

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Sulla quantizzazione cono-luce della stringa bosonica

Relatore:

**Prof. Francisco Manuel
Soares Verissimo Gil Pedro**

Presentata da:

Ilaria Netti

Anno Accademico 2022/2023

Ai miei genitori, per tutto.

Abstract

La teoria delle stringhe, dapprima postulata per spiegare il fenomeno della proliferazione adronica, è la prima unificatrice delle quattro interazioni fondamentali in un unico quadro quantistico, per questo candidata a Teoria del tutto. Nel seguente elaborato si sono analizzati i primi risultati cruciali che hanno generato risonanza a livello storico, al fine di presentare l'efficacia di una descrizione dell'universo in cui l'entità ultima è una cordicella, la quale, in virtù dei modi vibrazionali che la caratterizzano, è in grado di generare l'intero spettro particellare presentato nel Modello Standard, superandolo. In quest'ultimo concetto vi è l'essenza di una teoria unica, contraddistinta da risultati analitici quali dimensioni dello spazio in cui si opera e massa degli oggetti che vengono descritti, i quali, scaturendo dagli sviluppi computazionali, ne evidenziano anche le criticità. In particolare si sottolineerà come la presenza di extra dimensioni dello spazio e particelle caratterizzate da masse immaginarie, lungi dall'essere verificate sperimentalmente, rendano sempre meno probabile l'accettazione della teoria nella sua totalità. Quanto appena illustrato, è stato descritto attraverso la sola stringa bosonica, nelle sue configurazioni aperta e chiusa, la quale risulta naturalmente insufficiente per una descrizione completa della realtà, dato che è stata esclusa un'intera categoria di particelle.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Le origini della teoria delle stringhe	1
1.2	Teoria del tutto	4
1.3	Verifiche sperimentali	6
2	La stringa bosonica relativistica	8
2.1	Particella relativistica	8
2.2	Stringa relativistica	11
2.2.1	Azione di Nambu-Goto	11
2.2.2	Equazioni del moto	14
2.2.3	Simmetrie e quantità conservate	15
3	La stringa bosonica cono-luce	19
3.1	Static gauge	19
3.1.1	Equazioni del moto della stringa aperta	23
3.1.2	Pendenza universale di Regge α'	25
3.2	Gauge cono-luce	28
3.2.1	Coordinate cono-luce	28
3.2.2	Parametrizzazione cono-luce della superficie di universo	29
3.2.3	Soluzione cono-luce delle equazioni del moto	32
4	Quantizzazione cono-luce della particella puntiforme	37
4.1	Campi cono-luce e particelle	37
4.1.1	Campi scalari quantistici	37
4.1.2	Campi di Maxwell e stati del fotone	40
4.1.3	Campi gravitazionali e stati del gravitone	42
4.2	Coordinate dinamiche cono-luce	44
4.3	Quantizzazione cono-luce	45
5	Quantizzazione cono-luce della stringa	49
5.1	Stringa aperta	49

5.1.1	Operatori cono-luce e relazioni di commutazione	49
5.1.2	Operatori trasversi di Virasoro e dimensioni dello spazio	54
5.1.3	Spazio degli stati della stringa aperta	56
5.2	Stringa chiusa	59
5.2.1	Equazioni del moto della stringa chiusa	59
5.2.2	Operatori trasversi di Virasoro	62
5.2.3	Spazio degli stati di stringa chiusa	63
A	Complementi algebrici	67
A.1	Gruppo omogeneo di Lorentz \mathcal{L}	67
A.2	Gruppo di Poincaré \mathcal{P}	69
A.3	Area delle superfici in \mathbb{R}^3	71
A.4	Richiami sul teorema di Noether	72
A.5	Relatività generale linearizzata	73
B	Particella e stringa bosonica	76
B.1	Invarianza dell'azione per riparametrizzazioni	76
B.2	Equazione moto particella relativistica	76
B.3	Equazione del moto per i campi scalari	78
B.4	Equazione del moto stringa bosonica	78

Notazione

In questo scritto si considera uno spazio di Minkowski D-dimensionale $\mathbf{R}^{1,D-1}$, caratterizzato da una metrica con la seguente segnatura $(-, +, +, \dots, +)$.

Si ritiene necessario specificare la notazione usata:

\equiv *definito come*

\approx *approssimativamente uguale*

\sim *corrispondenza grossolana*

$\hbar = c = 1$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{D-1}) \in \mathbb{R}^{D-1}$, $v^\mu = (v^0, \dots, v^{D-1}) \in \mathbf{R}^{1,D-1}$, $v \in \mathbb{R}$

a^* complesso coniugato di $a \in \mathbb{C}$

$v \cdot u \equiv v^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\mu u^\nu$ prodotto scalare relativistico

$\dot{x}^2 = \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$

$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$ con ξ^α set completo di coordinate

$\dot{X}^\mu \equiv \partial_\tau X^\mu$ $X^{\mu'} \equiv \partial_\sigma X^\mu$

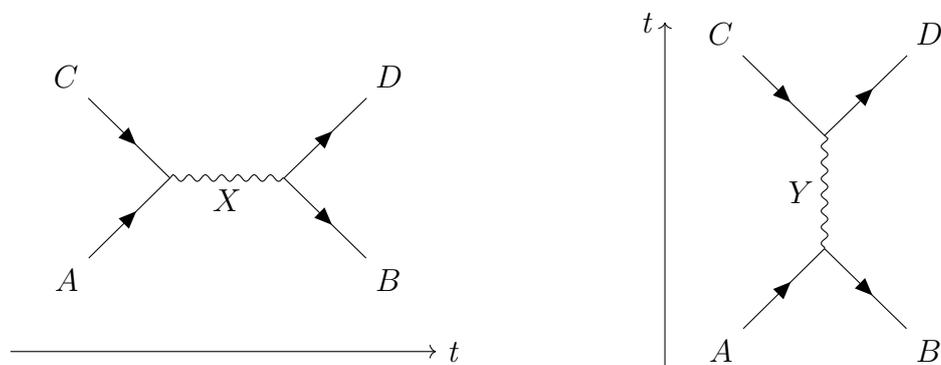
$T = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu_\mu$ traccia tensore

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Le origini della teoria delle stringhe

La teoria delle stringhe, antecedente l'avvento della cromodinamica quantistica, ha le proprie radici nella fisica degli adroni, contesto diverso da quello per cui oggi è conosciuta, ove si ambiva una teoria che conseguisse una corretta descrizione dell'interazione forte. Conseguente il fenomeno della *proliferazione adronica*, senza considerare tali corpuscoli dotati di struttura interna¹, non si rivelò conveniente definire una teoria di campo quantizzato in cui, seguendo il modello dell'elettrodinamica quantistica, si potesse includere l'intero spettro di particelle trovate.



(a) Canale s: lo scambio di una particella X , da parte di A e B , ha come conseguenza la creazione di C e D .

(b) Canale t: la combinazione di A e B , dando luogo ad una risonanza Y , decade in C e D .

Figura 1.1: Diagrammi di Feynman ad albero per il processo d'urto $A + B \rightarrow C + D$.

¹Il concetto di *quark*, nonostante esistente, si limitava ad essere uno strumento matematico, piuttosto che associato ad una particella reale ed elementare.

Al fine di rendere meno qualitativo quanto appena detto, seguendo i passaggi storici che portarono all'introduzione del concetto di stringa, si considerino due adroni A e B il cui prodotto d'interazione è una coppia di particelle C e D , le quali non sono vincolate ad essere identificate come l'effetto di un unico processo, concetto cruciale in teoria dei campi. Avendo dunque la seguente equazione per la diffusione:

$$A + B \rightarrow C + D \quad (1.1)$$

il calcolo dell'ampiezza di scattering \mathcal{A} impone l'analisi di tutti i processi in gioco, alcuni dei quali sono riportati in Fig. 1.1, peculiarità che non permetteva di avere un accordo con le osservazioni fatte. In particolare, analizzando lo scattering mesonico² e tenendo in considerazione i due soli grafici citati, si avrebbe il seguente risultato teorico:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_t = g^2 \left(\frac{1}{s - M^2} + \frac{1}{t - M^2} \right) \quad (1.2)$$

in cui $s = (p_A + p_C)^2$ e $t = (p_B - p_A)^2$ sono le variabili di Mandelstam, mentre M e g corrispondono rispettivamente alla massa del propagatore e alla costante di accoppiamento, correlati ai processi evidenziati. La discrepanza di tale predizione con il risultato sperimentale equivaleva ad un fattore 2, in quanto \mathcal{A}_s e \mathcal{A}_t determinavano il medesimo risultato [1]; dunque dal punto di vista fisico, ciò li rendeva equivalenti, conseguenza chiamata *dualità di Dolen, Horn e Schmidt* [2]. Contemporaneo a quest'ultimo risultato, fu il concetto di *dualità piana*, in cui ogni mesone, differentemente da quanto si è visto nei diagrammi di Feynman, veniva descritto da due linee, rappresentanti le particelle elementari che lo componevano: quark e antiquark.

L'inesattezza di \mathcal{A} , nei processi di diffusione adronica ad alte energie, e la necessità di trovare una formula sostitutiva che fosse comunque in grado di accogliere l'ampio spettro di particelle X e Y rivelato sperimentalmente, incarnano tessere difficilmente inseribili nel mosaico scientifico degli anni '60, a fronte del quale Gabriele Veneziano, studiando il decadimento $\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$, teorizzò una formula in grado di riprodurre i valori sperimentali [3]:

$$\mathcal{A}_{\text{Veneziano}} = g^2 \frac{\Gamma(-s)\Gamma(-t)}{\Gamma(-s-t)} \quad (1.3)$$

ove Γ è la funzione gamma di Eulero. L'ampiezza $\mathcal{A}_{\text{Veneziano}}$, simmetrica nelle due variabili s e t , esattamente come \mathcal{A} , rappresenta simultaneamente entrambi i processi di diffusione considerati; dunque, avendo un'unica espressione completa, non sono possibili somme tra i processi.

²Primi adroni dei quali si analizzarono i processi.

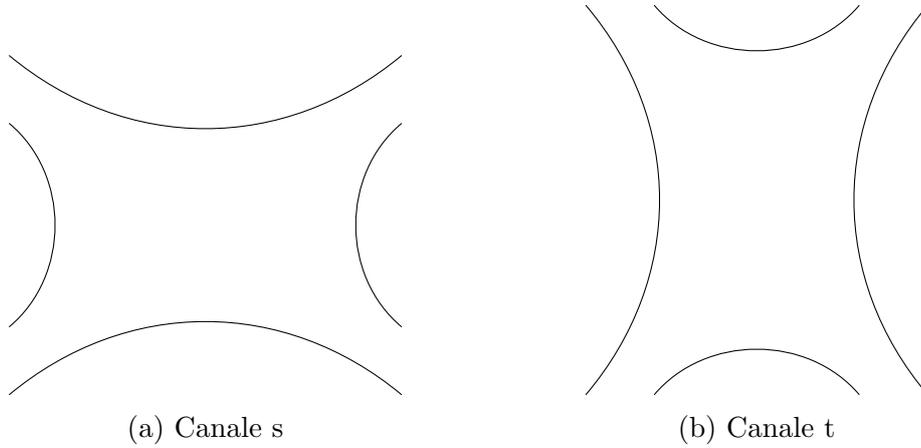


Figura 1.2: I diagrammi (a) e (b), caratterizzati da un'ampia superficie, descrivono in modo visivamente più adeguato i processi di diffusione mesonica, in quanto è possibile estendere il ruolo di X o Y , introdotti nei diagrammi di Feynman, a più particelle, includendo l'ampio spettro adronico osservato sperimentalmente. Essi, attraverso il concetto di *dualità*, sono topologicamente equivalenti, dunque ridotti ad essere due prospettive differenti per descrivere il medesimo fenomeno.

L'interesse di questo testo per l'ampiezza di Veneziano è dovuto all'origine del concetto di stringa, in quanto $\mathcal{A}_{\text{Veneziano}}$ può essere derivata per via analitica attraverso lo studio della diffusione di oggetti identificabili come cordicelle aperte, caratterizzate da due estremità. In virtù dell'ipotesi fatta, la descrizione di un processo generico, come quello riportato nella formula (1.1), assume un carattere leggermente diverso, in quanto le particelle A e B sono concepite come il risultato di un particolare modo vibrazionale della stringa, potendo interpretare la pluralità di X e Y nello stesso modo. Infatti la stringa che genera le risonanze, a causa della posizione intermedia che esse occupano in un processo, è in grado di generarne lo spettro sperimentalmente osservato, determinando una riformulazione dei diagrammi di Feynman, come si vede in Fig. 1.2. Naturalmente la struttura appena descritta, caratterizzata da una scala di lunghezza l_s , appare puntiforme a distanze $r \gg l_s$, intervallo in cui non è possibile mettere a fuoco la differenza tra enti estesi e puntiformi [4]. Tale astrazione microscopica si rivelò efficace anche per chiarire alcuni dati sperimentali nella fisica degli adroni, i quali mostravano una dipendenza lineare tra momento angolare totale J e quadrato della massa³, chiamata *traiettoria di Regge*:

$$J \propto \alpha' M^2 \tag{1.4}$$

in cui α' è la pendenza caratterizzante le rette di mesoni (bosoni) e barioni (fermioni), riconosciuta come *pendenza universale di Regge* α' ; dunque, come si vede in Fig. 1.3 le

³Si è scelto di graficare M^2 , piuttosto che M , per una semplice questione grafica.

traiettorie di Regge sono parallele.

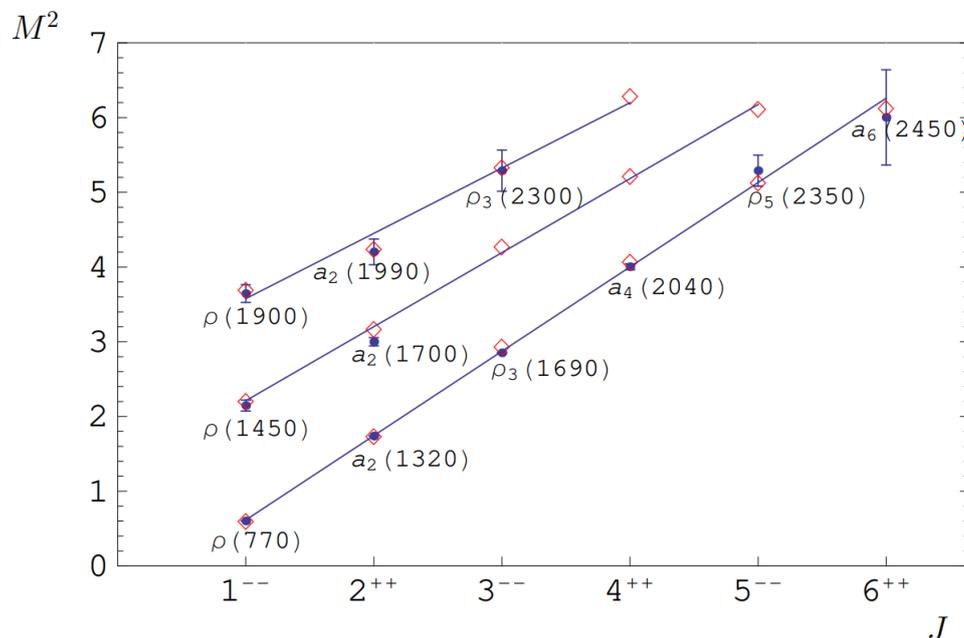


Figura 1.3: Traiettorie di Regge di alcuni mesoni, la cui massa è misurata in GeV^2 , mentre il momento angolare J è inserito all'interno della notazione spin-parità. Rombi e cerchi pieni rappresentano rispettivamente valori teorici e sperimentali, riportati con le rispettive barre d'errore [5].

La validità dell'equazione (1.4), nel contesto descritto, verrà mostrata successivamente nel testo, quando si avranno adeguati strumenti per poterla apprezzare. Il comportamento equivalente di diverse famiglie adroniche e la congruenza delle ampiezze A_s e A_t fanno parte di un quadro più ampio chiamato *modello a doppia risonanza*, instauratosi ufficialmente con l'ampiezza di Veneziano e sviluppatosi fino alla scoperta della cromodinamica quantistica, teoria di campo molto più efficace per la descrizione dei medesimi processi.

1.2 Teoria del tutto

Uno dei molteplici problemi della teoria delle stringhe come descrizione dell'interazione forte è la predizione di una particella, avente spin pari a 2, priva di massa, non osservata sperimentalmente nel mondo adronico; dunque non fu solo l'avvento della cromodinamica quantistica a causarne la sospensione nella rappresentazione di quest'ultimo. Fu però da questo modo d'oscillazione, chiamato *gravitone*, che scaturì la formulazione più

conosciuta della teoria delle stringhe, come tentativo unificatore della gravità con le interazioni presenti nel Modello Standard, in un unico quadro quantistico [6]. Prima di capire se un tale proposito è stato raggiunto, è opportuno evidenziare il motivo principale per cui ne si è sentita la necessità, illustrando il concetto di gravità quantistica, prima della teoria delle stringhe. A tal proposito si introduca l'azione di Einstein Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R} \quad (1.5)$$

in cui g e \mathcal{R} sono rispettivamente determinante del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e scalare di Ricci, mentre G_N è la costante di gravitazione universale. Per quantizzare S_{EH} , al cui interno sono celate le equazioni di campo di Einstein, si riformuli il tensore metrico nel seguente modo:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{M_{pl}} h_{\mu\nu} \quad (1.6)$$

in cui M_{pl} e $h_{\mu\nu}$ sono rispettivamente la massa di Planck ridotta e il campo che perturba lo spaziotempo piatto di Minkowski; dunque in virtù della seguente formulazione è possibile ricondurre la gravità a teoria quantistica di campo. Espandendo l'azione di Einstein Hilbert:

$$S[h] = \int d^4x \left((\partial h)^2 + \frac{1}{M_{pl}} h (\partial h)^2 + \frac{1}{M_{pl}^2} h^2 (\partial h)^2 + \dots \right) \quad (1.7)$$

si trova un numero infinito di vertici d'interazione, i quali, a seguito della combinazione tra gravità e campi materiali, non possono essere assorbiti in un numero finito di controtermini [7]; dunque la teoria è non-rinormalizzabile. Questo scenario, non essendo così singolare, era emerso anche nella teoria dell'interazione debole proposta da Enrico Fermi, contrassegnata da processi aventi un solo vertice, limite puntiforme di una interazione a corto raggio, e riformulata come *teoria di campo efficace*, sovrastante la teoria quantistica di campo, caratterizzata dai bosoni mediatori W^\pm e Z^0 , proposta dal Modello Standard. Nonostante si possa procedere per analogia con quanto appena descritto, aspirando ad una teoria di campo efficace della gravità, questo testo presenta la descrizione di un quadro alternativo, in cui, il ruolo di ente fondamentale, piuttosto che in un oggetto permeante tutto lo spazio, è riposto in una singola stringa, dal cui moto vibrazionale ha origine tutto lo spettro particellare, come mostrato qualitativamente in Fig. 1.4. Quest'ultimo, in virtù di quanto appena detto, viene incorporato all'interno di un'unica teoria, unificante tutte le forze presenti in natura, rispondendo al quesito posto ad inizio paragrafo; dunque la teoria delle stringhe, conciliando meccanica quantistica e gravità, è candidata a diventare Teoria del tutto. La sua peculiarità, consiste nell'assenza di parametri adimensionali, necessitando solo di l_s , citato in precedenza. Quanto detto non è presente nel Modello Standard, in cui, per esempio, il rapporto tra la massa di muone ed elettrone non è determinabile, se non per via sperimentale, il cui valore deve dunque essere inserito manualmente all'interno del quadro generale.

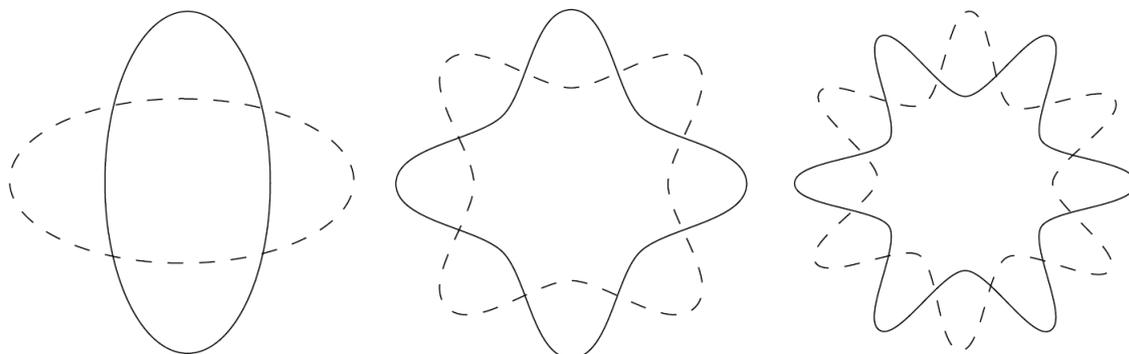


Figura 1.4: Illustrazione attraverso cui si può visualizzare ogni particella come un diverso modo vibrazionale della stringa [6].

Un'altra caratteristica singolare della teoria è la comparsa analitica della dimensionalità dello spazio, ove si sviluppa il moto della stringa, informazione che dunque non viene usata per costruire il modello stesso. Prima di indicare il risultato tratto dai calcoli, è necessario arricchire il vocabolario, precisando che, oltre alla presenza di una duplice natura della stringa, *bosonica* o *fermionica*, si ha anche una dualità di forma, *aperta* o *chiusa*, attraverso cui essa può manifestarsi. La prima distinzione fatta permette di introdurre le due diverse teorie esistenti: *stringhe bosoniche* e *superstringhe*, associate rispettivamente ad uno spazio di 26 e 10 dimensioni. Il testo corrente, concentrandosi sulla natura bosonica degli oggetti, non risulta essere sufficiente ai fini di una descrizione completa dell'universo, il quale risulta composto anche da particelle con spin semintero. Tuttavia è comunque possibile, introducendo i primi frammenti di uno scenario molto più complesso, arrivare ad alcuni dei risultati che storicamente hanno destato interesse nella teoria, come l'esistenza degli stati del gravitone.

1.3 Verifiche sperimentali

Nonostante la teoria delle stringhe sia ancora in fase di sviluppo, rendendo difficile l'elaborazione di predizioni verificabili sperimentalmente, non è solo su questo che bisogna concentrarsi per riuscire ad identificare la presenza di caratteristiche che necessitano di condizioni al contorno non riproducibili con estrema facilità. La necessità di uno spazio-tempo avente 10 dimensioni⁴, implica che alcune di esse, considerate in più, abbiano una grandezza sufficientemente piccola da sfuggire alla rivelazione, facendo in modo che alla

⁴Le dimensioni prese in considerazione sono 10, in quanto, per riuscire a fare un discorso generale, si sta tenendo in considerazione una teoria meno restrittiva.

percezione lo spazio risulti tridimensionale. Per rendere meno estratto quanto appena detto, di seguito verrà riportato un esercizio mentale, proposto dal fisico Brian Greene.

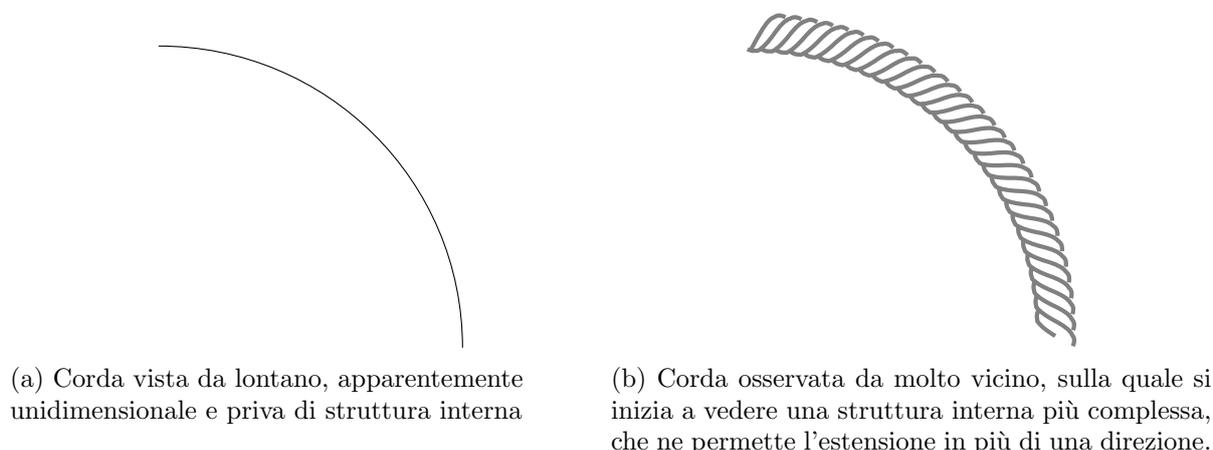


Figura 1.5: Esperimento mentale per capire l'origine e l'esistenza delle dimensioni dello spazio che non vengono osservate.

Si immagini di osservare da lontano una cordicella, la quale, data la distanza, apparirà unidimensionale, rendendo possibile il moto in un'unica direzione; dunque, supponendo di posizionarla sopra una formica, essa avrà movimenti molto limitati. Se però ci si avvicina a sufficienza all'oggetto, si inizierà a notare una struttura più complessa di quella descritta, scorgendo più di una direzione per il moto a seguito della struttura tridimensionale, come mostrato in Fig. 1.5. Quanto appena detto è estendibile alle restanti sei dimensioni spaziali, che potrebbero essere attorcigliate all'interno dello spazio ordinario in modo talmente tanto compatto da non essere osservate, esattamente come prevede la spiegazione convenzionale della loro esistenza, associando ad esse un raggio R dell'ordine della lunghezza di Planck, impossibile da sondare con le energie disponibili. Analisi più recenti, in realtà, indicano una dimensionalità di tale parametro confrontabile con il millimetro, escludendo dunque che essa sia il motivo principale per cui non si riesca a rilevare lo schema microscopico descritto prima [8], conferendo alla lunghezza della stringa l_s un ordine di 10^{-18} cm [9]. Quanto appena detto non risulta essere in conflitto ciò che si osserva sperimentalmente, in quanto i campi del Modello Standard sono confinati all'interno di un'ipersuperficie tridimensionale, chiamata 3-Brana, all'interno di uno spazio più grande.

Nonostante la teoria delle stringhe sia caratterizzata da dimensioni (per ora) nascoste e dalla presenza di particelle quantistiche non osservate sperimentalmente come gravitoni e tachioni, che si andranno ad analizzare nel testo, essa è in grado di rispondere a molte domande provenienti dal campo della cosmologia, come la derivazione dei modelli dell'inflazione, concentrandosi sullo sviluppo del cosmo, dalla fine di questa fase fino ad oggi [10].

Capitolo 2

La stringa bosonica relativistica

Il presente capitolo ha come finalità, dopo una prima analisi sul moto della particella puntiforme, la presentazione della stringa nella sua prima formulazione relativistica. In virtù di un tale obiettivo, si ricaverà l'azione di Nambu-Goto in base alla natura della stringa stessa, oggetto dotato di un'estensione spaziale che ne caratterizza la stessa cinematica. Minimizzando l'azione, sarà possibile arrivare alle equazioni del moto seguite dalle condizioni al contorno di Neumann e Dirichlet. Ci si propone infine di dare un'interpretazione fisica ai risultati ottenuti, introducendo simmetrie e quantità conservate che caratterizzano il sistema stesso.

2.1 Particella relativistica

Antecedente l'analisi del moto della stringa relativistica, vi è lo studio della particella puntiforme, sempre nello stesso regime. Essa, all'interno dello spaziotempo di Minkowski, traccia la nota linea di universo, contenente tutte le informazioni concernenti il moto della particella stessa [11]. Fissati due punti (t_i, \mathbf{x}_i) , (t_f, \mathbf{x}_f) rappresentanti rispettivamente la posizione iniziale e finale, vi sono infiniti possibili cammini che li congiungono; dunque, poichè per ognuno di essi le sorti della particella saranno diverse, è lecito chiedersi quale tra tutti rappresenti il moto fisico compiuto. Tale conseguimento è possibile ripercorrendo la logica vista nella meccanica classica, apportando alcuni cambiamenti analitici, al fine di adattare il problema al regime analizzato.

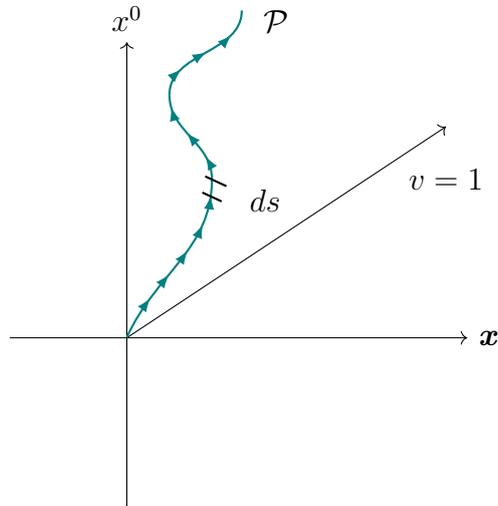


Figura 2.1: Linea di universo \mathcal{P} , completata dalla presenza del verso del moto e dal segmento ds , rappresentante la lunghezza infinitesima della curva. La bisettrice del primo quadrante evidenzia la reale esistenza di un moto di questo tipo, caratterizzato da una velocità inferiore rispetto a quella della luce.

Si scriva dunque l'espressione dell'azione classica S_c di una particella di massa m , non soggetta a forze esterne:

$$S_c = \int \frac{1}{2} m v^2(t) dt \quad (2.1)$$

la quale, se minimizzata¹, conduce ad un'equazione del moto in cui la particella stessa è libera di muoversi ad una qualsiasi velocità, purchè essa rimanga costante, ragione per cui la formula (2.1) non può essere traslata in ambito relativistico in cui la velocità della luce rappresenta un limite superiore. L'espressione corretta dell'azione si trova richiedendo che essa sia uno scalare di Lorentz², specificità che risulta essere cruciale: data una qualsiasi linea di universo, tutti gli osservatori inerziali sono concordi sul valore attribuito all'azione, dunque sul moto compiuto dalla particella. La realizzazione quantitativa di ciò, implica che il valore di quest'ultima sia proporzionale alla lunghezza propria di una generica linea di universo \mathcal{P} , la quale, essendo una caratteristica geometrica, è invariante per trasformazioni di Lorentz:

$$S_r = -m \int_{\mathcal{P}} ds \quad (2.2)$$

in cui m è inserita per consistenza dimensionale, mentre ds è un infinitesimo della linea stessa, come si vede in Fig. 2.1. Dunque, per sottolineare in altri termini un concetto già

¹Principio di minima azione.

²Necessario per la realizzazione di leggi del moto che siano invarianti per trasformazioni di Lorentz. Per i dettagli si veda [gruppo omogeneo di Lorentz](#).

espresso precedentemente, l'azione S_r non è altro che il tempo proprio della particella, interpretazione importante per capirne il significato fisico. Essendo la linea di universo \mathcal{P} unidimensionale, è possibile identificarla geometricamente come una curva nello spazio, i cui punti vengono messi in corrispondenza con il valore di un certo parametro τ , al variare del quale, è possibile percorrerne tutta l'estensione. In virtù di quanto detto, si può esprimere il quadrato della lunghezza infinitesima ds , nonchè invariante relativistico, nel seguente modo:

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu (d\tau)^2 \quad (2.3)$$

con $\mu, \nu = 0, \dots, D-1$, a seguito di cui risulta cruciale sottolineare la differenza tra la natura di τ , parametro usato per studiare meglio la curva nello spazio, e x_0 , coordinata temporale. Sostituendo la nuova espressione dell'intervallo invariante all'interno di S_r , si ottiene:

$$S_r = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \quad (2.4)$$

potendo concludere che S_r , cambiando la scelta del parametro tramite opportuni accorgimenti, rimane invariata³. La proprietà appena illustrata è generata da una trasformazione di gauge riguardante specificatamente le coordinate spaziotemporali [12], la quale, non potendo dunque essere definita identicamente in ogni punto, ha natura locale; dunque, nonostante a seguito di una sua applicazione gli osservabili siano invarianti, essa non implica la conservazione di quantità fisiche proprie del sistema. Quanto appena detto è causato dal carattere che contraddistingue ogni trasformazione agente su di esso, la quale, in assenza di significato fisico, come in questo caso, potrebbe semplicemente essere la causa di un ridondanza matematica nella descrizione [13]. Nonostante ciò, una proprietà come l'invarianza per riparametizzazioni implica una simmetria globale, propria della linea di universo [7]:

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.5)$$

in cui Λ è una trasformazione di Lorentz, che, combinata con una traslazione nello spaziotempo, rappresentata dal vettore a^μ , costituisce un elemento appartenente al gruppo di Poincaré⁴ [14], rappresentante tutte le isometrie dello spaziotempo. Avendo costruito l'azione S_r ed identificato due simmetrie che la caratterizzano, è possibile ricavare le seguenti leggi del moto⁵:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0 \quad (2.6)$$

in cui, ad essere costante lungo una linea di universo, è l'impulso relativistico, piuttosto che la sola velocità.

³Si veda [invarianza dell'azione per riparametizzazioni](#).

⁴Si veda [gruppo di Poincaré](#).

⁵Per i dettagli si veda [equazione moto particella relativistica](#).

2.2 Stringa relativistica

2.2.1 Azione di Nambu-Goto

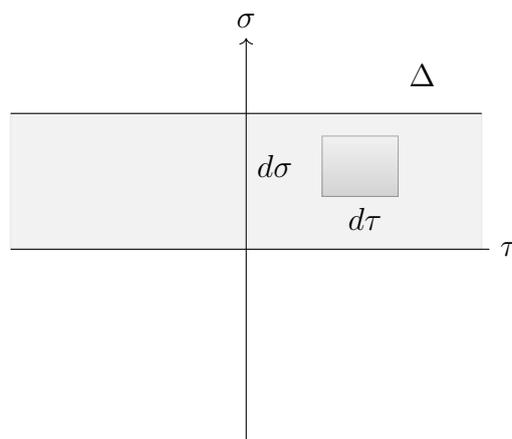


Figura 2.2: Spazio dei parametri τ e σ , in cui la regione evidenziata in grigio chiaro rappresenta il dominio di appartenenza delle due variabili citate. In quest'ultima si è inoltre selezionato un rettangolo infinitesimo di lati $d\tau$ e $d\sigma$.

Avendo la stringa un'estensione spaziale, essa è dotata di dimensionalità maggiore rispetto alla particella puntiforme, tracciando all'interno dello spaziotempo una superficie di universo Σ , che ne rappresenta l'evoluzione. Per trovare le equazioni del moto di un tale oggetto, è necessario formulare un'azione che sia proporzionale all'area propria di quest'ultimo, per il medesimo motivo illustrato nel caso della particella. Per quanto concerne il seguente paragrafo, in funzione degli scopi prefissati, la superficie di universo può essere studiata considerandone la sola geometria, immaginandola come una regione dello spazio in cui gli oggetti puntiformi sono liberi di muoversi con due gradi di libertà. E' dunque possibile descriverne le principali caratteristiche attraverso l'ausilio di altrettanti parametri τ e σ appartenenti all'insieme $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$, rappresentato in Fig. 2.2, agendo con le seguenti funzioni:

$$X^\mu(\tau, \sigma) : \Delta \rightarrow \Sigma \subseteq \mathbf{R}^{1,D-1} \quad (2.7)$$

attraverso la quale è possibile identificare tutti i punti appartenenti alla superficie di universo.

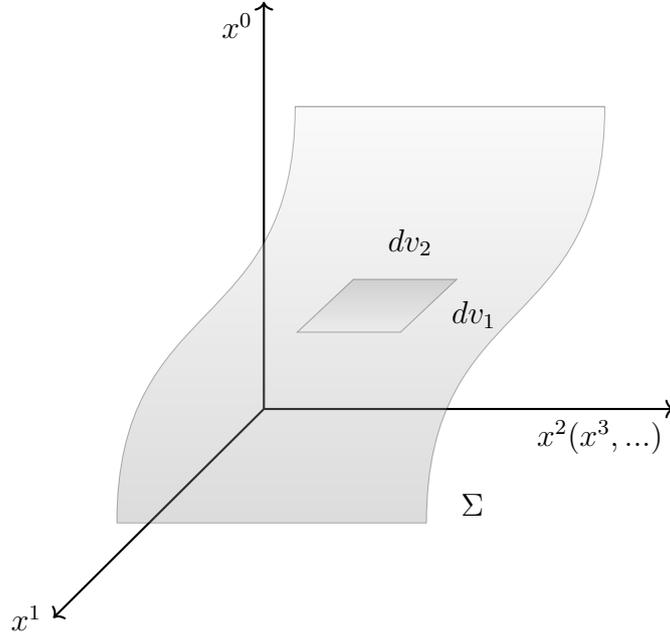


Figura 2.3: Superficie di universo nello spaziotempo, caratterizzante il moto della stringa aperta, la quale, piuttosto che essere puntiforme, ha un'estensione unidimensionale. All'interno della superficie si ha la proiezione del rettangolo di lati $d\tau$ e $d\sigma$, individuato nello spazio dei parametri, nel parallelogramma di lati dv_1^μ e dv_2^μ , attraverso $X^\mu(\tau, \sigma)$.

Per rendere meno qualitativo quanto detto, avendo definito tutti gli elementi necessari per tale scopo, si cerchi di associare ad un oggetto infinitesimo sulla superficie di universo l'azione della mappa $X^\mu(\tau, \sigma)$; dunque, considerando un rettangolo $d\Delta$ appartenente allo spazio dei parametri, è possibile concludere $\text{Im}_{X^\mu}(d\Delta) = d\Sigma$, riuscendo ad avere una corrispondenza tra i due spazi. Con riferimento alla Fig. 2.3, è verosimile identificare $d\Sigma$ attraverso i lati dv_1^μ e dv_2^μ che ne delimitano l'estensione, anch'essi immagini rispettivamente dei segmenti $d\tau$ e $d\sigma$, appartenenti al rettangolo di partenza; dunque, in virtù di quanto appena detto, è possibile scrivere le seguenti espressioni:

$$dv_1^\mu = \dot{X}^\mu d\tau \quad dv_2^\mu = X'^\mu d\sigma \quad (2.8)$$

in cui l'apice μ si estende da 0 a $D - 1$, dimensione dello spazio in cui si muove la stringa. Seguendo il procedimento analitico già studiato per le superfici nello spazio tridimensionale⁶, l'area di Σ è facilmente identificabile con la seguente formula:

$$A_\Sigma = \int_\Sigma dA = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (2.9)$$

⁶Si veda [area delle superfici in \$\mathbb{R}^3\$](#) .

ove dA è l'area dell'elemento infinitesimo preso in considerazione. Gli estremi di integrazione dei parametri τ e σ , vengono scelti in funzione rispettivamente del tempo d'evoluzione che si vuole studiare e del modo con cui si parametrizza la stringa stessa. In particolare i valori specifici 0 e σ_1 , caratterizzano le due estremità di quest'ultima, il cui cammino può essere espresso in funzione del solo parametro τ , riservando loro un carattere puntiforme. Tale concetto è cruciale, in quanto l'analogia appena descritta è riservata alle due estremità, caratterizzate dai valori di σ citati, potendo concludere che la stringa ha una propria natura, lungi dall'essere un insieme di punti materiali. E' possibile inoltre notare che l'argomento di (2.9) risulta essere opposto rispetto a quello delle superfici canoniche studiate; dunque è necessario verificare che il segno sia positivo, al fine di avere un risultato accettabile. A tal proposito, si immagini un punto sulla superficie di universo, il quale è caratterizzato dal seguente set di vettori tangenti:

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (2.10)$$

in cui, variando $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, è possibile identificarli tutti. Per determinare se la natura di questi ultimi è di tipo spazio o di tipo tempo, è necessario considerarne il quadrato:

$$v^\mu(\lambda)v_\mu(\lambda) = \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\lambda \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) \quad (2.11)$$

ottenendo un'equazione che permette una duplice soluzione⁷ solo se il discriminante, ovvero l'argomento d'integrazione di A_Σ , risulta essere positivo, verificando quanto voluto per il segno. Trovata l'area e verificato che la forma fosse analiticamente corretta, si sono esaurite le premesse, dunque è possibile scrivere esplicitamente l'azione di Nambu-Goto della stringa relativistica:

$$\mathcal{S} = -T_0 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (2.12)$$

in cui il parametro T_0 , rappresentante la tensione della stringa, viene inserito al fine di realizzare una quantità dimensionalmente corretta, analogamente a quanto già visto nell'equazione (2.2) con la massa della particella, in quanto i parametri τ e σ sono irrilevanti in questa analisi, dato che la loro dimensione viene elisa dall'argomento dell'integrale. Con la finalità di esplicitare le simmetrie di \mathcal{S} , si consideri la distanza tra due punti sulla superficie di universo, attraverso l'uso di un parametro ζ^i generico:

$$-ds^2 = dX^\mu dX_\mu = \underbrace{\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \zeta^\beta}}_{\gamma_{\alpha\beta}} d\zeta^\alpha d\zeta^\beta \quad (2.13)$$

⁷Avere una duplice soluzione significa ammettere l'esistenza di vettori tangenti di tipo spazio e di tipo tempo, in base al segno che si ottiene dal calcolo analitico.

ove $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$, mentre $\gamma_{\alpha\beta}$ è la metrica indotta sulla superficie stessa. Identificando ζ^1 e ζ^2 rispettivamente con τ e σ è possibile scrivere in modo esplicito $\gamma_{\alpha\beta}$, sviluppando tutte le possibili combinazioni:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ X' \cdot \dot{X} & (X')^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

rendendo l'espressione dell'azione \mathcal{S} più compatta:

$$\mathcal{S} = -T_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \quad (2.15)$$

in cui γ è il determinante di (2.14). L'azione \mathcal{S} risulta essere invariante sia per trasformazioni di Poincarè dello spaziotempo, sia per riparametrizzazioni, già descritte nel paragrafo precedente.

2.2.2 Equazioni del moto

Prendendo come modello i passaggi logici illustrati durante lo studio della particella puntiforme, è possibile minimizzare \mathcal{S} al fine di trovare le equazioni del moto della stringa. Al fine di rendere lo svolgimento analitico meno laborioso, si introduca la densità lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}) = -T_0 \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (2.16)$$

attraverso cui è possibile definire i momenti associati alle coordinate:

$$\begin{aligned} \Pi_\mu^\tau &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -T_0 \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \\ \Pi_\mu^\sigma &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -T_0 \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

i quali, nonostante siano stati introdotti per alleggerire la notazione, hanno un ruolo importante nella definizione di alcune grandezze fisiche, che verranno a breve presentate. Con quanto appena introdotto è possibile scrivere la variazione di (2.12) nella seguente forma:

$$\delta \mathcal{S} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\Pi_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \Pi_\mu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] \quad (2.18)$$

attraverso la cui minimizzazione si arriva alle equazioni del moto⁸:

$$\frac{\partial \Pi_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.19)$$

⁸Per i dettagli si veda [Equazioni del moto stringa bosonica](#).

con due possibilità per le condizioni al contorno:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma^*) = 0 \quad \sigma^* = 0, \sigma_1; \quad \mu \neq 0 \quad (2.20)$$

$$\Pi_\mu^\sigma(\tau, \sigma^*) = 0 \quad \sigma^* = 0, \sigma_1 \quad (2.21)$$

costituenti due circostanze complementari, soddisfatte per ogni valore di μ , escludendo un annullamento causato da una sommatoria sugli indici.

L'equazione (2.20), rappresentante le condizioni al contorno di Dirichlet, vincola le estremità della stringa ad un moto limitato nello spazio: l'annullamento della derivata rispetto al parametro temporale τ , implica l'impossibilità di espansione del moto nella direzione μ , dunque l'ancoraggio delle estremità ad un oggetto, chiamato D-brana, contraddistinto dal numero di dimensioni spaziali che lo caratterizzano. Supponendo di essere in uno spazio tridimensionale, qualificare tale oggetto come un vincolo, implica che esso sia un iperpiano, in quanto se avesse la medesima dimensionalità dello spazio in cui è immerso, la stringa sarebbe caratterizzata da un moto libero. La D-brana è però un'entità ben determinata, lungi dall'essere solo un vincolo per la stringa, di cui bisognerebbe studiare il moto; dunque la descrizione che si fa in questo scritto è solo approssimata, in quanto essi, essendo dotati di massa ed energia maggiori rispetto a quelle della stringa stessa, restano di fatto immobili. Naturalmente quanto detto non è valido quando $\mu = 0$, in quanto la condizione sarebbe priva di significato fisico: tutti gli oggetti fisici hanno un'espansione temporale, anche se fermi nello spazio.

L'equazione (2.21), rappresentante le condizioni al contorno di Neumann, comporta la presenza di estremità libere di muoversi nella direzione μ , facendo in modo che esse

2.2.3 Simmetrie e quantità conservate

Il seguente sottoparagrafo ha come finalità l'interpretazione fisica di alcuni risultati ottenuti, sinora presentati esclusivamente tramite formule e dimostrazioni matematiche.

Richiamando il teorema di Noether⁹, il quale permette di stabilire la corrispondenza tra simmetrie continue e integrali primi [15], è possibile dedurre l'esistenza di quantità conservate al fine di capire la dinamica della stringa stessa. Si cominci la trattazione ricordando che la densità langrangiana \mathcal{L} viene integrata lungo l'estensione di τ e σ , parametrizzanti la superficie di universo, piuttosto che lungo coordinate appartenenti allo spaziotempo x^μ ; dunque, sfruttando l'invarianza di \mathcal{S} per riparametrazioni, è possibile generalizzarne la forma, introducendo il set completo di coordinate ξ^α :

$$\mathcal{S} = \int d\xi^0 d\xi^1 \mathcal{L}(\partial_0 X^\mu, \partial_1 X^\mu) \quad (2.22)$$

⁹Per i dettagli si veda [richiami sul teorema di Noether](#).

ove $(\xi^0, \xi^1) = (\tau, \sigma)$, attraverso cui si è esplicitato l'argomento di \mathcal{L} , permettendo di individuare in modo più immediato le eventuali simmetrie. A tal proposito, essendo l'azione di Nambu-Goto invariante per trasformazioni di Poincaré, essa conserverà tale caratteristica anche per traslazioni spaziotemporali e trasformazioni di Lorentz¹⁰, generando ulteriori quantità conservate. Quanto appena illustrato può essere verificato introducendo la forma esplicita della prima trasformazione citata:

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow X^\mu(\tau, \sigma) + \underbrace{\delta X^\mu(\tau, \sigma)}_I \quad (2.23)$$

ove il termine I , associato ad una traslazione costante nello spaziotempo, identifica uno spostamento coerente di tutti i punti appartenenti alla superficie di universo, a seguito di cui \mathcal{L} rimane inalterata, essendo essa dipendente dalle sole derivate delle coordinate. Introducendo $\epsilon^\mu \equiv \delta X^\mu(\tau, \sigma)$, in cui si racchiude quanto appena detto, è possibile scrivere in modo immediato la corrente di Noether:

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu J_\mu^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \epsilon^\mu \end{aligned} \quad (2.24)$$

ove il nuovo indice α , identificando le componenti della corrente lungo la superficie di universo, può assumere valori 0, 1 in corrispondenza rispettivamente di τ e σ .

Essendoci ϵ^μ sia a primo che a secondo membro nell'espressione (2.24), è possibile semplificarli, in quanto si tratta di oggetti appartenenti all'insieme dei numeri reali, trovando le seguenti espressioni:

$$(J_\mu^0, J_\mu^1) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \right) = (\Pi_\mu^\tau, \Pi_\mu^\sigma) \quad (2.25)$$

rendendo l'equazione del moto (2.19) un'espressione equivalente alla legge di conservazione della corrente lungo la superficie di universo. Per comprendere cosa questo comporti, si integri Π_μ^τ lungo tutta l'estensione della stringa, mantenendo fisso il valore di τ :

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \Pi_\mu^\tau(\tau, \sigma) \quad (2.26)$$

trovando la carica di Noether associata alla corrente, corrispondente al momento trasportato dalla stringa. In particolare, notando la dipendenza dal parametro τ , sembrerebbe che essa mantenga un valore costante lungo la sola superficie di universo, piuttosto che in tutto lo spaziotempo, diretta conseguenza del fatto che le correnti sono definite da indici

¹⁰Trasformazioni di Lorentz e traslazioni spaziotemporali sono sottogruppi del gruppo di Poincaré.

quali τ e σ . Ricordando però che l'azione di Nambu-Goto è invariante per riparametrizzazioni, è possibile identificare con il parametro τ la coordinata temporale, lasciando inalterata la fisica del sistema, generalizzandone la conservazione, ma di questo si parlerà meglio nel capitolo (3), quando si introdurranno alcuni esempi di parametrizzazione particolarmente convenienti per i calcoli. Per verificare che il momento si conserva, è possibile sviluppare i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \frac{dp_\mu}{d\tau} &= \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial \Pi_\mu^\tau(\tau, \sigma)}{\partial \tau} \\ &\stackrel{1}{=} - \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma(\tau, \sigma)}{\partial \sigma} \\ &\stackrel{2}{=} - [\Pi_\mu^\sigma(\tau, \sigma)]_0^{\sigma_1} = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

ove in (1) e (2) si sono usate rispettivamente le equazioni del moto e le condizioni al contorno di Neumann, non necessarie nel caso di una stringa chiusa, le cui estremità coincidono. Quanto appena illustrato è sicuramente coerente con il moto della particella puntiforme libera, ove l'invarianza dell'azione per traslazioni nello spazio di Minkowski genera una conservazione del momento.

Al fine di evidenziare le conseguenze dell'invarianza dell'azione di Nambu-Goto per trasformazioni di Lorentz, si riprenda a livello strutturale (2.23), cambiando la natura di I attraverso la seguente identità:

$$\delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu \quad (2.28)$$

in cui $\epsilon^{\mu\nu}$ è una matrice antisimmetrica¹¹ di costanti infinitesime, in linea con la trasformazione stessa, data la diretta proporzionalità tra variazione delle coordinate e coordinate stesse. A tal proposito è immediato individuare la corrente conservata:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu} J_{\mu\nu}^\alpha &= \Pi_\mu^\alpha \epsilon^{\mu\nu} X_\nu \\ &\stackrel{1}{=} \left(-\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \right) \underbrace{(X_\mu \Pi_\nu^\alpha - X_\nu \Pi_\mu^\alpha)}_{\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha} \end{aligned} \quad (2.29)$$

ove in (1) si è sfruttata la natura antisimmetrica di $\epsilon^{\mu\nu}$, mettendo in evidenza la corrente di Lorentz $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$, privata di qualsiasi fattore moltiplicativo, il quale non aggiungerebbe alcun significato fisico all'oggetto considerato. Per trovare le cariche associate ad essa, procedendo come visto nel caso delle traslazioni spaziotemporali, è possibile integrare $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$ lungo le linee caratterizzate da valori costanti di τ sulla superficie di universo:

$$M_{\mu\nu} = \int_0^{\sigma_1} (X_\mu \Pi_\nu^\tau - X_\nu \Pi_\mu^\tau) d\sigma \quad (2.30)$$

¹¹La proprietà di antisimmetria si ricava imponendo l'invarianza della forma quadratica $\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$, a seguito della trasformazione di Lorentz infinitesima.

permettendo di identificare, in virtù della sua natura¹², sei cariche associate anzichè nove. A tal proposito, al fine di dare un significato fisico a queste ultime, si denotino μ e ν rispettivamente con gli indici spaziali i e j , identificando M_{ij} e M_{0i} rispettivamente con tre rotazioni e tre boost longitudinali, coincidenti con i generatori del gruppo di Lorentz \mathcal{L} ¹³. Le prime componenti permettono in modo immediato di misurare il momento angolare della stringa L_i , tramite l'usuale relazione:

$$L_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk} \quad (2.31)$$

ove ϵ_{ijk} è il tensore di Levi-Civita, mentre per le seconde è necessario svolgere i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} M^{0i} &= \int d\sigma (X^0 \Pi^{\tau i} - X^i \Pi^{\tau 0}) \\ &= \int d\sigma (t \Pi^{\tau i} - X^i \Pi^{\tau 0}) \\ &= t p^i - \int d\sigma X^i \Pi^{\tau 0} \end{aligned} \quad (2.32)$$

ove nell'ultimo passaggio si è usata la relazione (2.26). Al fine di apprendere le implicazioni fisiche della relazione appena scritta, si dividano entrambi i membri per l'energia propria della stringa E :

$$\frac{M^{0i}}{E} = \underbrace{t \frac{p^i}{E}}_{\text{I}} - \underbrace{\frac{1}{E} \int d\sigma X^i \Pi^{\tau 0}}_{\text{II}} \quad (2.33)$$

ove, i termini I e II rappresentano rispettivamente la legge oraria di un corpo puntiforme e la posizione del centro di massa della stringa, ravvisando $\Pi^{\tau 0}$ con la densità energetica lungo l'oggetto stesso, assunzione coerente data la definizione di momento (2.26). E' possibile concludere il capitolo con l'espressione che riassume quanto appena scritto:

$$X_{CM}^i(t) = -\frac{M^{0i}}{E} + t \frac{p^i}{E}. \quad (2.34)$$

¹² $M_{\mu\nu}$ è antisimmetrica a causa dell'argomento di cui è l'integrale.

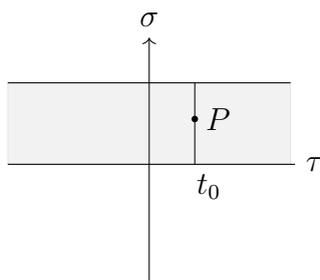
¹³Per i dettagli si veda [gruppo di Poincaré \$\mathcal{P}\$](#) .

Capitolo 3

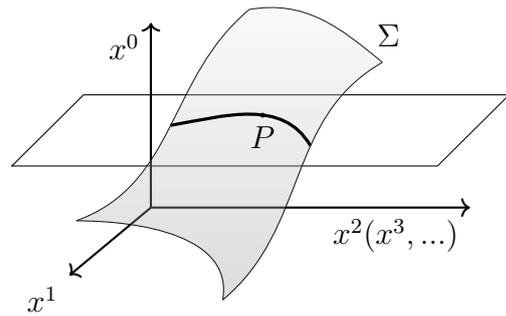
La stringa bosonica cono-luce

Nel seguente capitolo si analizzano due diversi metodi di parametrizzazione della superficie di universo, al fine di rendere la forma delle equazioni del moto (2.19) meno ermetica, inoltrandosi nella risoluzione. E' di cruciale importanza sottolineare la differenza tra i due procedimenti studiati, in quanto l'oggetto superficie viene dapprima immerso nello spazio $D - 1$ dimensionale e successivamente nello spaziotempo, descrivendo moti differenti del medesimo oggetto. Una parte verrà inoltre dedicata all'approfondimento sul calcolo analitico circa la pendenza universale di Regge, avendo fornito strumenti adeguati per la comprensione.

3.1 Static gauge



(a) Spazio dei parametri, in cui viene tracciata una linea caratterizzata da τ fissato



(b) Stringa come intersezione della superficie di universo con l'iperpiano $t = t_0$

Figura 3.1: La stringa al tempo $t = t_0$ risulta essere l'immagine del segmento $\tau = t_0$.

Avendo sottolineato l'invarianza dell'azione \mathcal{S} per riparametrizzazioni, è possibile concludere che si abbia una certa libertà nella scelta dei parametri che possano descrivere la

superficie di universo, concetto alla base dell'invarianza di gauge. Tuttavia, nonostante l'esito sia il medesimo, il processo computazionale può essere più o meno complesso, proprio in funzione di tale scelta. A questo proposito si consideri un segmento¹ caratterizzato da $\tau = t_0$ all'interno dello spazio dei parametri, attraverso il quale è possibile individuare una curva appartenente alla superficie di universo, raffigurante la stringa, come si vede in Fig. 3.1. Quest'ultima può ugualmente essere identificata dall'intersezione di Σ con l'iperpiano $t = t_0$. Dal momento che t_0 non può avere alcun ruolo privilegiato, è possibile estendere il ragionamento appena fatto ad ogni istante di tempo t , concludendo che, per ogni punto P appartenente alla superficie di universo, si ha:

$$\tau(P) = t(P) \quad (3.1)$$

rendendo possibile l'identificazione delle linee a τ costante, con le stringhe statiche, da qui il nome *static gauge*. E' possibile scrivere l'ultima relazione nel seguente modo:

$$X^0(\tau, \sigma) \equiv t(\tau, \sigma) = \tau \quad (3.2)$$

trovando una parametrizzazione per τ nel modo più naturale possibile, la quale suggerisce una nuova formulazione per l'equazione (2.27), la quale, inizialmente introdotta come legge di conservazione lungo la superficie di universo, viene estesa a tutto lo spaziotempo:

$$\frac{dp_\mu}{dt} = 0. \quad (3.3)$$

Quest'ultimo risultato e le implicazioni fisiche che comporta, si sarebbero potuti ottenere anche utilizzando una parametrizzazione diversa rispetto a quella corrente, a costo di un maggior numero di passaggi computazionali, come si era annunciato nell'introduzione. Per dare un'idea di quanto appena illustrato si consideri una stringa aperta, in cui la superficie di universo, per una qualsiasi parametrizzazione scelta ai fini della descrizione, sarà sicuramente caratterizzata da una regione in cui si ha una corrispondenza tra curve a τ costante e stringhe statiche, peculiarità che non sarà possibile riscontrare globalmente, proprio in funzione delle ipotesi fatte. Pertanto nel dominio in cui la condizione di stati gauge è applicabile, l'espressione (2.26) permette di calcolare facilmente il momento trasportato dalla stringa, il quale, dovendo essere conservato lungo tutta la superficie di universo, è equivalente a quanto si otterrebbe per una qualsiasi curva che giace su quest'ultima, nonostante venga meno la corrispondenza tra linee a τ costante e stringhe stesse. Quanto appena illustrato conclude la breve parentesi aperta al fine di sottolineare l'equivalenza tra le parametrizzazioni usate per la descrizione del sistema, potendo riprendere quella illustrata nel presente paragrafo. In particolare, al fine di studiare l'evoluzione della stringa nello spazio in termini più specifici, è possibile

¹Si parla di segmento in quanto la stringa aperta possiede delle estremità, caratterizzate da valori finiti del parametro σ .

individuare la configurazione in due diversi istanti di tempo, rispettivamente t e $t + dt$. Tuttavia, non potendo considerare l'oggetto studiato come l'unione di entità elementari, individuato un punto sulla prima curva non è dato sapere qual è la posizione che esso occuperà sulla seconda, in quanto la parametrizzazione non è univoca, ragionamento che implica la perdita di significato fisico per una velocità definita lungo la stringa, dunque per un eventuale moto longitudinale.

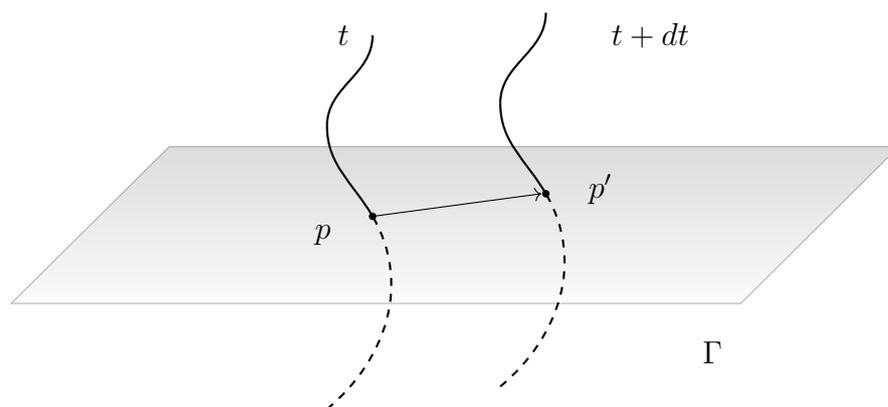


Figura 3.2: Rappresentazione dell'evoluzione della stringa nello spazio tridimensionale.

Al fine di capire come possa avvenire concretamente il moto della stringa nello spazio, si consideri un piano Γ , normale ad entrambe le configurazioni citate, il quale, intersecandole, permette di individuare due punti p e p' , come illustrato in Fig. 3.2, caratterizzati da un unico spostamento permesso: normale alla stringa e tangente a Γ ; dunque, estendendo quanto appena detto alla velocità, è possibile concludere che essa non necessita di una specifica parametrizzazione per essere definita, risultandone invariante. In particolare, avendo illustrato il moto della stringa nello spazio attraverso il susseguirsi di curve caratterizzate da valori costanti di t , è immediato associarne l'insieme ad una superficie², sulla quale, in base al ragionamento appena fatto, si sono già individuate le stringhe statiche; dunque, al fine di avere una griglia completa lungo di essa, rimangono da determinare le linee aventi σ fissato. Siccome gli unici oggetti puntiformi appartenenti alla stringa sono le estremità, è conveniente generalizzare l'ortogonalità della prima con la traiettoria delle seconde, condizione che ne evita l'avviluppo³, associando quanto cercato a

²L'oggetto che si sta descrivendo non ha alcuna associazione con la superficie di universo che giace nello spaziotempo.

³Una condizione di questo tipo non implica che la lunghezza l_s rimanga costante. Come controesempio si immagini una stringa avente come conformazione l'arco di una circonferenza: essa, muovendosi verso il centro, con velocità delle estremità perpendicolare rispetto alla lunghezza, modifica il valore di quest'ultima.

linee perpendicolari ad ogni stringa statica presente sulla superficie stessa, conducendo alla seguente relazione⁴:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

in cui i vettori giacciono rispettivamente lungo linee a τ e σ costante.

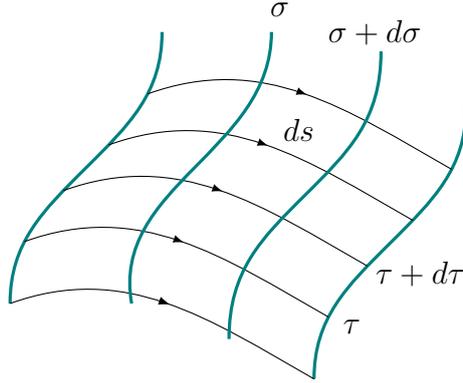


Figura 3.3: Linee lungo la superficie tracciata nello spazio, caratterizzate da τ e σ costanti, raffigurate con curve rispettivamente nere e turchesi. In figura si è anche riportato ds , lunghezza infinitesima della stringa.

Nonostante il vincolo (3.4) permetta di rappresentare le curve cercate sulla superficie, non definisce come queste possano essere qualificate in base al valore del parametro che le identifica; dunque, al fine di realizzare quanto scritto, si introduca la variabile $s = s(\sigma)$, la quale, rappresentando la lunghezza lungo la stringa⁵, è fisicamente più rilevante rispetto a σ stesso. Quanto appena descritto permette di ottenere una prima semplificazione nella forma dei momenti (2.17):

$$\Pi^{\tau\mu} = T_0 \frac{ds}{d\sigma} \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \quad \Pi^{\sigma\mu} = -T_0 \sqrt{1 - v_\perp^2} \frac{\partial X^\mu}{\partial s} \quad (3.5)$$

in cui v_\perp è la velocità trasversa illustrata precedentemente, sottolineando l'importanza della parametrizzazione scelta per la descrizione del sistema, i quali se sostituiti in (2.19)

⁴In questo caso l'operazione \cdot indica il prodotto scalare, contrariamente a quanto scritto nella notazione.

⁵Il termine *lungo la stringa*, è stato usato in quanto il valore della funzione dipende dall'argomento: $s(\sigma_1)$ è la lunghezza complessiva dell'oggetto studiato.

per $\mu = 0$, permettono di ottenere il seguente risultato:

$$\frac{\partial \Pi^{\tau 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\frac{T_0 \frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2}}}_I \right) = 0. \quad (3.6)$$

Considerando la lunghezza ds di un elemento infinitesimo $d\sigma$ appartenente alla stringa, rappresentato in Fig. 3.3, e definendone l'energia a riposo $dE = T_0 ds$, è possibile interpretare quanto appena ricavato come la conservazione dell'energia per ogni elemento infinitesimo della stringa⁶, da cui è immediato ricavare:

$$d\sigma \stackrel{1}{=} \frac{ds}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2}} \stackrel{2}{=} \frac{dE}{T_0} \quad (3.7)$$

in cui (1) e (2) sono rispettivamente la corretta parametrizzazione per σ , che ne identifica il differenziale come la lunghezza non contratta, e una diretta conseguenza dello studio di stringhe statiche, di cui si è scritto sopra. Manipolando l'equazione (1) di (3.7) è possibile trovare:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right)^2 = 1 \quad (3.8)$$

che, insieme a (3.4), è sintetizzata nella seguente forma non lineare:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right)^2 = 1 \quad (3.9)$$

costituente i vincoli di Virasoro, rispettati dalle stringhe relativistiche durante il loro moto.

3.1.1 Equazioni del moto della stringa aperta

I vincoli di Virasoro sono un'importante differenza tra stringhe relativistiche e non relativistiche, dal momento che le equazioni del moto che soddisfano sono le medesime:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

uguali, nella forma, a quelle di d'Alembert per la descrizione del moto ondulatorio, molto più semplici rispetto alle espressioni (2.19), peculiarità che fa ulteriormente pensare ad un corretto modo di procedere, date le premesse iniziali. Essendo dunque quest'ultima

⁶Tale ragionamento trova un'ulteriore conferma attraverso l'analisi dimensionale, in quanto, moltiplicando I per $d\sigma$, si trova un oggetto fisico avete dimensione [E].

equazione già vista e studiata, è possibile trovarne la soluzione generalizzando il concetto di sovrapposizione di onde progressive e regressive:

$$\mathbf{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(t + \sigma) + \mathbf{G}(t - \sigma)) \quad (3.11)$$

ove \mathbf{F} e \mathbf{G} sono due funzioni arbitrarie, la cui espressione può essere semplificata imponendo le condizioni al contorno per la stringa libera:

$$\begin{aligned} 0 &= \Pi^{\sigma\mu} \\ &\stackrel{1}{=} -T_0 \sqrt{1 - v_{\perp}^2} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s} \\ &\stackrel{2}{=} -T_0 \sqrt{1 - v_{\perp}^2} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ove in (1) e (2) si sono usate rispettivamente (3.5) e (3.7). Restringendosi alle sole componenti spaziali, coerentemente con il quadro illustrato nel seguente paragrafo, è possibile ridurre l'equazione trovata nel seguente modo:

$$\frac{\partial \mathbf{X}(\tau, \sigma^*)}{\partial \sigma} = 0 \quad \sigma^* = 0, \sigma_1. \quad (3.13)$$

attraverso cui (3.11), calcolata per $\sigma = 0$, assume una forma semplificata:

$$\mathbf{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(t + \sigma) + \mathbf{F}(t - \sigma)) \quad (3.14)$$

evidenziando il ruolo centrale riservato alla funzione \mathbf{F} nella descrizione del moto della stringa. Quest'ultima asserzione può essere chiarita sostituendo $\sigma = 0$ in (3.14) ricavando $\mathbf{X}(t, \sigma) = \mathbf{F}(t)$, attraverso cui è possibile concludere che, conoscendo la configurazione di un singolo punto, appartenente ad un oggetto più esteso, in un determinato istante di tempo t^* , è possibile comprenderne il moto complessivo; dunque, determinando $\mathbf{F}(t^*)$, è possibile individuare la funzione stessa, espandendo tale conoscenza ad ogni istante di tempo, per tutta la stringa. Al fine di completare la trattazione, sostituendo (3.14) nelle condizioni al contorno di stringa libera per $\sigma = \sigma_1$, si ottiene:

$$\mathbf{F}'(t + \sigma_1) - \mathbf{F}'(t - \sigma_1) = 0 \quad (3.15)$$

relazione che, introducendo $u = t - \sigma_1$, permette di evidenziarne la natura periodica, proprietà che non si estende alla funzione stessa:

$$\mathbf{F}(u + 2\sigma_1) = \mathbf{F}(u) + \underbrace{2\sigma_1 \mathbf{v}_0}_I \quad (3.16)$$

ove la regolarità viene violata dall'aggiunta del termine I, in cui è compresa la velocità media dell'estremo considerato durante il suo moto. In particolare $\mathbf{F}(u)$ prendendo parte

all'espressione generale delle coordinate della stringa, deve necessariamente avere una propria condizione per i vincoli di Virasoro; dunque, sostituendo (3.14) in (3.9):

$$\left| \frac{d\mathbf{F}(u)}{du} \right|^2 = 1 \quad (3.17)$$

è possibile concludere che \mathbf{F} è un vettore di modulo unitario.

3.1.2 Pendenza universale di Regge α'

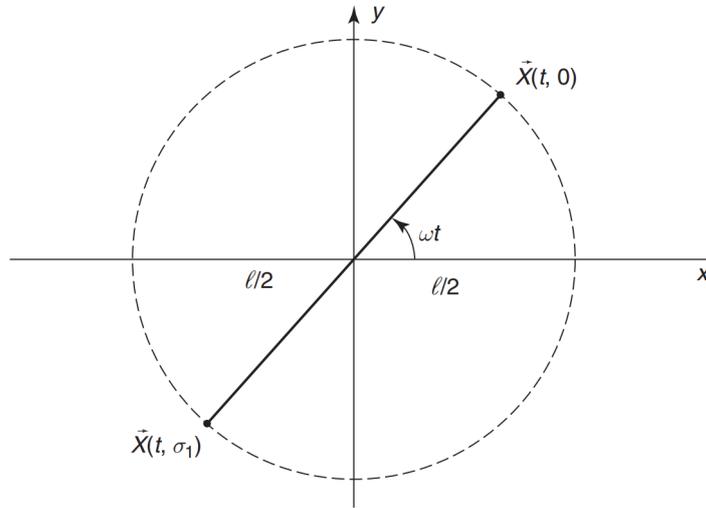


Figura 3.4: Stringa aperta di lunghezza l , rotante nel piano cartesiano (x,y) con frequenza angolare ω [9].

A questo punto dello scritto, a seguito dei concetti introdotti nei precedenti paragrafi, è possibile mostrare il calcolo analitico dal quale si ricava la pendenza di Regge α' . A tal proposito si consideri una stringa aperta di lunghezza l , rotante nel piano (x,y) con velocità angolare ω , come illustrato in Fig. 3.4. Essendo essa un oggetto esteso, risulta facilmente descrivibile solo il moto delle estremità che la compongono, parametrizzate da $\sigma = 0$ e $\sigma = \sigma_1$, in quanto trattabili come punti materiali. In virtù di quanto detto, avendo due soli gradi di libertà, è possibile scrivere:

$$\mathbf{X}(t, 0) = \frac{l}{2} (\cos \omega t, \sin \omega t) \quad (3.18)$$

in cui si sta analizzando l'estremità caratterizzata da $\sigma = 0$; dunque, prima di trovare l'espressione completa delle coordinate, non limitandosi alle sole terminazioni puntiformi,

è necessario determinare ω ed l in funzione delle variabili che parametrizzano la stringa. A tal proposito, sfruttando l'uguaglianza (3.14), si introduca:

$$\mathbf{F}(u) = \frac{l}{2} (\cos \omega u, \sin \omega u). \quad (3.19)$$

funzione caratterizzata da un periodo pari a $2\sigma_1$, in quanto la velocità vettoriale che caratterizza l'estremo considerato ha media nulla⁷, se calcolata su una rotazione completa, conducendo alle seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} 2\pi &= \omega(2\sigma_1) \\ &\stackrel{1}{=} 2\omega \frac{T_0}{E} \end{aligned} \quad (3.20)$$

ove in (1) si è utilizzato un risultato ottenibile dall'integrazione di (3.7), trovando la frequenza in funzione dell'energia totale. Il secondo parametro per cui bisogna trovare un'espressione esplicita è la lunghezza della stringa l , per cui è necessario usare i vincoli di Virasoro (3.17), concludendo:

$$E = \frac{\pi}{2} T_0 l \quad (3.21)$$

la quale, oltre a trovare quanto cercato, evidenzia che la discrepanza tra energia di stringa rotante e statica risiede in un fattore $\pi/2$. Prima di ricavare l'espressione completa per il moto della stringa, è bene soffermarsi sull'espressione analitica (3.20) la quale, essendo caratterizzata da un'inversa proporzionalità tra energia e velocità angolare, rappresenta una nozione non troppo familiare, dato che l'energia cinetica di una barra rotante, sarebbe stata direttamente proporzionale ad ω^2 . Nonostante una tale conclusione possa sembrare illogica, è importante sottolineare che il prodotto tra lunghezza della stringa e velocità angolare è vincolato ad essere uguale alla velocità della luce⁸, dunque non è possibile che entrambi aumentino nello stesso momento, generando quanto illustrato. In virtù di ciò, è possibile concludere con la seguente formula per le coordinate della stringa:

$$\mathbf{X}(t, \sigma) = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \left(\cos \frac{\pi t}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi t}{\sigma_1} \right) \quad (3.22)$$

la quale è già nella sua forma semplificata. Essendo la stringa rotante sul piano, ad essa è associato anche un momento angolare costante durante il moto, facilmente calcolato

⁷Ricordando (3.16), l'affermazione fatta non è scontata.

⁸Quanto appena detto si può facilmente ricavare derivando 3.19 e facendone il modulo quadro.

attraverso l'espressione (3.5):

$$\begin{aligned}
\Pi^\tau(t, \sigma) &= T_0 \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - v_\perp^2}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \\
&\stackrel{1}{=} T_0 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \\
&\stackrel{2}{=} T_0 \cos \frac{\pi\sigma}{\sigma_1} \left(-\sin \frac{\pi t}{\sigma_1}, \cos \frac{\pi t}{\sigma_1} \right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

ove in (1) si è semplicemente sostituito quanto scritto in (3.7), mentre in (2) si sono svolti i calcoli. In virtù del regime corrente, è possibile calcolare il momento angolare J caratteristico dell'oggetto in Fig. 3.4, attraverso (2.31):

$$J = |M_{12}| = \frac{1}{2\pi T_0} E^2 = \alpha' E^2 \tag{3.24}$$

trovando la costante universale di Regge, di cui si è parlato nell'introduzione. L'espressione appena scritta, contenendo la proporzionalità tra momento angolare e quadrato dell'energia, è analiticamente nuova: se si considera un'asta rigida⁹, che ruota attorno al proprio centro di massa, questa sarà caratterizzata da $J = I\omega$, con I momento d'inerzia, ed $E = \frac{1}{2}I\omega^2$, potendo concludere con la seguente relazione di proporzionalità $J \propto \sqrt{E}$. Notando che nell'equazione (2.15) T_0 è l'unico parametro significativo per le dimensioni dell'azione¹⁰ e che esso può essere riscritto in funzione di α' , l'azione di Nambu-Goto assume la seguente forma:

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \tag{3.25}$$

comunemente usata.

⁹Un'asta rigida non è una stringa.

¹⁰Le dimensioni dei parametri τ e σ vengono eliminate da γ .

3.2 Gauge cono-luce

3.2.1 Coordinate cono-luce

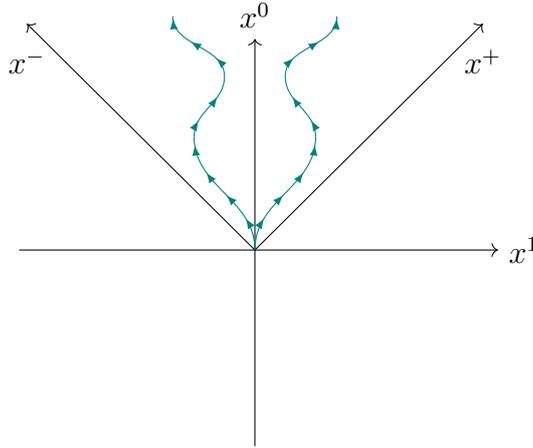


Figura 3.5: Piano cartesiano in cui si sono evidenziati gli assi per le coordinate cono-luce.

Al fine di quantizzare in modo esplicito e semplice le stringhe relativistiche, è utile analizzare il moto della particella descritto da coordinate diverse rispetto a quelle cartesiane:

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1) \quad (3.26)$$

$$x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1) \quad (3.27)$$

in cui si è semplicemente fatta una combinazione lineare di x_0 e x_1 , rispettivamente coordinata temporale e spaziale a scelta. Come si vede in Fig. 3.5, x^\pm rappresentano due assi perpendicolari tra loro, formanti un angolo di 45° rispetto a x^0 e x^1 ; dunque è possibile concludere che le curve rappresentanti il moto fisico della particella relativistica, sono contenute all'interno del cono formato dai due nuovi assi citati. In particolare, nelle linee di universo permesse, le coordinate x^\pm crescono entrambe nel verso delle frecce, a meno di considerare il moto di un raggio di luce, in cui questi rimangono costanti rispettivamente nel verso negativo e positivo di x_1 . Dato che la forma delle espressioni (3.26) e (3.27) differisce per un segno, è lecito chiedersi quale tra le due rappresenti la coordinata temporale, concludendo che tale ruolo è assegnato a x^+ . In relazione a quanto detto, le nuove coordinate cono-luce sono (x^+, x^-, x^2, x^3) , rendendo l'intervallo invariante così definito:

$$-ds^2 = -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (3.28)$$

attraverso cui è possibile determinare dx^+ o dx^- in funzione di ds^2 senza l'uso della radice quadrata, peculiarità che tornerà utile nei prossimi paragrafi.

Al fine di realizzare una trattazione completa, si introducano le componenti cono-luce del momento:

$$p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^1) = -p_- \quad (3.29)$$

$$p^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^1) = -p_+ \quad (3.30)$$

in cui, nonostante risulti essere naturale concludere¹¹ che p^+ sia l'energia cono-luce, in questo caso è necessario analizzare l'argomento in regime quantistico, al fine di giustificare tale assunzione. A tal proposito, ricordando che tempo ed energia sono variabili coniugate, si consideri l'equazione d'onda in coordinate cono-luce di una particella avente energia E e momento \mathbf{p} :

$$\psi(x) = \exp(i(p_+x^+ + p_-x^- + p_2x^2 + p_3x^3)) \quad (3.31)$$

soluzione dell'equazione Schrödinger, scritta sempre nello stesso regime:

$$\begin{aligned} E_{1c}\psi &= i \frac{\partial \psi}{\partial x^+} \\ &\stackrel{1}{=} i(i p_+) \psi \\ &= -p_+ \psi \\ &\stackrel{2}{=} p^- \psi \end{aligned} \quad (3.32)$$

ove in (1) e (2) si sono considerate rispettivamente (3.31) e (3.30), arrivando alla conclusione desiderata.

3.2.2 Parametrizzazione cono-luce della superficie di universo

Al fine di risolvere le equazioni del moto in modo completo, avvicinandosi maggiormente alla quantizzazione della stringa bosonica, si generalizzi l'equazione (3.2):

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda \tau \quad (3.33)$$

in cui τ , considerando λ e n_μ rispettivamente valore fissato e vettore costante arbitrario¹², risulta essere una combinazione lineare delle coordinate della stringa. Per comprenderne il significato, è conveniente riscrivere tale equazione nella seguente forma:

$$n_\mu x^\mu(\tau, \sigma) = \lambda \tau \quad (3.34)$$

¹¹Ricordando che tempo ed energia sono le prime componenti dei quadrivettori rispettivamente posizione e impulso, è naturale concludere ci sia questa corrispondenza anche tra x^+ e p^+ .

¹²Si noti che se $n_\mu = (1, 0, \dots, 0)$, si avrebbe $X^0(\tau, \sigma) \propto \tau$, ritornando a quanto visto in (3.2).

in cui, usando le coordinate generali dello spaziotempo, si sta identificando un insieme di punti che formano un iperpiano normale a n^μ ¹³; dunque l'equazione (3.33) rappresenta il vincolo aggiuntivo di appartenenza alla superficie di universo. Considerando una stringa aperta libera è possibile riscrivere tale condizione nella seguente forma:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda}(n \cdot p)\tau \quad (3.35)$$

in cui, ricordando quanto detto a seguito della condizione (2.27), si è semplicemente riscaldato λ , senza modificare le conseguenze analitiche dell'espressione originaria. In particolare il parametro $\tilde{\lambda}$, al fine di rendere τ e σ adimensionali, ha le dimensioni di una velocità divisa per una forza; dunque, a livello canonico, sussiste tale relazione:

$$\tilde{\lambda} \sim \frac{1}{T_0} = 2\pi\alpha' \quad (3.36)$$

tramite cui è possibile scegliere $\tilde{\lambda} \propto \alpha'$, in cui la relazione di proporzionalità può convertirsi in uguaglianza attraverso l'aggiunta di una costante β :

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta\alpha'(n \cdot p)\tau \quad (3.37)$$

ove $\beta = 2, 1$ rispettivamente per stringhe aperte e chiuse. Avendo fissato una parametrizzazione per τ , è necessario capire quale sia quella corretta per σ , esattamente ripercorrendo i passaggi visti nel paragrafo (3.1). In esso si era richiesto che l'energia avesse un valore costante lungo le stringhe statiche, implicando la conservazione di Π^τ . Al fine di ampliare questa istanza si richiede che $n_\mu \Pi_\mu^\tau$ sia costante lungo la stringa; dunque, imponendo $\sigma \in [0, \pi]$ e ricordando la relazione (2.26):

$$n \cdot p = \int_0^\pi n \cdot \Pi^\tau(\tau, \sigma) d\sigma = n \cdot \Pi^\tau \pi \quad (3.38)$$

potendo concludere che, essendo $n \cdot \Pi^\tau$ costante, il valore di σ assegnato ad un punto, è proporzionale al momento $n \cdot p$ trasportato dalla porzione di stringa che si estende da $\sigma = 0$ al punto considerato. In virtù di quanto detto, le equazioni del moto prendono tale forma:

$$\frac{\partial(n \cdot \Pi^\sigma)}{\partial\sigma} = 0 \quad (3.39)$$

notando che $n \cdot \Pi^\sigma$ non dipende da σ , contingenza per cui, se sommata alle condizioni al contorno di Neumann (2.21), si trova:

$$n \cdot \Pi^\sigma = 0 \quad (3.40)$$

¹³Prendendo due punti x_1^μ e x_2^μ , che soddisfano l'equazione (3.33), caratterizzati dal medesimo valore di τ , vale la seguente equazione $n_\mu(x_1^\mu - x_2^\mu) = 0$.

in quanto, se una funzione si annulla alle estremità del dominio, con derivata uguale a zero in tutti i punti, allora essa lo farà dappertutto. Sviluppando i termini di quest'ultima espressione:

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau (n \cdot X) - (\dot{X})^2 \partial_\sigma (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} = 0 \quad (3.41)$$

si può notare che, essendo $n \cdot X \sim \tau$, essa è soddisfatta per:

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad (3.42)$$

vincolo che deriva dalla parametrizzazione scelta, il quale risulta essere la forma covariante dell'espressione di ortogonalità (3.4)¹⁴.

In virtù di quanto appena trovato, si manipoli (3.38):

$$\begin{aligned} n \cdot p &= n \cdot \Pi^\tau \pi \\ &\stackrel{1}{=} T_0 \frac{X'^2 (n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \pi \\ &\stackrel{2}{=} \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 (n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \pi \end{aligned} \quad (3.43)$$

ove in (1) si è inserita (3.42) nella definizione del momento (2.17) mentre in (2) si è semplicemente riscritta la tensione T_0 . Sviluppando il secondo membro attraverso (3.37), si arriva a:

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad (3.44)$$

che con (3.42) può essere racchiusa in un'unica espressione:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (3.45)$$

costituente i vincoli di Virasoro nella corrente parametrizzazione, espressi anch'essi in forma covariante, rispetto a quanto visto in (3.9). Come illustrato nel paragrafo precedente, i vincoli che vengono introdotti, a seguito delle scelte per la rappresentazione di τ e σ , permettono di semplificare espressioni di norma molto complesse; dunque è possibile introdurre quelle dei momenti nel regime corrente:

$$\Pi^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad \Pi^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^{\mu'} \quad (3.46)$$

attraverso cui, le equazioni del moto prendono la forma:

$$\ddot{X}^\mu - X'^{\mu''} = 0 \quad (3.47)$$

tipica del moto ondulatorio, arricchita con le condizioni al contorno che si necessitano.

¹⁴Anche in questo caso si noti che in static gauge, essendo $X^{0'} = 0$, l'equazione (3.42) coincide con (3.4), sottolineando ulteriormente quanto la parametrizzazione citata sia solo un caso ristretto di quella cono-luce

3.2.3 Soluzione cono-luce delle equazioni del moto

Avendo individuato le equazioni del moto per la stringa relativistica, è possibile introdurre la soluzione più generale $X^\mu(\tau, \sigma)$:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)) \quad (3.48)$$

in cui f^μ e g^μ sono due funzioni arbitrarie di un unico argomento. La seguente espressione può essere semplificata in virtù delle condizioni al contorno di Neumann le quali, a seguito di quanto scritto in (3.46), assumono la seguente forma nella corrente parametrizzazione:

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma^*) = 0 \quad \text{con } \sigma^* = 0, \pi \quad (3.49)$$

permettendo di ottenere le seguenti condizioni:

$$\frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau) - g^{\mu'}(\tau)) = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) = 0. \quad (3.51)$$

Esattamente come visto in static gauge, dalle equazioni appena scritte si può dedurre rispettivamente l'uguaglianza di f^μ e g^μ , a meno di una costante additiva, e la periodicità di $f^{\mu'}$, condizione per cui è possibile scrivere la seguente espansione generale:

$$f^{\mu'}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu). \quad (3.52)$$

in cui, essendo $u \equiv \tau - \pi$, si è scelta una combinazione lineare di funzioni trigonometriche, ottimale per garantire un periodo pari a 2π . Integrando una tale espressione, si arriva facilmente a:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau) \cos n\sigma \quad (3.53)$$

in cui A_n^μ e B_n^μ sono coefficienti propri dell'espansione, i quali, assorbendo eventuali costanti emerse dall'integrazione, possono essere sostituiti da fattori più rilevanti dal punto di vista fisico; dunque, al fine di realizzare quanto detto, si seguano i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau &\stackrel{1}{=} -\frac{i}{2} ((B_n^\mu + iA_n^\mu) e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu) e^{-in\tau}) \\ &\stackrel{2}{=} -i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

ove in (1) si è semplicemente utilizzata la formula di Eulero per l'espansione di funzioni trigonometriche, mentre in (2) si sono introdotte due nuove costanti, rese adimensionali dalla presenza del parametro α' . L'equazione (3.53) può essere ulteriormente manipolata, identificando f_0^μ e f_1^μ rispettivamente con x_0^μ e $2\alpha'p^\mu$:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha'p^\mu\tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.55)$$

ove è possibile riscrivere i coefficienti a_n^μ nel seguente modo:

$$a_n^\mu = \frac{\alpha_n^\mu}{\sqrt{n}} \quad a_n^{\mu*} = \frac{\alpha_{-n}^\mu}{\sqrt{n}} \quad n \geq 1 \quad (3.56)$$

notando che, qualora si annullassero, il moto della stringa coinciderebbe con quello della particella puntiforme. Inserendo le nuove condizioni all'interno di (3.55):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha'p^\mu\tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^\mu e^{in\tau} - \alpha_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{n}. \quad (3.57)$$

ove, affinché X^μ sia reale, peculiarità non proprio indiscutibile data la presenza dell'unità immaginaria, è necessario imporre la seguente condizione:

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^* . \quad (3.58)$$

In virtù di quanto detto, definendo il momento $p^\mu = \frac{\alpha_0^\mu}{\sqrt{2\alpha'}}$ è possibile riscrivere la soluzione dell'equazione del moto, in una sua forma più compatta:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \frac{\cos(n\sigma)}{n} \quad (3.59)$$

la quale, determinata in modo univoco solo dopo aver identificato i valori di x_0^μ e α_n^μ , non rappresenta ancora la forma definitiva cercata. Essa infatti, nonostante sia soluzione dell'equazione (3.47), completa di condizioni al contorno concernenti estremità libere, non ha vincoli qualificanti la natura di stringa relativistica, che devono essere inseriti all'interno della trattazione; dunque, a seguito di quanto detto, avendo notato nel paragrafo (3.1) l'importanza di una certa combinazione lineare di derivate, la si introduca fin da subito:

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (3.60)$$

In particolare, la soluzione cono-luce delle equazioni del moto, non implica solo l'utilizzo di coordinate dello stesso tipo, introdotte nel paragrafo (3.2.1), ma anche una scelta

coerente per la parametrizzazione della superficie di universo. A tal proposito, essendo l'equazione (3.33) l'unica su cui si può agire al fine di definire quanto appena illustrato, si prenda in considerazione il seguente vettore:

$$n_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right) \quad (3.61)$$

il quale, introdotto in modo generico, assume una forma particolarmente interessante per la trattazione, permettendo di avere le seguenti identità:

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+ \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+. \quad (3.62)$$

Come si vede dalle due uguaglianze appena scritte, la parametrizzazione scelta permette di conoscere le componenti X^+ e p^+ del sistema, riducendo i gradi di libertà da determinare; dunque, è possibile riscrivere le equazioni (3.37) e (3.38) rispettivamente nella seguente forma:

$$X^+(\tau, \sigma) = \beta \alpha' p^+ \tau \quad (3.63)$$

$$p^+ = \pi \Pi^{\tau+} \quad (3.64)$$

attraverso le quali si riesce a vedere l'essenza del quadro che si sta andando a delineare, in cui adottando espressioni semplici per X^+ , si vuole trasferire tutta la dinamica del sistema nelle coordinate trasverse $X^I = (X^2, X^3, \dots, X^{D-1})$, lasciando che X^- ne sia totalmente definito¹⁵. Per questa particolare scelta del vettore n^μ , i vincoli di Virasoro prendono la seguente forma:

$$-2 \left(\dot{X}^+ \pm X^{+'} \right) \left(\dot{X}^- \pm X^{-'} \right) + \left(\dot{X}^I \pm X^{I'} \right) \left(\dot{X}^I \pm X^{I'} \right) = 0 \quad (3.65)$$

in cui, avendo usato la metrica cono-luce (3.28), si nota un'assenza di termini caratterizzati da radice quadrata, peculiarità non indifferente per la quantizzazione. Considerando $X^+ \sim \tau$, come visto in (3.63), è possibile semplificare tali vincoli nel seguente modo:

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{2\alpha' 2p^+} \left(\dot{X}^I \pm X^{I'} \right)^2 \quad (3.66)$$

in cui si richiede, affinché il formalismo cono-luce sia applicabile, che p^+ non si annulli, condizione soddisfatta a meno di particelle prive di massa, il cui moto avviene nel verso negativo dell'asse x^1 , annullando l'energia della particella stessa. Quanto appena scritto, essendo composto da due equazioni e due incognite, permette di determinare \dot{X}^- e $X^{-'}$ come funzioni del moto trasversale, attraverso cui, dato un punto P sulla superficie di

¹⁵In realtà a breve si vedrà ciò non è propriamente vero, essendo necessaria una condizione indipendente anche per tale coordinata.

universo, è possibile trovare il valore di X^- in qualsiasi altro punto Q , avvalendosi della seguente integrazione:

$$dX^- = \frac{\partial X^-}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial X^-}{\partial \sigma} d\sigma \quad (3.67)$$

da cui emerge la necessità di un parametro x_0^- al fine di stabilire l'espressione completa di tale coordinata; dunque, per quanto analizzato, è possibile concludere che l'evoluzione della stringa viene determinata dai seguenti oggetti:

$$X^I(\tau, \sigma) = p^+ x_0^- \quad (3.68)$$

La combinazione delle derivate di X^- si può sviluppare in modo alternativo, usando quanto scritto in (3.60), ove, essendo valida per tutte le coordinate del moto, è sufficiente sostituire l'indice corretto:

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (3.69)$$

la quale può essere uguagliata con (3.66), ottenendo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} &= \frac{1}{4\alpha' p^+} \left(\dot{X}^I \pm X'^I \right)^2 \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned} \quad (3.70)$$

in cui, nell'ultimo passaggio, si è introdotta la variabile $n = p + q$, attraverso cui è stato possibile dividere la singola sommatoria. Confrontando i due membri ed elidendo il termine esponenziale, è immediato identificare la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- &= \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \\ &= \frac{1}{p^+} L_n^\perp \end{aligned} \quad (3.71)$$

ove si è definita l'espressione del modo trasverso di Virasoro L_n^\perp come combinazione quadratica di oscillatori. E' interessante, per la definizione di un oggetto di cui si farà ampio uso, esplicitare il caso $n = 0$, :

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp \quad (3.72)$$

tramite cui si può trovare la massa della stringa relativistica:

$$\begin{aligned}
M^2 &= 2p^+p^- - p^I p^I \\
&= \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - p^I p^I \\
&= \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \right) - p^I p^I \\
&\stackrel{1}{=} \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p \geq 1} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \right) - p^I p^I \\
&\stackrel{2}{=} \frac{1}{\alpha'} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I}_I + \underbrace{\sum_{p \geq 1} p (a_p^I)^* a_p^I}_{II} \right) - p^I p^I \\
&= \frac{1}{\alpha'} \sum_{p \geq 1} p (a_p^I)^* a_p^I
\end{aligned} \tag{3.73}$$

ove in (1) si è separato il modo corrispondente a $p = 0$ dai restanti, mentre in (2) si sono evidenziati i termini I e II rispettivamente per la relazione che lega i coefficienti a p^I e la sostituzione di (3.56). Il risultato finale è una massa reale e maggiore o uguale a zero, possibilità che si presenta quando tutti i coefficienti dell'espansione si annullano, condizione in cui la stringa collassa in un oggetto puntiforme. E' importante dire che tali stati non sono sufficienti per descrivere l'intero panorama di particelle prive di massa, presenti nel Modello Standard, motivo per cui la formula verrà modificata con l'aggiunta di termini durante lo studio quantistico.

Capitolo 4

Quantizzazione cono-luce della particella puntiforme

Nonostante nei capitoli precedenti, studiando la particella, si è sempre fatto riferimento ad essa come se fosse una sferetta rigida indistruttibile, assunzione giustificata essendo in ambito classico, è necessario, ai fini di una visione corretta della realtà, introdurre l'idea alla base della prima quantizzazione: comportamento ondulatorio dei corpuscoli. Tale corrispondenza è però biunivoca, in quanto anche oggetti definiti inizialmente come onde manifestano una natura particellare. Le idee sopracitate possono essere unite all'interno di un'unica entità: il campo quantizzato, oggetto essenziale per uno studio accurato. Assumendo che le particelle siano quanti di un determinato campo, ciò che si andrà a studiare nel seguente capitolo sono gli stati di queste ultime, provenienti dall'azione degli operatori di creazione sullo stato di vuoto $|\Omega\rangle$.

4.1 Campi cono-luce e particelle

4.1.1 Campi scalari quantistici

Un campo scalare classico $\phi(t, \mathbf{x})$, brevemente scritto $\phi(x)$, può essere pensato come una quantità numerica associata ad ogni punto dello spazio, in virtù dell'argomento da cui dipende; dunque, per quanto detto, esso è contraddistinto da una natura scalare, caratteristica che implica l'invarianza del suo valore se misurato in diversi sistemi inerziali, connessi da trasformazioni di Lorentz [16]:

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (4.1)$$

peculiarità che lo rende il campo più semplice tra quelli proposti e per tale motivo presentato per primo. In particolare per riuscire a studiarne l'evoluzione è necessario

presentare la forma dell'azione contenente la fisica del sistema stesso¹:

$$\mathcal{S}_{scalar} = \int d^D x \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (4.2)$$

attraverso cui è possibile trovare l'equazione di Klein-Gordon [17]:

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0 \quad (4.3)$$

che descrive il moto del campo. Avendo introdotto il contesto generale nel quale si opera, si scriva una prima formulazione di ϕ :

$$\phi(t, \mathbf{x}) \equiv \phi_p(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a^*(t) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (4.4)$$

ove V ed E_p sono rispettivamente volume del dominio di esistenza ed energia propria del campo, in cui la presenza del pedice p ne evidenzia la dipendenza dal valore del momento, attraverso la conosciuta relazione relativistica; mentre la variabile dinamica $a(t)$, oltre ad inglobare, insieme al suo complesso coniugato, la dipendenza temporale, determina la configurazione del campo stesso. Volendo tentare un primo approccio quantistico, conoscendo la forma esplicita di $\phi_p(x)$, si inizi sviluppando l'espressione \mathcal{S}_{scalar} :

$$\mathcal{S}_{scalar} = \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{a}^*(t) \dot{a}(t) - \frac{1}{2} E_p a^*(t) a(t) \right) \quad (4.5)$$

ove compaiono, in quanto non nulli, i soli termini del campo privi di dipendenza spaziale; dunque l'azione, esprimendo la variabile complessa in funzione di due coordinate reali $a(t) = q_1(t) + iq_2(t)$, si riduce ad essere una somma di oscillatori armonici identici:

$$\mathcal{S}_{scalar} = \sum_{i=1}^2 \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} E_p q_i^2(t) \right) \quad (4.6)$$

attraverso cui è facilmente intuibile l'espressione delle equazioni del moto, di cui si riporta la formulazione più compatta:

$$a(t) = a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t} \quad (4.7)$$

in cui a_p e a_{-p}^* sono due costanti complesse, elevate, al fine della quantizzazione, rispettivamente ad operatori di distruzione \hat{a}_p e creazione \hat{a}_p^\dagger . Essi, già introdotti nel caso dell'oscillatore armonico quantistico come operatori di scala, piuttosto che modificare i quanti di energia $h\omega$ del sistema, vanno ad agire sulle particelle presenti in un determinato stato, contraddistinto da un particolare valore del momento. Affinchè la quantizzazione

¹Per i dettagli si veda [Azione per i campi scalari](#).

di un sistema sia completa, è imprescindibile definire le relazioni che intercorrono tra gli operatori che lo definiscono, nozione cruciale che verrà ampiamente ripresa; dunque, un sistema Hamiltoniano classico può essere riscritto in termini quantistici considerando la seguente regola [18]:

$$\{A, B\}_{P.B.} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\widehat{A}, \widehat{B}] \quad (4.8)$$

ove A, B e \widehat{A}, \widehat{B} hanno rispettivamente i ruoli di variabili dinamiche e corrispettivi operatori. Quanto appena scritto prende il nome di *quantizzazione canonica*, tramite cui è possibile dare consistenza alle relazioni di commutazione per gli operatori di creazione e distruzione:

$$[\widehat{a}_p, \widehat{a}_p^\dagger] = 1 \quad [\widehat{a}_{-p}, \widehat{a}_{-p}^\dagger] = 1. \quad (4.9)$$

Avendo definito il quadro in cui si andrà ad operare, è possibile iniziare a trovare gli stati del campo studiato; dunque, assumendo l'esistenza del vuoto $|\Omega\rangle$, equivalente allo stato di ground dell'oscillatore armonico, caratterizzato dall'assenza di particelle, è possibile agire nel seguente modo:

$$\widehat{a}_p^\dagger |\Omega\rangle \quad (4.10)$$

generando, nello stato stesso su cui si sta operando, esattamente una particella di momento \mathbf{p} , la quale non è più un ente indistruttibile, ma sulla quale, al contrario, si può agire modificando proprio la sua stessa presenza nello spazio. Il concetto appena espresso, causato dalla combinazione di meccanica quantistica e relatività speciale, è esattamente l'esplicazione analitica di quanto si era annunciato nella parte introduttiva del paragrafo. Per verificare che lo stato contenga effettivamente una particella, a seguito di quanto scritto in (4.10), è possibile calcolarne il momento effettivo, applicando l'operatore opportuno \widehat{P} :

$$\begin{aligned} \widehat{P} \widehat{a}_p^\dagger |\Omega\rangle &= \underbrace{\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \widehat{a}_k^\dagger \widehat{a}_k \widehat{a}_k^\dagger}_{\text{I}} |\Omega\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left[\widehat{a}_k^\dagger \widehat{a}_k \widehat{a}_k^\dagger + \underbrace{\left(\widehat{a}_k^\dagger \widehat{a}_k^\dagger \widehat{a}_k - \widehat{a}_k^\dagger \widehat{a}_k^\dagger \widehat{a}_k \right)}_{=0} \right] |\Omega\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \widehat{a}_k^\dagger \left[\widehat{a}_k, \widehat{a}_k^\dagger \right] |\Omega\rangle + \underbrace{\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \widehat{a}_k^\dagger \widehat{a}_k^\dagger \widehat{a}_k}_{\text{II}} |\Omega\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \widehat{a}_k^\dagger |\Omega\rangle \\ &= \mathbf{p} \widehat{a}_p^\dagger |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

in cui il termine (I) contiene semplicemente la definizione dell'operatore \widehat{P} , mentre (II) si annulla per definizione, dato che si sta applicando l'operatore di distruzione uno stato

privo di particelle. L'espressione (I), pur non essendo stata giustificata, sembra apparire abbastanza ragionevole, in quanto si sta moltiplicando l'operatore numero $\widehat{N} = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}$, per il vettore che caratterizza il modo considerato; dunque, mentre \widehat{N} è reale ed indica il numero di particelle che occupano lo stato, la sommatoria sui valori dei vari momenti permette di quantificare l'esito finale: lo stato su cui si sta agendo, potendo essere composto da più di una particella, ha un momento totale che dipende dalla popolazione di ogni modo. Per descrivere gli stati della singola particella scalare attraverso coordinate cono-luce, i cambiamenti da apportare a (4.10) sono minimi, in quanto basta sostituire le componenti p^+ e \mathbf{p}_T ², al vettore tridimensionale \mathbf{p} , in modo da avere:

$$a_{p^+, p_T}^\dagger |\Omega\rangle. \quad (4.12)$$

4.1.2 Campi di Maxwell e stati del fotone

I campi elettromagnetici sono un primo esempio di oggetti che, pur ammettendo diverse configurazioni, lasciano inalterati gli osservabili del sistema, la cui descrizione fisica risulta caratterizzata da una certa indeterminatezza, che prende il nome di invarianza di gauge³. Nel caso preso in considerazione, campo elettrico e magnetico sono invarianti per trasformazioni di gauge dei potenziali scalare $V(\mathbf{x}, t)$ e vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, i quali possono essere ordinati all'interno di un quadrivettore o campo di gauge $A^\mu(\mathbf{x}, t) \equiv (V, \mathbf{A})$ contenente tutte le informazioni circa il moto degli oggetti che descrive. Per quanto detto, è possibile presentare la lagrangiana⁴ del sistema nel seguente modo [19]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (4.13)$$

attraverso cui si derivano sia le equazioni di Maxwell nel vuoto, sia quelle rappresentanti il moto di A^μ :

$$\partial^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial \cdot A) = 0 \quad (4.14)$$

le quali, non presentando alcun termine indicante la massa, permettono di concludere che i campi di Maxwell ne sono privi. Tale uguaglianza risulta essere ugualmente soddisfatta se, piuttosto che A_μ , si inserisce A'_μ così definito:

$$A'_\mu = A_\mu + \underbrace{\partial_\mu \epsilon}_{\text{I}} \quad (4.15)$$

ove il termine (I), contenente il parametro di gauge, rappresenta δA_μ . A tal proposito, avendo introdotto le informazioni strettamente necessarie per comprendere l'ambiente

²In questo modo il valore di p^- risulta essere fissato.

³Una proprietà di questo tipo si è già riscontrata durante la parametrizzazione di linea e superficie di universo, oggetti appartenenti alla trattazione rispettivamente di particella e stringa.

⁴Per definire le proprietà del sistema è equivalente usare l'azione, come nel paragrafo precedente, o la lagrangiana, data la relazione che le unisce.

nel quale si andrà ad operare, al fine di sfruttare la parametrizzazione cono-luce, di cui si sono già accertate le potenzialità, si riscriva (4.14) e (4.15) nello spazio dei momenti:

$$p^2 A^\mu - p^\mu(p \cdot A) = 0 \quad (4.16)$$

$$\delta A_\mu(p) = ip_\mu \epsilon(p) \quad (4.17)$$

in cui $\mu = +, -, I$. La strategia di cui ci si varrà per analizzare il problema è in linea con quanto già precedentemente anticipato: supponendo di conoscere la forma di A^I e ricavandone una semplificata per A^+ , è possibile determinare A^- , definendo completamente il campo di gauge. Sviluppando quanto detto, si riscriva (4.15) nella coordinata $+$:

$$A'^+ = A^+ + ip^+ \epsilon \quad (4.18)$$

ove è indispensabile richiedere $p^+ \neq 0$ ⁵, attraverso cui, scegliendo $\epsilon = i \frac{A^+}{p^+}$ è possibile imporre l'annullamento di A'^+ ; dunque, non avendo quest'ultima alcun ruolo privilegiato, è possibile traslare il risultato appena visto alla generica componente A^+ del campo, arrivando alla condizione cono-luce cercata. La conclusione appena tratta, oltre a determinare l'espressione della componente A^- in funzione di A^I , implica:

$$\begin{aligned} 0 &= p^2 A^+ - p^+(p \cdot A) \\ &= -p^+(p \cdot A) \\ &= (p \cdot A) \end{aligned} \quad (4.19)$$

attraverso cui le equazioni del moto (4.16) vengono radicalmente semplificate:

$$p^2 A^\mu = 0. \quad (4.20)$$

L'uguaglianza appena scritta, nonostante per A^+ risulti trivialmente soddisfatta, se valutata per $\mu = I$, essendo formalmente equivalente all'equazione di Klein-Gordon per campi scalari non massivi (4.3), permette di determinare $(D - 2)$ gradi di libertà caratterizzati da una natura scalare⁶. Seguendo la trama delineata nel paragrafo precedente, è possibile trovare gli stati del fotone, semplicemente agendo con gli operatori di creazione del modo I sul vuoto $|\Omega\rangle$:

$$a_{p^+, p^I}^{I\dagger} |\Omega\rangle \quad (4.21)$$

in cui l'indice I indica la polarizzazione; dunque, siccome in meccanica quantistica, così come la terza componente dello spin di un elettrone può essere $\pm \frac{1}{2}$, si deve avere una

⁵Questa richiesta deriva direttamente dalla parametrizzazione scelta.

⁶In questo caso il termine "scalare" è stato usato in virtù delle equazioni del moto soddisfatte, non dell'invarianza sotto trasformazioni di Lorentz.

simultanea presenza di differenti polarizzazioni, i generici stati del fotone risultano essere così definiti:

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, p^-}^{I\dagger} |\Omega\rangle \quad (4.22)$$

in cui ξ_I è il vettore di polarizzazione. All'interno dello spaziotempo, caratterizzato da $D = 4$ dimensioni, quanto delineato origina $D - 2 = 2$ singoli stati di fotone per ogni valore del momento fissato, peculiarità equivalente a quanto studiato nel caso delle onde elettromagnetiche piane, in cui, stabilita una direzione nello spazio, esse potevano essere scritte come una combinazione di componenti progressive e regressive.

4.1.3 Campi gravitazionali e stati del gravitone

E' possibile far emergere dalla teoria delle stringhe la gravitazione, attraverso un'analogia con gli stati propri dei campi che si distinguono nella relatività generale. In particolare, servendosi di una perturbazione $h_{\mu\nu}$, è possibile linearizzare la curvatura spaziotemporale⁷ $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$ al fine di poter agire in un intorno della metrica di Minkowski, trovando naturalmente delle nuove equazioni del moto, caratterizzate dalla seguente formulazione nello spazio dei momenti:

$$p^2 h^{\mu\nu} - p_\alpha (p^\mu h^{\nu\alpha} + p^\nu h^{\mu\alpha}) + p^\mu p^\nu h = 0 \quad (4.23)$$

in cui si è supposta l'assenza di sorgenti. In particolare tale metrica, essendo simmetrica, può essere completamente determinata dal seguente set $(h^{IJ}, h^{+I}, h^{-I}, h^{+-}, h^{++}, h^{--})$ caratterizzato da coordinate cono-luce, il cui numero può essere ridotto semplicemente sfruttando l'invarianza di (4.23) per trasformazioni di gauge, di cui è necessario giustificare la forma. In particolare, nel caso della relatività generale, una trasformazione infinitesima delle coordinate $x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x)$, può essere vista come una variazione della metrica $g_{\mu\nu}$; dunque, quanto appena detto si traduce in un'alterazione infinitesima della perturbazione:

$$\delta h^{\mu\nu} = \delta_0 h^{\mu\nu} + \underbrace{\mathcal{O}(\epsilon, h)}_I \quad \delta_0 h^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu \quad (4.24)$$

ove il termine I racchiude correzioni scritte come $\epsilon \cdot \mathcal{O}(h)$. L'invarianza delle equazioni di campo per (4.24), implica la stessa proprietà per trasformazioni di gauge $\delta_0 h^{\mu\nu}$ nel caso linearizzato, le quali, riscritte nello spazio dei momenti, assumono la seguente forma:

$$\delta_0 h^{\mu\nu}(p) = ip^\mu \epsilon^\nu(p) + ip^\nu \epsilon^\mu(p) \quad (4.25)$$

in cui ϵ , contrariamente a quanto visto nel caso dei campi di Maxwell, ha natura vettoriale. A tal proposito sarà sufficiente individuarne le componenti che permettano di

⁷Per i dettagli si veda [Relatività generale linearizzata](#).

annullare i campi caratterizzati da almeno un indice +, in modo che la perturbazione possa svilupparsi lungo le direzioni trasverse I , esattamente come fatto nel paragrafo (4.1.2); dunque, riscrivendo la trasformazione (4.25) per le varie componenti:

$$\delta_0 h^{++} = 2ip^+ \epsilon^+ \quad (4.26)$$

$$\delta_0 h^{+-} = ip^+ \epsilon^- + ip^- \epsilon^+ \quad (4.27)$$

$$\delta_0 h^{+I} = ip^+ \epsilon^I + ip^I \epsilon^+. \quad (4.28)$$

E' facile vedere come una scelta di ϵ^+ , individuata dall'equazione (4.26), abbia delle ripercussioni sui valori di ϵ^- e ϵ^I avvalendosi rispettivamente di (4.27) e (4.28). In virtù di ciò, le condizioni cono-luce per i campi gravitazionali sono:

$$h^{++} = 0 \quad h^{+I} = 0 \quad h^{+-} = 0 \quad (4.29)$$

cedendo alle restanti coordinate il trasporto dei gradi di libertà. Un'immediata conseguenza di quanto appena detto, può essere vista studiando l'equazione del moto per la seguente condizione $\mu = \nu = +$:

$$\begin{aligned} 0 &= p^2 h^{++} - p_\alpha (p^+ h^{+\alpha} + p^+ h^{+\alpha}) + p^+ p^+ h \\ &= p^+ p^+ h \\ &= p^+ p^+ \underbrace{(-2h^{+-} + h^{II})}_I \\ &= p^+ p^+ h^{II} \end{aligned} \quad (4.30)$$

ove, sviluppando nel termine I l'espressione cono-luce di $\eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$, è possibile concludere che i campi h^{IJ} sono caratterizzati da un numero di componenti pari a:

$$n(D) = (D-2) \underbrace{\left(\frac{D-1}{2}\right)}_i - \underbrace{1}_{ii} = \frac{1}{2} D(D-3) \quad (4.31)$$

in cui i e ii sono dovuti rispettivamente alla natura simmetrica e alla presenza di una traccia nulla del tensore stesso. In particolare la formula appena scritta quantifica anche il numero di gradi di libertà gravitazionali, per qualsiasi dimensione dello spazio in cui si opera:

D	$d.o.f$
4	2
5	5
10	35
26	299

Tabella 4.1: Gradi di libertà per differenti valori delle dimensioni spaziotemporali.

Per trovare gli stati che caratterizzano il gravitone, risulta sufficiente rivedere quanto scritto in (4.22), con l'aggiunta di un indice J , data la natura che caratterizza i campi stessi:

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} \widehat{a}_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle \quad \xi_{II} = 0 \quad (4.32)$$

in cui ξ_{IJ} è la polarizzazione del tensore gravitazionale.

4.2 Coordinate dinamiche cono-luce

Prima di apprestarsi alla quantizzazione della stringa, si passi per lo studio della particella, in quanto è utile analizzare come molti dei passaggi logici successivamente richiamati, vengono applicati ad un primo oggetto semplice. Mentre in meccanica classica, lo stato di un sistema fisico viene determinato specificando i valori assunti dalle variabili dinamiche, posizione \mathbf{x} e momento \mathbf{p} , che ne descrivono il moto nello spazio delle fasi, in meccanica quantistica questo ruolo è assegnato agli operatori, agenti sullo spazio di Hilbert degli stati quantistici. Ciò che ci si propone di fare in questo paragrafo è riuscire a trovare tali coordinate al fine di elevarle ad operatori, riuscendo a quantizzare il sistema. A tal proposito, avendo già l'espressione dell'azione della particella relativistica (2.2), è possibile trovare quella del momento coniugato:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \quad (4.33)$$

la quale non permette di riscrivere la velocità in termini del momento, al fine di trovare le soluzioni dell'equazione del moto. A tal proposito, avendo nei capitoli precedenti sottolineato l'importanza di coordinate e parametrizzazione cono-luce, è doveroso avvalersene anche in questo caso; dunque, manipolando la relazione di proporzionalità (3.63):

$$x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau \quad (4.34)$$

in cui m^2 è stato inserito per consistenza dimensionale, è possibile derivarla, sostituendone l'esito in (4.33):

$$\begin{aligned} p^+ &= \frac{m}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \dot{x}^+ \\ &= \frac{m}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \frac{p^+}{m^2} \\ &\stackrel{1}{=} \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \frac{p^+}{m}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

In particolare nel passaggio (1), elidendo p^+ , si trova un notevole vincolo, il quale, se sostituito in (4.33), permette di trovare la relazione di proporzionalità cercata:

$$p^\mu = m^2 \dot{x}^\mu \quad (4.36)$$

attraverso la cui integrazione è possibile trovare le coordinate dei restanti modi:

$$x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau \quad (4.37)$$

$$x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2} \tau \quad (4.38)$$

specificando in modo completo il moto della particella. In particolare, le relazioni (4.34), (4.37) e (4.38) costituiscono lo scopo che ci si era prefissati, attraverso cui è possibile selezionare una lista di variabili dinamiche in grado di descrivere completamente l'evoluzione del sistema:

$$p^+ \quad p^I \quad x_0^- \quad x^I \quad (4.39)$$

conseguendo, oltre che l'inizio per una teoria quantistica, una rilevante manifestazione dell'importanza del sistema di coordinate scelto, riducendo la descrizione a quattro coordinate, nonostante il moto sia in uno spazio caratterizzato da D dimensioni. E' possibile verificare che il set (4.39) sia completo ricordando che x^+ è determinato esclusivamente da p^+ , mentre la variabile x^- necessita, oltre che della condizione iniziale x_0^- , del momento p^- , il quale però è vincolato a p^+ e p^I , dall'usuale condizione $p^2 = -m^2$.

4.3 Quantizzazione cono-luce

Avendo, nella precedente sezione, individuato le variabili che permettono di descrivere lo stato dinamico del sistema in modo completo, è possibile, seguendo i passaggi logici per la quantizzazione, già visti all'interno di sistemi canonici come l'oscillatore armonico, elevare tali quantità ad operatori:

$$\hat{p}^+ \quad \hat{p}^I \quad \hat{x}_0^- \quad \hat{x}^I \quad (4.40)$$

propri della rappresentazione di Schrödinger, in quanto indipendenti dal tempo, i quali soddisfano le seguenti relazioni di commutazione:

$$[\hat{x}^I, \hat{p}^J] = i\eta^{IJ} \quad [\hat{x}_0^-, \hat{p}^+] = i\eta^{-+} = -i. \quad (4.41)$$

Nonostante non si sia data una giustificazione rigorosa di tali espressioni a livello matematico, è possibile verificarne la validità semplicemente osservando che entrambe contengono il commutatore di una variabile spaziale ed il momento coniugato associato. E' possibile definire un'altra classe di operatori:

$$\hat{p}^+(\tau) \quad \hat{p}^I(\tau) \quad \hat{x}_0^-(\tau) \quad \hat{x}^I(\tau) \quad (4.42)$$

propri, in virtù della dipendenza temporale, della rappresentazione di Heisenberg, la quale risulta essere più appropriata per la descrizione di un sistema classico, in quanto le variabili dinamiche, elevate ad operatori durante la trattazione quantistica, si evolvono temporalmente. Per riuscire a trovare gli stati che descrivono la particella, è necessario definire la forma dell'Hamiltoniana, sempre in coordinate cono-luce, la quale deve essere dedotta a partire da ciò che è definito. Nel paragrafo (3.2.1), avendo determinato x^+ e p^- rispettivamente come la coordinata temporale e l'energia del sistema, ci si aspetta che l'evoluzione del primo termine sia determinata dal secondo; dunque una formula ragionevole per l'Hamiltoniana è la seguente:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\tau) &= \frac{\hat{p}^+(\tau)}{m^2} \hat{p}^-(\tau) \\ &= \frac{1}{2m^2} (\hat{p}^I(\tau)\hat{p}^I(\tau) + m^2) \end{aligned} \quad (4.43)$$

la cui validità viene confermata solo dopo aver verificato che essa riproduca le equazioni del moto trovate in precedenza. A tal proposito, sia $\hat{\xi}(t)$ un operatore nella rappresentazione di Heisenberg, esso soddisfa:

$$i \frac{d\hat{\xi}(t)}{dt} = [\hat{\xi}(t), \hat{H}(\hat{p}(t), \hat{q}(t); t)] + \underbrace{i \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial t}}_I \quad (4.44)$$

in cui il termine I è non nullo solo se $\hat{\xi}$ dovesse avere una dipendenza esplicita dal tempo; dunque, avvalendosi del ragionamento appena concluso, sostituendo $\hat{\xi}(t)$ con alcuni degli operatori che appaiono in (4.42), si ha un sistema di equazioni di questo tipo:

$$i \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \hat{p}^+(\tau) \\ \hat{p}^I(\tau) \\ \hat{x}_0^-(\tau) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}^+(\tau) \\ \hat{p}^I(\tau) \\ \hat{x}_0^-(\tau) \end{bmatrix}, \hat{H}(\tau). \quad (4.45)$$

Ricordando l'espressione dell'Hamiltoniana (4.43) e le relazioni di commutazione (4.41), aventi medesima struttura nelle rappresentazioni di Heisenberg e Schrödinger, è possibile

concludere che gli operatori analizzati siano costanti durante il moto della particella libera, potendo omettere la dipendenza temporale. Si calcolino ora, utilizzando sempre lo schema proposto nell'espressione (4.44), le equazioni del moto per i restanti operatori:

$$i \frac{d\hat{x}^I}{d\tau} = [\hat{x}^I(\tau), \frac{1}{2m^2}(\hat{p}^J\hat{p}^J + m^2)] = i \frac{\hat{p}^I}{m^2} \quad (4.46)$$

$$i \frac{d\hat{x}^+}{d\tau} = [\hat{x}^+(\tau), \hat{H}] + i \frac{\partial \hat{x}^+}{\partial \tau} = i \frac{\hat{p}^+}{m^2} \quad (4.47)$$

i cui risultati sono, in entrambi i casi, concordi con quanto trovato nella teoria classica. A questo punto, avendo trovato le espressioni di Hamiltoniana e operatori che descrivono il sistema, è possibile definirne gli stati fisici, i quali sono caratterizzati da un set di numeri quantici associati ad un insieme massimale di operatori commutanti, che bisogna formare a partire da quanto appena detto. Date le relazioni di commutazione definite in (4.41) e il vantaggio che si potrebbe avere lavorando nello spazio dei momenti, si definisce stato della particella puntiforme quantistica, la seguente espressione:

$$|p^+, \mathbf{p}_T\rangle. \quad (4.48)$$

in cui p^+ e \mathbf{p}_T non sono operatori, ma numeri che caratterizzano il sistema stesso. E' importante notare, richiamando quanto visto in (4.12), che si ha una corrispondenza tra stati quantistici di particelle relativistiche e stati di singola particella dei campi scalari; dunque questi rappresentano la stessa fisica. Ciò che determina una sostanziale differenza è la posizione degli indici, caratteristici di operatori e stati rispettivamente nella prima e seconda teoria che si è discussa, che preclude o meno l'esistenza di più particelle nel medesimo modo. Nella teoria dei campi scalari, infatti, la seguente operazione:

$$\hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger \dots \hat{a}_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle. \quad (4.49)$$

permette di generare, in uno stato inizialmente vuoto, k particelle di momento $p_1 \dots p_k$, conclusione che non si può trarre considerando una particella quantistica, in cui lo stato è già predefinito. E' possibile vedere più nel dettaglio quanto appena detto, iniziando con la definizione di uno stato generico, identificativo della particella puntiforme quantistica:

$$|\psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\mathbf{p}_T \psi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.50)$$

soluzione dell'equazione di Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\psi, \tau\rangle = \hat{H} |\psi, \tau\rangle \quad (4.51)$$

in cui la derivazione rispetto al parametro τ agisce sulla funzione d'onda ψ , mentre l'Hamiltoniana opera sugli stati $|p^+, \mathbf{p}_T\rangle$, permettendo di arrivare ad un'equazione finale avente questa forma:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) = \frac{1}{2m^2} (\mathbf{p}_T^2 + m^2) \psi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T). \quad (4.52)$$

Nella teoria dei campi classici il moto viene descritto dall'equazione di Klein-Gordon (4.3), la quale assume la seguente forma in coordinate cono-luce:

$$\left(-2\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^I}\frac{\partial}{\partial x^I} - m^2\right)\phi(x^+, x^-, \mathbf{x}_T) = 0 \quad (4.53)$$

in cui il campo ϕ , sempre nello stesso regime, può essere riscritto in forma generica attraverso trasformazioni di Fourier, a meno di costanti moltiplicative:

$$\phi(x^+, x^-, \mathbf{x}_T) = \int dp^+ d\mathbf{p}_T \exp(-ix^- p^+ + i\mathbf{x}_T \cdot \mathbf{p}_T) \phi(x^+, p^+, \mathbf{p}_T). \quad (4.54)$$

Inserendo una tale espressione, all'interno dell'equazione del moto (4.53) è possibile arrivare al seguente risultato:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2m^2}(\mathbf{p}_T^2 + m^2)\right)\phi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) = 0 \quad (4.55)$$

strutturalmente uguale a quanto visto nell'equazione (4.52), arrivando nuovamente ad un'analogia tra campi classici e stati quantistici della particella puntiforme. Iniziando dalla meccanica classica, ove lo stato dinamico della particella è determinato dalle coordinate \mathbf{x} e \mathbf{p} , si è arrivati, attraverso la prima quantizzazione⁸, alla risoluzione dell'equazione di Schrödinger per lo stato quantistico della particella stessa. Quest'ultima risulta essere uguale, nella struttura, all'equazione propria dei campi scalari classici, attraverso i quali è possibile trovare gli stati dei quanti che li compongono. Il cuore di questa argomentazione consiste nell'analogia tra le due equazioni del moto citate, resa possibile dal sistema di coordinate scelto, che ne realizza la linearità nella derivata temporale.

⁸Con *prima quantizzazione* si intende il processo matematico per cui le variabili vengono elevate ad operatori.

Capitolo 5

Quantizzazione cono-luce della stringa

L'ultimo capitolo del testo si dedica completamente alla quantizzazione della stringa relativistica, considerandone dapprima una configurazione aperta, trovando gli stati del fotone, e successivamente una chiusa, arrivando a riconoscere la forma analitica propria del mediatore quantistico della gravità, risultato cruciale che a livello storico destò interesse verso la teoria stessa. Durante lo sviluppo di quanto appena illustrato, emergeranno le dimensioni proprie dello spazio in cui si sviluppa la dinamica della stringa bosonica, le quali, come già anticipato nell'introduzione, risultano essere 26.

5.1 Stringa aperta

5.1.1 Operatori cono-luce e relazioni di commutazione

Al fine di trovare gli stati quantistici della stringa aperta, è necessario scrivere l'espressione dell'Hamiltoniana, selezionando gli operatori essenziali per una descrizione completa della dinamica, esattamente come fatto per la particella puntiforme, esempio che fin dal primo capitolo si è tenuto in considerazione. Procedendo dunque per analogia con quanto scritto in (4.40), è possibile identificare in modo immediato il set di operatori nella rappresentazione di Schrödinger:

$$\widehat{X}^I(\sigma) \quad \widehat{x}_0^- \quad \widehat{\Pi}^{\tau I}(\sigma) \quad \widehat{p}^+ \quad (5.1)$$

ove gli operatori derivanti da variabili definite lungo la stringa sono funzioni del parametro σ , in quanto si sta tenendo in considerazione un oggetto esteso. Valgono inoltre le seguenti relazioni di commutazione:

$$[\widehat{X}^I(\sigma), \widehat{\Pi}^{\tau J}(\sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (5.2)$$

$$[\widehat{x}_0^-, \widehat{p}^+] = -i \quad (5.3)$$

in cui si è introdotta la funzione Delta di Dirac, data la presenza del parametro continuo σ , avente come dominio di esistenza tutta l'estensione dell'oggetto considerato; dunque gli operatori posizione e momento non commutano solo se caratterizzati dallo stesso argomento, ammettendo che misure fatte in diversi punti della stringa non interferiscano. Nella rappresentazione di Heisenberg, seguendo lo schema logico già illustrato nel paragrafo (4.3), le espressioni (5.1), (5.2) e (5.3) si arricchiscono semplicemente della dipendenza dal parametro temporale; dunque, per evitare ridondanza, si è scelto di non riscriverle. Trovati gli operatori, è possibile costruire l'Hamiltoniana, attraverso la quale si identificheranno gli stati della stringa, ricordando che, come emerge dalla meccanica quantistica, essa è il generatore della traslazione temporale. A tal proposito si introducano i seguenti passaggi:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \underbrace{\frac{\partial \widehat{X}^+}{\partial \tau}}_I \frac{\partial}{\partial \widehat{X}^+} = 2\alpha' \widehat{p}^+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial \widehat{X}^+}}_{II} \quad (5.4)$$

ove, mentre il termine I è stato sviluppato attraverso l'utilizzo della forma operatoriale di (3.63), la parte II può considerarsi associata a \widehat{p}^- , permettendo di scrivere una prima formulazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= 2\alpha' \widehat{p}^+ \widehat{p}^- \\ &= 2\alpha' \widehat{p}^+ \underbrace{\int_0^\pi d\sigma \widehat{\Pi}^{\tau-}}_i \\ &= 2\alpha' \widehat{p}^+ \int_0^\pi d\sigma \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{\widehat{X}}^-}_{ii} \end{aligned} \quad (5.5)$$

in cui per lo sviluppo di i e ii si sono utilizzate rispettivamente le espressioni (2.26) e (3.46). Al fine di completare \widehat{H} , è necessario esplicitare anche l'ultimo operatore che vi compare, sommando le due equazioni nella condizione (3.66):

$$\begin{aligned} 2\dot{\widehat{X}}^- &= \frac{1}{2\alpha' 2\widehat{p}^+} \left[\left(\dot{\widehat{X}}^I + \widehat{X}^{I'} \right)^2 + \left(\dot{\widehat{X}}^I - \widehat{X}^{I'} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\alpha' 2\widehat{p}^+} \left(2\dot{\widehat{X}}^I \dot{\widehat{X}}^I + 2\widehat{X}^{I'} \widehat{X}^{I'} \right) \\ &\stackrel{1}{=} \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha' \widehat{p}^+} \left(\widehat{\Pi}^{\tau I} \widehat{\Pi}^{\tau I} + \frac{\widehat{X}^{I'} \widehat{X}^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

ove in (1) si è utilizzata la relazione (3.46), trovando quanto richiesto, riportando \widehat{H} in rappresentazione di Heisenberg:

$$\widehat{H}(\tau) = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\widehat{\Pi}^{\tau I}(\tau, \sigma) \widehat{\Pi}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{\widehat{X}^{I'}(\tau, \sigma) \widehat{X}^{I''}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right). \quad (5.7)$$

A tal punto, come si era anticipato, segue in modo naturale il calcolo delle equazioni del moto quantizzate attraverso quanto scritto in (4.44):

$$\begin{aligned} i\dot{\widehat{X}}^I(\tau, \sigma) &= [\widehat{X}^I(\tau, \sigma), \widehat{H}(\tau)] \\ &\stackrel{1}{=} [\widehat{X}^I(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \widehat{\Pi}^{\tau J}(\tau, \sigma') \widehat{\Pi}^{\tau J}(\tau, \sigma')] \\ &= 2\pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \widehat{\Pi}^{\tau J}(\tau, \sigma') i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \\ &\stackrel{2}{=} 2i\pi\alpha' \widehat{\Pi}^{\tau I}(\tau, \sigma) \end{aligned} \quad (5.8)$$

ove in (1) non si è riportata la forma completa dell'Hamiltoniana, valendosi delle relazioni di commutazione (5.2) e (5.3), mentre in (2), riproducendo fedelmente quanto ricavato in ambito classico (3.46), si ha un'ulteriore conferma della bontà circa la forma di \widehat{H} scelta. L'espressione appena scritta racchiude equazioni del moto caratterizzate da una forma particolarmente vantaggiosa per gli sviluppi analitici:

$$\begin{aligned} \ddot{\widehat{X}}^I(\tau, \sigma) &= 2\pi\alpha' \dot{\widehat{\Pi}}^{\tau I}(\tau, \sigma) \\ &\stackrel{1}{=} -2\pi\alpha' \widehat{\Pi}^{\sigma I'}(\tau, \sigma) \\ &\stackrel{2}{=} -2\pi\alpha' \left(-\frac{1}{2\pi\alpha'} \widehat{X}^{I''} \right) \\ &= \widehat{X}^{I''}(\tau, \sigma) \end{aligned} \quad (5.9)$$

ove in (1) e (2) si sono sostituite rispettivamente di (2.19) e (3.46), derivando l'equazione del moto ondulatorio. Valendosi dell'assidua ridondanza con la trattazione classica, è possibile scriverne la soluzione nella rappresentazione di Heisenberg semplicemente usando l'espressione (3.59):

$$\widehat{X}^I(\tau, \sigma) = \widehat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \widehat{\alpha}_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \widehat{\alpha}_n^I e^{-in\tau} \frac{\cos(n\sigma)}{n} \quad (5.10)$$

in cui i coefficienti dell'espansione sono operatori Hermitiani, coerentemente con la natura della coordinata, la quale, essendo associata ad un osservabile reale, necessita di una tale qualifica; dunque, in virtù di quanto detto, valgono le seguenti uguaglianze:

$$\widehat{X}^I(\tau, \sigma) = \left(\widehat{X}^I(\tau, \sigma) \right)^\dagger \quad \widehat{x}_0^I = (\widehat{x}_0^I)^\dagger \quad \widehat{\alpha}_0^I = (\widehat{\alpha}_0^I)^\dagger \quad \widehat{\alpha}_{-n}^I = (\widehat{\alpha}_n^I)^\dagger. \quad (5.11)$$

Conseguentemente l'illustrazione fatta, al fine di riuscire a dare una descrizione completa del sistema, è necessario conoscere le relazioni di commutazione che caratterizzano gli operatori che ne determinano il moto; dunque, essendo essi contenuti nell'espressione di \hat{X}^I , è utile ricavare una relazione generale a cui attingere per trovare quando cercato. Avendo visto l'importanza della combinazione lineare (3.60), è possibile riscriverla in forma operatoriale, introducendo l'indice cono-luce d'interesse I :

$$\left(\dot{\hat{X}}^I \pm \hat{X}^{I'}\right)(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (5.12)$$

al fine di calcolare la relazione generale:

$$\left[\left(\dot{\hat{X}}^I \pm \hat{X}^{I'}\right)(\tau, \sigma), \left(\dot{\hat{X}}^J \pm \hat{X}^{J'}\right)(\tau, \sigma')\right] \quad (5.13)$$

di cui si riporta l'esito finale:

$$[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m+n,0}. \quad (5.14)$$

I modi $\hat{\alpha}$, fissata una direzione I nello spazio, soddisfano una relazione di commutazione non triviale solo se $m \neq -n$; dunque, al fine di riuscire ad identificare gli operatori con quelli di creazione e distruzione è conveniente introdurre le relazioni già viste in (3.56):

$$\hat{a}_n^I = \frac{\hat{\alpha}_n^I}{\sqrt{n}} \quad \hat{a}_n^{I\dagger} = \frac{\hat{\alpha}_{-n}^I}{\sqrt{n}} \quad n \geq 1 \quad (5.15)$$

notando una sostanziale differenza nella natura del pedice n , il quale, indicizzando entrambi gli operatori $\hat{\alpha}_n^I$ e $\hat{\alpha}_n^{I\dagger}$, appartiene rispettivamente a \mathbb{Z} e \mathbb{Z}^+ . L'effetto di quanto appena detto si riversa nella discrepanza di comportamento tra gli operatori stessi, in quanto è possibile vedere che ad n positivi e negativi, caratterizzanti \hat{a} , è associato rispettivamente un operatore di distruzione \hat{a}_n^I e creazione $\hat{a}_n^{I\dagger}$. Avendo introdotto tutti gli oggetti necessari, è possibile scrivere, sostituendo (5.15) in (5.14), la seguente espressione:

$$[\hat{a}_m^I, \hat{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ} \quad (5.16)$$

riproducendo esattamente la relazione di commutazione vista nell'oscillatore armonico, concludendo che il sistema studiato è caratterizzato da una coppia di operatori di creazione e distruzione per ogni modo m della coordinata trasversale I . Prima di scrivere \hat{X}^I in funzione degli operatori di creazione e distruzione introdotti, è necessario finire di definire il sistema, in quanto le relazioni di commutazione (5.16) non esauriscono tutti gli operatori presentati nella descrizione; dunque, riscrivendo una relazione introdotta in regime classico per determinare la coordinata cono-luce (3.59):

$$\hat{\alpha}_0^I = \sqrt{2\alpha'} \hat{p}^I \quad (5.17)$$

è possibile concludere scrivendo l'ultima relazione d'interesse [9]:

$$[\hat{x}_0^I, \hat{p}^J] = i\eta^{IJ}. \quad (5.18)$$

trovando quanto cercato. Conseguentemente quanto appena analizzato, è possibile scrivere l'espressione completa dell'operatore coordinata trasversa:

$$\hat{X}^I(\tau, \sigma) = \hat{x}_0^I + 2\alpha' \hat{p}^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{a}_n^I e^{-in\tau} - \hat{a}_n^{I\dagger} e^{in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5.19)$$

in cui \hat{x}_0^I e \hat{p}^I sono operatori appartenenti al modo $n = 0$; dunque, traslando il ragionamento appena fatto a \hat{x}_0^- e \hat{p}^+ , introdotti in (5.1), è possibile concludere che il set di operatori delineante la stringa quantistica, è una composizione di modi di ordine zero e infiniti operatori di creazione e annichilazione. Nella trattazione appena conclusa, si è più volte fatto riferimento alla presenza di oscillatori armonici, nel moto di un oggetto che non è presentato come tale; dunque è necessario giustificare una tale assunzione, partendo dalla matematica che lo caratterizza. A tal proposito, analizzando lo stesso sistema con un criterio diverso, è possibile introdurre la forma di un'azione coerente con il quadro quantistico studiato:

$$\mathcal{S}_O = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \dot{X}^I \dot{X}^I - X'^I X'^I \quad (5.20)$$

la quale, essendo caratterizzata dall'assenza di radice quadrata e riproducendo correttamente le equazioni del moto, incluse le condizioni al contorno di Neumann, risulta essere una buona candidata per la quantizzazione della teoria. Un tale obiettivo risulta perseguibile esplicitando l'espressione dell'azione \mathcal{S}_O , attraverso lo sviluppo di X^I in funzione di coordinate dinamiche generalizzate, indipendenti dal parametro σ :

$$X^I(\tau, \sigma) = q^I(\tau) + 2\sqrt{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^I(\tau) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5.21)$$

trovando la più generica forma soddisfacente le condizioni al contorno di stringa libera. Calcolandone le derivate parziali ed includendole in (5.20), si ottiene il seguente risultato:

$$\mathcal{S}_O = \int d\tau \left[\frac{1}{4\alpha'} \dot{q}^I(\tau) \dot{q}^I(\tau) + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} \dot{q}_n^I(\tau) \dot{q}_n^I(\tau) - \frac{n}{2} q_n^I(\tau) q_n^I(\tau) \right)}_{\mathcal{S}_{HO}} \right] \quad (5.22)$$

in cui è possibile notare l'equivalenza di \mathcal{S}_{HO} con la lagrangiana propria dell'oscillatore armonico, ove $q_n^I(\tau)$ rivestono il ruolo di coordinate con frequenza d'oscillazione pari a n .

Esse, a seguito dell'analogia illustrata, rappresentante ciò che ci si era posti di trovare, prendono la seguente forma operatoriale:

$$\hat{q}_n^I(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}_n^I e^{-in\tau} - \hat{a}_n^{I\dagger} e^{in\tau}) \quad (5.23)$$

in cui \hat{a}_n^I e $\hat{a}_n^{I\dagger}$ sono rispettivamente operatori di distruzione e creazione; mentre per l'espressione completa del modo corrispondente ad $n = 0$, rappresentato dalla restante parte dell'argomento dell'azione, è necessario fare qualche passaggio computazionale in più, di cui si riporta solo il risultato:

$$\hat{q}^I(\tau) = \hat{x}_0^I + 2\alpha' \hat{p}^I \tau. \quad (5.24)$$

Sostituendo (5.23) e (5.24) all'interno di (5.21), si trova esattamente ciò che si era scritto in (5.19), senza però l'utilizzo di alcuna Delta di Dirac.

5.1.2 Operatori trasversi di Virasoro e dimensioni dello spazio

E' possibile considerare il seguente paragrafo come una parentesi rispetto a quanto detto fino ad ora, in cui si arriva ad alcuni risultati fisici che vale la pena di commentare. A tal proposito si riscriva l'espressione (3.71), in cui si sono definiti i modi trasversi di Virasoro, in forma operatoriale:

$$\hat{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{n-p}^I \hat{\alpha}_p^I \quad (5.25)$$

ove la ripetizione dell'indice I implica una sommatoria implicita sulle direzioni trasverse. Essendo essa un'espressione traslata dall'ambito classico a quello quantistico e tenendo in considerazione quanto scritto nelle relazione di commutazione (5.14), è opportuno analizzare quale sia l'ordine in cui gli operatori debbano essere scritti; dunque, essendo questa istanza ristretta al caso $n = 0$, è possibile restringere lo studio del problema al solo modo \hat{L}_0^\perp :

$$\hat{L}_0^\perp = \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I}_I + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{-p}^I}_II. \quad (5.26)$$

Avendo messo in evidenza i termini principali dell'operatore citato, è possibile intuire, in base alle corrispondenze che tali operatori hanno con quelli di creazione e distruzione, quale sia la disposizione corretta in base all'azione della coppia sullo stato rappresentante il vuoto; dunque, essendo i termini I e II caratterizzati da un ordinamento rispettivamente

normale ed antinormale¹, è conveniente usare il primo citato, mentre il secondo necessita una riformulazione. A tal proposito si seguano i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \widehat{\alpha}_p^I \widehat{\alpha}_{-p}^I &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\widehat{\alpha}_{-p}^I \widehat{\alpha}_p^I + [\widehat{\alpha}_p^I, \widehat{\alpha}_{-p}^I]) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \widehat{\alpha}_{-p}^I \widehat{\alpha}_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{II} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \widehat{\alpha}_{-p}^I \widehat{\alpha}_p^I + \underbrace{\frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p}_{\text{III}}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

in cui, come si può notare dalla presenza del termine III, si ha una parte divergente, essendo una somma su tutti gli interi positivi; dunque, al fine di risolvere l'inconsistenza appena illustrata, è necessario procedere con cautela, non potendo semplicemente rimuovere tale termine dall'espressione generale di \widehat{L}_0^\perp tramite l'aggiunta di una controparte, poichè ciò avrebbe delle conseguenze dirette sulla massa della stringa, come si vede in (3.73). A tal proposito è possibile ridefinire \widehat{L}_0^\perp nel seguente modo:

$$\widehat{L}_0^\perp \equiv \frac{1}{2} \widehat{\alpha}_0^I \widehat{\alpha}_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \widehat{\alpha}_{-p}^I \widehat{\alpha}_p^I \tag{5.28}$$

ove viene messo in evidenza l'ordinamento normale che lo caratterizza, eliminando manualmente il termine III; dunque, dovendoci ad ogni modo essere un quadro consistente, è verosimile introdurre un termine \widehat{a} che tenga conto di tale correzione all'interno della formula (3.72):

$$2\alpha' \widehat{p}^- \equiv \frac{1}{\widehat{p}^+} \left(\widehat{L}_0^\perp + \widehat{a} \right). \tag{5.29}$$

¹L'ordinamento normale nella teoria dei campi quantizzati, richiama la disposizione degli operatori di creazione e distruzione all'interno di una particolare espressione. Restringendo la trattazione alla sola statistica di Bose-Einstein, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
:\widehat{a}^\dagger \widehat{a}: &= \widehat{a}^\dagger \widehat{a} \\
:\widehat{a} \widehat{a}^\dagger: &= \widehat{a}^\dagger \widehat{a}
\end{aligned}$$

Si può quindi concludere, sostituendo quanto appena scritto in \widehat{M}^2 :

$$\begin{aligned}
\widehat{M}^2 &= 2\widehat{p}^+\widehat{p}^- - \widehat{p}^I\widehat{p}^I \\
&= \frac{1}{\alpha'} \left(\widehat{L}_0^\perp + \widehat{a} - \widehat{p}^I\widehat{p}^I \right) \\
&= \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{p=1}^{\infty} p \widehat{a}_p^{I\dagger} \widehat{a}_p^I + \widehat{a} \right)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

la quale, se confrontata con quanto visto in (3.73), presenta uno spostamento pari al valore della costante inserita, attraverso cui è possibile ottenere, nel caso in cui essa fosse anche caratterizzata da valori negativi, stati privi di massa, che risulta essere esattamente il risultato desiderato, ricollegandosi con quanto illustrato alla fine del Capitolo (3). Per consistenza con quanto scritto, si dovrebbe concludere:

$$\widehat{a} = \frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \tag{5.31}$$

in cui però continua ad esserci la presenza del termine divergente, il quale, a seguito dei passaggi fatti, è semplicemente passato dalla caratterizzazione dell'operatore di Virasoro, alla definizione di \widehat{a} . E' però possibile trovare il limite di tale sommatoria, attraverso la Zeta di Riemann, ricavando:

$$\widehat{a} = -\frac{1}{24}(D-2) \tag{5.32}$$

concludendo $D = 26$, al fine di avere il numero intero più piccolo, che permetta di includere lo stato del fotone nello spettro della stringa aperta, avente massa nulla.

5.1.3 Spazio degli stati della stringa aperta

Al fine di avere una stringa caratterizzata da stati numerabili, ammettendo l'identificazione di tutte le particelle osservate sperimentalmente, la quantizzazione della teoria è un passaggio necessario. Per specificare quanto scritto si ricordi che, analizzando classicamente il sistema, si era riconosciuta un'inconsistenza data dall'assenza dello stato del fotone, la quale non è presente nello studio appena concluso, ove, dato il valore negativo della costante a , responsabile dello spostamento nella massa, si è subito anticipata la sua esistenza. Prima della visualizzazione del risultato citato, è necessario costruire l'intero spazio degli stati agendo sul vuoto attraverso gli operatori di creazione e distruzione; dunque, non avendo ancora definito $|\Omega\rangle$, al fine di determinarne la forma, si ricordi che particelle e stringhe quantistiche sono caratterizzate dal medesimo set di operatori \widehat{x}_0^- e \widehat{p}^+ corrispondenti al modo $n = 0$. E' dunque possibile introdurre, in analogia con quanto visto per la particella, il ket rappresentante il livello base:

$$|p^+, \mathbf{p}_T\rangle \tag{5.33}$$

sul quale, essendo la stringa una composizione infinita di oscillatori armonici giacenti in ogni direzione trasversa I , è possibile agire con gli operatori di creazione $\widehat{a}_n^{I\dagger}$ presenti nella teoria, organizzati nel seguente modo:

$$\begin{array}{cccc}
\widehat{a}_1^{2\dagger} & \widehat{a}_1^{3\dagger} & \dots & \widehat{a}_1^{25\dagger} \\
\widehat{a}_2^{2\dagger} & \widehat{a}_2^{3\dagger} & \dots & \widehat{a}_2^{25\dagger} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\widehat{a}_n^{2\dagger} & \widehat{a}_n^{3\dagger} & \dots & \widehat{a}_n^{25\dagger} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array} \tag{5.34}$$

Come si può facilmente vedere dallo schema appena riportato, è bene sottolineare la natura infinita del numero di operatori fruibili per la creazione, in quanto, nonostante vi siano 25 possibili direzioni per il moto trasversale, ognuna di esse è composta da una serie illimitata di oscillatori armonici, quantificati da n ; dunque per la la costruzione di un generico stato $|\lambda\rangle$, è possibile agire come segue:

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (\widehat{a}_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \tag{5.35}$$

ove l'intero non negativo $\lambda_{n,I}$ indica il numero di volte che l'operatore agisce sullo stato, rendendo di facile intuizione la causa dell'infinita schiera di particelle ammesse nella teoria della stringhe. E' interessante notare che gli operatori di creazione, a seguito di quanto scritto nella relazione (5.16), commutano, lasciando che l'ordine con cui essi appaiono sia indifferente ai fini del risultato finale. Per comprendere meglio la fisica dietro quanto appena detto, si riconsideri l'espressione dell'operatore \widehat{M}^2 :

$$\begin{aligned}
\widehat{M}^2 &= \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{p=1}^{\infty} p \widehat{a}_p^{I\dagger} \widehat{a}_p^I \right) \\
&= \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \widehat{N}^\perp \right)
\end{aligned} \tag{5.36}$$

in cui si è introdotto l'operatore numero \widehat{N}^\perp rappresentante la somma su ogni modo degli operatori dello stesso tipo, presentati durante lo studio dell'oscillatore armonico quantistico. L'espressione appena scritta, scegliendo in modo opportuno il valore dell'operatore numero, permette di qualificare gli stati che caratterizzano la stringa, identificandoli in modo univoco, esattamente come avviene nel Modello Standard, in cui le particelle sono

diverse in virtù delle proprie caratteristiche interne; dunque, come intuitivamente sembra consistente fare, si cominci la trattazione con gli stati di ground, a cui corrisponde $\widehat{N}^\perp = 0$. In particolare, agendo sul vuoto con un operatore siffatto, non si andrà a creare nulla nelle direzioni trasverse, permettendo di identificare $|p^+, \mathbf{p}_T\rangle$ con gli stati di singola particella di del campo scalare. Per capirne maggiormente la natura, si applichi l'operatore \widehat{M}^2 :

$$\widehat{M}^2|p^+, \mathbf{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (5.37)$$

attraverso cui è possibile identificare il modulo quadro della massa con l'autovalore $-1/\alpha'$, denominando *tachione* tale stato e decretando la presenza di instabilità all'interno della teoria.

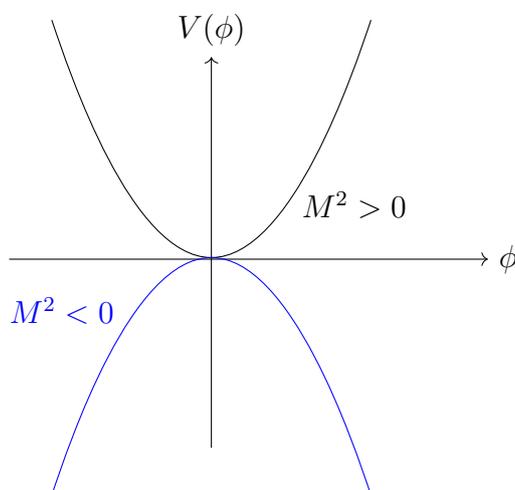


Figura 5.1: Andamento del potenziale V in funzione del campo ϕ , per due diversi valori del quadrato della massa.

Quest'ultima conclusione può essere qualitativamente giustificata considerando la forma del potenziale $V = \frac{1}{2}M^2\phi^2$, per il quale $\phi = 0$ è un punto di equilibrio stabile o instabile a seconda che M^2 sia positivo o negativo, come si vede in Fig. 5.1. Per identificare gli stati eccitati successivi, è sufficiente aumentare di una unità il valore dell'operatore numero, di cui si analizzeranno solo quelli corrispondenti ad $\widehat{N}^\perp = 1$, caratterizzati da una massa nulla e identificati da:

$$\widehat{a}_1^{I\dagger}|p^+, \mathbf{p}_T\rangle. \quad (5.38)$$

Essi sono generati dall'azione dell'operatore di creazione, caratterizzato dall'indice trasverso I , comportando la presenza di 24 stati privi di massa indipendenti; dunque, avendo

²Per i dettagli si veda [Azione per i campi scalari](#).

individuato una base, è possibile scrivere uno stato generico nel seguente modo:

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (5.39)$$

in cui ξ_I è un vettore trasverso arbitrario. Per quanto scritto, è inevitabile notare presenza di un isomorfismo tra gli stati appena scritti e quelli caratteristici del fotone, trovati analizzando il campo di Maxwell (4.22), rendendo la teoria delle stringhe consistente.

5.2 Stringa chiusa

5.2.1 Equazioni del moto della stringa chiusa

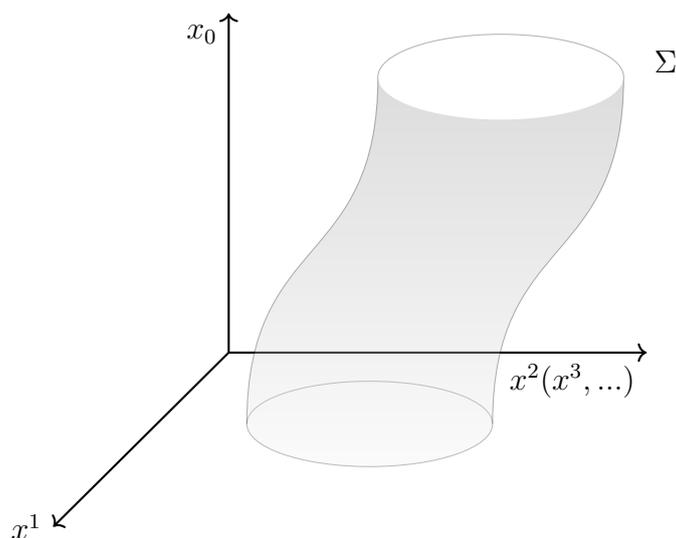


Figura 5.2: Superficie di universo di una stringa chiusa

Come si ha avuto modo di notare, durante lo sviluppo dei concetti di base della teoria, si è posta maggior attenzione allo studio di stringhe aperte, scelta motivata dalla maggior complessità di queste rispetto alle stringhe chiuse, che risultano, con le dovute accortezze, esserne un'estensione naturale. A tal proposito, si ripercorrano brevemente i passaggi già analizzati nei capitoli precedenti, in modo da costruire gli stati caratterizzanti tali oggetti; dunque riprendendo dall'ultimo frangente in cui esse sono state citate, si riscrivano le equazioni (3.37) e (3.38) in modo più coerente:

$$n \cdot X = \alpha' (n \cdot p) \tau \quad n \cdot p = 2\pi n \cdot \Pi^\tau \quad (5.40)$$

deducendo $\sigma \in [0, 2\pi]$, con $\sigma = 0$ e $\sigma = \sigma_1$ rappresentati lo stesso punto. Quest'ultima condizione, considerando graficamente la stringa come un elastico, la cui superficie di universo è illustrata in Fig. 5.2, implica una certa arbitrarietà nella scelta di un punto d'inizio giacente sul contorno, confermando l'ipotesi di stringa come entità avente una propria natura, distante dall'essere una collezione di punti. Una tale caratteristica permette sempre di soddisfare il vincolo (3.42), circa la perpendicolarità tra le stringhe statiche e le linee caratterizzate da σ costante, giacenti lungo la superficie di universo, semplicemente scegliendo in modo opportuno il punto corrispondente a $\sigma = 0$ lungo le prime; dunque, essendoci lo stesso quadro delineato durante lo studio delle stringhe aperte, è possibile concludere che le equazioni del moto soddisfatte siano esattamente quelle scritte in (3.47), con la seguente soluzione generale, scritta fin da subito in termini operatoriali:

$$\widehat{X}^\mu(\tau, \sigma) = \widehat{X}_L^\mu(\tau + \sigma) + \widehat{X}_R^\mu(\tau - \sigma). \quad (5.41)$$

Equivalentemente a quanto visto nelle stringhe aperte, ove la relazione tra i membri progressivo e regressivo era sancita dalle condizioni al contorno sulle estremità, in questo caso, caratterizzato dall'assenza di punti speciali, è necessario prendere in considerazione il requisito di periodicità $\sigma \sim \sigma + 2\pi$ ³:

$$\begin{aligned} \widehat{X}^\mu(\tau, \sigma) &= \widehat{X}^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \\ \widehat{X}_L^\mu(\tau + \sigma) + \widehat{X}_R^\mu(\tau - \sigma) &= \widehat{X}_L^\mu(\tau + \sigma + 2\pi) + \widehat{X}_R^\mu(\tau - \sigma - 2\pi) \end{aligned} \quad (5.42)$$

valido per qualsiasi valore di τ e σ . L'uguaglianza appena scritta, diretta conseguenza della geometria cilindrica dello spazio dei parametri, ha una doppia implicazione, in quanto, oltre a sancire l'equivalenza tra punti della stringa caratterizzati da valori di σ la cui differenza è un multiplo 2π , permette di ricavare la relazione tra i termini L ed R , di cui si parlava sopra. E' possibile vedere meglio quanto appena detto introducendo $u \equiv \tau + \sigma$ e $v \equiv \tau - \sigma$ e riscrivendo l'uguaglianza (5.42) nel seguente modo:

$$\widehat{X}_L^\mu(u + 2\pi) - \widehat{X}_L^\mu(u) = \widehat{X}_R^\mu(v) - \widehat{X}_R^\mu(v - 2\pi) \quad (5.43)$$

attraverso cui è possibile verificare che una mancata periodicità dei termini progressivi, implica la medesima condizione per i termini regressivi. Inoltre, essendo il primo ed il secondo membro indipendenti rispettivamente da v e u , è possibile ottenere le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \widehat{X}_L^\mu(u) &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\alpha}_n^\mu e^{-inu} \\ \widehat{X}_R^\mu(u) &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\alpha}_n^\mu e^{-inv} \end{aligned} \quad (5.44)$$

³In questo caso il simbolo \sim indica l'equivalenza tra i due punti, diversamente da quanto scritto nella notazione iniziale.

le quali, rappresentando due set di oscillatori armonici indipendenti, introducono due diverse tipologie di coefficienti all'interno della trattazione, in cui $\hat{\alpha}_n^\mu$ non ha alcun legame con quanto visto nel caso delle stringhe aperte, nonostante sembrerebbe plausibile fare un'analogia. Si integrino entrambe le espressioni in (5.44):

$$\begin{aligned}\hat{X}_L^\mu(u) &= \frac{1}{2}\hat{x}_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\hat{\alpha}_0^\mu u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\hat{\alpha}_n^\mu}{n}e^{-inu} \\ \hat{X}_R^\mu(v) &= \frac{1}{2}\hat{x}_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\hat{\alpha}_0^\mu v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\hat{\alpha}_n^\mu}{n}e^{-inv}\end{aligned}\quad (5.45)$$

in cui $\hat{x}_0^{L\mu}$ e $\hat{x}_0^{R\mu}$ appaiono come costanti d'integrazione, corrispondenti al modo $n = 0$, a cui saranno associati altrettanti momenti canonici coniugati, circostanza che sembra sancire una prima importante discrepanza tra stringhe aperte, caratterizzate da un unico valore \hat{p}^+ , e chiuse. La questione appena sollevata può cominciare ad essere chiarita inserendo le espressioni appena trovate all'interno del vincolo (5.43), giungendo alla seguente uguaglianza:

$$\hat{\alpha}_0^\mu = \hat{\alpha}_0^\mu \quad (5.46)$$

la quale impone l'esistenza di un unico coefficiente d'espansione per il modo $n = 0$. Inoltre, soffermandosi ancora per un istante sulla forma di \hat{X}_L^μ e \hat{X}_R^μ , è possibile vedere come la presenza dei termini lineari u e v sia la causa della non periodicità di tali espressioni, contrariamente a quanto si nota per le derivate. La forma finale per le coordinate di una stringa chiusa si ottiene semplicemente sostituendo (5.45) e (5.46) nella definizione (5.41), ottenendo:

$$\hat{X}^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\left(\hat{x}_0^{\mu L} + \hat{x}_0^{\mu R}\right) + \sqrt{2\alpha'}\hat{\alpha}_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{-in\tau}}{n}\left(\hat{\alpha}_n^\mu e^{in\sigma} + \hat{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}\right) \quad (5.47)$$

attraverso cui è possibile ricavare la forma del momento totale, avvalendosi dell'espressione ormai conosciuta (2.26), integrata lungo $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}\hat{p}^\mu &= \int_0^{2\pi}\hat{\Pi}^{\tau\mu}(\tau, \sigma)d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}d\sigma\sqrt{2\alpha'}\hat{\alpha}_0^\mu \\ &= \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\hat{\alpha}_0^\mu.\end{aligned}\quad (5.48)$$

L'esito appena ottenuto per \hat{p}^μ , riprendendo e risolvendo la questione circa la sua molteplicità, impone l'esistenza di unico momento canonico associato al modo $n = 0$, motivo

per cui è naturale concludere $\hat{x}_0^\mu \equiv \hat{x}_{0L}^\mu = \hat{x}_{0R}^\mu$, senza perdere troppo di generalità, dal momento che il parametro fondamentale che emerge all'interno della coordinata $\hat{X}^\mu(\tau, \sigma)$ è caratterizzato dalla loro combinazione lineare. Per completare la descrizione si trovi il corrispondente dell'equazione (3.60):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}}^\mu + \hat{X}^{\mu'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \\ \dot{\hat{X}}^\mu - \hat{X}^{\mu'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}\end{aligned}\tag{5.49}$$

ove si può notare che, non comparando termini misti, gli oscillatori caratterizzati da coefficienti diversi rimangono separati; dunque, essendo la forma di tali espressioni uguale a quella già vista nel caso di stringhe aperte, evitando di ripercorrere tutti i passaggi analitici, data la ripetitività dei calcoli, si riportano le relazioni di commutazione d'interesse per l'attuale trattazione:

$$\begin{aligned}[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J] &= m \delta_{m+n,0} \eta^{IJ} \\ [\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J] &= m \delta_{m+n,0} \eta^{IJ}\end{aligned}\tag{5.50}$$

che permettono di individuare l'esistenza di un doppio set di operatori per la descrizione delle stringhe chiuse, escluso il modo corrispondente a $n = 0$, per il quale si è già verificata l'unicità.

5.2.2 Operatori trasversi di Virasoro

Nella sezione (5.1.2) si è visto come gli operatori di Virasoro fossero dipendenti dai coefficienti $\hat{\alpha}_n^I$; dunque, notando una duplice natura di essi nell'espressione della coordinata (5.47), ci si aspetta che tale duplicità sia mantenuta:

$$\hat{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{n-p}^I \quad \hat{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{n-p}^I\tag{5.51}$$

coerente con la linea delineata sino ad ora, in cui la descrizione di stringhe chiuse ed aperte non si differenzia per la natura degli oggetti che appaiono, ma per la molteplicità di questi. In virtù di ciò, per quanto scritto in (5.46), dovrebbe valere la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned}\hat{L}_0^\perp &\stackrel{?}{=} \hat{L}_0^\perp \\ \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I\end{aligned}\tag{5.52}$$

la quale appare però inconsistente con la definizione generale dei due operatori, come si vede dallo sviluppo in seconda riga; dunque, siccome non è possibile eliminare gradi di libertà, al fine di renderne l'espressione identica in senso letterale è necessario soffermarsi sulla natura di tali oggetti. Questi, essendo operatori, sono essenzialmente definiti dall'azione su un generico stato $|\psi\rangle$, il quale, per appartenere allo spettro della stringa chiusa, deve soddisfare il seguente vincolo:

$$\left(\widehat{\underline{L}}_0^\perp - \widehat{L}_0^\perp\right) |\psi\rangle = 0 \quad (5.53)$$

arrivando ad una chiarificazione dell'uguaglianza (5.52). Richiamando gli operatori di creazione e distruzione, è possibile introdurre nella trattazione gli operatori numero:

$$\widehat{\underline{N}}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \widehat{a}_n^{I\dagger} \widehat{a}_n^I \quad \widehat{N}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \widehat{a}_n^{J\dagger} \widehat{a}_n^J \quad (5.54)$$

che si presentano anche in questo caso in duplice forma, la cui differenza, applicata ad un generico stato deve annullarlo, come diretta conseguenza del vincolo (5.53). L'introduzione di tali operatori è stata fatta principalmente per arrivare alla definizione della massa al quadrato:

$$\widehat{M}^2 = \frac{2}{\alpha'} \left(\widehat{N}^\perp + \widehat{\underline{N}}^\perp - 2\right) \quad (5.55)$$

la quale risulta essere un'estensione di quanto scritto in (5.36), in linea con i risultati ottenuti, attraverso cui è possibile indagare sui primi stati che caratterizzano lo spettro della stringa chiusa.

5.2.3 Spazio degli stati di stringa chiusa

Al fine di generare lo spazio degli stati, è necessario identificarne quelli di base, sui quali si andrà ad agire con gli operatori di creazione; dunque, ereditando l'espressione $|p^+, \mathbf{p}_T\rangle$ dalle stringhe aperte, è possibile definire un generico stato $|\lambda, \underline{\lambda}\rangle$ appartenente allo spazio nel seguente modo:

$$|\lambda, \underline{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} \left(\widehat{a}_n^{I\dagger}\right)^{\lambda_{n,I}} \right] \times \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} \left(\widehat{a}_m^{J\dagger}\right)^{\underline{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \mathbf{p}_T\rangle. \quad (5.56)$$

ove la presenza di un prodotto tra produttorie è l'essenza di quanto detto fino ad ora. Per quanto detto sulla presenza di vincoli che caratterizzano il modo $n = 0$, è opportuno specificare che non tutti gli stati trovati appartengono allo spazio; dunque, sviluppando l'espressione (5.52), si può trovare la condizione:

$$\widehat{\underline{N}}^\perp = \widehat{N}^\perp \quad (5.57)$$

attraverso cui si inizia a generare lo spettro di stringa chiusa. I primi stati si trovano impostando $\widehat{N}^\perp = \widehat{N}^\perp = 0$:

$$\widehat{M}^2 |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = -\frac{4}{\alpha'} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (5.58)$$

rappresentanti l'analogia del tachione per gli enti presi in considerazione, la cui unica differenza risiede nel valore della massa. Questi stati, a differenza di quanto visto nel caso di stringhe aperte, rappresentano un'instabilità che non è possibile associare alla natura delle D-brane, in quanto gli oggetti trattati sono privi di estremità; dunque, nonostante questo sia ancora un quesito aperto, una possibile interpretazione risiede nell'instabilità dello spaziotempo stesso [9]. Gli stati successivi, associati a $\widehat{N}^\perp = \widehat{N}^\perp = 1$ e quindi caratterizzati da una massa nulla, hanno la seguente forma generale:

$$\sum_{I,J} R_{IJ} \widehat{a}_1^{I\dagger} \widehat{a}_1^{J\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (5.59)$$

in cui R_{IJ} sono gli elementi di una matrice $(D-2) \times (D-2)$, coerente con la dimensione dello spazio generato dalla sommatoria. Essendo la matrice quadrata, essa può sempre essere scomposta in parte simmetrica e antisimmetrica:

$$\begin{aligned} R_{IJ} &= \underbrace{\frac{1}{2}(R_{IJ} + R_{JI})}_{S_{IJ}} + \underbrace{\frac{1}{2}(R_{IJ} - R_{JI})}_{A_{IJ}} \\ &= \underbrace{S_{IJ}^{Tr=0} + \delta_{IJ} \frac{Tr(S)}{D-2}}_I + A_{IJ} \end{aligned} \quad (5.60)$$

ove in I si sono semplicemente esplicitate le componenti a traccia nulla e diagonale dell'elemento simmetrico; dunque essendo i termini esplicitati indipendenti è possibile concludere che gli stati in (5.59) possono essere divisi in altrettante classi.

Si consideri il più semplice:

$$\frac{Tr(S)}{D-2} \widehat{a}_1^{I\dagger} \widehat{a}_1^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (5.61)$$

ove, non essendoci indici liberi, si sta rappresentando un unico stato corrispondente quello di singola particella di campo scalare privo di massa, chiamato *dilatone*. I restanti stati hanno un'immediata corrispondenza con quanto già presentato nel paragrafo sui campi gravitazionali; dunque, avendo tale forma:

$$\sum_{I,J} A_{IJ} \widehat{a}_1^{I\dagger} \widehat{a}_1^{J\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad \sum_{I,J} S_{IJ}^{Tr=0} \widehat{a}_1^{I\dagger} \widehat{a}_1^{J\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (5.62)$$

è possibile identificarli con gli stati di singola particella rispettivamente dei campi di Kalb-Ramond e gravitazionale, nonostante, in quest'ultimo caso, non ci si sia avvalsi di

molti oggetti indispensabili per lo sviluppo di una teoria in grado di descrivere oggetti che vivono in uno spazio diverso da quello di Minkowski. Essendo la gravità contenuta all'interno della teoria delle stringhe bosoniche, senza che vengano implicati comportamenti anomali, come nel calcolo illustrato nell'introduzione, si mette in luce un altro fondamentale risultato.

Conclusioni

Partendo da una formulazione classica della stringa bosonica, si sono determinati alcuni degli stati quantistici che hanno reso la teoria risonante a livello storico. In particolare, analizzando un oggetto caratterizzato da un'estensione spaziale, il cui moto nello spaziotempo viene descritto dalla superficie di universo Σ , si è introdotta l'azione di Nambu-Goto, fondamentale per capire la fisica del sistema studiato, permettendo di procedere con lo sviluppo di tutta la teoria trattata. Avvalendosi dell'invarianza per riparametrizzazioni di Σ , è stato possibile analizzare la dinamica di stringa classica in gauge cono-luce, semplificandone notevolmente la trattazione analitica, regime in cui è avvenuta anche la quantizzazione della stessa. Durante lo sviluppo di quest'ultima, è stato cruciale notare l'esistenza di un isomorfismo tra gli stati di stringa sia aperta che chiusa e quelli di singola particella dei campi cono-luce scalare, elettromagnetico e gravitazionale. In virtù della corrispondenza 1-1 citata, si è potuta evidenziare esplicitamente la presenza di fotone e gravitone all'interno della teoria bosonica, senza l'uso di strumenti matematici particolarmente avanzati. Con quanto appena illustrato si chiude un capitolo, il quale, nonostante permetta di arrivare a risultati interessanti, presenta già molteplici criticità tra cui le 26 dimensioni spaziotemporali e gli stati aventi masse immaginarie, che non permettono di avere un riscontro con la realtà. Da qui si può proseguire con una teoria che includa anche i fermioni, con cui è possibile pensare ad una descrizione più completa dell'universo, nonostante questi ultimi punti illustrati rimangano problematici.

Appendice A

Complementi algebrici

A.1 Gruppo omogeneo di Lorentz \mathcal{L}

Le trasformazioni di Lorentz, caratterizzate dalla matrice $\Lambda \in O(1, 3)$, agiscono sulle coordinate di diversi sistemi di riferimento inerziali, ponendoli in relazione, attraverso la seguente espressione:

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\text{A.1})$$

preservando la norma dei vettori coinvolti. Sulla base di quanto detto, è possibile introdurre un gruppo, chiamato gruppo omogeneo di Lorentz \mathcal{L} , contenente l'insieme delle trasformazioni sotto le quali $\|\mathbf{x}\|$ è invariante. In virtù di quest'ultima proprietà è possibile sviluppare i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} &= \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} x^{\rho} \Lambda_{\alpha}^{\nu} x^{\alpha} \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\alpha}^{\nu} x^{\rho} x^{\alpha} \\ &= \eta_{\rho\alpha} x^{\rho} x^{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ove x^{ρ} si può muovere liberamente all'interno dell'espressione, essendo uno scalare; dunque è possibile concludere:

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\alpha} &= \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\alpha}^{\nu} \\ &= (\Lambda^T)_{\rho}^{\mu} \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\alpha}^{\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Calcolando il determinante di entrambe le espressioni, ricordando $\det(\Lambda) = \det(\Lambda^T)$, si trova facilmente $\det(\Lambda) = \pm 1$, peculiarità che determina una trasformazione rispettivamente propria ed impropria. Ponendo $\rho = \sigma = 0$, l'espressione (A.3) assume la seguente forma:

$$-(\Lambda_0^0)^2 + \sum_i (\Lambda_0^i)^2 = -1 \quad (\text{A.4})$$

attraverso cui è possibile fare due ulteriori distinzioni:

$$\Lambda_0^0 \leq -1 \quad \Lambda_0^0 \geq 1 \quad (\text{A.5})$$

dividendo \mathcal{L} in quattro componenti, in base alle proprietà di Λ che si sono analizzate, ad ognuna delle quali corrisponde una particolare trasformazione, come riassunto in Tabella (A.1) [20].

\mathcal{L} -Componenti	$\det(\Lambda)$	Λ_0^0	Trasformazione discreta
\mathcal{L}_+^\uparrow	+1	$\geq +1$	Identità \mathbb{I}
\mathcal{L}_-^\uparrow	-1	$\geq +1$	Inversione spaziale $I_s = \eta$
\mathcal{L}_+^\downarrow	+1	≤ -1	Inversione temporale $I_t = -\eta$
\mathcal{L}_-^\downarrow	-1	≤ -1	Inversione spaziale e temporale $I_{ts} = -\mathbb{I}$

Tabella A.1: Proprietà delle quattro componenti del gruppo di Lorentz.

Per gli scopi di questo testo si è scelto di porre maggiormente attenzione al gruppo \mathcal{L}_+^\uparrow , chiamato anche gruppo di Lorentz ristretto, considerando due specifici esempi di trasformazioni:

Rotazioni spaziali

Una generica rotazione attorno ad un asse è rappresentata dalla seguente matrice:

$$R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \\ R_{ij} \end{matrix} \quad (\text{A.6})$$

in cui, essendo $R_{ij} \in SO(3)$, essa dipende da tre gradi di libertà. In questo caso è facile notare che il gruppo delle rotazioni è un sottogruppo di \mathcal{L}_+^\uparrow

Trasformazioni di Lorentz pure Una trasformazione di Lorentz pura è rappresentata dalla seguente matrice:

$$L_1 = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

la quale rappresenta, in questo specifico caso, un boost nel piano (x_0, x_1) . Per capire i gradi di libertà, considerando la trasformazione corrente, è possibile fare la seguente sostituzione

$$\gamma = \cosh(\psi) \quad (\text{A.8})$$

attraverso cui, la matrice (A.7), assume la forma:

$$L_1 = \begin{bmatrix} \cosh(\psi) & -\sinh(\psi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\psi) & \cosh(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

strutturalmente uguale ad una rotazione di angolo immaginario $\phi = i\psi$; dunque è evidente poter concludere che anche la corrente trasformazione dipende da tre gradi di libertà.

A seguito di quanto analizzato, il gruppo di Lorentz \mathcal{L}_+^\uparrow è definito da sei gradi di libertà.

A.2 Gruppo di Poincaré \mathcal{P}

Il gruppo di Poincaré include le trasformazioni spaziotemporali tra due sistemi di riferimento inerziali, caratterizzati da una velocità relativa costante. Considerando una traslazione spaziotemporale a ed una trasformazione del gruppo di Lorentz Λ , è possibile individuare (a, Λ) :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (\text{A.10})$$

trasformazione sotto cui i SdR citati sono invarianti, data l'equivalenza nella descrizione dei fenomeni fisici postulata dalla relatività ristretta. Tali trasformazioni, oltre a formare un gruppo, possono essere scritte in modo univoco come prodotto tra traslazioni pure (a, \mathbb{I}) e trasformazioni del gruppo omogeneo di Lorentz $(0, \Lambda)$:

$$(a, \Lambda) = (a, \mathbb{I})(0, \Lambda) \quad (\text{A.11})$$

entrambe appartenenti a due sottogruppi di \mathcal{P} . In particolare quest'ultimo è caratterizzato da 10 parametri, 6 dei quali appartengono al gruppo omogeneo di Lorentz, mentre i restanti 4 provengono direttamente dalle direzioni spaziotemporali; dunque è immediato individuarne i generatori. Per fare ciò si riscriva la trasformazione in forma matriciale:

$$(a, \Lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 & a^0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 & a^1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

attraverso cui l'equazione (A.10) può essere riscritta per uno spazio a 5 dimensioni:

$$y' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 & a^0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 & a^1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

In questo modo è possibile vedere al meglio i generatori del gruppo stesso:

Traslazioni spaziotemporali

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & P_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & P_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & & P_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Generatori del gruppo di Lorentz

Rotazioni spaziali

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} & J_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & J_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Boost

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & & K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

A.3 Area delle superfici in \mathbb{R}^3

1

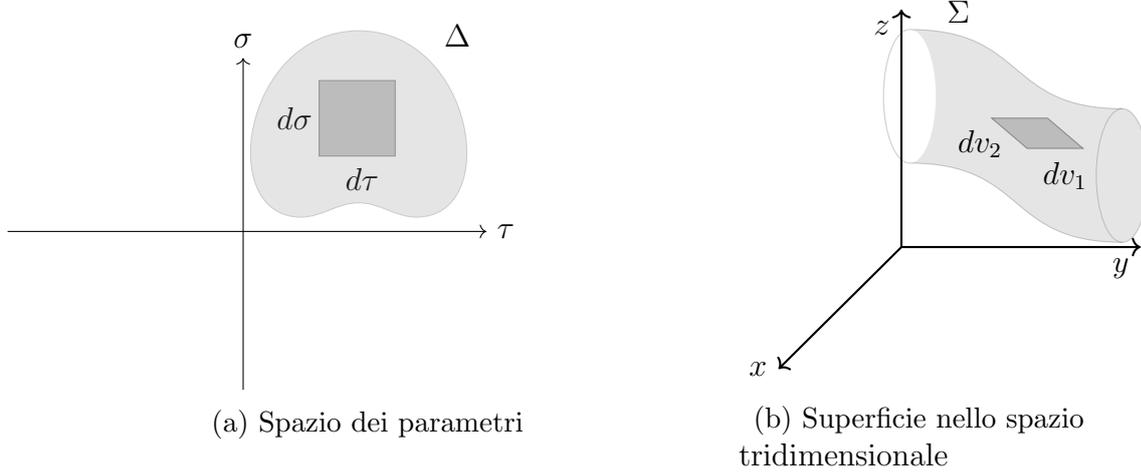


Figura A.1: Proiezione di un quadrato infinitesimo nello spazio dei parametri, in un parallelogramma nello spazio tridimensionale, tramite l'azione della mappa $\mathbf{X}(\tau, \sigma)$.

Sia (Σ, \mathbf{X}) una superficie semplice e regolare, con $\mathbf{X} : \bar{\Delta} \rightarrow \Sigma$, Δ aperto regolare di \mathbb{R}^2 . Definendo:

$$d\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} d\tau \quad d\mathbf{v}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} d\sigma \quad (\text{A.17})$$

è possibile trovare l'area del parallelogramma infinitesimo, appartenente alla superficie Σ , come:

$$dA = |d\mathbf{v}_1| |d\mathbf{v}_2| \sin \theta \quad (\text{A.18})$$

con θ angolo tra i due vettori, il quale può essere eliminato dall'espressione, seguendo i successivi passaggi:

$$dv_1 dv_2 \sin \theta = \sqrt{dv_1^2 dv_2^2 - dv_1^2 dv_2^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{A.19})$$

$$= \sqrt{d\mathbf{v}_1^2 d\mathbf{v}_2^2 - (d\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v}_2)^2} \quad (\text{A.20})$$

$$= \sqrt{\det \begin{bmatrix} d\mathbf{v}_1^2 & d\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v}_2 \\ d\mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{v}_1 & d\mathbf{v}_2^2 \end{bmatrix}}. \quad (\text{A.21})$$

L'area della superficie Σ sarà quindi:

$$A(\Sigma) = \iint_{\Delta} \sqrt{g} \, d\tau d\sigma \quad (\text{A.22})$$

¹Nel seguente paragrafo \mathbf{v} rappresenta un vettore nello spazio tridimensionale, diversamente dalla notazione usata nel testo.

in cui g è il determinante della metrica indotta sulla superficie.

A.4 Richiami sul teorema di Noether

Nella seguente sezione si vogliono ripercorrere i passaggi fondamentali che sanciscono una correlazione tra simmetrie e quantità conservate, senza riportarne alcuna dimostrazione. Si cominci considerando un sistema fisico, caratterizzato da una densità lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, funzione del campo $\phi(x)$ e delle sue derivate $\partial_\mu \phi(x)$, attraverso cui è possibile ricavare l'azione:

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \quad (\text{A.23})$$

definita in uno spazio a quattro dimensioni, che possono essere elevate a D , generalizzando il corrente ragionamento al caso illustrato nel testo. Minimizzando S si definisce univocamente il moto del sistema, ricavando le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{A.24})$$

Avendo definito il conteso nel quale si andrà ad operare, si consideri una trasformazione infinitesima del campo:

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (\text{A.25})$$

la quale può essere classificata sotto il nome di simmetria solo se lascia (A.23) e (A.24) invariate; dunque, nonostante la densità lagrangiana non sia stata citata tra queste ultime², in questo scritto ci si porrà in un caso particolare, richiedendo esplicitamente $\delta\mathcal{L} = 0$. Quest'ultima istanza può essere sviluppata:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}}_I \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) &= 0 \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) &= 0 \\ \partial_\mu \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi}_{j^\mu} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

ove in I si è semplicemente sostituita (A.24), identificando la corrente conservata j^μ . Per comprendere la forma introdotta in (2.24) è necessario supporre una variazione

²Affinchè le equazioni del moto siano invarianti a seguito di una trasformazione, è sufficiente che la densità lagrangiana vari di una derivata totale.

conveniente del campo:

$$\delta\phi = \epsilon^i h_i(\phi) \quad (\text{A.27})$$

ove ϵ^i è un set di costanti infinitesime che caratterizzano la trasformazione stessa; dunque, potendosi in un caso ristretto, si chiede che la corrente conservata sia:

$$\epsilon^i j_i^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi. \quad (\text{A.28})$$

A.5 Relatività generale linearizzata

Il seguente paragrafo è volto ad una breve introduzione di alcuni concetti propri della relatività generale, cruciali per comprendere l'importanza della teoria delle stringhe. Principalmente, affermando che la gravità è geometria [21], si sancisce una corrispondenza tra attrazione gravitazionale, risentita dai vari corpi, e deformazione dello spaziotempo, il quale, dovendo descrivere uno spaziotempo non piatto, viene rappresentato dalla metrica $g_{\mu\nu}$, avente una dipendenza non triviale dalle coordinate spaziotemporali, diversamente da quanto visto nello spazio di Minkowski. La descrizione di una tale curvatura si realizza attraverso l'equazione di campo di Einstein, riscritta in assenza di sorgenti:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (\text{A.29})$$

in cui, mentre $g_{\mu\nu}$ rappresenta la metrica, $R_{\mu\nu}$ e R sono rispettivamente tensore di Ricci e curvatura scalare. Supponendo di avere un campo gravitazionale debole, è possibile rifletterne le caratteristiche in una metrica quasi piatta:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (\text{A.30})$$

ove $h_{\mu\nu}$ rappresenta una piccola perturbazione dello spaziotempo, le cui componenti sono molto più piccole dell'unità, permettendo di linearizzare l'equazione di campo (A.29), supponendo $h_{\alpha\beta}h_{\mu\nu} \approx 0$. A tal proposito, al fine di analizzare tutti i membri che compaiono all'interno dell'espressione citata, è necessario introdurre rapidamente alcuni oggetti caratterizzanti la geometria della varietà riemanniana (M, g) .

Simboli di Christoffel di seconda specie $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$

Considerando spazi tangenti ad una varietà differenziabile M , è possibile introdurre un'unica connessione che, preservando la metrica g , sia caratterizzata da una torsione nulla. Analiticamente quanto appena detto è codificato dai simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.31})$$

i quali possono essere linearizzati, sostituendo l'equazione (A.30), in ogni punto in cui compare la metrica g :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= \frac{1}{2} (\eta^{\sigma\alpha} - h^{\sigma\alpha}) \underbrace{(\partial_{\nu} h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} h_{\mu\nu})}_I \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (\partial_{\nu} h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} h_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_{\nu} h_{\mu}^{\sigma} + \partial_{\mu} h_{\nu}^{\sigma} - \partial^{\sigma} h_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{A.32}$$

ove, eliminando eventuali termini del second'ordine in h , l'espressione I non contiene la metrica di Minkowski in quanto essa è costante, dunque con derivata nulla.

Tensore di Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$

Essendo in uno spazio non piatto, la geometria che ne caratterizza è tanto più distante da quella euclidea, quanto maggiore è la curvatura della varietà, concetto descritto completamente dal tensore di Riemann:

$$\begin{aligned}
R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} &= \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \underbrace{\Gamma_{\nu\sigma}^{\gamma} \Gamma_{\mu\gamma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\delta} \Gamma_{\nu\delta}^{\rho}}_i \\
&= \partial_{\mu} \frac{\eta^{\rho\alpha}}{2} (\partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma}) - \partial_{\nu} \frac{\eta^{\rho\alpha}}{2} (\partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}) \\
&= \frac{\eta^{\rho\alpha}}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} + \cancel{\partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{\alpha\sigma}} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} - \cancel{\partial_{\nu} \partial_{\mu} h_{\alpha\sigma}} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}) \\
&= \frac{\eta^{\rho\alpha}}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma})
\end{aligned} \tag{A.33}$$

in cui il termine i non è stato riscritto per le ipotesi di linearizzazione, mentre le elisioni sono giustificate dalla non rilevanza dell'ordine con cui si svolgono le derivate parziali.

Tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$.

E' possibile scrivere l'espressione del primo termine che compare esplicitamente all'interno dell'equazione di campo.

$$\begin{aligned}
R_{\sigma\nu} &= R_{\sigma\mu\nu}^{\mu} \\
&= \frac{\eta^{\mu\alpha}}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} - \partial_{\mu} \partial^{\mu} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\mu}^{\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\sigma}^{\alpha}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} - \square h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\sigma}^{\alpha})
\end{aligned} \tag{A.34}$$

in cui si è introdotto l'operatore dalembertiano \square .

Curvatura scalare R

In questo caso è possibile procedere subito all'espansione:

$$\begin{aligned}
R &= R^\nu{}_\nu \\
&= \eta^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} \\
&= \frac{\eta^{\sigma\nu}}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma h^\mu{}_\nu - \square h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h + \partial_\nu \partial_\alpha h^\alpha{}_\sigma) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square h^\nu{}_\nu - \partial^\sigma \partial_\sigma h + \partial_\nu \partial_\alpha h^{\alpha\nu}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square h - \square h - \underbrace{\partial_\nu \partial_\alpha h^{\alpha\nu}}_{ii} \right) \\
&= (\partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square h)
\end{aligned} \tag{A.35}$$

ove nel termine *ii* evidenziato, l'indice α è stato sostituito con σ , dato che non ha alcuna rilevanza fisica.

Le equazioni di campo di Einstein, sostituendo le espansioni di $R_{\mu\nu}$ e R , prendono la seguente forma:

$$\begin{aligned}
0 &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})R \\
&= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h^\alpha{}_\nu + \partial_\nu \partial_\alpha h^\alpha{}_\mu - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h) \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\alpha \partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h) \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta})
\end{aligned} \tag{A.36}$$

in cui $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$.

Appendice B

Particella e stringa bosonica

B.1 Invarianza dell'azione per riparametrizzazioni

Si richiami la forma dell'azione relativistica:

$$S_r = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \quad (\text{B.1})$$

in cui τ parametrizza la linea di universo, la quale può essere analogamente descritta avvalendosi del parametro $\tau' = \tau'(\tau)$, connesso al precedente attraverso una funzione monotona. Quanto appena detto implica:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau}. \quad (\text{B.2})$$

attraverso cui è possibile riscrivere l'azione nel seguente modo:

$$S_r = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{d\tau'}{d\tau} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}} = -m \int_{\tau'_i}^{\tau'_f} d\tau' \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}} \quad (\text{B.3})$$

dimostrando quanto voluto.

B.2 Equazione moto particella relativistica

Partendo dalla variazione dell'azione relativistica

$$\delta S_r = -m \int_{\mathcal{P}} \delta(ds) \quad (\text{B.4})$$

è necessario trovare un'espressione di $\delta(ds)$, che possa renderne immediato l'annullamento, con conseguimento dell'equazione del moto della particella.

A tal proposito si consideri l'intervallo invariante:

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (ds)^2 \quad (\text{B.5})$$

in l'uguaglianza $ds^2 = (ds)^2$ è giustificata dal segno positivo dell'invariante stesso¹. Sono stati seguiti i seguenti passaggi:

sviluppo di ds usando la parametrizzazione della linea di universo²

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2 \quad (\text{B.6})$$

variazione di entrambi i membri

$$2(ds)\delta(ds) = -2\eta_{\mu\nu} \delta\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2 \quad (\text{B.7})$$

moltiplicazione per ds^{-1} , con contrazione di $\eta_{\mu\nu}$ sul termine dx^ν

$$\delta(ds) = -\frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu) \frac{dx_\mu}{ds} (d\tau). \quad (\text{B.8})$$

Si è dunque trovata un'espressione esplicita per $\delta(ds)$, la quale può essere sostituita all'interno di (B.4):

$$\begin{aligned} \delta S_r &= -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left[-\frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx_\mu}{ds} \right] d\tau \\ &= m \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left[\frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu p_\mu) - \delta x^\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} \right] d\tau \\ &= m \underbrace{\int_{\tau_i}^{\tau_f} d(\delta x^\mu) p_\mu}_I - m \underbrace{\int_{\tau_i}^{\tau_f} \delta x^\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} d\tau}_{II} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ove, mentre il termine I si annulla, supponendo $\delta x^\mu(\tau_i) = \delta x^\mu(\tau_f) = 0$, il II permette di ricavare:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0. \quad (\text{B.10})$$

¹Si stanno considerando i moti fisici della particella, la cui velocità non eccede 1.

²Si è usato il parametro τ .

B.3 Equazione del moto per i campi scalari

La derivazione dell'azione segue la formulazione della densità lagrangiana, parte principale per comprendere la fisica stessa del sistema considerato. Nonostante lo schema classico induca alla seguente formulazione:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (\text{B.11})$$

in cui energia potenziale e cinetica sono proporzionali rispettivamente al quadrato del campo e alla variazione di questo rispetto al tempo, essa non risulta essere invariante per trasformazioni di Lorentz; dunque è necessario inserire un termine che tenga traccia di come il campo si modifica in funzione dello spazio:

$$V' = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \quad (\text{B.12})$$

contribuente all'espressione dell'energia potenziale. Il termine V' non può essere di tipo cinetico, in quanto, oltre a non generare un'azione invariante per trasformazioni di Lorentz, vi è totale assenza di derivate temporali, caratteristica fondamentale per oggetti aventi tale natura. A seguito di quanto detto, l'azione prende la seguente forma:

$$\mathcal{S}_{scalar} = \int d^D x \left(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \quad (\text{B.13})$$

come volevasi dimostrare.

E' ora facile trovare la densità Hamiltoniana del sistema, attraverso una relazione già studiata in meccanica classica [22]:

$$\mathcal{H} = \Pi\partial_0\phi - \mathcal{L} \quad (\text{B.14})$$

in cui Π è il momento coniugato al campo, arrivando alla seguente espressione per l'Hamiltoniana:

$$H = \int d^D x \left(\frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right). \quad (\text{B.15})$$

B.4 Equazione del moto stringa bosonica

Si riscriva la variazione dell'azione \mathcal{S} in modo esplicito:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\Pi_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\tau} + \Pi_\mu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\sigma} \right] \quad (\text{B.16})$$

in cui:

$$\delta\dot{X}^\mu = \delta\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau} = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\tau} \quad \delta X^{\mu\sigma} = \delta\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma} = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\sigma}. \quad (\text{B.17})$$

L'espressione (B.16) può essere modificata nel seguente modo:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial\tau}(\delta X^\mu \Pi_\mu^\tau)}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\sigma}(\delta X^\mu \Pi_\mu^\sigma)}_{\text{II}} - \underbrace{\delta X^\mu \left(\frac{\partial \Pi_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma}{\partial\sigma} \right)}_{\text{III}} \right] \quad (\text{B.18})$$

in cui è necessario commentare termini I, II e III separatamente, in quanto ognuno di essi ha un'implicazione diversa.

I

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial}{\partial\tau}(\delta X^\mu \Pi_\mu^\tau)$$

L'integrando è nullo, in quanto identifica lo stato della stringa al tempo iniziale e finale, il quale potrebbe anche non avere un valore finito³. Non è dunque interessante, a livello fisico, ragionare complessivamente sul termine, motivo per cui viene eliminato dalla trattazione.

II

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial}{\partial\sigma}(\delta X^\mu \Pi_\mu^\sigma) = \\ & = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\delta X^0(\tau, \sigma_1) \Pi_0^\sigma(\tau, \sigma_1) - \delta X^0(\tau, 0) \Pi_0^\sigma(\tau, \sigma_1) + \right. \\ & \quad \dots \\ & \quad \left. \delta X^{D-1}(\tau, \sigma_1) \Pi_{D-1}^\sigma(\tau, \sigma_1) - \delta X^{D-1}(\tau, 0) \Pi_{D-1}^\sigma(\tau, \sigma_1) \right] \end{aligned}$$

Il secondo integrale, riscritto esplicitamente: descrive il comportamento delle estremità della stringa, identificate da $\sigma = 0, \sigma_1$, il cui moto viene parametrizzato da τ . E' possibile imporne l'annullamento in funzione delle condizioni al contorno.

III

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \Pi_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma}{\partial\sigma} \right) = 0$$

da cui è immediato concludere:

$$\frac{\partial \Pi_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma}{\partial\sigma} = 0 \quad (\text{B.19})$$

equazioni valide sia per stringhe aperte, sia per stringhe chiuse.

³E' possibile studiare il moto della stringa in un periodo non limitato di tempo.

Bibliografia

- [1] Roger Penrose. *The road to reality: A complete guide to the laws of the universe*. Jonathan Cape, 2004.
- [2] Gasperini Maurizio and Maharana Jnan. *String Theory and Fundamental Interactions. Gabriele Veneziano and theoretical physics: historical and contemporary perspectives*, volume 737. Springer, 2007.
- [3] John H. Schwarz. *The early history of string theory and supersymmetry*, 2012.
- [4] A. Sagnotti. Teoria delle Stringhe. *Storia della scienza*, 9, 2003.
- [5] D. Ebert e R.N. Faustov e V.O. Galkin. Mass spectra and Regge trajectories of light mesons in the relativistic quark model. *Physical Review D*, 79(11), 2009.
- [6] Katrin Becke e Melanie Becker e John H.Schwarz. *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [7] David Tong. *Lectures on string theory*, 2012.
- [8] Nima Arkani-Hamed e Savas Dimopoulos e Gia Dvali e Nemanja Kaloper. Infinitely large new dimensions. *Physical Review Letters*, 84(4):586–589, 2000.
- [9] Barton Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge University Press, 2009.
- [10] Michele Cicoli e Joseph P. Conlon e Anshuman Maharana e Susha Parameswaran e Fernando Quevedo e Ivonne Zavala. String cosmology: from the early universe to today. pages 4–5, 2023.
- [11] Costas Christodoulides. *The Special Theory of Relativity*. Springer, 2016.
- [12] G. Fulop e D. M. Gitman e I. V. Tyutin. Reparametrization invariance as gauge symmetry, 1998.
- [13] Jakob Schwichtenberg. *Demystifying gauge symmetry*, 2019.

- [14] A. Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton University Press, 2016.
- [15] V.I Arnold. *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti Univ. Press, 2010.
- [16] Pierre Ramond. *Field Theory: A Modern Primer*. Perseus Books, 1990.
- [17] Tom Lancaster e Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014.
- [18] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Prentice Hall, 2004.
- [19] David Tong. *Quantum field theory*, 2006.
- [20] Giovanni Costa e Gianluigi Fogli. *Symmetries and Group Theory in Particle Physics: An Introduction to Space-Time and Internal Symmetries*, volume 823. Springer, 2012.
- [21] David Tong. *General relativity*, 2019.
- [22] Lev D. Landau e Evgenij M. Lifšits. *MECCANICA*. Editori Riuniti, 1997.