

**Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

**Materia Degenerare: Fisica e Applicazioni  
Astrofisiche**

Tesi di laurea

Presentata da:  
**Elena Bernabini**

Relatore:  
**Chiar.ma Prof.ssa  
Marcella Brusa**

---

Anno Accademico 2022-2023



## **Introduzione**

L'astrofisica moderna permette lo studio di fenomeni che raggiungono le condizioni fisiche più estreme dell'Universo. Uno tra questi è quello della materia degenere, che spinge le condizioni di temperatura e densità talmente tanto da modificare le proprietà della materia stessa.

Questa tesi ha lo scopo di analizzare la materia degenere, a partire dalla fisica, fino alle applicazioni in astrofisica. In particolare, si comincerà dalle basi della struttura della materia, in meccanica quantistica, per poi concentrarsi sulle condizioni di degenerazione, fino ad arrivare a comprendere l'influenza della degenerazione negli interni stellari, nell'evoluzione delle stelle e l'esistenza di oggetti come le nane bianche o le stelle di neutroni.

# Indice

<b>1</b>	<b>Fisica della materia degenere</b>	<b>1</b>
1.1	Bosoni e Fermioni . . . . .	1
1.2	Gas di elettroni liberi . . . . .	2
1.3	La probabilità di occupazione degli stati . . . . .	3
1.3.1	Distribuzione di Fermi-Dirac . . . . .	3
1.4	Condizione di degenerazione . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Applicazioni astrofisiche</b>	<b>7</b>
2.1	Equazione di stato degli interni stellari . . . . .	7
2.1.1	Diagramma $\log(T) - \log(\rho)$ . . . . .	8
2.2	Evoluzione stellare e degenerazione del nucleo . . . . .	10
2.2.1	He flash . . . . .	11
2.3	Nane bianche . . . . .	12
2.3.1	Relazione Massa - Raggio . . . . .	12
2.3.2	Massa limite di Chandrasekhar . . . . .	13
2.3.3	Evoluzione delle nane bianche . . . . .	13
2.4	Stelle di neutroni . . . . .	14
2.4.1	Relazione massa-raggio e massa limite . . . . .	15

# Capitolo 1

## Fisica della materia degenere

La degenerazione è un particolare stato della materia dovuto a estreme condizioni ambientali di temperatura e densità, in cui leggi della meccanica quantistica come il *principio di indeterminazione di Heisenberg* e il *principio di esclusione di Pauli* giocano un ruolo fondamentale nella struttura della materia e nelle sue proprietà. Il principio di indeterminazione specifica il volume minimo che possono occupare le particelle nello spazio delle fasi, mentre il principio di esclusione determina il numero di particelle che ciascun volume può contenere.

Una relazione per la condizione di degenerazione si può ottenere tenendo conto del dualismo onda-particella. Si assume che le leggi della meccanica quantistica non possano essere trascurate quando la distanza media tra le particelle diventa minore della loro lunghezza d'onda di De Broglie:

$$r < \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mk_B T}} \quad (1.1)$$

Dove  $h$  è la costante di Planck, e  $k_B$  la costante di Boltzmann<sup>1</sup>.

### 1.1 Bosoni e Fermioni

In meccanica classica due *particelle identiche* possono essere distinte grazie alla loro traiettoria, concetto che crolla immediatamente in meccanica quantistica per essere sostituito da quello di stato variabile nel tempo, descritto da una funzione d'onda. In meccanica quantistica due particelle identiche sono completamente *indistinguibili*. La funzione d'onda che descrive sistemi di particelle identiche deve quindi accogliere il fatto di non sapere quale particella sia in quale stato. Ad esempio, per due particelle negli stati  $\psi_a$ ,  $\psi_b$  si ha:

$$\psi_{\pm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = A[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) \pm \psi_b(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2)] \quad (1.2)$$

Questa costruzione delle funzioni d'onda prevede la distinzione di due categorie di particelle identiche, sulla base del postulato di simmetrizzazione. I *fermioni* sono descritti da funzioni d'onda antisimmetriche allo scambio di due particelle, col segno meno nell'equazione 1.2, mentre i *bosoni* sono descritti da funzioni d'onda

---

<sup>1</sup> $h = 6.63 \cdot 10^{-27} \text{erg s}$ ,  $\hbar = h/2\pi$ ,  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{erg K}^{-1}$

simmetriche allo scambio, col segno più nella 1.2. Ciò significa che a seguito dello scambio di due fermioni, la loro funzione d'onda cambia segno, mentre per i bosoni la funzione d'onda rimane invariata:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pm\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad + \text{ per bosoni}, \quad - \text{ per fermioni} \quad (1.3)$$

Conseguenza diretta di questa distinzione, è che per i fermioni vale il principio di esclusione di Pauli, che determina che due fermioni non possono occupare lo stesso stato. Se così non fosse, e si avessero due fermioni con stessi numeri quantici descritti da funzioni d'onda antisimmetriche, a seguito del loro scambio si otterrebbe uno stato nullo.

## 1.2 Gas di elettroni liberi

Per comprendere la degenerazione di un gas di fermioni si studia il gas di elettroni liberi. Si suppone di avere una buca di potenziale di forma cubica e lato  $L$  che contiene  $N$  elettroni di massa  $m_e$  e densità  $n_e = N/L^3$ , sui quali non agiscono forze:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{se } (0 < x < L, 0 < y < L, 0 < z < L) \\ \infty & \text{altrove} \end{cases} \quad (1.4)$$

Ciascun elettrone è descritto da un'onda piana con energia  $\varepsilon_k$  che dipende solo dal modulo del vettore d'onda  $\mathbf{k}$ . Quest'ultimo risulta quantizzato per le condizioni di continuità al contorno:

$$\psi_{\mathbf{k}, m_s}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \chi_{1/2, m_s}, \quad \varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z), \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

Visto che ciascun elettrone può avere spin *up* o *down*, cioè  $m_s = \pm 1/2$ , ogni stato è definito da 4 numeri quantici:  $n_x, n_y, n_z, m_s$ . A questo punto entra in gioco il principio di esclusione di Pauli, che determina che non possono esserci più di due elettroni con stesso valore di  $\mathbf{k}$  e  $m_s = \pm 1/2$ .

Allora due elettroni occupano un volume  $(2\pi/L)^3 = 8\pi^3/L^3$  nello spazio dei vettori d'onda. Questo permette di definire la densità degli stati, cioè il numero di stati per unità di volume:

$$g(k)dk = 4\pi k^2 dk \frac{L^3}{4\pi^3} \Rightarrow g(k) = \frac{k^2 L^3}{\pi^2} \quad (1.7)$$

In particolare, il volume occupato da due elettroni costituisce un ottante della sfera nello spazio dei vettori d'onda di raggio  $k_F$ , il *vettore d'onda di Fermi*. A  $k_F$  corrisponde anche l'*energia di Fermi*  $\varepsilon_F$ , il più alto valore di energia occupato:

$$\int_0^{k_F} g(k)dk = N \Rightarrow k_F = \left( \frac{3\pi^2 N}{L^3} \right)^{1/3} = (3\pi^2 n_e)^{1/3} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3} \quad (1.9)$$

Il gas di elettroni si definisce *completamente degenere* quando tutti i livelli energetici con energia  $\varepsilon < \varepsilon_F$  sono occupati.

## 1.3 La probabilità di occupazione degli stati

Il problema della degenerazione è quindi determinato da come vengono occupati gli stati in funzione dell'energia. Per analizzare ulteriormente questa situazione ci si avvale delle *distribuzioni statistiche*, che descrivono la probabilità che una particella si trovi a una specifica energia.

Il caso classico, per gli insiemi di particelle *distinguibili*, è descritto dalla distribuzione delle velocità di Maxwell:

$$n(v)dv = \frac{n}{(\sqrt{\pi})^3} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{4\pi v^2 dv}{\alpha^3}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (1.10)$$

L'espressione indica il numero di particelle con velocità tra  $v$  e  $v + dv$  ed è molto simile a una gaussiana. In particolare, la larghezza della distribuzione e la velocità più probabile, quella del picco, aumentano con la temperatura attraverso il parametro  $\alpha$ . È importante notare che se invece si fissa la temperatura, e si aumenta il numero di particelle, quindi la densità, il picco non si sposta, ma cambia solo il numero di particelle con velocità più probabile.

Passando al caso quantistico, non vale più l'ipotesi fondamentale di particelle distinguibili, ed entrano in gioco due nuove distribuzioni, quella di Fermi-Dirac per i fermioni e quella di Bose-Einstein per i bosoni. Allora il numero più probabile di particelle con energia  $\varepsilon$  è dato da:

$$\begin{cases} n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}} + 1}, & \text{Fermi - Dirac} \\ n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}} - 1}, & \text{Bose - Einstein} \end{cases} \quad (1.11)$$

Dove  $\mu = \mu(T)$  è il potenziale chimico.

### 1.3.1 Distribuzione di Fermi-Dirac

La distribuzione di Fermi-Dirac è ovviamente quella d'interesse nello studio della degenerazione di un gas di fermioni.

Per prima cosa, si osserva che viene rispettato il principio di esclusione di Pauli, infatti si ha sempre  $n(\varepsilon) < 1$ , indicando che uno stato non può essere doppiamente occupato.

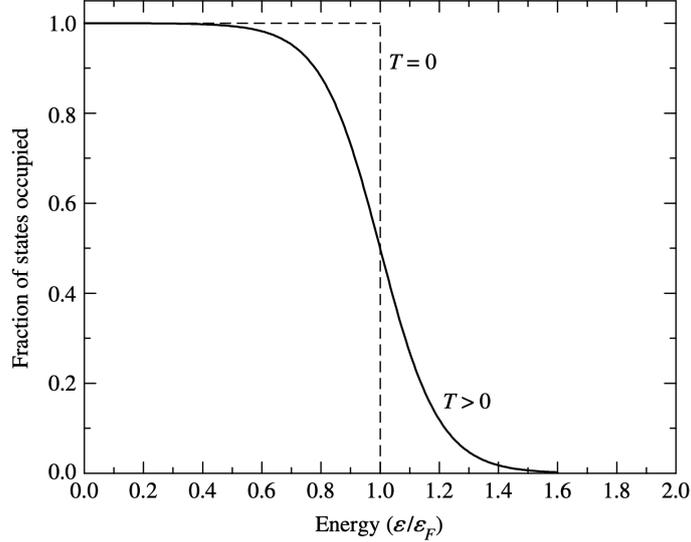
In secondo luogo, si può studiare il comportamento della distribuzione per  $T \rightarrow 0$ :

$$\begin{cases} e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}} \rightarrow 0 & \text{se } \varepsilon < \mu(0) \\ e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}} \rightarrow \infty & \text{se } \varepsilon > \mu(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(\varepsilon) \rightarrow 1 & \text{se } \varepsilon < \mu(0) \\ n(\varepsilon) \rightarrow 0 & \text{se } \varepsilon > \mu(0) \end{cases} \quad (1.12)$$

Allo zero assoluto un qualsiasi sistema fisico si trova nella configurazione di minima energia. In questo caso, ciò significa che nel limite per  $T \rightarrow 0$ , i livelli con  $\varepsilon \leq \mu(0)$  sono tutti occupati, e quelli a energia superiore sono completamente vuoti. L'energia di Fermi del sistema coincide proprio con il potenziale chimico allo zero assoluto:  $\mu(0) = \varepsilon_F$ . Sono queste le condizioni in cui un gas di fermioni si trova in

regime di *completa degenerazione*, come si può riscontrare nel crollo verticale nella distribuzione a  $\varepsilon = \varepsilon_F$  nella figura 1.1.

D'altra parte, a temperature superiori allo zero assoluto, l'energia termica delle particelle permette l'occupazione di stati a energia superiore. Di conseguenza, al crescere della temperatura, la distribuzione di Fermi-Dirac inizia ad avere un andamento più morbido.



**Figura 1.1:** Occupazione degli stati energetici al variare della temperatura secondo la distribuzione di Fermi-Dirac.

Per impostare il problema in maniera più generale, le distribuzioni di Maxwell e Fermi-Dirac si possono unificare in una *distribuzione generalizzata*, in funzione della quantità di moto  $p$ , che si differenzia a seconda del valore del *parametro di degenerazione*  $\psi$ :

$$n(p)dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p^2}{e^{\left[\frac{p^2}{2mk_B T} - \psi\right]} + 1} dp, \quad \psi \propto \frac{1}{k_B T} \left(\frac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3} \quad (1.13)$$

Il valore che assume  $\psi$  dipende delle condizioni ambientali di temperatura  $T$  e densità  $n$ , e descrive il livello di degenerazione del gas. A basse temperature o alte densità  $\psi$  aumenta, indicando un alto livello di degenerazione, e viceversa, per alte temperature o basse densità  $\psi$  diminuisce, indicando bassi livelli di degenerazione.

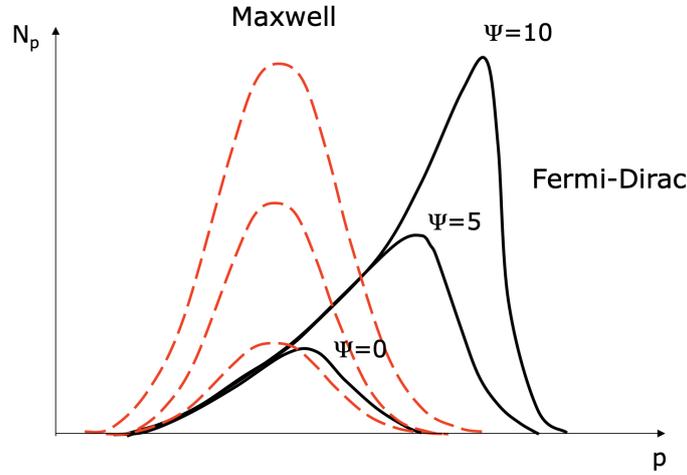
Come si può anche osservare nel grafico 1.2, nel limite  $\psi \rightarrow \infty$ , che corrisponde alla completa degenerazione, la distribuzione generalizzata coincide con la Fermi-Dirac, che in funzione della quantità di moto ha forma:

$$n(p)dp = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp \quad (1.14)$$

A differenza di quanto visto prima con la distribuzione di Maxwell, se ora si aumenta il numero di particelle a temperatura fissata, il picco si sposta verso  $p$  più alti, coerentemente con il fatto che l'energia e il momento di Fermi aumentano con la densità elettronica:

$$p_F = \left(\frac{3\hbar^3 n_e}{8\pi}\right)^{1/3} \quad (1.15)$$

D'altra parte, quando  $\psi \ll 0$ , la distribuzione generalizzata tende alla distribuzione di Maxwell: si tratta del caso in cui la densità è bassa, e il numero di stati disponibili è molto maggiore del numero di particelle. In queste condizioni gli elettroni non risentono dei vincoli imposti dalla meccanica quantistica.



**Figura 1.2:** Dipendenza della distribuzione generalizzata dal parametro  $\psi$  a  $T$  fissata.

## 1.4 Condizione di degenerazione

È ormai stabilito che la degenerazione entra in gioco per basse temperature o alte densità. Più precisamente, una condizione di degenerazione in funzione di  $T$  e  $\rho$  si può ottenere attraverso due strade.

La prima prevede di partire dalla condizione 1.1, che fondamentalemente esprime il principio di esclusione di Pauli. La distanza media tra le particelle,  $r$ , si può esprimere in funzione della densità numerica delle particelle,  $n$ , come:

$$n = \frac{\rho}{\mu m_H} \propto \frac{3}{4\pi r^3} \Rightarrow r \propto \left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{1/3} \quad (1.16)$$

Dove la massa di ciascuna particella  $m$  è espressa come  $\mu m_H$ , con  $\mu$  peso molecolare medio e  $m_H$  massa dell'idrogeno. Sostituendo  $r$  nella 1.1 si ottiene:

$$T < \hbar^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3} \frac{1}{2k_B} \frac{\rho^{2/3}}{m} \approx 2.4 \cdot 10^{-22} \frac{\rho^{2/3}}{m} \quad (1.17)$$

Quando questa condizione è soddisfatta non si possono trascurare gli effetti quantistici e ci si trova in regime di degenerazione. Si osserva che, a parità di condizioni ambientali  $T$  e  $\rho$ , la massa delle particelle è determinante: se  $m$  diminuisce è più facile che la condizione venga soddisfatta. Per questo motivo gli elettroni sono più facilmente soggetti a degenerazione, e sostituendo la loro massa si ottiene la condizione di degenerazione per un gas di elettroni:

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < 2.4 \cdot 10^5 \quad [K \text{ cm}^2 \text{ g}^{-2/3}] \quad (1.18)$$

Un'altra strada per raggiungere la stessa condizione si basa sul confronto dell'energia termica media delle particelle con l'energia di Fermi. A temperature superiori ai 0 K alcuni degli stati a energia  $\varepsilon > \varepsilon_F$  possono essere occupati dai fermioni grazie alla loro energia termica. Se invece l'energia termica media risulta minore di  $\varepsilon_F$ , allora al generico elettrone non è possibile la transizione a livelli più energetici, e il gas è degenere.

Per prima cosa, l'energia di Fermi si può esprimere in funzione della densità di elettroni come:

$$n_e = \left(\frac{Z}{A}\right) \frac{\rho}{m_H} \Rightarrow \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left[ 3\pi^2 \left(\frac{Z}{A}\right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{2/3} \quad (1.19)$$

Dove  $Z$  indica il numero di protoni e  $A$  il numero di nucleoni della specie chimica che compone il gas.

Visto che alla temperatura  $T$ , l'energia termica media di un fermione è  $\frac{3}{2}k_B T$ , la condizione di degenerazione è impostata dalla disuguaglianza:

$$\frac{3}{2}k_B T < \frac{\hbar^2}{2m_e} \left[ 3\pi^2 \left(\frac{Z}{A}\right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{2/3} \quad (1.20)$$

Infine, esplicitando  $T$  e  $\rho$  e assumendo  $Z/A = 1/2$ , si ottiene la condizione:

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < \frac{\hbar^2}{2m_e k_B} \left[ \frac{3\pi^2}{m_H} \left(\frac{Z}{A}\right) \right]^{2/3} \approx 1.3 \cdot 10^5 \quad [K \text{ cm}^2 \text{ g}^{-2/3}] \quad (1.21)$$

Anche se ottenute attraverso percorsi diversi, le due condizioni 1.18 e 1.21 sono completamente equivalenti, e individuano il limite oltre il quale un gas non può più essere trattato in approssimazione di gas perfetto, ma deve essere considerato degenere.

## Capitolo 2

# Applicazioni astrofisiche

### 2.1 Equazione di stato degli interni stellari

Le stelle sono sfere di gas all'equilibrio idrostatico tra gravità e pressione. Per comprendere gli effetti della degenerazione sulle loro proprietà è innanzitutto utile ottenere *l'equazione di stato degli interni stellari*.

L'equazione di stato di un gas è una legge che mette in relazione la pressione del gas  $P$ , la densità  $\rho$ , e la temperatura  $T$ :

$$P = P(\rho, T) \quad (2.1)$$

Gli interni stellari raggiungono condizioni di temperatura e densità estreme, che talvolta possono portare il nucleo in regime di degenerazione. Per questa ragione l'equazione di stato degli interni stellari deve avere una forma che includa i diversi regimi in cui può trovarsi il nucleo, per il quale l'approssimazione di gas perfetto può non essere sempre valida.

In un interno stellare si sommano due tipi di pressione, quella esercitata dal gas,  $P_{gas}$  e la pressione di radiazione,  $P_{rad}$ :

$$P = P_{gas} + P_{rad} \quad (2.2)$$

In particolare, la pressione di radiazione è esercitata dai fotoni, ed è sempre data da:

$$P_{rad} = \frac{aT^4}{3}, \quad a = \frac{4\sigma}{c} \quad (2.3)$$

Dove  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann e  $c$  è la velocità della luce <sup>1</sup>.

D'altra parte, la pressione esercitata dal gas dipende dal regime in cui ci si trova. In approssimazione di gas perfetto la pressione si ottiene inserendo la distribuzione di Maxwell nell'integrale di pressione:

$$P_{gas} = \frac{1}{3}m \int_0^\infty n(v)v^2 dv = Nk_B T = \rho \frac{k_B T}{\mu m_H} \quad (2.4)$$

Sommando i due contributi si ottiene l'equazione di stato per un *gas perfetto*:

$$P = P_{gas} + P_{rad} = \rho \frac{k_B T}{\mu m_H} + \frac{aT^4}{3} \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup> $\sigma = 5.6 \cdot 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ,  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$

La 2.5 va perfezionata aggiungendo i termini per le deviazioni dal regime di gas ideale. Quando il gas è degenere bisogna inserire nell'integrale di pressione la distribuzione di Fermi-Dirac, e integrare fino al momento di Fermi:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} (n(p)) p v dp = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \left( \frac{8\pi}{\hbar^3} p^2 \right) p v dp \quad (2.6)$$

A questo punto bisogna distinguere il regime non relativistico, per  $p_F \ll m_e c$  in cui vale  $p = m_e v$ , dal regime relativistico, in cui  $p_F \approx m_e c$  e si ha  $p = \frac{m_e v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ . Risolvendo l'integrale di pressione, e sostituendo l'espressione 1.15 per  $p_F$ , si ottengono i due risultati seguenti:

1. In *regime degenere non relativistico* la nuova relazione non è più con la temperatura, ma con la densità:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \frac{p_F^5}{5} \Rightarrow P = k_1 \rho^{5/3} \quad (2.7)$$

Allora *a pari densità, un gas degenere offre una pressione più elevata di un gas perfetto.*

2. In *regime degenere relativistico* si ottiene nuovamente che la pressione non dipende più dalla temperatura, ma solo dalla densità, questa volta secondo la relazione:

$$P = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4 \Rightarrow P = k_2 \rho^{4/3} \quad (2.8)$$

Tornando agli interni stellari, prima di comporre l'equazione di stato, bisogna considerare il fatto che le alte temperature causano la ionizzazione degli atomi, per cui il gas contiene una componente elettronica e una componente di nuclei atomici. La massa particolarmente elevata dei nuclei richiede condizioni ambientali ancora più estreme rispetto agli elettroni per soddisfare la condizione di degenerazione. Questo permette di assumere, da un lato, che i nuclei si trovino in regime di gas perfetto, e dall'altro, di considerare la possibilità di degenerazione solo per il contributo degli elettroni. Allora, la pressione all'interno di una stella si esprime come:

$$P = P_{rad} + P_{gas} = P_{rad} + P_{ioni} + P_{elettroni} \quad (2.9)$$

$$P = \frac{aT^4}{3} + \rho \frac{k_B T}{\mu_{ioni} m_H} + \begin{cases} \rho \frac{k_B T}{\mu_{elettroni} m_H}, & \text{gas perfetto} \\ k_1 \rho^{5/3}, & \text{gas degenere non relativistico} \\ k_2 \rho^{4/3}, & \text{gas degenere relativistico} \end{cases} \quad (2.10)$$

### 2.1.1 Diagramma $\log(T) - \log(\rho)$

Dal momento che le condizioni ambientali nell'envelope di una stella, in generale, non permettono di raggiungere la degenerazione, è proprio la combinazione di  $\rho$  e  $T$  *del nucleo* a determinare se ci si trova in regime di degenerazione o di gas perfetto. Si possono quindi utilizzare questi valori come coordinate per individuare il punto nel diagramma  $\log(T) - \log(\rho)$  che identifica il regime in cui ci si trova.

In particolare, a seconda della componente dominante di pressione, si individuano 4 regioni, separate da rette ottenute uguagliando i vari contributi:

1. Per separare il regime di pressione di gas perfetto da quello in cui domina la pressione di radiazione si eguagliano i termini della 2.5. Calcolando il logaritmo della relazione si ottiene la retta che separa le due regioni:

$$\frac{aT^4}{3} = \rho \frac{k_B T}{\mu m_H} \Rightarrow \log(T) = \frac{1}{3} \log(\rho) + 7.5 \quad (2.11)$$

2. La regione di gas perfetto è da separare anche da quella di gas degenere non relativistico. Per ottenere la retta di separazione si eguagliano la componente di pressione di gas perfetto degli elettroni con quella di gas degenere, ottenendo:

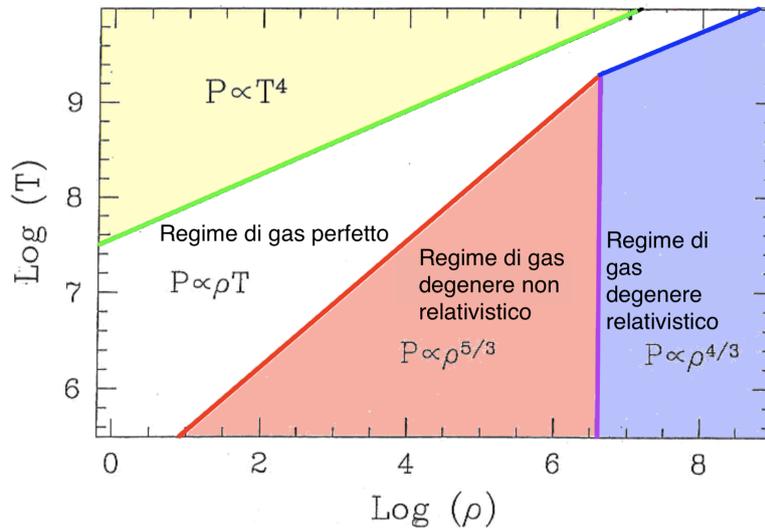
$$\rho \frac{k_B T}{\mu_{\text{elettroni}} m_H} = k_1 \rho^{5/3} \Rightarrow \log(T) = \frac{2}{3} \log(\rho) + 4.88 \quad (2.12)$$

Similmente, la separazione tra regime di gas perfetto e di gas degenere relativistico è data da:

$$\rho \frac{k_B T}{\mu_{\text{elettroni}} m_H} = k_2 \rho^{4/3} \Rightarrow \log(T) = \frac{1}{3} \log(\rho) + 7.07 \quad (2.13)$$

3. Infine la regione di gas degenere si suddivide nel caso non relativistico e relativistico attraverso la relazione:

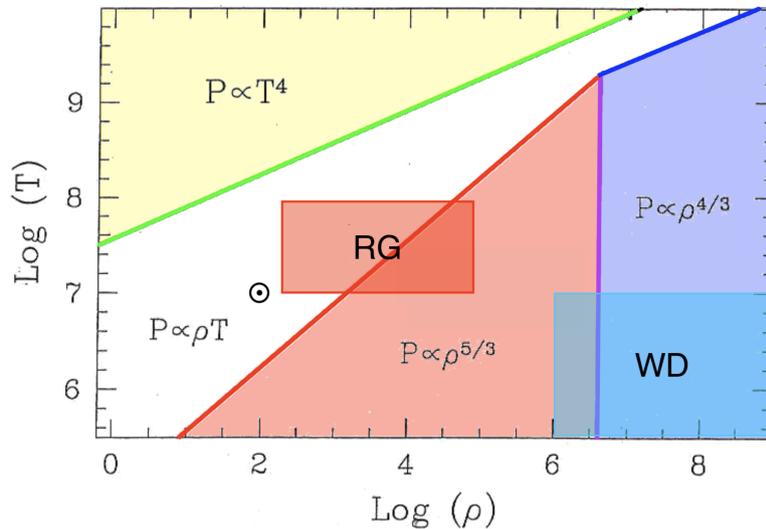
$$k_1 \rho^{5/3} = k_2 \rho^{4/3} \Rightarrow \log(\rho) = 6.6 \quad (2.14)$$



**Figura 2.1:** Diagramma  $\log(T) - \log(\rho)$ . Nella regione gialla è dominante  $P_{rad}$ . La retta in verde è la 2.11, che separa la regione in cui domina  $P_{rad}$  da quella in cui domina  $P_{gas}$ . Il regime di gas perfetto è separato da quello di gas degenere non relativistico dalla 2.12 in rosso, e da quello relativistico dalla 2.13 in blu. Infine, la 2.16 in viola separa i due regimi di gas degenere non relativistico e relativistico.

Stelle in diversi stadi evolutivi si trovano in regioni differenti nel diagramma  $\log(T) - \log(\rho)$ . Ad esempio, il Sole è attualmente nella fase evolutiva della main sequence, durante la quale viene bruciato l'idrogeno nel nucleo, che quindi si trova in regime

di gas perfetto. Le nane bianche invece sono strutture degeneri, e pertanto si collocano nella regione a temperature più basse e densità più alte del diagramma, tra regime degenero non relativistico e relativistico. Infine, si possono posizionare i nuclei delle giganti rosse, cioè le stelle nella fase evolutiva successiva alla combustione dell'idrogeno nel nucleo, tra regime di gas perfetto e regime di gas degenero.



**Figura 2.2:** Diagramma  $\log(T) - \log(\rho)$ . Si evidenzia la posizione del Sole ( $\odot$ ), delle giganti rosse (RG), e delle nane bianche (WD)

## 2.2 Evoluzione stellare e degenerazione del nucleo

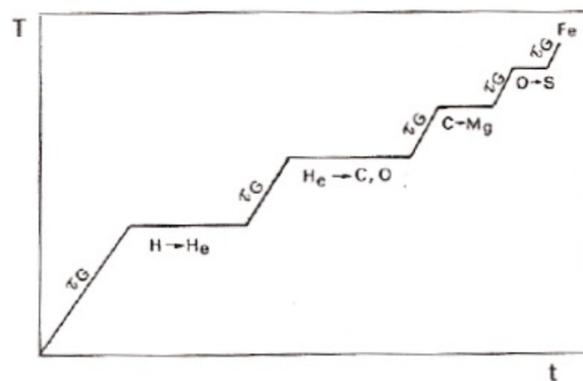
L'evoluzione stellare è essenzialmente guidata da quella del nucleo ed è il risultato di una costante lotta contro la gravità, che tende a contrarre la struttura. La contrazione del nucleo comporta l'aumento della temperatura, che quando è sufficientemente alta permette di innescare l'attività termonucleare.

Le fusioni termonucleari costituiscono come delle pause dalla contrazione.

Come si può vedere nella figura 2.3, l'evoluzione stellare è data dall'alternarsi delle fasi di attività termonucleare, a temperatura costante, e delle fasi di contrazione, in cui la struttura stellare si riaggiusta, innalzando la temperatura per preparare il nucleo alla combustione successiva.

Bisogna evidenziare che il comportamento appena descritto è valido solo in condizioni di gas perfetto, in cui la risposta a un aumento di temperatura

è un aumento di pressione, un'espansione, e quindi una diminuzione della temperatura: fenomeno della termoregolazione. Se ad un certo punto il nucleo entra in



**Figura 2.3:** Evoluzione del core rappresentata dall'andamento della temperatura in funzione del tempo.

regime di degenerazione, l'evoluzione stellare viene rallentata, se non fermata del tutto. Questo avviene perchè un gas degenere è insensibile alla temperatura e si oppone alla contrazione offrendo una pressione molto maggiore di quella di gas perfetto.

Dai dati che si ottengono dalle stelle si osserva che all'aumentare della massa, la densità centrale diminuisce, indicando che per stelle di più piccola massa è più facile entrare in regime di degenerazione.

Esiste infatti un'importante *massa di transizione*, a  $8M_{\odot}$ , che determina se una volta trasformato il nucleo di elio in carbonio-ossigeno, si entra in regime di degenerazione o meno. I destini per stelle con massa  $M > 8 M_{\odot}$  oppure  $M < 8 M_{\odot}$  sono completamente diversi<sup>2</sup>.

Per stelle con massa  $M > 8 M_{\odot}$ , il nucleo rimane in condizioni di gas perfetto durante l'intera evoluzione termonucleare, fino alla produzione di un nucleo di ferro sostenuto dalla pressione di degenerazione degli elettroni. La vita di queste stelle si conclude in un evento di supernova del tipo core collapse, quando a causa di determinati processi viene a meno la pressione di degenerazione che sosteneva il nucleo. I resti del nucleo a seguito della supernova possono stabilizzarsi formando *stelle di neutroni* oppure, quando la massa iniziale è particolarmente elevata, collassare completamente in un buco nero.

Per stelle con massa tra  $0.5M_{\odot}$  e  $8M_{\odot}$ , la degenerazione del nucleo dopo il bruciamento dell'elio ferma completamente l'evoluzione termonucleare della stella, formando una *nana bianca di carbonio-ossigeno*.

Sotto le  $0.5M_{\odot}$  la condizione di degenerazione dopo il bruciamento dell'idrogeno non può mai essere rimossa, e le stelle concludono la loro vita come *nane bianche di elio*.

## 2.2.1 He flash

Nel corso dell'evoluzione, il nucleo delle stelle con massa tra  $0.5M_{\odot}$  e  $2.2M_{\odot}$  entra nella regione di degenerazione due volte: una prima volta in maniera temporanea, e una seconda volta in maniera permanente. Conclusa la combustione dell'idrogeno nel nucleo, temperatura e densità soddisfano la condizione di degenerazione. Di conseguenza viene bloccata la contrazione e viene ritardato l'innesco della  $3\alpha^3$ .

L'evoluzione termonucleare può procedere solo a seguito dell'avvenimento di un evento capace di rimuovere la degenerazione nel nucleo: l'He-flash.

Il flash di elio consiste nell'innesco della

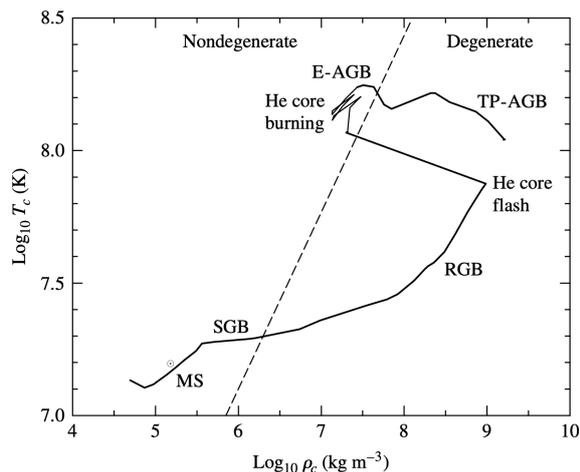


Figura 2.4: Evoluzione del core del Sole

<sup>2</sup>La transizione a  $8 M_{\odot}$  non è repentina, si può identificare un ulteriore gruppo di stelle, con massa tra  $7 M_{\odot}$  e  $11 M_{\odot}$ , che possono formare un nucleo di C-O *parzialmente* degenere e che concludono la loro vita come nane bianche di Ne-O o electron-capture supernovae.

<sup>3</sup>Processo di fusione nucleare in cui tre nuclei di He vengono trasformati in uno di C

$3\alpha$  in ambiente semi-degenere, con il rilascio di una grande quantità di energia, che viene completamente usata nella rimozione della degenerazione, senza raggiungere la superficie stellare (non c'è nessun aumento in luminosità). L'energia rilasciata innanzitutto rimuove la degenerazione, e in secondo luogo viene trasformata in energia cinetica per espandere il nucleo, andando a diminuire ulteriormente la densità. Si parla di flash perchè il bruciamento dell'elio è temporaneo e non stabile, rendendo il fenomeno di breve durata.

Bisogna evidenziare che il flash di elio non è una fase evolutiva in cui viene trasformato l'elio in carbonio, ma un evento che permette alle stelle con massa tra  $0.5M_{\odot}$  e  $2.2M_{\odot}$  di rimuovere la degenerazione elettronica e preparare le condizioni per la combustione dell'He.

## 2.3 Nane bianche

In generale, con il termine nana bianca si fa riferimento agli stadi evolutivi finali delle stelle di massa tra  $0.5M_{\odot}$  e  $8M_{\odot}$ , che non possono innescare la combustione del carbonio nel nucleo degenere. In realtà esistono anche nane bianche con diverse composizioni chimiche, anche se sono meno frequenti.

Le proto-nane bianche si formano dopo l'ultima attività termonucleare, quando la fase di nebulosa planetaria, che rimuove l'envelope della stella, lascia dietro di sé il nucleo di carbonio-ossigeno degenere.

Le nane bianche di CO sono composte da una struttura interna di carbonio e ossigeno completamente degenere, circondata da sottili strati di H e He, non degeneri, che compongono rispettivamente l'1% e lo 0.1% della massa totale.

I parametri più importanti nella descrizione delle nane bianche sono la *densità* e la *gravità superficiale*. Ad esempio, per Sirio B, che si può considerare come prototipo di nana bianca, la densità media vale  $\rho = 3 \cdot 10^6 \text{ g cm}^{-3}$  e l'accelerazione gravitazionale sulla superficie assume un valore di  $g = 4.6 \cdot 10^8 \text{ cm s}^{-2}$ , quattro ordini di grandezza superiore a quella del Sole. Le nane bianche sono anche caratterizzate da una bassa luminosità, in genere dell'ordine di  $10^{-3} L_{\odot}$ , che limita l'osservazione di queste stelle entro la nostra galassia.

### 2.3.1 Relazione Massa - Raggio

Le nane bianche sono una classe di stelle che hanno la massa dell'ordine di quella del Sole entro un raggio simile a quello della Terra<sup>4</sup>. Si può ottenere una relazione tra la massa e il raggio sfruttando il fatto che queste stelle si trovano al perfetto equilibrio idrostatico tra la pressione dovuta alla gravità e la pressione di degenerazione offerta dagli elettroni. Assumendo che la densità sia costante, l'uguaglianza è data da:

$$\rho = \frac{3M_{WD}}{4\pi R_{WD}^3}, \quad \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R_{WD}^2 = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5} \frac{\left(\frac{Z}{A} \frac{\rho}{m_H}\right)^{5/3}}{m_e} \quad (2.15)$$

Si ottiene:

$$M_{WD}^{1/3} R_{WD} \approx 3 \cdot 10^{19} \quad (2.16)$$

---

<sup>4</sup> $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$ ,  $R_{\oplus} = 6.37 \cdot 10^8 \text{ cm}$

La *relazione massa-raggio* indica che le nane bianche più massive raggiungono l'equilibrio idrostatico in strutture più compatte, e quindi sono anche le più piccole.

### 2.3.2 Massa limite di Chandrasekhar

La relazione massa-raggio appena ricavata non si può estrapolare all'aumentare della massa, perchè una volta raggiunte densità dell'ordine di  $10^6 \text{ g cm}^{-3}$ , le velocità degli elettroni diventano relativistiche, e la 2.16 inizia a non valere più.

Impostando nuovamente l'uguaglianza tra la gravità e la pressione di gas degeneri, questa volta nel caso relativistico, si ottiene una relazione che stabilisce una massa limite:

$$\frac{2}{3}\pi G \rho^2 R^2 = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left( \frac{Z}{A} \frac{\rho}{m_H} \right)^{4/3} \quad (2.17)$$

È proprio la variazione della dipendenza dalla densità, da  $\rho^{5/3}$  per il caso non relativistico, a  $\rho^{4/3}$  per il regime relativistico, a rimuovere la dipendenza dal raggio. La nuova relazione è:

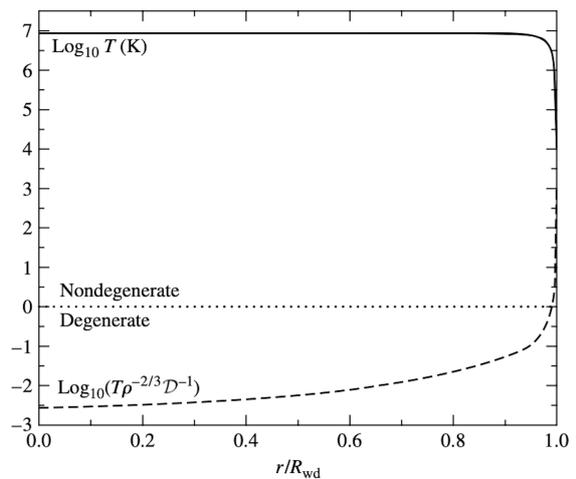
$$M_{Ch} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{8} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \left( \frac{Z}{A} \frac{1}{m_H} \right)^2 = 1.44 M_{\odot} \quad (2.18)$$

Il limite ottenuto è chiamato *massa di Chandrasekhar*, ed è la massa massima di una struttura stellare capace di mantenere l'equilibrio idrostatico grazie alla pressione di gas degeneri. La violazione di questo limite porta al collasso gravitazionale della struttura. Si tratta quindi di un risultato completamente generale, non specifico alle nane bianche.

L'assenza di osservazioni di nane bianche con massa superiore alla massa di Chandrasekhar conferma che il limite viene effettivamente sempre rispettato.

### 2.3.3 Evoluzione delle nane bianche

Un'importante proprietà delle nane bianche è data dal fatto che le regioni più interne sono essenzialmente *isoterme*, e la temperatura crolla soltanto nelle sottili regioni esterne non degeneri. Questo è dovuto alla degenerazione elettronica, che favorisce come metodo di trasporto energetico la *conduzione*, attraverso gli elettroni. Infatti, in condizioni di gas degeneri, il libero cammino medio degli elettroni è maggiore di quello dei fotoni, rendendo gli elettroni più efficaci nel trasporto dell'energia. In condizioni di gas perfetto la situazione è ribaltata, e il metodo di trasporto radiativo, attraverso i fotoni, risulta più efficiente.



**Figura 2.5:** Profilo della temperatura e livello di degenerazione nell'interno di una nana bianca.

Si pensa che la luminosità delle nane bianche sia supportata dal loro *raffreddamento*, cioè dalla progressiva perdita di energia interna dei nuclei. In ambiente degenere, infatti, non possono avvenire né processi termonucleari, né di contrazione, e l'energia termica risiede principalmente nell'energia cinetica dei nuclei, in quanto gli elettroni degeneri occupano gli stati a energia minore e non possono contribuire.

Per questa ragione, l'evoluzione delle nane bianche consiste nel loro graduale raffreddamento, che avviene a raggio costante, e si manifesta in una diminuzione della luminosità. È proprio la massa della nana bianca all'inizio della sequenza di raffreddamento, attraverso la relazione massa-raggio, a fissare il raggio, che è destinato a rimanere costante a causa della degenerazione.

## 2.4 Stelle di neutroni

Un'altra categoria di oggetti degeneri è quella delle stelle di neutroni, che corrispondono agli ultimi stadi evolutivi delle stelle con massa  $M > 8M_{\odot}$ , che hanno concluso l'evoluzione termonucleare con la formazione di un nucleo di ferro degenere. Quando la massa del nucleo si avvicina al limite di Chandrasekhar, avviene il collasso gravitazionale attraverso una supernova core collapse. Se la massa della stella iniziale non supera le  $25 M_{\odot}$ , i resti del core collassato formano una stella di neutroni.

In genere, la massa delle stelle di neutroni si aggira intorno a  $1.4 M_{\odot}$ , proprio perché il collasso del nucleo può avvenire solo quando ci si avvicina al limite di Chandrasekhar.

La struttura delle stelle di neutroni prevede una regione interna di neutroni degeneri, circondata da uno strato di elettroni degeneri e da un envelope non degenere di  $1 m$  di spessore, per un raggio totale dell'ordine dei  $10 km$ .

Come per le nane bianche, la *densità* e l'*accelerazione di gravità superficiale* sono i parametri più interessanti: le densità centrali possono raggiungere i  $10^{15} g cm^{-3}$ , superando di un ordine di grandezza la densità della materia nucleare, e l'accelerazione di gravità sulla superficie è dell'ordine di  $10^{14} cm s^{-2}$ .

Si può ottenere la *condizione di degenerazione per i neutroni* partendo dalla relazione 1.17 e sostituendo la massa dei neutroni  $m_n$ :

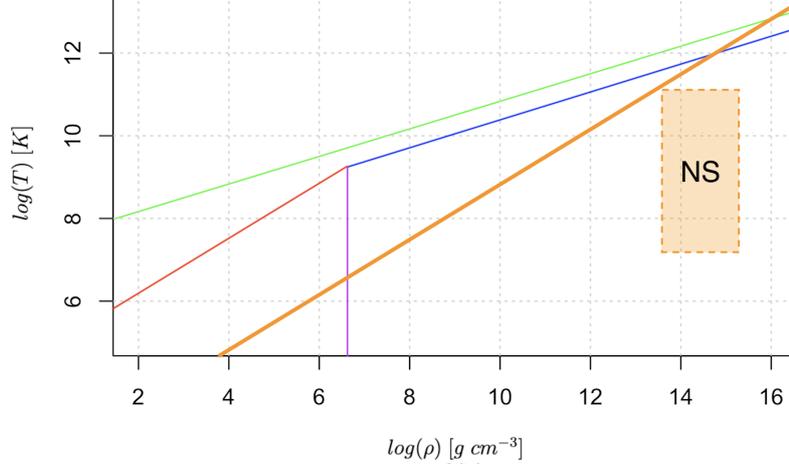
$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < \frac{2.4 \cdot 10^{-22}}{1.675 \cdot 10^{-24}} \approx 143.3 \quad [K^2 cm^2 g^{-2/3}] \quad (2.19)$$

Innanzitutto si osserva che, se si vanno a inserire le condizioni ambientali degli interni di una stella di neutroni, cioè una temperatura dell'ordine di  $10^{11} K$  e una densità di  $10^{15} g cm^{-3}$ , la condizione è soddisfatta, indicando che effettivamente ci si trova in regime di degenerazione.

Inoltre, si può calcolare il logaritmo di questa relazione per ottenere la retta nel diagramma  $\log(T) - \log(\rho)$  che separa la regione in cui i neutroni sono in condizioni di gas perfetto, da quella in cui sono in condizioni di degenerazione:

$$\log(T) = \frac{2}{3}\log(\rho) + 2.16 \quad (2.20)$$

La retta ha la stessa pendenza di quella che separa il gas di elettroni perfetto da quello degenere, ma ha intercetta all'origine minore.



**Figura 2.6:** Diagramma  $\log(T) - \log(\rho)$ . La retta in arancione separa il regime di neutroni in condizioni di gas perfetto (regione superiore) da quello degenere (regione inferiore). Si evidenzia anche la posizione delle stelle di neutroni (NS).

### 2.4.1 Relazione massa-raggio e massa limite

Ancora una volta, l'equilibrio idrostatico tra la gravità e la pressione di gas degenere, questa volta offerta dai neutroni, permette di derivare una *relazione massa-raggio*:

$$\frac{2}{3}\pi G\rho^2 R_{NS}^2 = \frac{1}{3}\frac{\hbar^2}{m_H}\left(\frac{\rho}{m_H}\right)^{5/3} \Rightarrow M_{NS} = \left(\frac{15.2 \text{ km}}{R_{NS}}\right)^3 M_{\odot} \quad (2.21)$$

Come per le nane bianche, questa relazione indica che le stelle di neutroni più massive sono le più dense e le più piccole.

Si può calcolare anche la massa limite, oltre la quale la pressione di degenerazione dei neutroni non supporta più quella di gravità, la *massa limite di Oppenheimer-Volkov*:

$$M_{NS}^{limit} \approx 2.5 - 3M_{\odot} \quad (2.22)$$

La violazione di questo limite produce un collasso che genera un *buco nero*.

# Bibliografia

Bradley W. Carroll D. A. O., 2007, *An introduction to modern astrophysics*. Pearson

Ferraro F. R., 2022, *Astrofisica Stellare, Dispense*

Ferraro F. R., 2023, *Stellar Evolution, Dispense*

Griffiths D. J., 1994, *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall

Grill F., 2011, PhD thesis, Università degli Studi di Milano

Kittel C., 2005, *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley Sons, Inc

Pasquini L., 2023, *Struttura della Materia, Dispense*

Ravanini F., 2022, *Istituzioni di Fisica Teorica, Dispense*