

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Meccanismi di produzione dell'energia in
astrofisica**

Tesi di laurea

Presentata da:
Stefano Tumino

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Anno Accademico 2023-2024

*Noi siamo l'incarnazione locale di un Cosmo
cresciuto fino all'autocoscienza. Abbiamo
incominciato a comprendere la nostra origine:
siamo materia stellare che medita sulle stelle.*

-Carl Sagan

Indice

1	Processi stellari	5
1.1	Reazioni termonucleari	6
1.1.1	Catena protone-protone	6
1.1.2	Ciclo CN-NO	8
1.1.3	Processo 3α	9
1.1.4	Reazioni termonucleari successive	10
1.2	Esplosioni di Supernovae	10
1.2.1	SNe termonucleari	11
1.2.2	SNe per collasso del nucleo	11
2	Processi gravitazionali	13
2.1	Raggio di Schwarzschild ed efficienza del processo	13
2.2	Luminosità di Eddington	14
3	Riconnessione magnetica	17
3.1	Modello di Sweet-Parker	17
3.2	Modello di Petschek	19
	Appendici	20
A		21

Abstract

Nell'infinita comprensione dell'universo, lo studio dei meccanismi di produzione dell'energia in astrofisica riveste un ruolo fondamentale.

Questa tesi propone l'esplorazione dei principali processi che guidano la creazione di energia nelle stelle, nelle galassie e in altri enti celesti, illuminando i misteri che alimentano la nostra comprensione dell'universo. Attraverso un'analisi della fusione nucleare nelle stelle, si esplorerà il cuore ardente delle Supernove, dove elementi cruciali per la vita e la formazione planetaria trovano origine. Si spingerà poi oltre il confine stellare, passando ai meccanismi intricati dell'accrescimento gravitazionale e della riconnessione magnetica e svelando i processi che alimentano la danza cosmica delle particelle elementari.

Capitolo 1

Processi stellari

Il processo principale di produzione dell'energia nelle stelle è sicuramente il meccanismo della fusione nucleare. Le stelle sono sistemi autogravitanti all'equilibrio idrostatico, dove istante per istante la pressione del gas bilancia il collasso gravitazionale. I modelli stellari in uso idealizzano strutture a simmetria sferica, costituite da gusci concentrici e omogenei ove vale la condizione di equilibrio termico locale (LTE, Local Thermal Equilibrium). Mediante una serie di considerazioni e ipotesi, si ricavano le 7 equazioni degli interni stellari che descrivono la struttura quasi-stabile di una stella. Tra queste si ha la conservazione della massa, l'equilibrio idrostatico e l'equazione di stato. Del sistema di equazioni, se ne considera una in particolare, caratteristica degli obiettivi del presente capitolo. Si tratta dell'equazione del bilancio energetico:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon \quad (1.1)$$

dove $\varepsilon = \varepsilon(X, Y, \rho, T)$ è un coefficiente che dipende dalla composizione chimica X, Y del guscio, dalla sua densità ρ e dalla temperatura T . Il valore assunto da ε dipende dalla specifica reazione termonucleare che si considera e quindi dalla fase di vita della stella stessa. Il vincolo principale per la fusione nucleare risulta essere il superamento della barriera di potenziale coulombiana, come mostrato in figura 1.1. Se un protone libero vince la repulsione prodotta dai protoni già presenti nel nucleo atomico, entra nel raggio d'azione dell'interazione nucleare forte legandosi al nucleo stesso e dando un nuovo elemento.

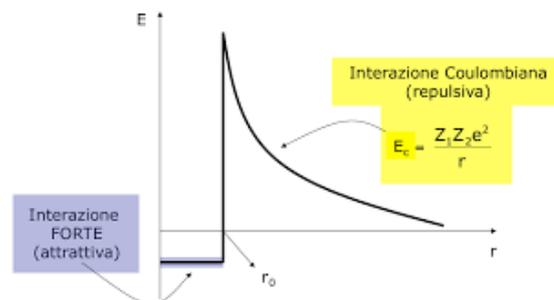


Figura 1.1: Barriera di potenziale affinché l'interazione forte prevalga sulla forza elettromagnetica (slide del prof. Cuffiani).

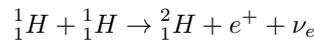
1.1 Reazioni termonucleari

La fase di vita più stabile e duratura di una stella viene scandita dal bruciamento dell'idrogeno e permette alle stelle che lo compiono di mantenere la posizione in *main sequence* all'interno del diagramma H-R. Si tratta della prima reazione che può accendersi, essendo l'idrogeno l'elemento più abbondante in composizione chimica stellare¹, e opera a temperature di circa $10^7 K$. Il meccanismo consiste nella reazione $4\,{}^1_1H \rightarrow {}^4_2He$ con efficienze molto grandi, relativamente ad altri processi di fusione, seppur diversi in funzione della tipologia di reazione dell'idrogeno che si considera.

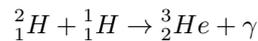
1.1.1 Catena protone-protone

Nota semplicemente come catena PP, è la prima reazione che prende luogo nel core di una stella e si differenzia in tre distinti canali: PPI, PPII, PPIII.

La reazione di partenza è la stessa per tutte le possibili vie e comincia con la fusione di due nuclei di prozio, idrogeno leggero, in un nucleo di deuterio mediante decadimento β^+ , secondo la reazione:

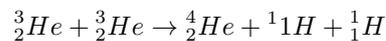


Il processo porta alla produzione di energia pari a $1.44 MeV$ ma circa il 18% viene perduta a causa dei neutrini. Il tempo caratteristico per innescare la reazione è il più alto nel contesto nella catena PP e vale circa $1.4 \cdot 10^9 yr$. Con l'accumulo del deuterio, aumenta la probabilità di cattura protonica, con conseguente formazione di di elio-3:



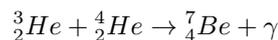
Viene prodotta energia pari a $5.49 MeV$ ed il tempo caratteristico associato risulta particolarmente breve, circa 6 secondi.

A questo punto l'elio può seguire due vie distinte. La prima strada, nota come **PPI**, avviene con una probabilità del 69% e consiste nella produzione di un nucleo di elio-4 mediante fusione di due nuclei di elio-3 secondo la reazione:



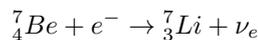
Si produce energia pari a $12.85 MeV$ in un tempo pari a circa $10^6 yr$.

La seconda via, cui si associa la restante probabilità del 31%, fa reagire i due isotopi dell'elio tra di loro:

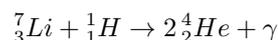


La reazione produce energia pari a $1.59 MeV$ e possiede un tempo caratteristico circa analogo a quello della reazione precedente. Tuttavia, affinché si segua questa via, servono temperature maggiori, circa $1.4 \cdot 10^7 K$.

Ora, il berillio così prodotto, può seguire due distinte catene. La prima, nota come **PPII**, cui si associa una probabilità del 99.7%, inizia con la cattura elettronica da parte del berillio-7, con conseguente trasmutazione di un protone in un neutrone all'interno del nucleo:



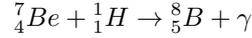
Viene prodotta energia pari a circa $0.86 MeV$, di cui il 93% sottratta dal neutrino. Il tempo caratteristico associato alla reazione corrisponde a circa $0.4 yr$. Infine, il litio-7 effettua cattura protonica, producendo due nuclei di elio-4 secondo la reazione:



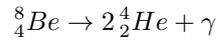
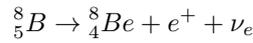
¹Per il nostro Sole si ha $X = 0.71$, $Y = 0.27$, $Z = 0.02$

Producendo un'energia pari a circa $17.35MeV$ in un tempo caratteristico di 6 minuti.

Con una probabilità dello 0.3%, la catena **PPIII** permette la produzione di boro-8 dal berillio mediante cattura protonica:



L'energia prodotta è minore di qualunque altra reazione di fusione ed equivale a $0.135MeV$ con un tempo caratteristico di circa $66yr$. Il boro è un elemento molto instabile, per cui tende a dare decadimento β^+ trasmutando in un nucleo di berillio-8, che a sua volta si scinde in due nuclei di elio-4:



L'energia prodotta dalle due reazioni corrisponde a $18.07MeV$ con perdite energetiche del 40% per la presenza di neutrini.

In figura 1.2 si può osservare una schematizzazione delle reazioni appena viste.

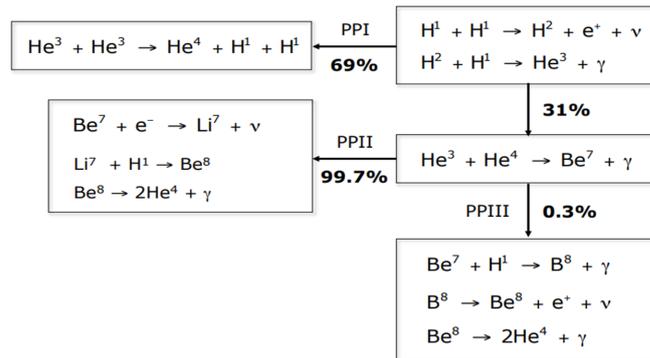


Figura 1.2: Differenti canali della catena protone-protone con associate probabilità di attivazione (slide del prof. Ferraro).

In totale, la catena PPI produce energia pari a $26.2MeV$ con perdite di $0.5MeV$, la seconda catena produce $25.7MeV$ con perdite di circa $1MeV$ e la terza $(19.3 - 7.5)MeV$. L'efficienza di reazione ha una forte dipendenza dalla temperatura e, nel caso delle catene protone-protone, si calcola come:

$$\varepsilon_{pp} = \varepsilon_1 \rho X^2 T_6^{\nu_{pp}} \quad (1.2)$$

dove ρ indica la densità dell'ambiente circostante, X l'abbondanza relativa dell'idrogeno, T_6 la temperatura espressa in milioni di kelvin e $\nu_{pp} \in [3.5, 6]$ è un coefficiente che dipende dalla temperatura.

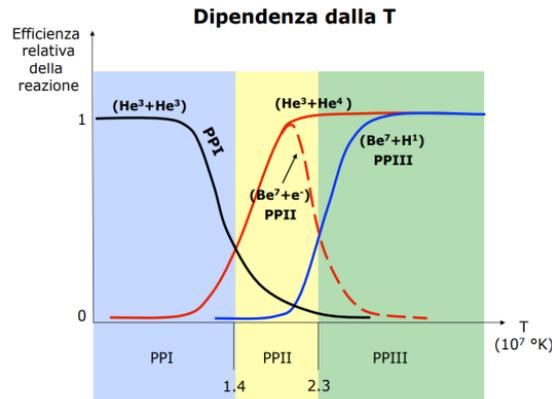
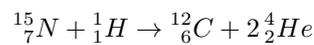
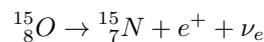
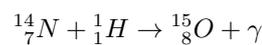
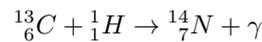
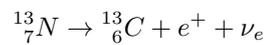
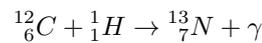


Figura 1.3: Grafico di $\epsilon = \epsilon(T)$ per le diverse catene PP (slide del prof. Ferraro).

1.1.2 Ciclo CN-NO

Un ciclo alternativo di bruciamento dell'idrogeno fa uso di nuclei catalizzatori per ottenere elio-4 dal prozio. Questi catalizzatori sono carbonio, azoto e ossigeno e non vengono prodotti da reazioni interne alla stella che compie il ciclo ma sono stati prodotti in età precedenti da stelle più vecchie e rilasciate nel mezzo interstellare. Il ciclo avviene a temperature di circa $1.5 \cdot 10^7 K$ e il **meccanismo principale** risulta essere composto dalle seguenti reazioni, schematizzate in figura 1.4:



Il ciclo produce energia netta equivalente a circa $25 MeV$ e ha l'effetto globale di fondere 4 nuclei di idrogeno leggero per formarne uno di elio-4. I nuclei catalizzatori subiscono variazioni nelle loro abbondanze relative in relazione ai tempi caratteristici delle reazioni. La più lenta risulta essere la cattura protonica da parte dell'azoto-14 con un tempo pari a $3.2 \cdot 10^8 yr$, per cui si verificherà un accumulo di tale nucleo. Per questo motivo, il ciclo appena visto si divide in un ramo veloce, costituito dalle prime tre reazioni, e un ramo lento.

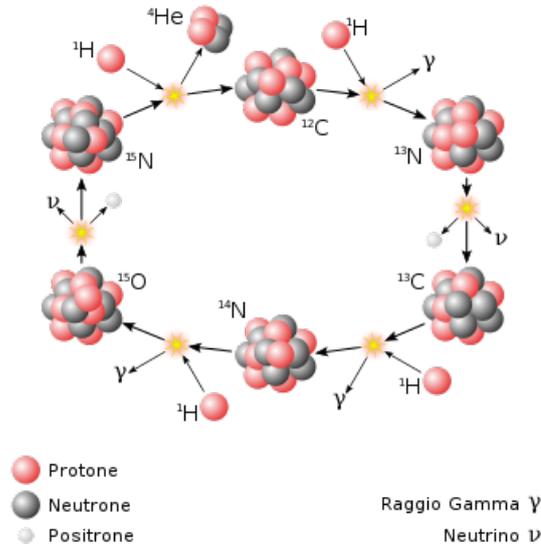
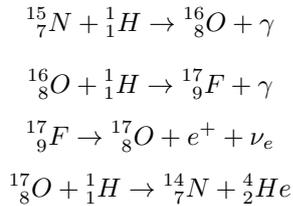


Figura 1.4: Schematizzazione del ciclo principale CN-NO (slide del prof. Ferraro).

All'aumentare della temperatura corrisponde un'attivazione di multipli **cicli secondari** alimentati da catture protoniche in serie. Uno dei principali cicli secondari, che prende luogo per $T = 1.7 \cdot 10^7 K$, è rappresentato dalla cattura protonica dell'azoto-15 che produce ossigeno-16 che a sua volta compie un'altra cattura:



L'energia prodotta dal presente ciclo vale $24.9 MeV$, di poco inferiore a quella prodotta dal ciclo principale.

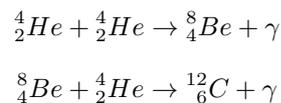
L'efficienza di reazione per il presente ciclo si calcola come:

$$\varepsilon_{CN} = \varepsilon_2 \rho X X_{CN} T_6^{\nu_{CN}} \quad (1.3)$$

dove X_{CN} rappresenta l'abbondanza dei nuclei catalizzatori e $\nu_{CN} = \nu_{CN}(T) \in [13, 20]$ un coefficiente caratteristico del processo.

1.1.3 Processo 3α

Esaurito il combustibile principale nel nucleo ($X < 0.05$), il nucleo della stella inizia a contrarsi, aumentando la temperatura interna. Quando $T_{core} = 10^8 K$ si innesca la reazione di fusione dell'elio-4 per formare nuclei più pesanti. Il processo consta di due reazioni:



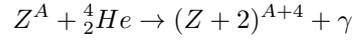
La prima reazione è endoenergetica e assorbe $0.1MeV$. Il prodotto è un nucleo particolarmente instabile che decade in tempi molto rapidi, con emivita di circa $6.7 \cdot 10^{-17}s$. Ma la grande abbondanza di elio fa sì che ci siano elevate probabilità di interazione tra berillio-8 ed elio-4, dando luogo alla seconda reazione. L'energia prodotta dal ciclo vale $7.3MeV$ ed la corrispondente efficienza di reazione vale:

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_3 \rho^2 Y^3 T_8^{\nu_{3\alpha}} \quad (1.4)$$

dove Y rappresenta l'abbondanza relativa dell'elio, T_8 la temperatura in 100 milioni di kelvin e $\nu_{3\alpha} = \nu_{3\alpha}(T) \in [20, 30]$ un coefficiente caratteristico del processo.

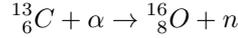
1.1.4 Reazioni termonucleari successive

Per stelle con masse significativamente grandi, circa $M > 8M_\odot$, al termine del bruciamento dell'elio nel nucleo stellare, l'andamento della temperatura torna a crescere, consentendo i processi di cattura α . In generale, tali reazioni vengono schematizzate come segue:

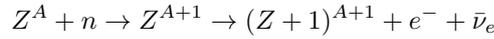


In primis, con temperature di circa $6 \cdot 10^8 K$ inizia il bruciamento del carbonio-12 che produce ${}^{16}_8O$. A temperature di circa $10^9 K$ cominciano le reazioni che trasmutano l'ossigeno in neon-20. Successivamente si attivano le reazioni del magnesio, poi del silicio e successivi, fino al più, al ferro-56. A temperature tanto elevate, l'energia perduta per la produzione di neutrini diventa rilevante.

I processi di cattura α possono portare alla produzione di neutroni liberi. Un esempio, è rappresentato dalla reazione:



con produzione di energia pari a circa $2.2MeV$. La presenza di neutroni e i caratteristici reggimi di temperatura possono portare a processi di cattura neutronica che concorrono nella produzione di elementi pesanti. Tali reazioni si generalizzano nella forma:



Tali catture possono avvenire secondo due distinte vie, in base ad un confronto tra tempi scala di riferimento. Difatti, i neutroni liberi sono soggetti a decadimento β^- , con produzione di un protone libero, in un tempo caratteristico di circa 10 minuti. Confrontando il tempo di cattura di un neutrone τ_n con il suo tempo di decadimento τ_β , si ricavano due processi di cattura neutronica: processi s e processi r. I primi (slow), sono processi lenti che si verificano per $\tau_\beta < \tau_n$. A seguito della cattura, il nucleo diventa instabile e decade prima di poter catturare nuovamente. Tali processi sono caratteristici delle fasi di AGB di stelle di piccola massa. I processi r (rapid) si verificano per $\tau_\beta > \tau_n$. Ivi, il nucleo è in grado di compiere più catture prima di subire decadimento. Si tratta di processi che caratterizzano le esplosioni di Supernovae di tipo II.

1.2 Esplosioni di Supernovae

Le esplosioni di Supernovae rappresentano l'ultima opera, spettacolare e distruttiva, del ciclo evolutivo di una stella molto massiva. L'esplosione libera una quantità di energia tale da divenire più brillante di un'intera galassia, arrivando a luminosità dell'ordine del miliardo di volte la luminosità solare, ossia circa $10^{42} erg/s$.

Le Supernovae (SNe) si classificano, dal punto di vista spettrale, in tipo I e tipo II. Le Supernovae di tipo I, a loro volta, si sottoclassificano in Ia se il loro spettro contiene righe del

silicio; Ib se contiene righe dell'elio; Ic in tutti gli altri casi. Le SNe di tipo II presentano, invece, righe dell'idrogeno. I processi che portano alle spettacolari esplosioni possono essere classificati in due tipologie: Supernovae termonucleari e SNe per collasso del nucleo (CC, Core Collapse).

1.2.1 SNe termonucleari

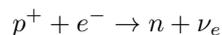
Le SNe termonucleari sono le tipo Ia e sono caratteristiche di sistemi binari composti da due nane bianche (WDs, White Dwarfs) o da una WD che si accresce da una stella compagna non degenera. Lo scenario più accettato per la spiegazione del fenomeno è noto come *Double Degenerate Scenario* (DDS) e suppone che il sistema, formato da due stelle di massa intermedia, evolva in una serie di fasi in cui gli strati più esterni delle singole stelle diventino strati comuni del sistema. Si ha in questo modo perdita di massa e perdita di momento angolare che porta le stelle a divenire sempre più vicine fino ad una fusione dei nuclei e degli strati restanti. Si verifica, così, un rapido aumento di massa al punto da superare il limite di Chandrasekhar² e innescare la combustione del carbonio. In questo modo, la temperatura del nucleo continua ad aumentare con conseguente avvio della reazione di fusione dell'ossigeno, che proseguono a ritmi più lenti rispetto al carbonio. La pressione di degenerazione degli elettroni non dipende dalla temperatura, per cui la stella non è in grado di espandersi per raffreddarsi e rallentare il processo, così da divenire sensibile ad una esplosione termica. Infine, le reazioni subiscono una considerevole accelerazione a causa dell'instabilità di Rayleigh-Taylor e delle interazioni con turbolenze interne. Si suppone che il fronte di combustione sia così in grado di trasformare l'esplosione subsonica in una detonazione supersonica distruggendo la stella. Tutti gli elementi prodotti vengono rilasciati nel mezzo interstellare, arricchendolo di metalli pesanti.

Un secondo scenario ipotizzato è noto come *Single Degenerate Scenario* (SDS) e consiste in un sistema binario ove la nana bianca si trova a distanza ridotta dalla compagna, tipicamente una gigante rossa. Il campo di gravità della WD è tale da avviare un trasferimento di massa dalla compagna, che perde i suoi strati più esterni. A seguito di tale trasferimento, la nana può accrescere la propria massa al punto da superare il limite di Chandrasekhar e concludere il ciclo come già visto per lo scenario precedente. Tuttavia, le osservazioni non supportano tale scenario per la mancanza di righe dell'idrogeno a seguito dell'esplosione. Difatti, gli strati più esterni sottratti alla compagna sarebbero composti prevalentemente dal suddetto elemento, con conseguente emissione di righe caratteristiche.

1.2.2 SNe per collasso del nucleo

Le Supernovae per collasso nucleare sono le SNe di tipo Ib, Ic e II e sono esplosioni di stelle con massa maggiore alle $8M_{\odot}$. Grazie alla loro mole, questi corpi sono in grado di innescare un numero sempre crescente di reazioni termonucleari a seguito dell'esaurimento di un determinato combustibile, conseguente contrazione e aumento di temperatura e densità in particolari gusci sferici. Tali stelle possono bruciare tutti gli elementi fino al ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, che rappresenta la soglia limite per le reazioni esoenergetiche. Dal ferro in poi, le reazioni assorbono più energia di quanta ne producano, diventando endoergoniche. A questo punto, si innescano due diversi processi autoalimentati che portano alla distruzione della stella: il processo URCA e la fotodisintegrazione del ferro-56.

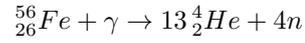
Il processo URCA segue dagli elevatissimi valori di temperatura e densità nucleari, permettendo l'interazione tra protoni ed elettroni in trasmutazioni che producono neutroni e neutrini:



²Per una nana bianca a lenta rotazione il limite vale $1.44M_{\odot}$ e corrisponde alla massa più elevata per cui gli elettroni degeneri riescono a compensare il collasso gravitazionale.

I neutrini interagiscono scarsamente con la materia circostante e possono quindi fuggire dalla struttura portando con loro energia cinetica, con conseguente raffreddamento del nucleo. La stella reagisce contraendosi e, in questo modo, il fenomeno si autoalimenta.

Il secondo meccanismo si verifica per temperature dell'ordine di $10^{10} K$, dove il ferro si disgrega in nuclei di elio-4 e neutroni liberi secondo la reazione:



Entrambi i processi producono neutroni, i quali possono compattarsi molto più dei protoni poiché possiedono carica elettrica nulla. In tempi molto brevi il nucleo si compatta e gli strati superiori entrano in caduta libera su di esso (si veda figura 1.5). Al momento dell'impatto, si produce un'onda d'urto che espelle il materiale circostante il nucleo ultra-denso, producendo l'esplosione di Supernovae. Il residuo del fenomeno è una stella di neutroni. Per approfondimenti, si veda l'appendice A.

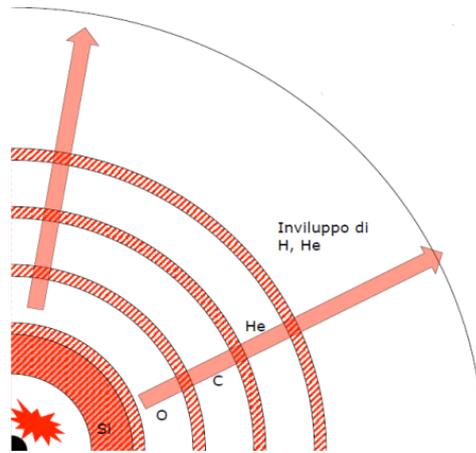


Figura 1.5: Fasi antecedenti una esplosione di Supernovae per collasso del nucleo (slide del prof. Ferraro).

Capitolo 2

Processi gravitazionali

La produzione di energia mediante processi gravitazionali risulta il meccanismo più efficiente tra tutti quelli conosciuti. Tale produzione si verifica mediante il fenomeno dell'accrescimento attorno ad un buco nero (BH, Black Hole) o ad una stella di neutroni. In particolare, i buchi neri di interesse per la seguente trattazione risultano i buchi neri supermassicci (SMBHs, Super-Massive Black Holes) circondati da materiale quale gas e polveri. Tali oggetti vennero scoperti per la prima volta intorno agli anni '60 e la loro natura rimase controversa fino alla fine degli anni '80. Vennero denominati quasar, contrazione di *quasi-stellar radio objects*, poichè scoperti in quanto forti radiosorgenti con emissione nell'ottico puntiforme, simile ad una stella.

Caratteristiche principali dei suddetti oggetti risultano: la loro elevata magnitudine apparente, tanto grande da farli risultare visibili ad un telescopio professionale; presentano redshift cosmologico significativo, arrivando quindi a distanze dell'ordine del miliardo di parsec; possiedono variabilità dell'ordine di qualche giorno, per cui le loro dimensioni devono essere relativamente ridotte¹.

2.1 Raggio di Schwarzschild ed efficienza del processo

Lo studio di questi oggetti è completamente basato sulla relatività generale, la cui parte temporale restituisce un risultato molto interessante. Si può quindi ricavare una grandezza nota come raggio di Schwarzschild R_S definito come:

$$R_S = \frac{2GM_{BH}}{c^2} \quad (2.1)$$

Il significato fisico è duplice: in primis, il raggio di Schwarzschild è un momento nel tempo in cui si perde la relazione di causalità con il mondo esterno; in secondo luogo, esso rappresenta la sezione d'urto gravitazionale vista da un'onda gravitazionale che incontra un buco nero durante la sua propagazione, un analogo della sezione d'urto Thomson per l'elettrone visto da un'onda elettromagnetica. La formula (2.1) si può ricavare anche mediante un ragionamento basato sulla fisica classica, seppur impreciso nel contesto in cui lo si applica. Dal raggio di Schwarzschild si ricava un'altra grandezza di interesse nello studio dei quasar nota come $R_{ISCO} = 3R_S$ (Innermost Stable Circular Orbit), dove il materiale comincia a muoversi lungo orbite circolari che riducono sempre di più il loro raggio, subendo una lenta caduta in direzione del buco nero.

¹Per ogni sistema è possibile definire un tempo di coerenza $t_{coer} = D/c$, con D dimensione lineare del sistema e c velocità della luce. Questa grandezza rappresenta il tempo minimo trascorso il quale il sistema può subire variazioni significative, ossia il tempo minimo affinché l'informazione passi da un estremo all'altro.

La produzione energetica del processo dipende proprio dalla materia vincolata tra i due raggi limite. L'attrazione gravitazionale attira il materiale verso il BH, compiendo lavoro di compressione. Il gas subisce trasformazione politropica, per cui si scaldereà ed emetterà radiazione per il secondo principio della termodinamica. Inoltre, al processo di emissione descritto possono aggiungersi altri meccanismi di emissione, quali Bremsstrahlung, sincrotrone o scattering (se si verificano le opportune condizioni). Per procedere al calcolo dell'efficienza di conversione massa-energia, si considera l'energia totale del sistema:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{BH}m}{R^2} \quad (2.2)$$

Nel caso di orbite circolari, vale la relazione:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM_{BH}}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_{BH}}{R}$$

Sostituendo il risultato così trovato per la velocità nella (2.2), si ricava:

$$E(R) = \frac{GM_{BH}m}{2R} - \frac{GM_{BH}m}{R} = -\frac{GM_{BH}m}{2R} \quad (2.3)$$

Si considera ora la differenza di energia tra l'orbita a $3R_S$ e l'orbita a R_S , ossia considerando le due grandezze di riferimento di cui sopra:

$$\Delta E = E_{R_S} - E_{3R_S} = \frac{GM_{BH}m}{2R_S} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{GM_{BH}m}{3R_S} = \frac{m}{6}c^2 \quad (2.4)$$

Si ricava così un'efficienza pari a $\varepsilon \approx 1/6$, ma facendo i conti con la relatività generale, tale valore si ridimensiona. In definitiva, si ricava $\varepsilon \approx 10\%$, che può arrivare fino a $\sqrt{2} - 1$ per buchi neri rotanti.

Nota l'efficienza del processo, si vuole calcolare la luminosità prodotta dal fenomeno dell'accrescimento nell'ipotesi in cui un ammontare di massa dm finisce oltre l'orizzonte degli eventi. L'energia emessa dal processo viene calcolata mediante la relazione massa-energia $dE = \varepsilon dm c^2$. Derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon \frac{dm}{dt} c^2$$

così da ricavare:

$$\boxed{L_{accr} = \varepsilon \dot{m} c^2} \quad (2.5)$$

2.2 Luminosità di Eddington

Via via che il materiale cade nel buco nero, si produce emissione di fotoni che genera una pressione di radiazione sul materiale in caduta. Il fenomeno è legato alla natura dell'interazione elettromagnetica. Difatti, dal punto di vista classico, i fotoni vedono, nel loro tragitto, le particelle cariche come oggetti tridimensionali con una data superficie nota come sezione d'urto, sulla quale è possibile applicare una certa forza. Si usa come riferimento la sezione d'urto Thomson $\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} m^2$ che risulta inversamente proporzionale alla massa della particella carica considerata. Pertanto, si può trascurare il caso del protone e portare avanti solo l'interazione dell'elettrone.

Per il calcolo della luminosità di Eddington, si considera in primis l'impulso di un singolo fotone per unità di tempo come:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} \quad (2.6)$$

Si moltiplica il risultato appena ottenuto per il numero di fotoni per unità di frequenza $N(\nu)$, così da ottenere l'impulso totale di un insieme di fotoni:

$$N(\nu) = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2} \frac{1}{h\nu} \quad (2.7)$$

$$p_{tot} = N(\nu)p = \frac{L(\nu)}{4\pi cr^2} \quad (2.8)$$

Si trova quindi un vento di fotoni che cade sulla materia che trasporta un impulso p_{tot} . Nell'ipotesi di simmetria sferica, alla distanza r dal buco nero si ha una densità elettronica $n_e(r)$ e, nell'ipotesi di plasma neutro, si ha $n_p = n_e$. Considerando il sistema otticamente sottile, l'impulso trasferito dal vento di fotoni agli elettroni è pari a:

$$p_{\gamma \rightarrow e^-} = p_{tot} n_e \sigma_T = \frac{L(\nu) n_e \sigma_T}{4\pi cr^2} \quad (2.9)$$

Integrando su tutte le frequenze, si ricava:

$$p_{\gamma \rightarrow e^-} = \frac{L n_e \sigma_T}{4\pi cr^2} \int_0^\infty f(\nu) d\nu \quad (2.10)$$

La funzione $f(\nu)$ è la distribuzione spettrale di energia (SEE, spectral Energy Distribution) ed il suo integrale restituisce valore unitario. In verità, facendo i conti con l'elettrodinamica quantistica, si ricaverebbe una sezione d'urto più precisa, che tiene conto di correzioni quantistiche. Viene chiamata sezione d'urto di Klein-Nishina σ_{kn} e si può scrivere in funzione della sezione d'urto Thomson mediante introduzione di un fattore correttivo:

$$\sigma_{kn} = G_{kn} \sigma_T \quad (2.11)$$

In questo modo, si ottiene un impulso trasferito nella forma:

$$p_{\gamma \rightarrow e^-} = \frac{L n_e \sigma_T}{4\pi cr^2} G_{kn} \quad (2.12)$$

Trovando l'impulso trasferito per unità di tempo. Ma, essendo un impulso per unità di tempo una forza, si è così trovato il modulo della forza radiativa F_{rad} . Tale grandezza bilancia la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal buco nero sul materiale circostante:

$$F_g = \frac{GM_{BH}}{r^2} (n_e m_e + n_p m_p) \quad (2.13)$$

Ivi, si trascura la massa dell'elettrone, se confrontata con quella del protone, e si usa $n_e = n_p$, così da ricavare:

$$F_g = \frac{GM_{BH}}{r^2} n_e m_p G_x \quad (2.14)$$

Ove si è aggiunto un fattore correttivo G_x che tiene conto della composizione chimica della nube. Eguagliando le forze, si ottiene:

$$\frac{L n_e \sigma_T}{4\pi cr^2} G_{kn} = \frac{GM_{BH}}{r^2} n_e m_p G_x \quad (2.15)$$

da cui si ricava:

$$\frac{n_e(r)}{r^2} \left(\frac{L\sigma_T}{4\pi c} G_{kn} - GM_{BH}m_p G_x \right) = 0 \quad (2.16)$$

Il primo fattore è nullo solo in assenza di materiale intorno al BH ed è quindi un caso banale. Si studia quindi il secondo termine

$$\frac{L\sigma_T}{4\pi c} G_{kn} - GM_{BH}m_p G_x = 0 \quad (2.17)$$

da cui, mediante semplici passaggi algebrici, si ottiene:

$$\boxed{L_{Edd} = \frac{4\pi G c m_p}{\sigma_T} M_{BH} \frac{G_x}{G_{kn}}} \quad (2.18)$$

Si ricava così quel valore della luminosità che bilancia la pressione di radiazione con l'attrazione gravitazionale. Il rapporto tra i fattori correttivi assume valore in un intorno di 1. Raggiunta la luminosità di Eddington, l'accrescimento cessa. Tuttavia, il fenomeno non va interpretato come una interruzione istantanea dei processi, ma come un valore limite. In quest'ottica, un buco nero può superare la sua luminosità di Eddington, ma non può farlo per sempre. Nel caso di un BH super-Eddington, si osserva una inversione del processo, secondo cui il gas che stava cadendo si autospegne e viene spinto verso l'esterno.

Si nota facilmente che L_{Edd} è direttamente proporzionale alla massa del buco nero e la costante di proporzionalità è data da un insieme di costanti fisiche:

$$L_{Edd} = AM_{BH} \quad A = 6.3 \cdot 10^4 \frac{erg}{s \cdot g} \quad (2.19)$$

Per semplicità, si tende a calcolare la massa del buco nero in masse solari. Per un oggetto di massa pari a $1M_{\odot}$, si ottiene un limite di Eddington pari a:

$$L_{Edd,\odot} = AM_{\odot} \approx 1.2 \cdot 10^{38} erg/s \quad (2.20)$$

Allora, per un generico oggetto di massa M , in unità di masse solari, si ricava la relazione lineare:

$$L_{Edd} = \frac{M}{M_{\odot}} L_{Edd,\odot} \quad (2.21)$$

Capitolo 3

Riconnessione magnetica

Si tratta di un fenomeno che si verifica in plasmi altamente conduttivi, dove la topologia magnetica subisce variazioni a seguito di cambiamenti delle linee di campo magnetico \vec{B} . Il processo consente di convertire l'energia immagazzinata dal campo in altre forme di energia, quali cinetica e termica. Generalmente, l'evoluzione temporale può avvenire ad una velocità compresa tra quella di diffusione del campo magnetico e la velocità delle onde di Alfvén, che rappresentano la massima velocità alla quale può propagarsi una instabilità.

Il fenomeno è stato studiato inizialmente per spiegare le eruzioni solari, eventi straordinariamente energetici in grado di produrre protuberanze di plasma con annessi venti solari. Nella seconda metà del 1800, si osservò lo stesso evento su diverse stelle, lasciando ipotizzare che fosse comune in queste strutture. Nello studio dei brillamenti, si osservò la formazione di queste protuberanze caratteristiche legate ad un accavallamento di linee di campo magnetico, vincolate in una regione magnetica instabile, che vengono spezzate in alcuni punti producendo radiazione. Si può considerare come una violazione del teorema di Alfvén, una legge non rigorosa della fisica del plasma.

Le teorie sulla riconnessione magnetica, il modello di Sweet-Parker e quello di Petschek, spiegano in modo distinto il fenomeno in oggetto. Tuttavia, è possibile un connubio tra le due mediante una condizione aggiuntiva alla teoria di Petschek, che riduce il modello a quello di Sweet-Parker con resistività costante nello spazio.

3.1 Modello di Sweet-Parker

Il modello deriva dalla magneto-idrodinamica (MHD, Magneto-HydroDynamics) incomprimibile e bidimensionale. Si considera la riconnessione magnetica tra due cilindri con flusso poloidale opposto e si suppone che le velocità indotta sia minore della velocità di Alfvén, tranne negli strati di riconnessione e di separazione (Fig. 3.1).

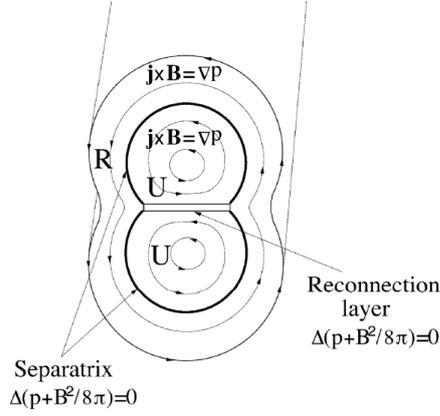


Figura 3.1: Progressiva unione di due cilindri. Si indica con R la regione del flusso ricollegato e con U la regione del flusso non ricollegato (articolo [8]).

Quindi, si ha ovunque:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p \quad (3.1)$$

Inoltre, essendo lo strato sottile, si ha salto nullo in $p + B^2/8\pi$ attraverso questi strati. Le regioni di flusso ricollegato e no cambiano fisicamente e geometricamente al procedere del fenomeno. Quindi il plasma si muove dalla regione non ricollegata allo strato di riconnessione, scaldandosi. Successivamente, si muove verso la regione di separazione e infine nella regione ricollegata, dopo il cambio della topologia delle linee di campo magnetico.

Con riferimento alla figura 3.2, si indica con V_R la velocità di riconnessione, δ la metà dello spessore dello strato.

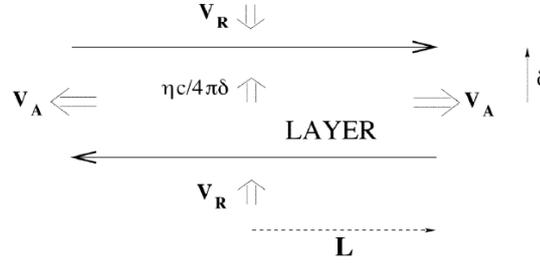


Figura 3.2: Strato di Sweet-Parker (articolo [8]).

Si dimostra che il flusso esce dallo strato limite alla velocità di Alfvén:

$$V_x = V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (3.2)$$

Il flusso in entrata $-LV_y = LV_R$ deve bilanciare quello in uscita $V_A\delta$. Per la legge di Ohm, il campo possiede una velocità di diffusione pari a:

$$V_R = \frac{\eta c}{4\pi\delta} \Rightarrow \delta = \frac{\eta c}{4\pi V_R} \quad (3.3)$$

Si ricava così una formula per la velocità di riconnessione V_R :

$$LV_R = V_A\delta \Rightarrow V_R = \sqrt{\frac{V_A\eta c}{4\pi L}} \quad (3.4)$$

Da cui, mediante una utile posizione:

$$S = \frac{4\pi L V_A}{\eta c} \quad (3.5)$$

si ricava la seguente formula per la velocità di riconnessione:

$$\boxed{V_R = \frac{V_A}{\sqrt{S}}} \quad (3.6)$$

3.2 Modello di Petschek

Il modello di Petschek è concettualmente analogo al precedente, ma considera la regione di diffusione, dove avviene il fenomeno, con una lunghezza $L' < L$. La restante lunghezza $L - L'$ è occupata da shock lenti. Lo strato in cui avviene la diffusione è simile allo strato di Sweet-Parker ma l'accelerazione fino alla velocità di Alfvén V_A è data dalla tensione magnetica associata alla componente trasversale del campo B_y . All'esterno della regione di diffusione, l'accelerazione è fornita quasi completamente dagli shock.

Il risultato del modello è simile all'equazione (3.6) ma con L' al posto di L :

$$V_R = \sqrt{\frac{V_A \eta c}{4\pi L'}} = \frac{V_A}{\sqrt{S}} \sqrt{\frac{L}{L'}} \quad (3.7)$$

Il fattore $\sqrt{L/L'}$ rende la velocità di riconnessione maggiore rispetto al modello di Sweet-Parker. Gli shock nella regione di dimensione lineare $L - L'$ riducono a zero la componente x del campo \vec{B} e accelerano il plasma che attraversa tale dominio.

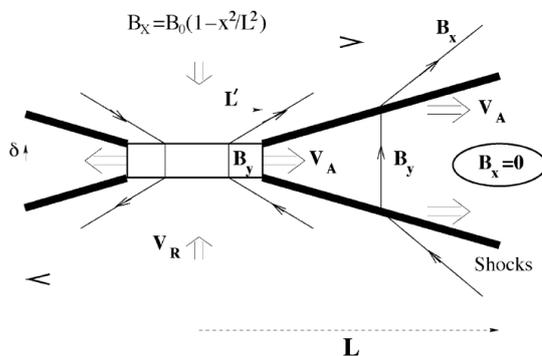


Figura 3.3: Schematizzazione del modello di Petschek (articolo [8]).

Gli shock si propagano lungo la direzione y con velocità $B_y/\sqrt{4\pi\rho}$. Il plasma scorre con velocità di riconnessione $V_y = -V_A$, per cui ci si trova in condizioni stazionarie:

$$V_R = \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (3.8)$$

Tale componente del campo aumenta linearmente lungo x nella regione diffusa da zero al valore V_R e la tensione prodotta da $j_z B_y$ è sufficiente per accelerare il plasma nello strato fino al raggiungimento della velocità di Alfvén. Il modello suppone che $L' < L$ sia un parametro libero.

Così il modello di Petschek spiega il fenomeno della riconnessione magnetica, ammettendo strati diffusivi di lunghezza inferiore rispetto a L . In realtà, lo studio [8] osserva che tale modello, in caso di resistività costante, L' è determinato dalla condizione che B_y venga rigenerato alla velocità con cui viene dissipato dal flusso a valle. Allora, si ricava che $L' = L$, cioè ci si riconduce al modello di Sweet-Parker.

Appendice A

Si vuole stimare la condizione di equilibrio a seguito del collasso di una stella, supponendo l'esistenza di un solo tipo di particelle, ossia i neutroni. Si osserverà, alla fine della trattazione, che tale ipotesi corrisponde alla situazione di minima energia.

Si supponga una sfera di raggio R che contiene N neutroni al suo interno. Il volume a disposizione di ogni particella equivale a:

$$v = \frac{V}{N} \approx \frac{R^3}{N} \quad (\text{A.1})$$

quindi la dimensione lineare riservata ad ogni particella vale:

$$r = \frac{R}{\sqrt[3]{N}} \quad (\text{A.2})$$

Applicando il principio di indeterminazione di Heisenberg, si ricava:

$$p = \frac{\hbar}{r} = \frac{\hbar\sqrt[3]{N}}{R} \quad (\text{A.3})$$

Allora, l'energia di ogni particella equivale a:

$$\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \sqrt{m^2c^4 + \frac{\hbar^2c^2\sqrt[3]{N^2}}{R^2}} \quad (\text{A.4})$$

Ogni neutrone sente una forza di attrazione gravitazionale dagli altri $N - 1 \approx N$ neutroni. Per cui si può scrivere:

$$E = \varepsilon + U = \sqrt{m^2c^4 + \frac{\hbar^2c^2\sqrt[3]{N^2}}{R^2}} - \frac{Gm^2}{R}N \quad (\text{A.5})$$

Si osserva che per valori di R molto grandi, il primo termine che dipende da $1/R^2$ diventa trascurabile; per valori molto piccoli di R si trascura il termine m^2c^4 sotto il segno di radice. Il caso di nostro interesse è il secondo, dove si ottiene:

$$E \approx \frac{\hbar c\sqrt[3]{N}}{R} - \frac{Gm^2}{R}N \quad (\text{A.6})$$

Ambo i termini così ottenuti dipendono dal reciproco della distanza R , per cui si possono avere due distinte situazioni: non esiste una configurazione stabile e la stella collassa in un buco

nero oppure ne esiste una di raggio R_0 . Il confine tra le due situazioni è rappresentato da una condizione di equilibrio:

$$\frac{\hbar c \sqrt[3]{N}}{R} = \frac{Gm^2}{R} N \quad (\text{A.7})$$

da cui si ricava, mediante semplici passaggi algebrici, il risultato:

$$N = \left(\frac{\hbar c}{Gm^2} \right)^{3/2} = \left(\frac{1}{\alpha_G} \right)^{3/2} \approx 10^{57} \quad (\text{A.8})$$

dove α_G è l'equivalente della costante di struttura fine per l'interazione gravitazionale. Si ricava la massa limite M_{lim} come:

$$M_{lim} = mN = 1.675 \cdot 10^{33} g \quad (\text{A.9})$$

Confrontabile con la massa del nostro sole. In verità, una stima più precisa mostra che la massa limite vale $1.44M_\odot$, nota come massa di Chandrasekhar. Se $M \leq M_{lim}$, allora il sistema è stabile. La dimensione R_0 della stella in equilibrio si ricava studiando il minimo dell'energia $E(N, R)$:

$$E(N, R) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{Gm^2}{R} N = mc^2 + \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{2mR^2} - \frac{Gm^2}{R} N \quad (\text{A.10})$$

Si studia la derivata $dE/dR = 0$. Il risultato ottenuto è pari a:

$$\frac{\hbar^2 N^{2/3}}{mR^3} = \frac{Gm^2}{R^2} N \quad (\text{A.11})$$

da cui si ricava il raggio di equilibrio R_0 :

$$R_0 = \frac{\hbar^2}{Gm^3 \sqrt[3]{N}} = \left(\frac{\hbar c}{Gm^2} \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \right) \frac{1}{\sqrt[3]{N}} = \frac{\lambda_c}{\alpha_G \sqrt[3]{N}} \quad (\text{A.12})$$

dove $\lambda_c = \hbar/(mc)$ è la lunghezza d'onda Compton ridotta del nucleone, con valore $2 \cdot 10^{-16} m$. Considerando $N = 10^{57}$, si ricava $R_0 \approx 3.5 km$.

Alle temperature del nucleo durante il collasso, i nuclei si disgregano in elettroni, protoni e neutroni, con impulsi tipici di $p \approx 200 MeV$. Gli elettroni che urtano i protoni possiedono energie sufficienti per dare la reazione $e^- + p^+ \rightarrow n + \nu_e$. D'altro canto, i neutroni liberi decadono β^- secondo la reazione $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ e gli elettroni prodotti avranno al più energia pari a $Q = m_n - m_p - m_e > 0$ e quindi avranno un certo impulso massimo noto come impulso di Fermi $p_{max} = p_e$. Allora, il numero massimo di elettroni prodotti risulta pari a $N_e = (p_{max} R_0 / \hbar)^3$. Il rapporto tra il numero di elettroni prodotti e il numero di neutroni equivale a:

$$Y = \frac{N_e}{N} = \left(\frac{p_{max} R_0}{\hbar \sqrt[3]{N}} \right)^3 \approx 10^{-7} \quad (\text{A.13})$$

In altre parole, dopo che una frazione di neutroni decade, la restante risulta stabile.

Bibliografia

- [1] Francesco Rosario Ferraro, *Astrofisica stellare*, dispense (A.A. 2021/2022).
- [2] Vittorio Castellani, *Astrofisica stellare*, Zanichelli (1985).
- [3] Braibant, Giacomelli, Spurio, *Particelle e interazioni fondamentali*, Springer (2009).
- [4] Luca Ciotti, *Astrofisica extragalattica*, dispense (A.A. 2021/2022).
- [5] Giuseppe Bertin, *Dynamics of Galaxies*, Cambridge University Press (2014).
- [6] Rybicki, Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics*, Wiley (1979).
- [7] Ji, Yamada, Hsu, Kulsrud, *Experimental Test of the Sweet-Parker Model of Magnetic Reconnection*, Phys. Rev. Lett. 80, 3256 (1998).
- [8] Russell M. Kulsrud, *Magnetic Reconnection: Sweet-Parker vs Petschek*, Princeton Plasma Physics Laboratory (2001).