - 1$ archi. Rimuovendo un qualsiasi arco $e = xy$, otteniamo un grafo T' connesso per ipotesi induttiva. Esiste perciò un cammino P tra x e y in T' che non contiene e . Questo implica che aggiungendo l'arco e al cammino P si ottiene un ciclo in T , il che è assurdo per ipotesi.

Dunque, $d(v) = 1$. Consideriamo il grafo T' ottenuto da T eliminando il vertice v e l'arco incidente in esso. T' è ancora aciclico, ha $n - 1$ vertici e $n - 2$ archi. Dunque è

connesso per ipotesi ma questo implica che anche il grafo T lo è.

(6 \Rightarrow 1) Mostriamo per induzione su $|V|$ che T è aciclico. Per $|V| = 2$ è ovvio. Sia $|V| = n$. Dalla Proposizione 1.23, si ha:

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{2(n-1)}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Questo significa che, poiché la media dei gradi dei vertici è inferiore a 2, almeno un vertice v ha $d(v) \leq 1$ e, poiché T è connesso, non può essere $d(v) = 0$. Quindi $d(v) = 1$. Consideriamo allora T' ottenuto da T eliminando il vertice v . Esso ha $n - 1$ vertici e $n - 2$ archi ed è connesso, poiché, per ogni $x, y \neq v$, il cammino P che li connette in T non può contenere v , dal momento che $d(v) = 1$. Dunque P è anche un cammino in T' . Per ipotesi induttiva, allora, T' è aciclico. Supponiamo ora che esista un ciclo C in T . Siccome, in un ciclo, ogni vertice ha grado 2, C non contiene v e dunque C è un ciclo in T' . Poiché abbiamo appena dimostrato che T' è aciclico, ciò non può accadere. Dunque tale ciclo in T non esiste, ossia T è aciclico. \square

Capitolo 2

Colorazione di un grafo

In questo capitolo si presenta la colorazione dei vertici. Essa costituisce un caso della più generale colorazione dei grafi ed è l'unica che studieremo. Anche qui, l'interesse è volto a fornire gli strumenti necessari per giungere allo studio di uno dei suoi aspetti più importanti: il polinomio cromatico (quanto riportato è tratto da [1, 3, 4]).

Si parte osservando il seguente problema pratico. Un'azienda produce n prodotti chimici C_1, \dots, C_n e, per questioni di sicurezza, alcuni di essi non possono entrare in contatto con altri. L'obiettivo dell'azienda è stocarli nel minor numero di compartimenti possibile, tenendo necessariamente presente di tali vincoli di incompatibilità. Il problema può essere affrontato nel seguente modo. Si definiscono un insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ di nodi per ciascun prodotto chimico C_i e un insieme $\{e_{ij}\}$ degli archi, ove e_{ij} è definito se e solo se i prodotti C_i e C_j sono incompatibili. Si ottiene dunque un grafo G . Ora, supponendo di etichettare ogni compartimento con un colore diverso, il problema si riconduce, con opportune specificazioni, allo studio delle *colorazioni di un grafo*, in particolare dei suoi vertici, con l'obiettivo di determinare quale sia il numero minimo di colori necessario.

2.1 Prime definizioni

Definizione 2.1. *Dato un grafo $G = (V, E)$, si definisce k -colorazione ammissibile¹ di vertici di G una mappa da V ad un insieme di k colori tale che, se due vertici sono adiacenti, allora non possono avere la stessa immagine. Più formalmente,*

$$\begin{aligned} c : V &\longrightarrow \{c_1, \dots, c_k\}, \\ c(v_i) &\neq c(v_j) \quad \text{se } e_{ij} \in E. \end{aligned}$$

Se il grafo G ammette una k -colorazione, si dice che G è k -colorabile.

¹Poiché tratteremo solo colorazioni ammissibili, ometteremo questo termine.

Osservazione 2.2. Non si richiede che c sia suriettiva, ossia una k -colorazione è una colorazione in cui si utilizzano al più k colori.

Osservazione 2.3. Due colorazioni ottenute l'una dall'altra permutando i colori sui vertici sono distinte. In altre parole, per parlare di colorazione di vertici, è necessario pensare questi ultimi come fissati nello spazio o, equivalentemente, ordinati. Essendo, infatti, definite come mappe sull'insieme dei vertici, due colorazioni sono uguali se lo sono puntualmente come funzioni. Per valutare ciò è necessario nominare gli elementi di V , in altre parole, ordinarli.

Esempio 2.4. Sono riportate due colorazioni distinte del grafo K_3 . Non si deve cadere in errore pensando alla seconda figura come una rotazione della prima e che, dunque, la colorazione sia sempre la stessa. Si osservino i nomi dei vertici in figura per chiarire questo dubbio.

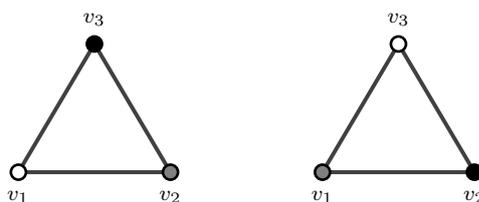


Figura 2.1: Colorazioni distinte di K_3 .

Definizione 2.5. Il minimo k per cui G è k -colorabile si indica con $\chi(G)$ e si chiama numero cromatico di G . Il grafo G si dice k -cromatico se $k = \chi(G)$.

Definizione 2.6. Una k -colorazione determina una partizione di V in al più k insiemi indipendenti. Ognuno di essi contiene i vertici colorati con lo stesso colore e prende il nome di classe di colore.

2.2 Limitazioni del numero cromatico

Che relazione intercorre tra gli invarianti di un grafo (e.g. il grado massimo di un vertice) e il numero cromatico? Quali stime si possono fornire per il numero cromatico? A tali domande si intende rispondere in questa sezione, riportando una serie di risultati interessanti.

Proposizione 2.7. Il numero cromatico di un grafo è sempre compreso tra 1 e il numero di vertici del grafo.

Dimostrazione. La dimostrazione è banale. Nessun grafo può essere colorato con meno di un colore e risulta impossibile utilizzare più colori di quanti siano i vertici da colorare. \square

Osservazione 2.8. $\chi(G) = 1$ vale solo per i grafi privi di archi, mentre $\chi(G) = n$, dove n è il numero di vertici, solo per i grafi completi.

Proposizione 2.9. *Un grafo G con m archi soddisfa*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Dimostrazione. Consideriamo una colorazione di G con $k = \chi(G)$ colori. Questa determina C_1, \dots, C_k classi di colore e deve esistere necessariamente, per ogni coppia di queste, un arco che collega un vertice della prima ad uno della seconda. Questo perché, altrimenti, i vertici delle due classi sarebbero tutti non adiacenti tra loro e potremmo utilizzare lo stesso colore per entrambe le classi, ottenendo una colorazione di G con $\chi(G) - 1$ colori, il che è assurdo per definizione di $\chi(G)$. Perciò esiste almeno un arco per ogni coppia di classi, il che equivale a dire che il numero di archi è maggiore o uguale al numero di sottoinsiemi di cardinalità 2 dell'insieme $\{C_1, \dots, C_k\}$ delle classi di colore. Quest'ultimo, dal calcolo combinatorio, sappiamo essere il coefficiente binomiale di k su 2 e dunque si ha:

$$m \geq \binom{k}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Risolvendo la disequazione in k si ha la tesi. \square

Un modo classico per colorare un grafo è attraverso un cosiddetto algoritmo greedy. Esso consiste nello stabilire una numerazione v_1, \dots, v_n dei vertici e assegnare a ciascun v_i , seguendo l'ordine di numerazione, il primo colore disponibile. In altre parole, se c_1, \dots, c_k è un ordinamento dei colori, si assegna a v_i il primo colore della lista non utilizzato per nessun vertice adiacente a v_i , tra i vertici v_1, \dots, v_{i-1} . Questo genera una colorazione del grafo che non utilizza più di $\Delta(G) + 1$ colori e si ha così la proposizione seguente, già banalmente verificata.

Proposizione 2.10. *Per ogni grafo G ,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Osservazione 2.11. Se il grafo è completo o un ciclo dispari $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Questa limitazione dall'alto, eccezion fatta per i grafi dell'Osservazione 2.11, è generosa e può essere leggermente migliorata.

Teorema 2.12 (Brooks). *Per ogni grafo connesso G , che non sia completo o un ciclo dispari, vale*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Dimostrazione. Poniamo $\Delta := \Delta(G)$. Osserviamo dapprima che se $\Delta \leq 2$ allora non c'è nulla da dimostrare. Un grafo connesso con $\Delta = 1$ è necessariamente costituito da un arco e due vertici, quindi completo e dunque escluso dal teorema. Se $\Delta = 2$, il grafo è un cammino, un ciclo oppure un ciclo dispari. Il caso del ciclo dispari è escluso dal teorema, gli altri due sono grafi 2-cromatici (si possono colorare usando due colori in modo alternato sui vertici) e vale perciò la tesi.

Sia dunque $\Delta \geq 3$. Necessariamente $|V| \geq 4$ e si mostra facilmente che per un qualsiasi grafo connesso, non completo, con 4 vertici vale la tesi. Ora, supponiamo che esista un grafo G come nelle ipotesi, per il quale però non valga la tesi e prendiamolo di minor ordine possibile. In altre parole, poiché abbiamo visto che la tesi vale fino all'ordine 4, possiamo supporre che esista un grafo, sempre come da ipotesi, con 5 vertici tale per cui $\chi(G) > \Delta$.

Preso un qualunque vertice v di G , consideriamo $H := G - v$. Se H non è né completo né un ciclo dispari, per ipotesi $\chi(H) \leq \Delta(H) \leq \Delta$. In caso contrario, ossia se H è completo oppure un ciclo dispari, per l'Osservazione 2.11, $\chi(H) = \Delta(H) + 1$, ma H è $\Delta(H)$ -regolare e almeno uno dei vertici è adiacente a v in G . Da cui $\Delta(H) + 1 \leq \Delta$.

Ora, poiché H è Δ -colorabile e G no, si ha:

Osservazione 2.13. Ogni Δ -colorazione di H usa tutti i colori $1, \dots, \Delta$ per i vertici adiacenti a v . Da cui, in particolare, $d(v) = \Delta$.

Se infatti non fossero usati tutti i Δ colori, esisterebbe un colore \bar{c} con cui colorare v e ottenere una Δ -colorazione di G , contro le ipotesi.

Denotiamo ora con v_i , $i = 1, \dots, \Delta$, i vertici adiacenti a v di colore i e con $H_{i,j}$ il sottografo indotto da tutti i vertici di colore i e j di G .

Osservazione 2.14. Per ogni $i \neq j$, i vertici v_i e v_j stanno nella stessa componente connessa $C_{i,j}$ di $H_{i,j}$.

Se così non fosse, potrei invertire i colori in una delle due componenti e ottenere una Δ -colorazione di H in cui due vertici adiacenti a v hanno stesso colore e ciò contraddice l'Osservazione 2.13.

Osservazione 2.15. $C_{i,j}$ è un cammino da v_i a v_j .

Infatti v_i non può avere due vertici adiacenti dello stesso colore poiché, altrimenti, essendo il suo grado in H al più $\Delta - 1$ (v_i è adiacente a v quindi in G il suo grado cresce di 1 ma non può superare Δ), potrei ricolorarlo e contraddire 2.13. Dunque in $C_{i,j}$, v_i ha

un solo vertice adiacente. Analogamente per v_j . Se poi $C_{i,j}$ non fosse un cammino, esisterebbe un vertice u in $C_{i,j}$ di grado almeno 3 e perciò adiacente ad almeno 3 vertici dello stesso colore. Essendo utilizzati così al più $\Delta - 2$ colori sui vertici adiacenti a u , u si potrebbe ricolorare con un colore diverso da i e da j e contraddire l'Osservazione 2.14.

Osservazione 2.16. Per i, j, k distinti, $C_{i,j}$ e $C_{i,k}$ si incontrano solo in v_i .

Se fosse $v_i \neq u \in C_{i,j} \cap C_{i,k}$, u avrebbe due vertici adiacenti di colore i e due di colore j . Potrei ricolorarlo, per ragionamenti analoghi ai precedenti, e contraddire l'Osservazione 2.14.

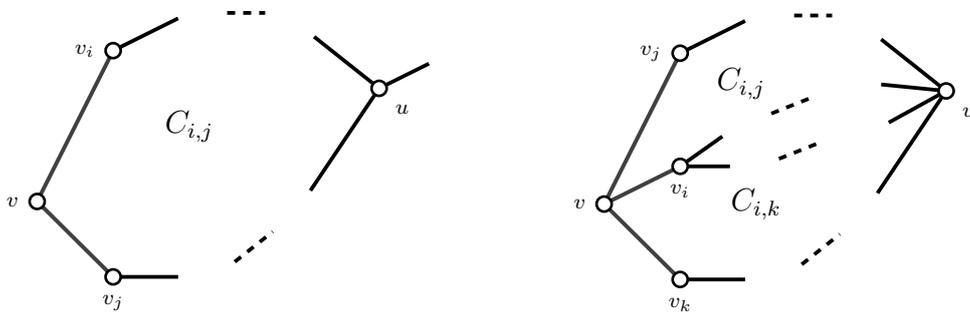


Figura 2.2: La figura di sinistra si riferisce all'Osservazione 2.15, quella di destra all'Osservazione 2.16 della prova del Teorema di Brooks.

La dimostrazione a questo punto segue facilmente. Se, infatti, i vertici adiacenti a v fossero tra loro a due a due adiacenti, chiamando $N(v)$ l'insieme dei vertici adiacenti a v , si avrebbe $G = G[N(v) \cup \{v\}] = K_{\Delta+1}$, ossia G è completo, ma ciò è escluso dalle ipotesi. Siano dunque v_i, v_j non adiacenti (i pedici indicano anche il colore, si veda la notazione che precede l'Osservazione 2.14). Sia u il vertice adiacente a v_i in $C_{i,j}$. Osserviamo che ad u è assegnato necessariamente il colore j , ossia $c(u) = j$. Consideriamo $C_{i,l}$ con $l \neq j$ e invertiamo i colori i e l . Questo scambio genera una nuova colorazione C' del grafo alla quale ci riferiamo utilizzando la notazione con apice (e.g. $C'_{i,j}$ è la componente connessa definita come nell'Osservazione 2.14, per la colorazione C'). Poiché in C' non abbiamo ricolorato i vertici di colore j , $c'(u) = c(u) = j$. Inoltre, per l'Osservazione 2.16, questo scambio di colori non modifica $C_{i,j}$ se non in v_i , in quanto v_i è l'unico vertice in comune tra $C_{i,j}$ e $C_{i,l}$. Dunque, $u \in C'_{i,j}$ e $v_i = v'_i$ (in altre parole $c'(v_i) = l$) e ciò implica $u \in C'_{j,l}$. Si ha allora $u \in C'_{i,j} \cap C'_{j,l}$ e poiché $u \neq v_j$, in quanto u è adiacente a v_i mentre per ipotesi v_i e v_j non lo sono, ciò contraddice 2.16. Siamo così giunti ad un assurdo e con ciò il teorema è dimostrato. \square

Fino a questo momento sono state presentate due limitazioni dall'alto, anche dette upper bound, al numero cromatico. Vediamo ora un lower bound, ossia una limitazione dal basso.

Definizione 2.17. Dato un grafo $G=(V,E)$, si chiama densità di G il massimo ordine di un sottografo completo. Si indica

$$\rho(G) := \max\{|X| : X \subseteq V, G[X] \text{ completo}\}.$$

Proposizione 2.18. Per ogni grafo G ,

$$\rho(G) \leq \chi(G).$$

Dimostrazione. Sia $G[X]$ un sottografo completo di G di ordine massimo $\rho(G)$. Per definizione di grafo completo i suoi vertici sono a due a due adiacenti e perciò servono necessariamente $\rho(G)$ colori per colorarlo. Poiché $G[X]$ è contenuto in G , ciò implica che servono almeno $\rho(G)$ colori anche per colorare G . \square

Nella prossima sezione si riporta un algoritmo utile per la determinazione del numero cromatico di un grafo e del suo polinomio cromatico (per questo, si veda il Capitolo 3).

2.3 Algoritmo per la determinazione del numero cromatico

Uno degli algoritmi più importanti per la determinazione del numero cromatico di un grafo è il cosiddetto *algoritmo di contrazione e connessione*. Come anticipato, esso è anche alla base di uno dei metodi per il calcolo del polinomio cromatico.

Principio di connessione e contrazione

Dato un grafo G e due vertici u e v non adiacenti, è importante osservare che una colorazione di G , se assegna lo stesso colore a u e v , è pensabile come la colorazione dello stesso grafo in cui però i due vertici sono *contratti* ad uno solo. Dall'altra parte, se essa assegna colori distinti ai due vertici u e v , si può vedere come colorazione del grafo G in cui i due vertici sono resi adiacenti *connettendoli* con un arco. Come mostra l'Esempio 2.20, si ottiene perciò una corrispondenza biunivoca tra le colorazioni di G e le colorazioni dei due grafi che si ottengono da G con un'operazione di *contrazione* e una di *connessione*, che ora vediamo di definire più accuratamente.

Definizione 2.19. Dato un grafo G , presi u, v vertici non adiacenti, si definisce:

1. $G.uv$ il grafo contrazione, ottenuto sostituendo i vertici u e v con un unico vertice, adiacente a tutti i vertici adiacenti in G sia a u che a v .
2. $G + uv$ il grafo connessione, ottenuto aggiungendo un arco tra u e v .

Esempio 2.20. Si consideri il grafo connesso G di ordine 3 e dimensione 2. In Figura 2.3 si riportano tutte le 3-colorazioni possibili di G . Presi u e v vertici non adiacenti, si riportano in Figura 2.4 le 3-colorazioni del grafo $G.uv$ e del grafo $G + uv$. È facile osservare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i grafi di Figura 2.3 e quelli di Figura 2.4. In altre parole, le colorazioni di G si possono vedere come tutte e sole le colorazioni di $G.uv$ e di $G + uv$.

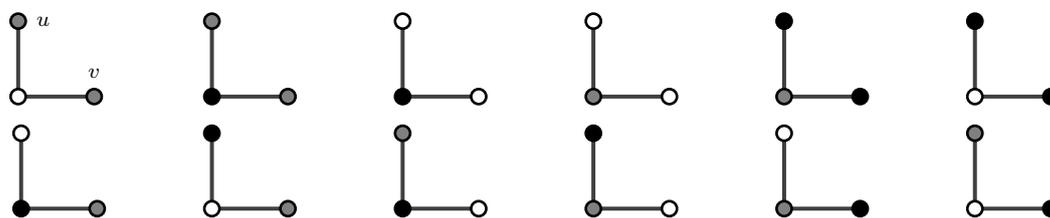


Figura 2.3: Le 3-colorazioni del grafo G .

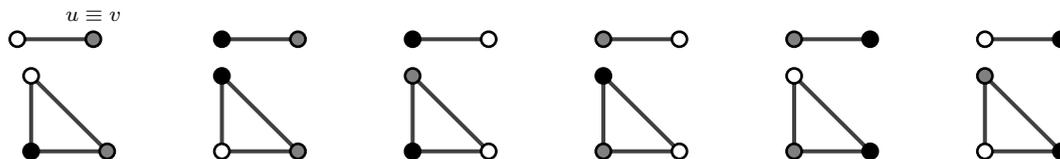


Figura 2.4: Le 3-colorazioni di $G.uv$ (prima riga) e $G + uv$ (seconda riga).

L'algoritmo, dato un grafo G , è costituito dai seguenti passi.

1. Se G è completo, termina.
2. Se G non è completo, scelti u e v vertici non adiacenti, si definiscono $G.uv$ e $G + uv$.
3. Per ogni grafo completo che si ottiene tra questi, si applica il punto 1. Per ogni grafo non completo, il punto 2.

Questo procedimento, dunque, altro non è che l'iterazione del principio di connessione e contrazione fino ad ottenere, eventualmente ripetuti, un certo numero di grafi completi K_r , con $r \leq n$, ove n è il numero di vertici di G . Le colorazioni di questi grafi, per quanto osservato all'inizio della sezione, saranno in corrispondenza biunivoca con le colorazioni di G .

Si ha così un insieme chiamato C -scomposizione di G , indicato con $C(G)$ ed un simbolismo:

$$G \longrightarrow C(G) = a_n K_n + a_{n-1} K_{n-1} + \cdots + a_\chi K_\chi, \quad (2.1)$$

in cui $a_r K_r$ indica che l'algoritmo ha generato a_r grafi completi K_r e in cui $a_n, a_\chi \neq 0$. Ossia nella C -scomposizione di un grafo G è sempre presente almeno² un grafo completo di ordine n (ove n ricordiamo essere l'ordine del grafo G) e indichiamo con χ il minimo k tale per cui nella scomposizione compare un grafo completo di ordine k .

Dunque, in particolare, χ corrisponde al numero minimo di colori necessari per colorare G , ossia al numero cromatico. Si riporta un esempio esplicativo di applicazione dell'algoritmo.

Esempio 2.21. Dato $G = C_4$, applicando l'algoritmo, si ottiene $C(C_4) = K_4 + 2K_3 + K_2$, da cui $\chi(C_4) = 2$ come ci aspettavamo.

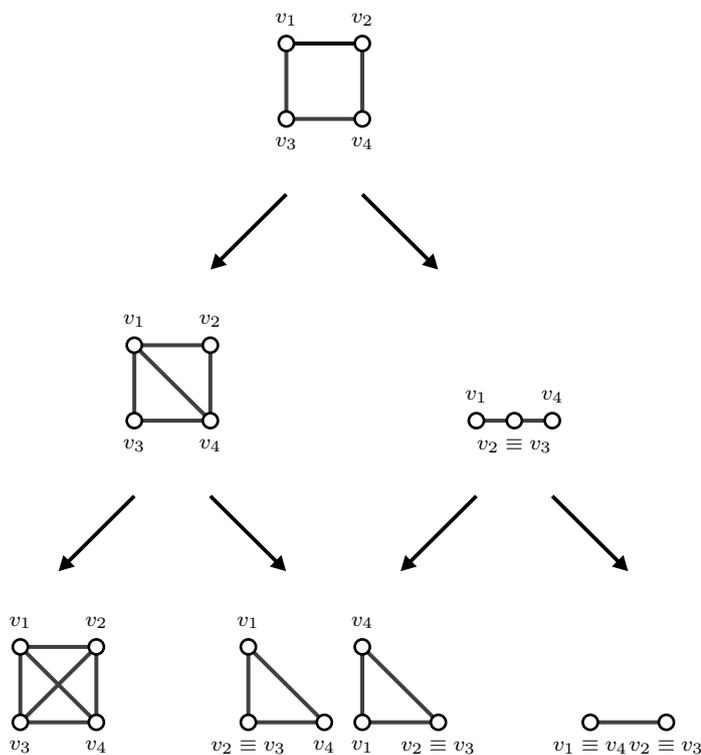


Figura 2.5: Applicazione dell'algoritmo basato sul principio di connessione e contrazione per il grafo C_4 . Esso genera quattro grafi completi K_4 , K_3 (due volte) e K_2 .

Osservazione 2.22. Ad ogni passo dell'algoritmo si deve scegliere la coppia di vertici non adiacenti su cui applicare il principio di connessione e contrazione. Il risultato finale è indipendente dall'ordine con cui vengono fatte tali scelte.

²Vedremo al Capitolo 3 che sarà esattamente uno.

Capitolo 3

Polinomio cromatico

In questo capitolo si presenta il cuore di questa trattazione: il polinomio cromatico. Si parte dalle sue definizioni (ne daremo più di una), si studia come calcolarlo per alcuni casi base sino a giungere ad un algoritmo utile nel caso di un grafo qualsiasi. Infine si studia la forma di tali polinomi e ci si concentra sulle proprietà di un grafo che sono deducibili dal suo polinomio cromatico e viceversa (quanto riportato è tratto da [2, 7]).

3.1 Definizione

Nello studio delle colorazioni di un grafo si rivela interessante valutare, oltre all'esistenza o meno di una k -colorazione, anche il numero di colorazioni possibili, dati k colori. Questo è l'approccio che portò George David Birkhoff ad introdurre nel 1912 il *polinomio cromatico*, nel tentativo di dimostrare la (allora) congettura dei quattro colori¹.

Vediamo dunque di definire rigorosamente il polinomio cromatico.

Definizione 3.1. *Sia G un grafo. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si indica con $p(G,k)$ il numero di k -colorazioni per G . Esiste una funzione polinomiale che associa ad ogni k , il numero $p(G,k)$; il polinomio in k corrispondente è chiamato polinomio cromatico e indicato con $P(G,k)$.*

Questa definizione è molto intuitiva e bene rappresenta ciò che è il polinomio cromatico di un grafo. Osserviamo, però, che affinché la definizione sia ben posta è necessario dimostrare che una tale funzione esiste. A tal proposito, introduciamo un'ulteriore definizione di polinomio cromatico.

¹Dimostrata nel 1977 da Kenneth Appel e Wolfgang Haken.

Definizione 3.2. Sia G un grafo di n vertici. Sia $p(G, k)$ il numero di k -colorazioni di G e \mathcal{P}_n l'insieme dei polinomi in una variabile di grado al più n . Il polinomio cromatico $P(G, k)$ è l'unico polinomio in \mathcal{P}_n interpolante i punti $(k, p(G, k))$, con $k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$.

Osserviamo che l'esistenza e unicità del polinomio interpolante $n+1$ punti di grado al più n è garantita dal seguente noto teorema (per una dimostrazione si veda [8]) e questo ci garantisce la buona positura della Definizione 3.2.

Teorema 3.3. Siano $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ in \mathbb{R}^2 tali che $x_0 < \dots < x_n$. Allora esiste un unico polinomio $P \in \mathcal{P}_n$ tale che $P(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$.

La definizione 3.2 mostra come il polinomio cromatico conti in quanti modi sia possibile colorare G con al più n colori. Tuttavia, e non è una coincidenza, all'aumentare di questi, il polinomio cromatico restituisce ancora il numero di colorazioni corrispondenti. In altre parole, usando le notazioni precedentemente introdotte, $P(G, k) = p(G, k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Il seguente teorema, di cui si propone una dimostrazione, riporta questo fatto ed in particolare ci garantisce ciò che avevamo lasciato in sospeso, ossia che la Definizione 3.1 è bene posta (si veda l'Osservazione 3.6).

Teorema 3.4. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $P(G, k) = p(G, k)$.

Dimostrazione. Sia $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$. Preso $k \in \mathbb{N}$, ad ogni k -colorazione C di G corrisponde una partizione dell'insieme dei vertici V che chiamiamo $\mathcal{V}_C = \{V_1, \dots, V_p\}$. Ciascun V_i è una classe di colore (vedi Definizione 2.6). Osserviamo che se C_1 e C_2 sono due k -colorazioni distinte di G , esse generano due partizioni \mathcal{V}_{C_1} e \mathcal{V}_{C_2} che non necessariamente sono distinte (possono assegnare colori distinti agli stessi sottoinsiemi V_1, \dots, V_p e quindi in tal caso \mathcal{V}_{C_1} coincide con \mathcal{V}_{C_2}). Chiamiamo Γ l'insieme di tutte le partizioni (distinte) \mathcal{V}_C di G . Osserviamo ora che, presa una partizione \mathcal{V}_C , questa può essere certamente colorata in $k(k-1) \cdots (k-(p-1))$ modi, ossia utilizzando un colore diverso per ogni insieme V_i con $i = 1, \dots, p$. Definiamo $Q(\mathcal{V}_C) := k(k-1) \cdots (k-(p-1))$ e osserviamo che $Q(\mathcal{V}_C)$ è un polinomio in k di grado al più n , in quanto una partizione di V non può avere più di n elementi. A questo punto è facile osservare che tutti e soli i modi di colorare G con k colori corrispondono a tutti i modi in cui si possono colorare le partizioni \mathcal{V}_C ottenute, ossia stando alle notazioni introdotte, $p(G, k) = \sum_{\mathcal{V}_C \in \Gamma} Q(\mathcal{V}_C)$. Da ciò segue che $p(G, k)$ è un polinomio in k di grado al più n poiché somma di polinomi in k di grado al più n . Dunque $p(G, k) \in \mathcal{P}_n$ e per definizione interpola gli $n+1$ punti $(k, p(G, k))$, per $0 < k \leq n$. Dal Teorema 3.3 segue $P(G, k) = p(G, k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. \square

Osservazione 3.5. È importante notare che tra le partizioni \mathcal{V} di Γ , vi è sicuramente quella contenente n elementi, ossia quella in cui ciascuna classe di colore è costituita da un singolo elemento. Questo perché, preso un $k \geq n$, è sempre possibile colorare ogni vertice con un colore diverso. Essa inoltre è l'unica con n elementi. A tale partizione, che chiamiamo $\hat{\mathcal{V}}$, corrisponderà il termine $Q(\hat{\mathcal{V}}) = k(k-1) \cdots (k-(n+1))$, il quale è di grado esattamente n . Da ciò si deduce che il polinomio cromatico di un grafo con n vertici ha grado esattamente n (si veda il Teorema 3.19 per un'ulteriore dimostrazione).

Osservazione 3.6. Nella prova del Teorema 3.4 abbiamo mostrato in particolare che la funzione che associa ad ogni $k \in \mathbb{N}$ il numero di k -colorazioni di G è una funzione polinomiale e coincide con il polinomio interpolante. Questo, come già anticipato, garantisce la buona positura della Definizione 3.1.

Abbiamo dunque definito il polinomio cromatico, dandone due definizioni equivalenti. Risulta ora interessante chiedersi se questo si possa in qualche modo caratterizzare, se sia sempre possibile calcolarlo e se vi siano delle relazioni tra un certo tipo di grafo ed il polinomio cromatico associato e viceversa. Le successive trattazioni hanno l'obiettivo di rispondere a questi interrogativi.

3.2 Calcolo del polinomio

3.2.1 Per grafi noti

Partiamo riportando i polinomi cromatici dei grafi più noti poiché questi risulteranno utili anche per il calcolo del polinomio di un grafo qualsiasi.

Proposizione 3.7. *Il polinomio cromatico del grafo vuoto \overline{K}_n , ossia con n vertici e privo di archi è $P(\overline{K}_n, k) = k^n$.*

Dimostrazione. Il grafo \overline{K}_n non ha vertici adiacenti tra loro in quanto privo di archi. Per questo, ciascun vertice può essere colorato in k modi distinti e indipendenti, da cui

$$P(\overline{K}_n, k) = \underbrace{k \cdots k}_n = k^n.$$

□

Proposizione 3.8. *Il polinomio cromatico di un grafo completo con n vertici K_n è*

$$P(K_n, k) = [k]_n := \begin{cases} 0 & \text{se } k < n, \\ k(k-1) \cdots (k-n+1) & \text{se } k \geq n. \end{cases}$$

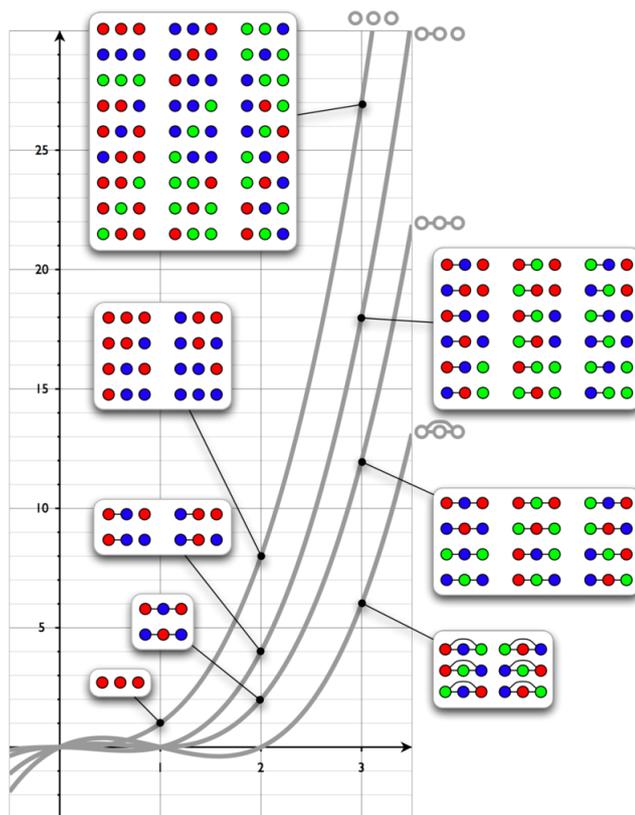


Figura 3.1: *Polinomi cromatici di tutti e soli i grafi con 3 vertici. Si riportano anche le rispettive χ -colorazioni. Si osservi che χ corrisponde al più piccolo intero positivo che non sia una radice di $P(G, k)$ e il polinomio valutato in χ restituisce il numero delle χ -colorazioni (la figura è presa da [9]).*

Dimostrazione. Se $k < n$, non si hanno colorazioni in quanto, essendo ogni coppia di vertici adiacente, non è possibile colorare ciascuno di essi con un colore distinto da tutti gli altri. Da cui $P(K_n, k) = 0$.

Fissato $k \geq n$, si osserva che una colorazione dei vertici di K_n è una disposizione di classe n dei k colori dati ossia, fissato un ordinamento dei vertici, una colorazione corrisponde ad una delle possibili sequenze ordinate e prive di ripetizioni costituite da n colori scelti tra i k disponibili. La formula che restituisce il numero di tutte le disposizioni di classe n dati k elementi è $k(k-1) \cdots (k-n+1)$ e poiché il polinomio cromatico associa ad ogni k tale numero, si ha la tesi. In altro modo, sempre fissando un ordinamento dei vertici, si può osservare che sono possibili k scelte di colore per il primo vertice, $k-1$ scelte per il secondo fino ad arrivare a $k-n+1$ per l' n -esimo, il che implica la tesi. \square

Anche i polinomi cromatici dei grafi ciclo C_n e degli alberi T sono notevoli. Tuttavia,

per giungere a tali risultati si utilizzano alcune formule di cui parleremo nella prossima sezione. Dunque, per i risultati su C_n e T , si rimanda alla Sezione 3.4.1.

3.2.2 Un metodo per il caso generale

Riprendendo quanto osservato e già anticipato al Capitolo 2, il principio di connessione e contrazione si rivela uno strumento utile anche per il calcolo del polinomio cromatico. Prima di vedere due formule equivalenti legate a tale principio, riportiamo un teorema che può risultare utile per il calcolo nel caso generale.

Teorema 3.9. *Sia G un grafo e G_1, \dots, G_p le sue componenti connesse. Allora*

$$P(G, k) = P(G_1, k)P(G_2, k) \cdots P(G_p, k).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata e segue dal fatto che ciascuna componente connessa può essere colorata in modo indipendente dalle altre, essendo le componenti connesse disgiunte. \square

Teorema 3.10. Formula di connessione-contrazione *Dati un grafo G non completo e u e v due vertici non adiacenti, allora vale*

$$P(G, k) = P(G + uv, k) + P(G.uv, k). \quad (3.1)$$

Dimostrazione. Riprendendo quanto già detto nel capitolo precedente (vedi Esempio 2.20), le k -colorazioni di G si possono suddividere tra quelle che assegnano stesso colore a u e v e quelle che assegnano colore diverso. Le prime corrispondono a tutte le k -colorazioni di $G.uv$, le seconde a quelle di $G + uv$. Ricordando la definizione di polinomio cromatico, segue la tesi. \square

Introduciamo ora due nuove operazioni sui grafi che saranno di fondamentale importanza nel proseguo della trattazione.

Definizione 3.11. *Dato un grafo G e un arco e , si definisce:*

1. $G - e$ il grafo ottenuto da G rimuovendo l'arco e .
2. $G.e$ il grafo ottenuto rimuovendo l'arco e da G e contraendo quelli che erano i suoi estremi.

Teorema 3.12. Formula di delezione e contrazione *Dato un grafo G non completo e un suo arco e , vale*

$$P(G, k) = P(G - e, k) - P(G.e, k). \quad (3.2)$$

Dimostrazione. Chiamiamo $H = G - e$ e u, v gli estremi dell'arco e . Dal Teorema 3.10 si ha $P(H) = P(H + uv) + P(H.uv)$, ovvero $P(G - e) = P((G - e) + uv) + P((G - e).uv)$. Per le Definizioni 2.19 e 3.11 notiamo che $(G - e) + uv = G$ e $(G - e).uv = G.e$, perciò $P(G - e) = P(G) + P(G.e)$ ossia $P(G) = P(G - e) - P(G.e)$. \square

Osservazione 3.13. Abbiamo già dimostrato nella Sezione 3.1 che $P(G, k)$ è un polinomio nella sola variabile k . Possiamo tuttavia enunciare questo fatto come corollario del Teorema 3.12 e proporre una dimostrazione alternativa. Fissiamo prima una notazione che si rivelerà comoda per alcune dimostrazioni che seguiranno.

Definizione 3.14. *Dato un grafo $G=(V,E)$ con n vertici e m archi, chiamiamo $\dim G := \dim V + \dim E = n + m$, ossia la somma del numero dei suoi vertici e dei suoi archi.*

Corollario 3.15. *Per ogni grafo G , esiste un polinomio $P(G, k)$ in k il cui valore in k è proprio $p(G, k)$.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che se G è un grafo vuoto (ossia privo di archi), per il Teorema 3.7 segue immediatamente la tesi. Sia dunque G un grafo con almeno un arco e dimostriamo la tesi procedendo per induzione forte su $\dim G$. Dato che G ha almeno un arco, si ha $\dim G \geq 3$, quindi il nostro passo base è $\dim G = 3$; di conseguenza il grafo G ha due vertici e un arco, ed è un grafo completo, quindi la tesi vale per il Teorema 3.8.

Ora, assumendo vera la tesi per $\dim G \leq r$, la dimostriamo per $\dim G = r + 1$. Consideriamo i grafi $G - e$ e $G.e$. Il primo ha un arco in meno di G e stesso numero di vertici perciò segue che $\dim G - e = r$ mentre $\dim G.e < r$ (eliminando un arco e contraendo due vertici si potrebbero ridurre ulteriormente gli archi). Dunque i polinomi cromatici di $G - e$ e $G.e$ sono polinomi nella variabile k per ipotesi induttiva e utilizzando la formula (3.2) del Teorema 3.12 si conclude che anche $P(G, k)$ lo è. \square

Le formule (3.1) e (3.2) usate ricorsivamente forniscono un metodo efficace per calcolare il polinomio cromatico. Per quanto già osservato nella sezione precedente, il principio di connessione e contrazione iterato riduce il grafo iniziale in una serie di grafi completi. Analogamente, iterando delezione e contrazione si giunge ad una serie di grafi vuoti. Dunque il polinomio $P(G, k)$, per la formula (3.1), si può esprimere come combinazione lineare di polinomi cromatici di grafi completi, invece per la formula (3.2) come combinazione lineare di polinomi cromatici di grafi vuoti. Poiché i polinomi cromatici di questi due tipi di grafo sono noti, entrambi i procedimenti permettono di calcolare il polinomio cromatico di un qualsiasi grafo. Produrre ad ogni passo due nuovi grafi può rivelarsi però un processo poco efficiente, soprattutto se si parte da grafi con un alto numero di

archi. Per questo si rivela utile agire in modo da suddividere il prima possibile il grafo in componenti connesse (vedi Teorema 3.9) o in modo da ottenere grafi il cui polinomio cromatico è noto.

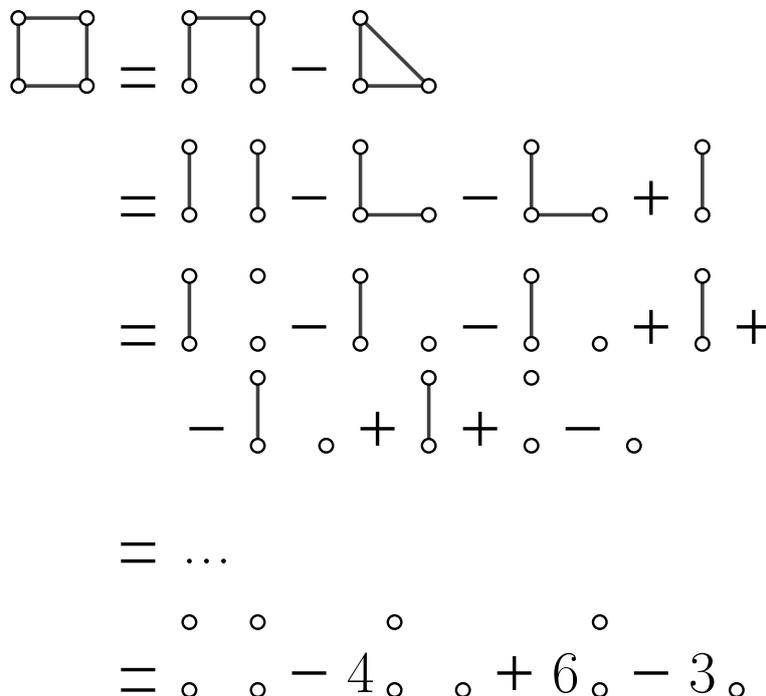


Figura 3.2: Iterazioni della formula di delezione e contrazione per il grafo C_4 sino al termine dell'algoritmo. I passaggi sono da riferire ai polinomi cromatici dei grafi rappresentati.

Esempio 3.16. Dato C_4 calcoliamo $P(C_4, k)$ utilizzando l'algoritmo di delezione e contrazione riportato in Figura 3.2. Si ottiene:

$$P(C_4, k) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k.$$

Osservazione 3.17. Come già detto, anche l'algoritmo di connessione e contrazione porta al medesimo stesso risultato. Infatti, dall'Esempio 2.21, si ha:

$$\begin{aligned}
 P(G, k) &= [k]_4 + 2[k]_3 + [k]_2 \\
 &= \dots \\
 &= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k.
 \end{aligned}$$

Esempio 3.18. Dato il grafo H come in Figura 3.3, vogliamo calcolare e rappresentare graficamente il suo polinomio cromatico. Per farlo sfruttiamo la formula del Teorema 3.12. Non svolgiamo però tutte le iterazioni possibili sino a giungere ad una serie di

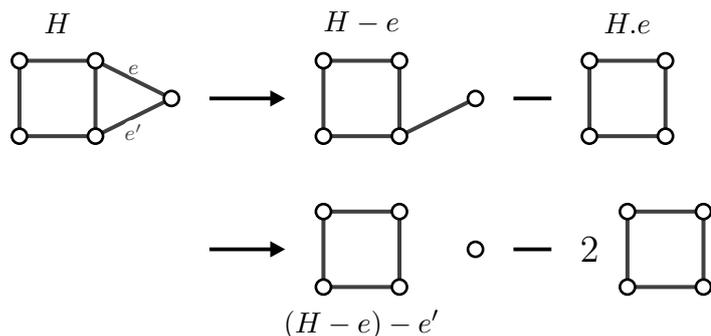


Figura 3.3: Iterazioni della formula di delezione e contrazione sul grafo H dell'Esempio 3.18 applicate in modo efficiente.

grafi vuoti ma ci fermiamo opportunamente prima. Come mostrato in figura, iterando il procedimento due volte, si ottengono due grafi ciclo C_4 e un grafo le cui componenti connesse sono note (un ciclo C_4 e un vertice isolato). Per il Teorema 3.9 e per alcuni risultati noti (per il grafo ciclo anticipiamo un risultato riportato alla Sezione 3.4.1) ciò è sufficiente per calcolare il polinomio cromatico di H . Chiamando $H - e =: H'$ si ha:

$$\begin{aligned}
 P(H, k) &= P((H' - e'), k) - 2P(C_4, k) \\
 &= P(C_4, k)P(\bar{K}_1, k) - 2P(C_4, k) \\
 &= [(k - 1)^4 + (k - 1)]k - 2[(k - 1)^4 + (k - 1)] \\
 &= \dots \\
 &= k^5 - 6k^4 + 14k^3 - 15k^2 + 6k.
 \end{aligned}$$

In Figura 3.4 riportiamo un calcolo esplicito di tutte le 3-colorazioni di H . È facile osservare anche che $\chi(H) = 3$ poiché non è possibile colorare con soli due colori il grafo. Come mostra la Figura 3.5, il polinomio cromatico contiene queste informazioni.

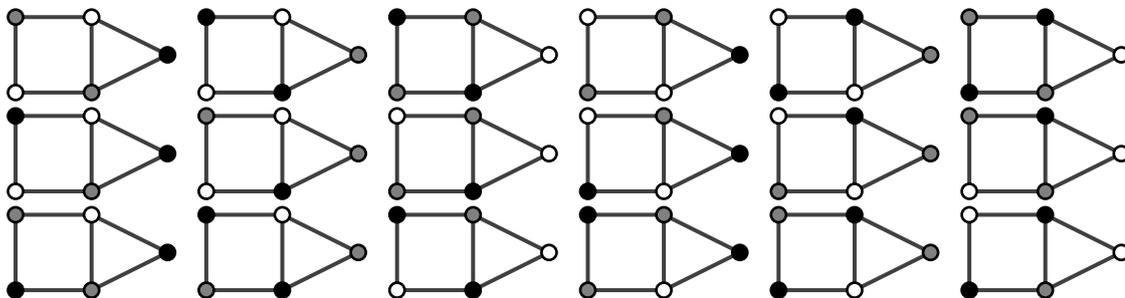


Figura 3.4: Tutte le diciotto 3-colorazioni del grafo H .

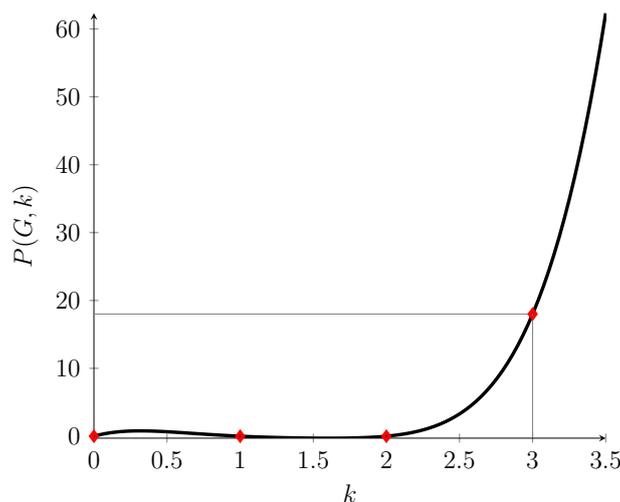


Figura 3.5: Polinomio cromatico del grafo H di Figura 3.3. Esso mostra anche che $\chi(H) = 3$ e $P(H, 3) = p(H, 3) = 18$.

3.3 Proprietà del polinomio cromatico

Fino ad ora abbiamo già visto, a partire dalla definizione fino al calcolo, alcune caratteristiche del polinomio cromatico. Entriamo più nello specifico e vediamo alcuni aspetti che ci permettono di capire, ad esempio, se un generico polinomio può essere o meno il polinomio cromatico di un qualche grafo, o anche, se e quali caratteristiche del grafo si possono dedurre a partire dal suo polinomio cromatico.

Per chiarezza, fissiamo nuovamente alcune notazioni, già ampiamente usate. Dato un grafo $G = (V, E)$:

- $\dim V = |V| = n$, è il numero dei vertici;
- $\dim E = |E| = m$, è il numero degli archi;
- $\chi(G)$, o semplicemente χ , è il numero cromatico;
- $P(G, k)$ è il polinomio cromatico.

Teorema 3.19. Per ogni grafo G , il grado di $P(G, k)$ è pari al numero di vertici di G .

Dimostrazione. Come già fatto per la dimostrazione del Corollario 3.15, dimostriamo il teorema usando l'induzione forte su $\dim G$, ricordando essere $\dim G = \dim V + \dim E$. Se G è un grafo vuoto, per il Teorema 3.7 $P(G, k) = k^n$ ove $\dim V = n$ e perciò si ha la tesi. Sia perciò G un grafo con almeno un arco. Per $\dim G = 3$, l'unico grafo possibile G (con almeno un arco) è il grafo con due vertici e un arco quindi G è completo e vale

$P(G, k) = k(k - 1)$ (vedi Teorema 3.8) il quale è un polinomio di grado 2, ossia pari al numero dei vertici e ciò dimostra quanto volevamo.

Supponiamo ora vera la tesi per ogni grafo G con $\dim G \leq r$ e dimostriamola per il caso $\dim G = r + 1$. In modo analogo a quanto fatto per la prova del Corollario 3.15, osserviamo che si può applicare l'ipotesi induttiva a $G - e$ e $G.e$. In particolare $\dim V(G - e) = \dim V(G)$ poiché, sebbene $\dim G - e < \dim G$, il numero dei vertici resta invariato mentre $\dim V(G.e) = \dim V(G) - 1$ poiché due vertici si contraggono. Da ciò segue che $P(G - e, k)$ ha grado $\dim V(G)$ e $P(G.e, k)$ ha grado pari a $\dim V(G) - 1$. Per la formula di delezione e contrazione (3.2) del Teorema 3.12, $P(G, k)$ ha grado $\dim V(G)$ che è ciò che si voleva dimostrare. \square

Teorema 3.20. *Per ogni grafo G , valgono per $P(G, k)$ i seguenti fatti.*

1. *Tutti i coefficienti sono interi.*
2. *Tutti i coefficienti si alternano in segno.*
3. *Il coefficiente direttore è 1.*
4. *Il termine noto è 0.*
5. *Il coefficiente di k^{n-1} in valore assoluto è m .*
6. *Se il coefficiente di k^r è 0, allora k^{r-1} è 0.*

Dimostrazione. Ancora una volta si procede per induzione forte su $\dim G$.

Nel caso di grafo vuoto tutti i punti sono banalmente verificati (vedi Teorema 3.7). Se il grafo ha almeno un arco, il passo base con $\dim G = 3$ è costituito da un grafo completo e tutti i punti valgono per il Teorema 3.8.

Supponiamo ora vera la tesi per $\dim G \leq r$ e dimostriamola per $\dim G = r + 1$. Per semplicità di notazione chiamiamo $\dim V(G) = n$ e $\dim E(G) = m$. Per quanto già osservato su $G - e$ e $G.e$ nella dimostrazione del teorema precedente segue, sfruttando l'ipotesi induttiva, che il polinomio cromatico di $G - e$ è della forma

$$P(G - e, k) = k^n - mk^{n-1} + c_1k^{n-2} - c_2k^{n-3} + \dots$$

con c_i interi non negativi e quello di $G.e$ è del tipo

$$P(G.e, k) = k^{n-1} - m_2k^{n-2} + d_1k^{n-3} - d_2k^{n-4} + \dots$$

dove m_2 è il numero di archi di $G.e$, con $m_2 \leq m$ e i coefficienti d_i sono interi non negativi.

Si ha così:

$$\begin{aligned}
 P(G, k) &= P(G - e, k) - P(G.e, k) \\
 &= (k^n - mk^{n-1} + c_1k^{n-2} - c_2k^{n-3} + \dots) + \\
 &\quad - (k^{n-1} - m_2k^{n-2} + d_1k^{n-3} - d_2k^{n-4} + \dots) \\
 &= k^n - (m + 1)k^{n-1} + (c_1 + m_2)k^{n-2} - (c_2 + d_1)k^{n-3} + \dots
 \end{aligned}$$

Questo mostra che valgono i punti 1, 2, 3 e 5. Inoltre, sia $c_t + d_{t-1}$ il primo coefficiente di $P(G, k)$ uguale a 0. Necessariamente, poiché c_i e d_i sono non negativi, c_t e d_{t-1} devono essere entrambi nulli. Da ciò segue che c_{t+1} e d_t sono entrambi nulli e in particolare lo è la loro somma, che corrisponde al termine successivo a $c_t + d_{t-1}$ in $P(G, k)$. Ciò dimostra il punto 6.

Infine, per dimostrare il punto 4, supponiamo per assurdo che il termine noto di $P(G, k)$ sia $c \in \mathbb{Z}^*$; si avrebbe $P(G, 0) = c$, il che equivale a dire che esistono c modi di colorare G con zero colori. Dal momento che non ci sono modi di colorare un grafo senza colori, questo porta ad un assurdo. \square

Segue ora un aspetto del polinomio cromatico già introdotto in precedenza come conseguenza della formula di connessione e contrazione. Lo si riporta come teorema così da fornirne una dimostrazione rigorosa.

Teorema 3.21. *Per un grafo G con numero cromatico χ , si ha*

$$P(G, k) = a_n P(K_n, k) + a_{n-1} P(K_{n-1}, k) + \dots + a_\chi P(K_\chi, k).$$

Dimostrazione. Per il Teorema 3.10 vale $P(G, k) = P(G + uv, k) + P(G.uv, k)$. Applicando ciò ad ogni iterazione e ricordando che al termine dell'algoritmo di connessione e contrazione si ha $C(G) = a_n K_n + a_{n-1} K_{n-1} + \dots + a_\chi K_\chi$ (vedi formula 2.1 nella Sezione 2.3) giungiamo alla tesi. \square

Osservazione 3.22. Il numero cromatico χ è il più piccolo intero non negativo che non annulla il polinomio cromatico. Questo fatto segue naturalmente dalla definizione di polinomio cromatico ma può essere anche visto come corollario del teorema appena enunciato. Se infatti esistesse un intero $k_0 < \chi$ tale che $P(G, k_0) \neq 0$, dovrebbe essere $P(K_r, k_0) \neq 0$, per almeno un $r \geq \chi$, ma dal Teorema 3.8, ciò risulta impossibile.

Teorema 3.23. *Il polinomio cromatico di un grafo G può essere scritto come*

$$P(G, k) = k(k-1) \cdots (k - (\chi - 1))Q(k),$$

ove $Q(k)$ indica un generico polinomio in k .

Dimostrazione. Per l'Osservazione 3.22, gli interi non negativi minori di χ annullano $P(G, k)$. Sono dunque radici del polinomio e vale la tesi. \square

Teorema 3.24. *Sia G un grafo non privo di archi. Il coefficiente di k in $P(G, k)$ è maggiore o uguale a zero se n è dispari; minore o uguale a 0 se n è pari.*

Dimostrazione. Dai Teoremi 3.20 e 3.19 si ha che i coefficienti di $P(G, k)$ si alternano in segno, il coefficiente direttore è 1 e il grado del polinomio è n . Per l'alternanza, sono positivi o nulli i coefficienti di k^{n-2}, k^{n-4}, \dots e negativi o nulli quelli di k^{n-1}, k^{n-3}, \dots . Dunque, k è nella prima lista se n è dispari, nella seconda se n è pari, da cui segue la tesi sul suo coefficiente. \square

3.4 Proprietà deducibili dal polinomio cromatico

Quanto visto fino ad ora ci permette, dato un grafo, di conoscere a priori alcune caratteristiche del suo polinomio cromatico e, viceversa, ci ha fornito alcune condizioni necessarie affinché un generico polinomio sia cromatico. Risulta ora interessante chiedersi, supposto di conoscere il polinomio cromatico ma non il grafo, se e quali aspetti del grafo possano dedursi e se, dato un polinomio cromatico, ad esso corrisponda un unico grafo o più.

Dedurre il numero di vertici e di archi è piuttosto facile, così come capire, dalla forma del polinomio, se il grafo associato è completo o privo di archi e ciò è stato ampiamente trattato nelle Sezioni 3.1 e 3.2. Vediamo ora come non risulti complicato capire se il grafo associato sia connesso o meno.

Teorema 3.25. *G è un grafo connesso se e solo se il coefficiente in k di $P(G, k)$ è non nullo.*

Dimostrazione. Supponiamo G non connesso e siano dunque G_1, \dots, G_p le sue componenti connesse. Per il Teorema 3.9, $P(G, k) = P(G_1, k)P(G_2, k) \cdots P(G_p, k)$. Poiché il termine noto di un polinomio cromatico è nullo, da ciò si osserva che il termine di grado minimo di $P(G, k)$ risulta essere k^p con $p > 1$. Questo implica necessariamente che il coefficiente di k è nullo. Quanto appena detto equivale a dimostrare che se il termine noto è non nullo allora G è connesso.

L'altra implicazione segue per induzione forte su $\dim G$, con G grafo connesso. Se $\dim G = 3$, l'unico grafo connesso possibile ha due vertici e un arco. Poiché tale grafo è completo, il suo polinomio cromatico è $P(G, k) = k(k - 1) = k^2 - k$ (vedi Proposizione 3.8). Perciò vale la tesi.

Mostriamo ora la tesi per un grafo connesso G , supponendola vera per ogni grafo connesso H con $\dim H < \dim G$. Ricordiamo che assumiamo per comodità $\dim V(G) = n$ e $\dim E(G) = m$. Consideriamo i grafi delezione e contrazione $G - e$ e $G.e$. Il primo ha $\dim G - e = \dim G - 1$; in particolare ha n vertici, $m - 1$ archi e non è detto sia connesso. Il grafo $G.e$ invece ha $n - 1$ vertici, al più $m - 1$ archi ed è connesso (l'operazione rimuove un arco ma connette i suoi estremi). Sfruttando quanto già sappiamo sui polinomi cromatici (vedi Proposizione 3.20) si ha dunque

$$\begin{aligned} P(G - e, k) &= k^n - (m - 1)k^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}c_1k, \\ P(G.e, k) &= k^{n-1} - m_2k^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2}d_1k, \end{aligned}$$

con $c_1 \geq 0$ e $d_1 > 0$. Inoltre si osservi che $(-1)^{n-1}$ e $(-1)^{n-2}$ hanno segno opposto. Applicando la formula 3.2, si ha

$$\begin{aligned} P(G, k) &= k^n - (m - 1)k^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}c_1k + \\ &\quad - [k^{n-1} - m_2k^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2}d_1k] \\ &= k^n - mk^{n-1} + \dots \pm (c_1 + d_1)k. \end{aligned}$$

Dunque, il coefficiente di k è non nullo. \square

Osservazione 3.26. Questo teorema caratterizza, attraverso il polinomio cromatico, i grafi connessi.

Vediamo ora un ulteriore aspetto del grafo deducibile dal polinomio cromatico e sempre legato alla connessione.

Teorema 3.27. *Il più piccolo r tale per cui il coefficiente di k^r è non nullo equivale al numero di componenti connesse di G .*

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dai Teoremi 3.9 e 3.25. \square

3.4.1 Equivalenza e unicità cromatica

Per quanto dal polinomio cromatico si possano dedurre caratteristiche del grafo associato e viceversa, in generale non sussiste una corrispondenza biunivoca tra grafi e polinomi cromatici. In altre parole, sebbene un grafo abbia un unico polinomio cromatico, questo può essere il polinomio cromatico anche di altri grafi. Ci sono però casi in cui questo non succede.

Definizione 3.28. *Due grafi G e H con lo stesso polinomio cromatico sono detti cromaticamente equivalenti.*

Osservazione 3.29. Due grafi isomorfi sono cromaticamente equivalenti, ossia l'equivalenza cromatica è condizione necessaria all'essere isomorfi ma non è sufficiente, ossia due grafi possono essere cromaticamente equivalenti senza essere isomorfi.

Definizione 3.30. *Un grafo G si dice cromaticamente unico se, per ogni grafo H con stesso polinomio cromatico, H è isomorfo a G . In altre parole, un tale grafo è univocamente determinato dal polinomio cromatico, a meno di isomorfismo.*

I grafi completi e i grafi privi di archi sono cromaticamente unici. Anche i cicli lo sono (come vedremo). Gli alberi sono un esempio di grafi cromaticamente equivalenti, ma non cromaticamente unici.

Teorema 3.31. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo G con n vertici sia un albero è che $P(G, k) = k(k-1)^{n-1}$.*

Dimostrazione. Mostriamo la condizione necessaria per induzione sul numero dei vertici n .

Se $n = 1$, $P(G, k) = k$, e se $n = 2$, G è completo e dunque $P(G, k) = k(k-1)$.

Supponiamo vera la tesi per ogni albero con al più $n-1$ vertici e consideriamo G albero con n vertici. Esiste necessariamente un vertice u di grado 1 poiché G è aciclico (vedi Proposizione 1.52). Applichiamo la formula di delezione e contrazione all'arco e adiacente a u . Risulta $G - e = G' \cup \{u\}$, ove G' è un albero con $n-1$ vertici e $\{u\}$ un vertice isolato e $G.e = G'$, con G' come sopra. Per ipotesi dunque $P(G.e, k) = k(k-1)^{n-2}$ e $P(G - e, k) = k(k-1)^{n-2}k$ per il Teorema 3.9. Applicando la formula (3.2), abbiamo $P(G, k) = k(k-1)^{n-2}k - k(k-1)^{n-2} = k(k-1)^{n-2}(k-1) = k(k-1)^{n-1}$.

Viceversa, sfruttando lo sviluppo binomiale, abbiamo

$$\begin{aligned} P(G, k) &= k(k-1)^{n-1} = k \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} k^{n-1-p} (-1)^p \\ &= \binom{n-1}{0} k^n - \binom{n-1}{1} k^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} k \\ &= k^n - (n-1)k^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} k. \end{aligned}$$

Se ne deduce che il grafo associato ha n vertici, $n-1$ archi ed è connesso poiché nel polinomio è presente il termine di grado 1 e perciò G deve essere un albero (si veda ancora la Proposizione 1.52). \square

Questo mostra quanto già detto, ossia che gli alberi con lo stesso numero di vertici hanno tutti lo stesso polinomio cromatico e sono dunque cromaticamente equivalenti ma, come sappiamo, non sono isomorfi tra loro, dunque non sono cromaticamente unici.

Teorema 3.32. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo G sia un n -ciclo è che $P(G, k) = (k - 1)^n + (-1)^n(k - 1)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione sul numero di vertici la condizione necessaria.

È facile osservare che per $n = 3$, G è un grafo completo e vale la formula. Supponiamo valga la formula per ogni ciclo con al più $n - 1$ vertici. Sia G è un n -ciclo e consideriamo $G.e$ e $G - e$, a partire da un arco e . $G.e$ è un $n - 1$ -ciclo, $G - e$ è un albero di n vertici. Utilizzando la formula (3.2), per il Teorema 3.31 e per ipotesi induttiva si ha

$$\begin{aligned} P(G, k) &= k(k - 1)^{n-1} - [(k - 1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k - 1)] \\ &= (k - 1)^n + (-1)^n(k - 1). \end{aligned}$$

Viceversa, procedendo con lo sviluppo binomiale di $P(G, k)$ risulta

$$\begin{aligned} P(G, k) &= k(k - 1)^{n-1} = (k - 1)^n + (-1)^n(k - 1) \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} k^{n-p} (-1)^p + (-1)^n(k - 1) \\ &= \binom{n}{0} k^n - \binom{n}{1} k^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} k + (-1)^n + \\ &\quad + (-1)^n k - (-1)^n \\ &= k^n - nk^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}(n - 1)k. \end{aligned}$$

Il grafo associato deve avere n vertici e n archi ed essere connesso. Ora, un grafo connesso con n vertici e $n - 1$ archi è un albero e se si aggiunge un arco, necessariamente si genera all'interno un ciclo. G deve dunque contenere un ciclo. Mostriamo che questo è unico e coincide col grafo stesso.

Per l'unicità, supponiamo esistano d cicli, con $d \geq 2$. Ora osserviamo che, togliendo un arco da ciascun ciclo, il grafo resta connesso. Si ha così un grafo connesso con n vertici e $n - d$ archi, ma ciò è possibile solo se $d \leq 1$. Da cui, per assurdo, l'unicità.

Sia ora $r \leq n$ il numero di vertici del ciclo, che chiamiamo C_r . Si può dunque pensare al grafo come costituito dal ciclo C_r e da uno o più rami che si sviluppano a partire dai vertici di C_r . In altre parole, ogni vertice del ciclo di grado 2 non ha altri vertici adiacenti non appartenenti a C_r e quindi nessun ramo. Da ogni vertice di grado 3 si sviluppa un ramo; da ogni vertice di grado 4 due e così via. Ognuno di questi rami è necessariamente connesso e aciclico per le ipotesi su G . Poiché i vertici al di fuori di C_r sono $n - r$, tali rami saranno al più $n - r$ e li chiamiamo T_j (usando degli apici per distinguere più rami che si originano dallo stesso vertice del ciclo) con $j \leq n - r$. Ognuno di essi ha in comune con C_r un solo vertice, che denotiamo con v_j , poiché altrimenti si otterrebbe un altro

ciclo oltre a C_r . Chiamiamo α_j , con $j \leq n - r$, il numero dei vertici di ciascun ramo e osserviamo che $\sum_j \alpha_j = n - r$. Si veda la Figura 3.6 per una maggiore chiarezza.

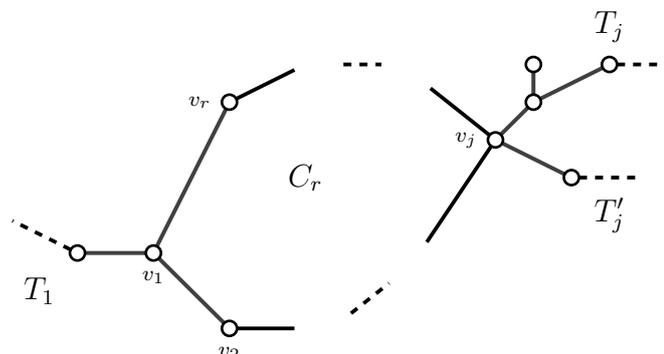


Figura 3.6: Il ciclo C_r e i rami T_j del grafo G nella seconda parte della dimostrazione del Teorema 3.32.

A questo punto costruiamo il polinomio cromatico di G . Dalla dimostrazione precedente sappiamo che $(k - 1)^r + (-1)^r(k - 1)$ è il polinomio cromatico di C_r . Ragioniamo ora sulle colorazioni dei restanti vertici. Percorrendo ogni ramo a partire dal vertice adiacente a v_j , osserviamo che esistono $k - 1$ modi per colorare tale vertice. Analogamente per ciascun altro vertice del ramo (perché l'unico colore che dobbiamo escludere è quello del vertice adiacente già colorato). Si hanno così $(k - 1)^{\alpha_j}$ modi possibili per colorare il ramo e questo vale per ogni ramo T_j ; inoltre ciascuna colorazione è indipendente dalle altre per come abbiamo definito i rami.

Dunque il polinomio cromatico di G può essere scritto come

$$\begin{aligned} P(G, k) &= P(C_r, k) \prod_j (k - 1)^{\alpha_j} \\ &= [(k - 1)^r + (-1)^r(k - 1)](k - 1)^{n-r} \\ &= (k - 1)^n + (-1)^r(k - 1)^{n-r+1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Per ipotesi ricordiamo valere

$$P(G, k) = (k - 1)^n + (-1)^n(k - 1). \quad (3.4)$$

Eguagliando le formule (3.3) e (3.4), si ha

$$(-1)^r(k - 1)^{n-r+1} = (-1)^n(k - 1),$$

il che implica $n = r$, ossia che il ciclo coincide con il grafo G . \square

Questo mostra che, essendo gli n -cicli isomorfi tra loro, essi sono anche cromaticamente unici.

Bibliografia

- [1] J.A. Bondy e U.S.R. Murty. *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.
- [2] B. Brimkov. *Efficient Computation of Chromatic and Flow Polynomials*. Tesi di dottorato, Rice University, 2015.
- [3] D.W. Cranston e L. Rabern. Brooks' theorem and beyond. *Journal of Graph Theory*, 80(3):199–225, 2015.
- [4] R. Diestel. *Graph Theory*. Electronic library of mathematics. Springer, 2005.
- [5] L. Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pagine 128–140, 1741.
- [6] R Merris. *Graph theory*. John Wiley & Sons, 2011.
- [7] R.C. Read. An introduction to chromatic polynomials. *Journal of combinatorial theory*, 4(1):52–71, 1968.
- [8] E. Süli e D.F. Mayers. *An introduction to numerical analysis*. Cambridge university press, 2003.
- [9] Wikipedia contributors. Chromatic polynomial — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Chromatic_polynomial&oldid=1184115066, 2023.
- [10] Wikipedia contributors. Four color theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Four_color_theorem&oldid=1184984429, 2023.
- [11] Wikipedia contributors. Seven Bridges of Königsberg — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg&oldid=1186999017, 2023.