

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Teorema del Viriale e applicazioni astrofisiche

Tesi di laurea

Presentata da:
Valerio Tritapepe

Relatrice:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Anno Accademico **2022-2023**

Abstract

In questa trattazione ci si propone di derivare matematicamente il teorema del viriale nella sua forma tensoriale e scalare, per poi applicare questi risultati in diversi contesti astrofisici. L'elaborato parte con una breve introduzione al teorema del viriale, per poi passare alla sua derivazione matematica. L'analisi inizia presentando il problema degli N corpi, poiché i principali sistemi di interesse astrofisico sono assimilabili a sistemi dinamici autogravitanti costituiti da N particelle. Vediamo nello specifico come attraverso l'ipotesi di non collisionalità di tali sistemi si giunge all'*Equazione non collisionale di Boltzmann*. Per estrarre informazioni da questa equazione usiamo il metodo dei momenti, ricavando così le *Equazioni di Jeans* al secondo ordine. Ora possiamo derivare e interpretare il *Teorema del Viriale* dalla seconda equazione di Jeans, presentandolo sia in forma tensoriale che in forma scalare. Attraverso questi risultati si esplorano alcune delle numerose applicazioni astrofisiche del teorema. Partendo dai sistemi autogravitanti, introduciamo il *piano del viriale*, evidenziando come esso fornisca una semplice quanto illuminante prospettiva sulla dinamica e l'evoluzione di alcuni sistemi celesti. Descriviamo poi il calore specifico negativo di tali sistemi e in particolare il lento collasso che porta gli ammassi globulari alla *catastrofe gravotermica*. Vediamo inoltre come da una semplice applicazione del teorema possiamo ricavare il *criterio di Jeans*, strumento fondamentale per lo studio del collasso di una nube che porta alla formazione stellare. Esaminiamo poi come stimare la massa di un ammasso di galassie all'equilibrio. Infine, evidenziamo il ruolo del teorema nell'equilibrio fra raggi cosmici, gas e campo magnetico nella Via Lattea. In diverse occasioni eviteremo per brevità una trattazione completamente rigorosa, facendo tuttavia attenzione a presentare, almeno qualitativamente, i risultati fisicamente interessanti in maniera corretta.

Indice

1	Teorema del Viriale	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Il problema degli N Corpi	1
1.3	Tempo di rilassamento a due corpi	2
1.4	L'equazione non collisionale di Boltzmann	4
1.5	Le equazioni di Jeans	5
1.6	Il Teorema del Viriale	6
2	Applicazioni astrofisiche	9
2.1	Sistemi autogravitanti	9
2.1.1	Il piano del viriale	9
2.1.2	Calore specifico e catastrofe gravotermica	10
2.1.3	Criterio di Jeans e formazione stellare	12
2.1.4	Stima della massa di un ammasso di galassie	14
2.2	Confinamento del campo magnetico e dei raggi cosmici nel piano galattico	15
	Bibliografia	16

Capitolo 1

Teorema del Viriale

1.1 Introduzione

L'astrofisica si occupa dello studio delle proprietà fisiche e dei processi che caratterizzano gli oggetti celesti nell'universo. Tra gli strumenti concettuali fondamentali utilizzati in questa ricerca spicca il teorema del viriale, un principio che fornisce informazioni profonde sulla dinamica e sull'equilibrio dei sistemi astronomici. Le origini del teorema risalgono al 1870, quando Rudolf Clausius tenne la conferenza "Su un Teorema Meccanico Applicabile al Calore", in cui affermava che la *vis viva* media del sistema è uguale al suo *viriale*, ovvero che l'energia cinetica media è pari a 1/2 dell'energia potenziale media. Il teorema fu successivamente utilizzato, divulgato, generalizzato e ulteriormente sviluppato da numerosi fisici e matematici. Com'era chiaro già dalla sua prima formulazione, il teorema del viriale è intrinsecamente legato all'energia di un sistema fisico. La sua espressione matematica stabilisce un legame tra l'energia cinetica e potenziale del sistema, offrendo così una rappresentazione quantitativa della sua stabilità e del modo in cui evolve nel tempo. Nonostante l'apparente semplicità, vedremo come il teorema del viriale assume un ruolo chiave nella descrizione e comprensione delle complesse strutture presenti nel nostro universo.

1.2 Il problema degli N Corpi

Il problema degli N corpi è lo studio del movimento di N masse puntiformi (ad esempio le stelle) sotto l'influenza reciproca dei loro campi gravitazionali. Questo è uno dei problemi centrali della fisica classica.

In generale, indicando con m_i, m_j ($i, j = 1, \dots, N$) le masse dei vari punti e con $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ le loro posizioni, adottando il formalismo Hamiltoniano si può scrivere:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \\ \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} \\ H = K + W = \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|} \end{cases} \quad (1.1)$$

dove $(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) \equiv (\mathbf{x}_i, m_i \dot{\mathbf{x}}_i)$, mentre K e W indicano rispettivamente l'energia cinetica e potenziale.

Una descrizione completa del problema necessita di un sistema di $6N$ equazioni differenziali scalari e, affinché questo sia effettivamente risolvibile, sono necessari $6N - 1$ integrali primi del moto (ovvero leggi di conservazione). Il problema dei 2 corpi è risolvibile, ma già per $N \geq 3$ non è Jacobi-Lie integrabile, poiché non si possono formulare sufficienti integrali primi del moto che permettano di trovare la soluzione analitica del problema come intersezione di varietà nello spazio delle fasi. Esso costituisce una buona rappresentazione di gran parte dei problemi astrofisici reali, in quanto la probabilità di collisioni geometriche tra i corpi è spesso talmente bassa da potersi trascurare, giustificando l'assunzione di masse puntiformi. Esistono numerose tecniche in grado di estrarre quante più informazioni possibili di natura dinamica dal sistema (1.1), pur senza la diretta conoscenza delle singole orbite.

Un metodo utilizzato per semplificare significativamente il problema è quello di sostituire la distribuzione di densità discontinua, che caratterizza il sistema in esame, con una distribuzione omogenea $\rho(\mathbf{x}, t)$. Con questo procedimento si è creato un nuovo sistema (sistema *liscio*) del tutto identico al precedente eccetto per la densità. Prendendo in esame una singola particella, è possibile approssimare (Ciotti (2002), cap. 5) il potenziale sentito dalla particella durante il suo moto

$$\Phi_{vero}(\mathbf{x}, t) = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|}, \quad (1.2)$$

con un potenziale *liscio* presente nel sistema ideale

$$\Phi_{liscio}(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{y}, t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y}. \quad (1.3)$$

Il problema che ci troviamo ad affrontare può essere riassunto attraverso la domanda: qual è l'entità della discrepanza tra l'orbita ideale tracciata da una determinata stella sotto l'influenza del potenziale Φ_{liscio} e l'orbita effettiva percorsa sotto l'influenza del potenziale effettivo Φ_{vero} ? In altre parole, quant'è il tempo necessario affinché la differenza ($\Phi_{vero} - \Phi_{liscio}$), chiamata "termine di granularità", produca un cambiamento significativo nell'orbita seguita da ciascuna stella nel potenziale Φ_{liscio} ? Naturalmente ottenere una risposta precisa ad una simile domanda richiederebbe la conoscenza completa di entrambe le orbite, e questo è esattamente il problema che cerchiamo di evitare.

1.3 Tempo di rilassamento a due corpi

Studiamo questo problema in modo quantitativo, chiedendoci con quanta accuratezza possiamo approssimare un sistema composto da N particelle identiche di massa m come una distribuzione uniforme di densità. L'approccio standard al calcolo del cosiddetto tempo di rilassamento, ovvero l'intervallo temporale caratteristico oltre il quale l'approssimazione continua introdotta nel capitolo 1.2 non è certamente più valida, si basa su due presupposti:

1. Tutti gli incontri tra particelle sono trattati come indipendenti;
2. Tutti gli incontri tra particelle sono trattati come incontri iperbolici tra due corpi.

Per queste ragioni, il tempo caratteristico derivato è chiamato tempo di rilassamento a due corpi, ed è indicato come t_{2b} . Il t_{2b} può essere definito come il tempo necessario affinché l'energia cinetica relativa tra due particelle del sistema cambi in modo significativo a causa delle interazioni gravitazionali. In altre parole, misura il tempo in cui due corpi stellari possono scambiare energia in modo rilevante a causa delle loro interazioni reciproche. Un sistema gravitazionale per il quale gli effetti cumulativi degli incontri sono trascurabili sarà detto non collisionale, o, altrimenti, collisionale.

Descriviamo ora il sistema di N Corpi con una massa totale M e con l'aiuto della sua funzione di distribuzione (DF) $f = f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f)$; le particelle che compongono il sistema hanno masse identiche m_f ("f" sta per "campo"), e consideriamo una particella di "test" con massa m_t . L'idea alla base dell'Assunzione (1) è quella di calcolare la somma degli effetti di tutti gli incontri tra due corpi valutati nel caso fittizio dell'assenza delle rimanenti $N - 2$ stelle. Per sommare gli effetti sull'orbita della stella di test di tutti gli "incontri" con le stelle del campo è necessario specificare la DF delle stelle di campo. Viene assunta per semplicità una distribuzione spazialmente omogenea delle masse e isotropia nella distribuzione delle velocità. Si può dimostrare (Ciotti (2021), cap. 7.2) che l'effetto cumulativo degli incontri è quello di riscaldare (aumento di energia cinetica) la particella di test nella direzione perpendicolare alla velocità relativa iniziale. Il tempo caratteristico associato a questo "riscaldamento" è il **tempo di rilassamento a due corpi**¹

$$t_{2b} \sim \frac{v_t^3}{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \bar{\Lambda}}. \quad (1.4)$$

Nel caso di sistemi autogravitanti, è possibile esprimere il t_{2b} in funzione del **tempo di attraversamento** $t_{cross} = \frac{2R}{v_*}$ attraverso l'equazione (Ciotti (2021), cap. 7.3)

$$t_{2b} \simeq \frac{0.1N}{\ln N} t_{cross}. \quad (1.5)$$

È importante notare che il t_{2b} dipende dalla densità stellare del sistema. In regioni più dense, le interazioni tra le stelle sono più frequenti, accelerando il processo di rilassamento a due corpi. D'altro canto, in regioni meno dense, il t_{2b} può essere significativamente più lungo. Vediamone alcuni esempi.

Galassia Assumendo per una generica galassia un numero di stelle $N \approx 10^{11}$ e un $t_{cross} = 250 Myrs$, l'Equazione (1.5) fornisce un $t_{2b} \approx 10^{17} yrs$, milioni di volte il tempo di Hubble. Le galassie sono a tutti gli effetti sistemi non collisionali su tempi scala cosmologici.

Ammasso globulare Assumendo $N = 10^5$ e $t_{cross} = 2 Myrs$ otteniamo da (1.5) $t_{2b} \approx 1 Gyr$. In questi sistemi, le interazioni a due corpi assumono una predominanza tale che, dinamicamente, manifestano un'età avanzata.

¹Nell'equazione si indica con v_t la velocità della stella di test, con n_f la densità delle stelle di campo e con $\ln \bar{\Lambda}$ il logaritmo di Coulomb ponderato in velocità (nelle applicazioni $10 \leq \ln \bar{\Lambda} \leq 20$).

Ammasso aperto Assumendo $N = 10^3$ e $t_{cross} = 1 Myrs$ si ottiene da (1.5) un $t_{2b} \approx 10^7 yrs$. Nonostante la loro giovane età, dal punto di vista dinamico questi oggetti invecchiano rapidamente, perdendo stelle e dissolvendosi prima che le stelle raggiungano la fase di giganti rosse. Un indicatore di questo fenomeno è la caratteristica colorazione blu degli ammassi aperti.

1.4 L'equazione non collisionale di Boltzmann

Quando si modella un sistema non collisionale come una galassia ellittica, non è né pratico né utile seguire le orbite di ciascuna delle miliardi di stelle della galassia. La maggior parte delle previsioni verificabili dipende dalla probabilità di trovare una stella nel volume esadimensionale dello spazio delle fasi $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ attorno alla posizione \mathbf{x} e alla velocità \mathbf{v} . Pertanto, definiamo la DF f tale che $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ sia la probabilità che al tempo t una stella scelta a caso, diciamo la stella 1, abbia coordinate dello spazio delle fasi nell'intervallo dato. Ipotizzando che tutte le stelle siano identiche, questa probabilità è la stessa per la stella 2,3,...,N. In virtù della sua definizione f è normalizzata in modo tale che, integrando su tutto lo spazio delle fasi γ ,

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v} = 1. \quad (1.6)$$

L'equazione non collisionale di Boltzmann (CBE, dall'inglese *Collisionless Boltzmann Equation*), uno dei più importanti strumenti matematici della dinamica stellare, si applica rigorosamente nel limite dei sistemi stellari perfettamente privi di collisioni. L'approssimazione di sistema senza collisioni si realizza sempre meglio su un arco di tempo sempre più lungo. Nel limite ideale di $N \rightarrow \infty$, ci aspettiamo che l'approssimazione sia valida per qualsiasi tempo. Nel regime non collisionale, l'equazione differenziale per l'evoluzione della DF è espressa dalla CBE (Ciotti (2002), cap. 6):

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left\langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0, \quad (1.7)$$

dove

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}; t) = 4\pi G \int_{\mathbb{R}^3} f d^3\mathbf{v}. \quad (1.8)$$

Per generalità e realismo astrofisico si è assunto che ogni elemento di volume dello spazio delle fasi γ si muova sotto l'azione di un campo di forza generato dal potenziale totale $\Phi_{tot} = \Phi + \Phi_{ext}$, con $\Phi_{ext} = \Phi_{ext}(\mathbf{x}; t)$ *potenziale esterno* generato da una distribuzione di densità distinta dal sistema considerato. Se $\Phi_{ext} = 0$ il sistema si dice *autogravitante*. Si noti come la dimensionalità dello spazio in cui si devono effettuare i calcoli è adesso ridotta a 6 dimensioni spaziali ed una temporale, una semplificazione enorme rispetto al problema originario. La CBE descrive come varia localmente la densità di probabilità se vista da un osservatore comovente con la stella nello spazio delle fasi e dice che il flusso di un *fluido di probabilità*, attraverso lo spazio delle fasi, si conserva.

Prima di continuare è comunque opportuno sottolineare come la CBE sia modificabile, attraverso l'introduzione di un *termine di sorgente*, per descrivere sistemi in

regime "debolmente collisionale" (come ad esempio gli ammassi globulari):

$$\frac{Df}{Dt} = C[f]. \quad (1.9)$$

L'operatore $C[f]$ dipenderà in generale non soltanto dalla funzione di distribuzione al tempo t , ma anche da tutta la sua storia passata. Per questo motivo le formule fornite per il teorema del viriale sono valide per tutti i sistemi - collisionali e non - all'equilibrio. Questo equilibrio è differente a seconda del sistema preso in considerazione. Il come specificare la forma dell'operatore $C[f]$ in maniera tale da "catturare" il comportamento a lungo termine (ovvero, per $t \gg t_{2b}$), esula dallo scopo del presente lavoro.

1.5 Le equazioni di Jeans

Come abbiamo visto, la soluzione generale della CBE dipende dalla conoscenza delle proprietà delle orbite in potenziali tridimensionali che possono dipendere dal tempo, un problema che va ben oltre le attuali possibilità della matematica. Pertanto, oltre all'utilizzo di simulazioni numeriche, sono state sviluppate diverse tecniche per "estrarre" informazioni dalla CBE. Uno di questi è il metodo dei *momenti*, il quale permette di costruire delle equazioni differenziali più semplici della (1.7), dette equazioni di Jeans. Tali equazioni rappresentano relazioni funzionali tra i cosiddetti momenti della funzione di distribuzione sullo spazio delle velocità. Da queste è possibile partire per sviluppare ulteriori equazioni dei momenti, definiti sullo spazio delle configurazioni, note in letteratura come equazioni viriali in forma tensoriale. È possibile definire un'infinita gerarchia di momenti per la DF. Definendo la densità del sistema stellare come $\rho(\mathbf{x}; t) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d^3\mathbf{v}$, i momenti della velocità fino al secondo ordine sono (Binney & Tremaine (2008), cap. 4.1):

$$\bar{v}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} v_i f d^3\mathbf{v}; \quad (1.10)$$

$$\overline{v_i v_j}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j f d^3\mathbf{v}; \quad (1.11)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) d^3\mathbf{v} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j; \quad (1.12)$$

dove $i, j = 1, 2, 3$, $\bar{v}_i(\mathbf{x}; t)$ sono le componenti del campo della *velocità di streaming* e il tensore $\sigma_{i,j}^2$ è il *tensore di dispersione della velocità*. I momenti di ordine superiore sono determinati considerando i prodotti tra le componenti della velocità di grado superiore. Il tensore di dispersione di velocità descrive, in termini statistici, la media dei quadrati degli scarti delle velocità delle stelle rispetto al loro valore medio. Come evidenziato nella seconda uguaglianza dell'Equazione (1.12), il tensore è simmetrico, indicando che esiste una matrice ortogonale di rotazione che diagonalizza la sua rappresentazione in tale sistema. Questa matrice è definita positiva. Di conseguenza, mediante la funzione di distribuzione e il metodo dei momenti, è possibile associare ad ogni galassia o sistema di N corpi un campo continuo di densità non collisionale, un campo vettoriale locale di velocità medie e un campo tensoriale, rappresentato

nello spazio delle velocità da ellissoidi di dispersione di velocità. Limitandosi ai momenti del primo e del second'ordine è possibile costruire le cosiddette equazioni di Jeans (Binney & Tremaine (2008), cap. 4.8). La **prima equazione di Jeans** è

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.13)$$

Quest'equazione è ottenuta integrando la CBE rispetto alle velocità, applicando il teorema della divergenza e sostituendo la definizione (1.10). La **seconda equazione di Jeans** è

$$\frac{D\bar{v}_j}{Dt} = \rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial x_j} - \frac{\partial(\rho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}. \quad (1.14)$$

Possiamo ottenere questa equazione moltiplicando per \bar{v}_i la CBE e integrando sullo spazio delle velocità, applicando ancora il teorema della divergenza. Osserviamo che le equazioni precedentemente menzionate sono formalmente equivalenti alle equazioni di continuità e dell'impulso che delineano il comportamento macroscopico di un fluido, considerando la presenza di un campo gravitazionale e di forze viscosive, e ignorando termini di sorgente. Nonostante questa analogia formale, esistono almeno due distinzioni fondamentali tra un fluido "ordinario" e un sistema non collisionale come una galassia:

1. Un fluido ordinario costituisce un sistema collisionale in cui, all'equilibrio termodinamico, i frequenti urti tra le particelle annullano rapidamente qualsiasi eventuale anisotropia presente nella distribuzione dei moti quadratici, rendendo temperatura e pressione grandezze scalari associate a tensori isotropi. Al contrario, in un sistema non collisionale, temperatura e pressione diventano tensori anisotropi: senza urti frequenti non avviene una redistribuzione rapida dell'energia in eccesso, consentendo al sistema di manifestare differenze di "calore" in direzioni specifiche. L'origine della morfologia delle galassie ellittiche risiede in questa anisotropia.
2. Le equazioni della fluidodinamica formano un sistema di equazioni differenziali "chiuso", grazie alle relazioni di chiusura fornite dalla termodinamica attraverso le equazioni di stato. Queste ultime stabiliscono connessioni tra la pressione del gas, la densità e la temperatura. Al contrario, le equazioni di Jeans costituiscono un sistema "aperto". Non esistono in dinamica stellare relazioni termodinamiche che possano chiudere il sistema. Per risolvere le equazioni di Jeans, è necessario introdurre specifiche assunzioni sulla forma di $\bar{v}_i \bar{v}_j$, ovvero sull'anisotropia del tensore di dispersione.

1.6 Il Teorema del Viriale

Abbiamo ottenuto le equazioni di Jeans moltiplicando la CBE per v_j ed integrando su tutte le velocità. In questo processo un'equazione in uno spazio delle fasi esadimensionale per una singola quantità scalare f è stata ridotta ad equazioni differenziali alle derivate parziali per ρ e per i momenti delle velocità nello spazio delle coordinate tridimensionale. In questo modo si ha quindi una maggior comprensione delle grandezze in gioco, ma si passa da un'unica equazione, la CBE, ad infinite equazioni.

Il tentativo di estrarre informazioni dalla CBE è quindi un successo solo parziale. Ad ogni modo, le equazioni di Jeans costituiscono il punto di partenza per ricavare ulteriori relazioni fondamentali per la comprensione delle proprietà macroscopiche di un sistema non collisionale: **le equazioni viriali in forma tensoriale**. Prima di tutto, è necessario introdurre alcuni importanti tensori e le rispettive tracce. $\forall i, j = 1, 2, 3$ si definiscono (Binney & Tremaine (2008), cap. 4.8):

$$\text{Momento di Inerzia} \quad I_{ij} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i x_j d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(I_{ij}) = I \quad (1.15a)$$

$$\text{Energia cinetica totale} \quad K_{ij} \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(K_{ij}) = K \quad (1.15b)$$

$$\text{Energia cinetica ordinata} \quad T_{ij} \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(T_{ij}) = T \quad (1.15c)$$

$$\text{Energia cinetica di dispersione} \quad \Pi_{ij} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \rho \sigma_{kj}^2 d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(\Pi_{ij}) = \Pi \quad (1.15d)$$

$$\text{Autoenergia} \quad U_{ij} \equiv - \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(U_{ij}) = U \quad (1.15e)$$

$$\text{Energia di interazione} \quad W_{ij} \equiv - \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(W_{ij}) = W \quad (1.15f)$$

Si noti che nel caso di un sistema autogravitante ($\Phi_{ext}=0$) 1.15e \equiv 1.15f. Inoltre, si osservi che

$$K_{ij} = T_{ij} + \frac{\Pi_{ij}}{2}, \quad K = T + \frac{\Pi}{2}. \quad (1.16)$$

A questo punto possediamo gli strumenti essenziali per dedurre e dare significato ai diversi termini che costituiscono il teorema del viriale nella sua forma tensoriale. Consideriamo la seconda equazione di Jeans (1.14), moltiplichiamola scalarmente per \mathbf{x} e integriamo sullo spazio delle configurazioni:

$$\underbrace{\int x_k \frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} d^3 \mathbf{x}}_1 + \underbrace{\int x_k \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_i} d^3 \mathbf{x}}_2 = - \underbrace{\int x_k \frac{\partial \rho \Phi_{tot}}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}}_3 - \underbrace{\int x_k \frac{\partial \rho \sigma_{ij}^2}{\partial x_i} d^3 \mathbf{x}}_4 \quad (1.17)$$

È dimostrabile (Binney & Tremaine (2008), cap. 4.8) che ciascun termine può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^3} x_k \rho x_j d^3 \mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} I_{kj}; \\ (2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{ki} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho \bar{v}_k \bar{v}_j d^3 \mathbf{x} = -2T_{kj}; \\ (3) &= -W_{kj}; \\ (4) &= - \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{ki} \rho \sigma_{ij}^2 d^3 \mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho \sigma_{kj}^2 d^3 \mathbf{x} = -\Pi_{kj}. \end{aligned}$$

Otteniamo così il **Teorema del Viriale in forma tensoriale**

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{kj}}{dt^2} = 2T_{kj} + \Pi_{kj} + W_{kj}. \quad (1.18)$$

Questa equazione ci permette di mettere in relazione la cinematica generale e le proprietà morfologiche della galassia. La traccia del tensore dell'energia di interazione (1.15f) non è altro che l'energia potenziale totale del sistema W e la traccia del tensore K (1.16) è l'energia cinetica del sistema. Allora, se il sistema è all'equilibrio ($\ddot{I} = 0$), la traccia dell'Equazione (1.18) rappresenta una formulazione del **Teorema del Viriale scalare**

$$2K + W = 0, \quad (1.19)$$

dove

$$W = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho \langle \mathbf{x}, \nabla \Phi_{tot} \rangle d^3 \mathbf{x} = W_{self} + W_{ext}. \quad (1.20)$$

Infine, notiamo che se E è l'energia totale del sistema, allora da (1.19) si ottiene

$$E = K + W = -K = \frac{1}{2}W. \quad (1.21)$$

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche

2.1 Sistemi autogravitanti

Un sistema di N corpi si dice autogravitante se il potenziale gravitazionale totale sotto l'azione del quale si muovono le particelle è determinato dalle particelle stesse attraverso l'Equazione (1.2) (Ciotti (2002), cap. 4). In altre parole, si verifica che $W_{ext} = 0$ e

$$W \equiv U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} \quad (2.1)$$

Riscriviamo quindi il teorema del viriale scalare (1.19) per sistemi autogravitanti

$$2K = -U. \quad (2.2)$$

In questa sezione, illustreremo come il teorema del viriale nella forma scalare permetta di derivare proprietà fisiche fondamentali dei sistemi stellari autogravitanti, come il loro calore specifico negativo e il loro lento collasso che porta a quella che viene chiamata *catastrofe gravotermica*. Vedremo inoltre come da una semplice applicazione del teorema possiamo ricavare il criterio di Jeans e la massa di un ammasso di galassie.

2.1.1 Il piano del viriale

Tutti questi fenomeni possono essere illustrati qualitativamente utilizzando il piano del viriale nella Figura 2.1 (Ciotti (2021), p. 115). Rappresentiamo sull'asse orizzontale la quantità $|U|$; quindi, i punti vicino all'origine rappresentano sistemi molto "diluuti", mentre spostandoci verso destra incontriamo sistemi sempre più concentrati. Sull'asse verticale rappresentiamo l'energia cinetica del sistema: i punti in fondo al piano rappresentano sistemi "freddi", mentre aumentando i valori dell'ordinata i sistemi diventano sempre più "caldi".

Ci chiediamo innanzitutto quale sia la posizione di un sistema virializzato nella Figura 2.1. Dall'Equazione (1.19) si deduce che un sistema autogravitante è virializzato se e solo se il suo punto rappresentativo è posizionato sulla linea del teorema del viriale passante per l'origine:

$$K = \frac{|U|}{2}. \quad (2.3)$$

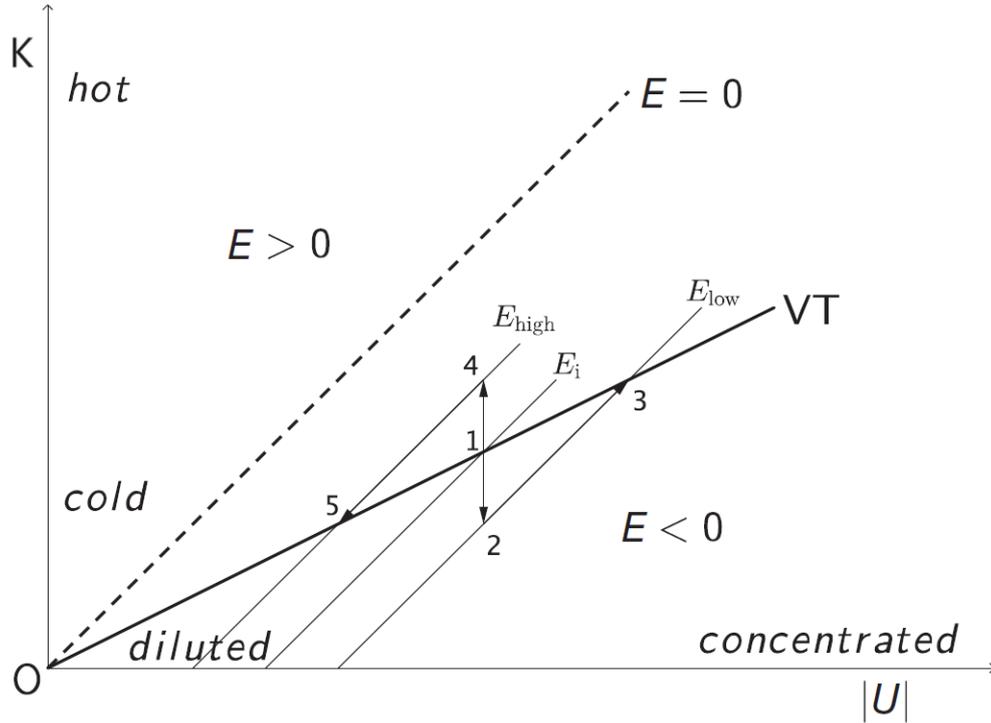


Figura 2.1: Il piano del viriale per sistemi autogravitanti con forze $1/r^2$, in cui è rappresentato il luogo dei sistemi virializzati (teorema viriale (VT), linea spessa) e alcune linee di conservazione dell'energia per differenti valori dell'energia totale. I sistemi sono indicati qualitativamente come caldi, freddi, diluiti e concentrati a seconda della loro posizione nel piano. (Ciotti (2021), p. 115)

Qualsiasi sistema isolato evolve rispettando il principio di conservazione dell'energia, rappresentabile sullo stesso piano attraverso una famiglia di rette parallele alla bisettrice

$$K = |U| + E. \quad (2.4)$$

Supponiamo di avere un sistema stellare con condizioni iniziali date, in modo che possiamo determinare la posizione iniziale del suo punto rappresentativo nel piano del viriale. Se l'energia totale è positiva e non ci sono perdite di energia, il punto si sposterà necessariamente lungo la sua linea di conservazione dell'energia senza avere la possibilità di virializzarsi, poiché non possono verificarsi intersezioni con la linea del teorema del viriale. Se il punto si trova sulla linea del teorema del viriale, allora il sistema è in equilibrio e, se l'equilibrio è stabile, il punto vi rimarrà per sempre. Infine, se l'energia totale iniziale è negativa, una possibilità, compatibile con la conservazione dell'energia, è che il punto si sposti e alla fine si fermi (dopo una fase chiamata rilassamento violento) sulla linea del teorema del viriale nella posizione coerente con la sua energia totale negativa.

2.1.2 Calore specifico e catastrofe gravotermica

Supponiamo ora di partire da un sistema virializzato nel Punto 1 della Figura 2.1, e assumiamo che una frazione della sua energia cinetica venga persa perché per qualche motivo una stella viene espulsa, portando via la sua energia cinetica, in modo che T si riduca, mentre U sarà quasi invariato. Graficamente, ciò è rappresentato

dalla freccia che si sposta verso il basso dal Punto 1 al Punto 2; in pratica, abbiamo "raffreddato" il sistema a U fisso. Il sistema è ora fuori dall'equilibrio. Se il sistema si virializza, l'unico posto possibile nel piano del viriale è al Punto 3, corrispondente a una configurazione più concentrata e a una "temperatura" più elevata. Possiamo dire che il sistema si è "raffreddato", ma dopo la virializzazione la sua autogravitazione l'ha riscaldato a una temperatura maggiore rispetto a quella iniziale. Naturalmente, l'opposto accadrebbe lungo il Percorso $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ nella Figura 2.1. In un'analogia termodinamica, possiamo dire che i sistemi autogravitanti sono caratterizzati da un **calore specifico negativo**.

Ciò che abbiamo appena descritto accade durante l'evoluzione dinamica degli ammassi globulari (GC, dall'inglese *Globular Clusters*). Questi sistemi hanno tempi di rilassamento minori della loro età, perciò sono sistemi collisionali (Sezione 1.3). In tali sistemi gli urti tra le componenti sono dominanti e le velocità stellari seguono la distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Questo vuol dire che esistono stelle di piccola massa nella coda ad alta energia della distribuzione le cui velocità sono superiori alla velocità di fuga¹ del GC. Per questo motivo vengono espulse dal sistema. Questo fenomeno è detto *evaporazione gravitazionale*. Quindi dal punto di vista dinamico il GC ha perso energia cinetica e, riportandosi all'equilibrio, aumenta la sua temperatura e il modulo dell'energia potenziale. Uno dei risultati dell'evaporazione è che il sistema finale è più denso, aumentando inoltre il contrasto di densità fra regioni interne ed esterne. La maggior densità comporta un aumento nel numero e nell'intensità degli urti tra le componenti, perciò sempre più stelle si trovano nella coda ad alta energia, sfuggendo dal GC e provocandone un'ulteriore contrazione. Si innesca quindi un processo a catena, detto **catastrofe gravotermica**, in cui la contrazione non si arresta e procede fino al **collasso del nucleo**.

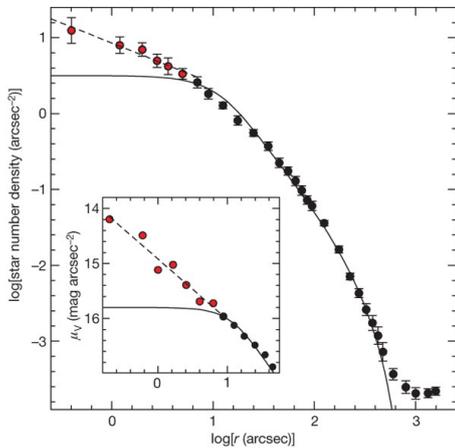


Figura 2.2: Profilo di densità dell'ammasso M30, che ha subito il collasso del nucleo. La linea continua rappresenta il modello di King, la linea tratteggiata descrive la porzione più interna del profilo di densità dell'ammasso (Ferraro et al. (2009)).

Una delle principali caratteristiche utili a capire se il nucleo di un GC è collassato riguarda il profilo di densità. Infatti, il forte aumento di densità nelle regioni centrali fa sì che il profilo di densità non segua un andamento costante, tipico dei modelli di King², ma mostri una cuspidale a legge di potenza. Un esempio è rappresentato in Figura 2.2, che mostra il profilo di densità dell'ammasso M30 (Ferraro et al. (2009)).

L'unico modo per arrestare questo processo è fornire energia al sistema. Si ritiene che una possibile fonte di energia siano i sistemi binari. La formazione di tali sistemi può essere abbastanza importante dal punto di vista gravitazionale da far riespandere l'ammasso.

¹Velocità di fuga $v_f = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \approx 40 \frac{km}{s}$. Tale valore può variare in base alle caratteristiche specifiche dell'ammasso.

²I modelli di King sono ampiamente utilizzati per descrivere i GC, in quanto ne riproducono bene i profili di densità osservati

2.1.3 Criterio di Jeans e formazione stellare

In questa sezione, verrà individuato un criterio che può essere utilizzato per predire in quali condizioni fisiche una nube interstellare può diventare gravitazionalmente instabile e condensarsi in una protostella. Questo criterio è il risultato dello scienziato britannico Sir James Hopwood Jeans, e una semplice derivazione è basata sull'utilizzo del teorema del viriale.

Consideriamo una nube molecolare nel mezzo interstellare, supposta per semplicità a simmetria sferica, con massa totale M e raggio R . Una nube in equilibrio idrostatico obbedisce al teorema del viriale. Nella condizione in cui l'energia gravitazionale U domina sull'energia cinetica K , ovvero

$$-U > 2K, \quad (2.5)$$

la nube sarà instabile e collaserà a causa della forza di gravità. La quantità U è difficile da calcolare con precisione, ma, considerando la nube omogenea, può essere approssimata dal valore (LeBlanc (2010), cap. 2.4)

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (2.6)$$

Approssimando la nube interstellare come isoterma (con temperatura T) e con densità costante ρ , l'energia cinetica può essere scritta come segue:

$$K = \frac{3}{2} NkT, \quad (2.7)$$

dove N è il numero totale delle particelle contenute nella nube e k la costante di Boltzmann. Scrivendo N in funzione del peso molecolare medio μ delle particelle

$$N = \frac{M}{\mu m_H}, \quad (2.8)$$

otteniamo dall'Equazione (2.5) che una nube può collassare quando

$$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} > \frac{3MkT}{\mu m_H}. \quad (2.9)$$

Inoltre, dall'assunzione di densità uniforme si ha

$$R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.10)$$

perciò, esprimendo la disuguaglianza (2.9) come condizione sulla massa totale del sistema, si ottiene il **criterio di Jeans**

$$M > \left(\frac{5kT}{\mu m_H G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \equiv M_J, \quad (2.11)$$

dove è definita la **massa di Jeans** M_J . Pertanto, affinché una nube collassi, la sua massa deve essere maggiore della massa di Jeans: $M > M_J$. Questo stabilisce un criterio quantitativo con il quale la stabilità di una nube può essere valutata. È

altresì possibile ricavare espressioni per la *densità di Jeans* e per il *raggio di Jeans*³. Superata la M_J , il sistema diventa gravitazionalmente instabile e collassa su un tempo scala detto *tempo dinamico* $\tau_{dyn} = \left(\frac{2R^3}{GM}\right)^{\frac{1}{2}}$ (Ferraro (2022)).

In questa fase iniziale di collasso, il moto del sistema sul piano del viriale (Figura 2.1) è completamente imprevedibile, poiché la nube non è ancora in uno stato virializzato. La struttura gassosa non impedisce il passaggio della radiazione emessa, consentendo al materiale in caduta libera di procedere senza ostacoli. Con il progredire della contrazione, la temperatura aumenta, attivando i processi di ionizzazione della materia che, a loro volta, causano un aumento dell'opacità. Questo significa che una parte della radiazione viene intrappolata, generando un aumento di pressione e rallentando i tempi di contrazione della struttura. Si raggiunge uno stato di equilibrio quasi stabile e inizia a formarsi una struttura che segue il teorema del viriale: il punto rappresentativo nel piano del viriale ora giace sulla linea del teorema del viriale (2.3). Da questo momento in avanti, possiamo descrivere questa struttura come una formazione stellare che emette energia. Un esempio di sistema in questa fase è riportato in Figura 2.3. La sua temperatura è superiore a quella dell'ambiente circostante, perciò inizierà ad irradiare. Questo processo è descritto dalle equazioni⁴:

$$\begin{cases} \dot{K} = -\dot{E} \\ |\dot{U}| = -2\dot{E} \end{cases} \quad (2.12)$$

Ogni perdita di energia ($\dot{E} < 0$) per irraggiamento causa un "riscaldamento" della struttura ($\dot{K} > 0$) e costringe la configurazione a contrarsi ulteriormente ($|\dot{U}| > 0$). La contrazione prosegue su un tempo scala più lungo, detto *tempo termodinamico* o di *Kelvin-Helmholtz* $\tau_{KH} = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{LR} > \tau_{dyn}$ (Ferraro (2022)).

Esso esprime l'intervallo temporale in cui la luminosità della struttura è dovuta alla sola contrazione gravitazionale. In altre parole, in questa fase il metodo di produzione di energia da parte della struttura stellare è la contrazione. Per una stella come il Sole si ha $\tau_{KH} \approx 1.5 \times 10^7 yrs$, quindi la sola energia gravitazionale potrebbe alimentarne la luminosità per soli 15 milioni di anni. Considerando che l'età stimata del Sole è di 4.6 miliardi di anni, è chiaro come l'energia irradiata sia prodotta da altri processi. Il raggiungimento delle temperature di combustione nel nucleo segna l'entrata della struttura stellare nella *Sequenza principale*: in questa fase sono le reazioni termonucleari la sorgente di energia che rallenta ulteriormente la contrazione. La struttura continua lentamente a contrarsi, ma su tempi scala enormemente più lunghi detti *termonucleari*.

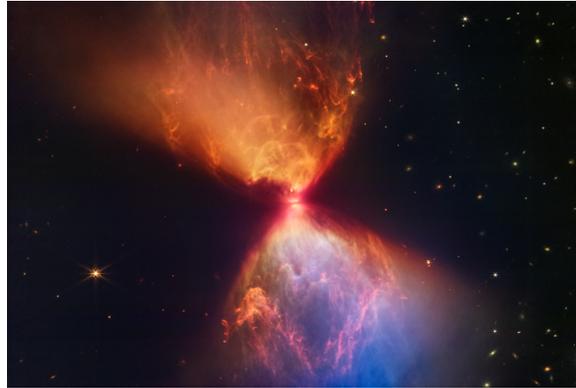


Figura 2.3: La protostella all'interno della nube oscura L1527, mostrata in questa immagine ripresa dalla James Webb Space Telescope Near-Infrared Camera (NIRCam), è incorporata in una nube di materiale che ne alimenta la crescita. (Webb Space Telescope, "L1527 and Protostar (NIRCam Image)", NASA/ESA/CSA/STScI, release date November 16, 2022, <https://tinyurl.com/4y8ab8tb>.)

³Si veda LeBlanc (2010), cap. 2.4.

⁴Le equazioni sono ottenute derivando rispetto al tempo i risultati (1.19) e (1.21), ricordando che per un sistema autogravitante $W \equiv U$

2.1.4 Stima della massa di un ammasso di galassie

Le galassie non sono disposte uniformemente nell'universo, ma sono raggruppate in ammassi che contengono dalle decine alle centinaia, in alcuni casi anche migliaia di galassie. Vediamo come calcolare la massa che un ammasso di galassie deve necessariamente avere per essere all'equilibrio, utilizzando il teorema del viriale scalare (1.19). Per un sistema di N oggetti autogravitante all'equilibrio, il teorema del viriale può essere espresso nel seguente modo (Bradt (2008), cap. 2.4):

$$2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \sum_{i>j=1}^N \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} = 0, \quad (2.13)$$

dove m_i e m_j , sono le masse rispettivamente degli oggetti i e j , v_i è la velocità dell' i -esimo oggetto e r_{ij} è la distanza tra l'oggetto i e l'oggetto j . Esaminiamo il caso elementare in cui gli N oggetti rappresentano le galassie di un ammasso, ciascuna avente massa m . Moltiplicando il primo termine per N/N e il secondo per N^2/N^2 otteniamo

$$Nm \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 - \frac{G(Nm)^2}{2} \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_{i \neq j} \frac{1}{r_{ij}} = 0, \quad (2.14)$$

dove il fattore $1/2$ al secondo termine serve a non considerare due volte le stesse coppie. Il primo termine ha N elementi, il secondo ne ha $N(N-1)$ (escludiamo i casi in cui $i=j$). La massa totale dell'ammasso è pari a $M = Nm$. Inoltre, per grandi N abbiamo che $N(N-1) \approx N^2$. Scriviamo quindi le somme in termini dei valori medi:

$$M \langle v_i^2 \rangle - \frac{GM^2}{2} \langle r_{ij}^{-1} \rangle = 0. \quad (2.15)$$

Ricaviamo così che la massa totale necessaria a tenere l'ammasso in equilibrio, detta **massa viriale**, è

$$M = \frac{2 \langle v_i^2 \rangle}{G \langle r_{ij}^{-1} \rangle}. \quad (2.16)$$

Le velocità lungo la linea di vista, $v_{i,los}$, possono essere ottenute sfruttando lo spostamento Doppler delle righe spettrali delle galassie, che devono essere corrette per lo spostamento dell'intero ammasso. Se tutte le direzioni del moto sono ugualmente probabili, le altre due componenti avranno, in media, lo stesso valore, per cui $\langle v_i^2 \rangle = 3 \langle v_{i,los}^2 \rangle$. Tipicamente la massa viriale è molto maggiore della massa stimata tramite la luminosità. Ciò indica la presenza di materia oscura negli ammassi. Tuttavia, utilizzare il teorema del viriale per stimare la massa degli ammassi di galassie può essere complicato, perché è difficile ottenere una stima accurata dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, e il sistema deve essere approssimato come un sistema in equilibrio, il che potrebbe non essere sempre vero.

In conclusione, mentre il teorema del viriale può fornire una stima della massa, spesso sono necessari approcci più sofisticati per ottenere risultati accurati.

2.2 Confinamento del campo magnetico e dei raggi cosmici nel piano galattico

In un sistema astrofisico come una galassia a disco, il campo magnetico esercita una pressione interna nota come *pressione magnetica*. Questa pressione si somma alle altre pressioni presenti, come quella del gas e dei *raggi cosmici*. Le componenti di pressione menzionate suggerirebbero una tendenza all'espansione del mezzo interstellare, portando ad un'ipotetica fuga di campo magnetico, materia e raggi cosmici dal disco galattico. Tuttavia, l'osservazione mostra un *confinamento* del campo magnetico e dei raggi cosmici nel piano galattico. Questo fenomeno è attribuibile alla presenza di un potenziale gravitazionale attrattivo, come evidenziato dal teorema del viriale, di seguito scritto per un sistema in equilibrio che contenga anche raggi cosmici e campo magnetico (Fanti & Fanti (2012), cap. 11.3):

$$2K + 3(\Gamma - 1)U_{th} + U_M + U_{RC} + U_p = 0. \quad (2.17)$$

Nell'equazione K è l'energia cinetica associata ai moti macroscopici del gas, $\Gamma = \frac{c_p}{c_v}$ il rapporto fra i calori specifici a pressione volume costanti, U_{th} l'energia termica del gas, $U_M = \frac{H^2}{8\pi} \times volume$ l'energia magnetica, U_{RC} il contenuto energetico dei raggi cosmici e U_p l'energia potenziale del sistema.

Per studiare come l'azione di confinamento si realizza, scriviamo l'equazione barometrica del sistema. Introducendo opportune approssimazioni sul campo magnetico e sul gas, possiamo scrivere l'equazione dell'equilibrio barometrico per un elemento di volume di altezza z sul piano galattico (Fanti & Fanti (2012), cap. 12.2):

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \bar{v}^2 + \frac{H^2}{8\pi} + P_{RC} \right) = -\rho(z) \times g(z). \quad (2.18)$$

Nell'equazione $\rho \bar{v}^2$ è la *ram pressure*, con \bar{v}^2 velocità quadratica media, $\frac{H^2}{8\pi}$ la pressione magnetica, P_{RC} la pressione dei raggi cosmici, $\rho(z)$ la densità del gas e $g(z)$ l'accelerazione di gravità. Ipotizziamo che la pressione del campo magnetico e quella dei raggi cosmici siano proporzionali alla pressione del gas:

$$\frac{H^2}{8\pi} \approx a\rho\bar{v}^2, \quad P_{RC} \approx b\rho\bar{v}^2, \quad a, b \text{ costanti} \quad (2.19)$$

Sostituendo questi termini nell'Equazione (2.18) ed integrando risulta che

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-z/z^*} \quad \text{con} \quad z^* \approx \frac{\bar{v}^2(1+a+b)}{\langle g \rangle}, \quad (2.20)$$

dove z^* è un'altezza caratteristica sul piano della Galassia e corrisponde al valore per cui la densità si è ridotta ad $1/e$, e $\langle g \rangle$ è il valor medio dell'accelerazione di gravità nell'intervallo $[0, z^*]$. Ponendo nella relazione precedente i valori dedotti dalla distribuzione delle stelle perpendicolarmente al piano, si trova che $a + b \approx 1$, ossia, affinché la Galassia sia in equilibrio, occorre che la pressione del gas sia uguale alla pressione combinata dei raggi cosmici e del campo magnetico:

$$\rho\bar{v}^2 \approx P_{RC} + \frac{H^2}{8\pi}. \quad (2.21)$$

Dai valori noti per il piano galattico, si vede che la (2.21) è approssimativamente verificata nelle vicinanze del sistema solare. É inoltre verificabile che H non può essere molto maggiore di $\approx 5\mu G$ senza porre problemi alla condizione di equilibrio.

Bibliografia

- Binney J., Tremaine S., 2008, *Galactic Dynamics*. Princeton University Press
- Bradt H., 2008, *Astrophysics Processes: The Physics of Astronomical Phenomena*. Cambridge University Press
- Ciotti L., 2002, *Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare*. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana
- Ciotti L., 2021, *Introduction to Stellar Dynamics*. Cambridge University Press
- Ciotti L., 2023, *Appunti del corso di Astrofisica Extragalattica*
- Fanti C., Fanti R., 2012, *Una finestra sull'Universo "Invisibile"*
- Ferraro F. R., 2022, *Astrofisica stellare, Dispense*
- Ferraro F. R., et al., 2009, *Two distinct sequences of blue straggler stars in the globular cluster M 30*, , [462](#), [1028](#)
- LeBlanc F., 2010, *An Introduction to Stellar Astrophysics*. Wiley