

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**Formulazione ad integrali di percorso della  
meccanica quantistica e studio dell'effetto  
tunnel nell'approssimazione semiclassica**

**Relatore:**  
**Prof. Francisco Gil Pedro**

**Presentata da:**  
**Clara Sacchet**

Anno Accademico 2022/2023

*Ad un pianeta che sta morendo...*

## Sommario

In questo elaborato viene presentato il metodo degli integrali di percorso, sviluppato da Feynman come formulazione alternativa della meccanica quantistica. Utilizzando questo formalismo si studiano dei casi specifici di sistemi il cui comportamento non può essere spiegato limitandosi alla teoria perturbativa canonica. In particolare, ci si sofferma sulla probabilità di un sistema il cui potenziale presenti vari minimi locali di decadere a stati di energia minore. Questo fenomeno è spiegabile tramite il concetto di effetto tunnel in meccanica quantistica e viene studiato in due casi specifici trovando e analizzando così le soluzioni cosiddette di *instantone* e di *bounce*. Ci si sposta infine dal caso unidimensionale a quello di un sistema con  $N$  gradi di libertà, fondamentale per il passaggio dalla meccanica quantistica alla teoria quantistica dei campi.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Formulazione ad integrali di percorso della meccanica quantistica</b>	<b>4</b>
2.1	La meccanica quantistica come descrizione di probabilità . . . . .	4
2.1.1	L'esperimento della doppia fenditura . . . . .	4
2.1.2	Il principio di indeterminazione . . . . .	6
2.2	Formalismo degli integrali di percorso . . . . .	6
2.3	Formulazione della meccanica quantistica . . . . .	7
2.4	Integrali di percorso: la costruzione di Feynman . . . . .	9
2.4.1	Esempio . . . . .	10
2.5	Composizione delle ampiezze . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Il fenomeno del tunnelling in meccanica quantistica</b>	<b>14</b>
3.1	Tunnelling in una dimensione . . . . .	14
3.2	Il doppio pozzo di potenziale . . . . .	15
3.2.1	Percorsi stazionari . . . . .	20
3.2.2	Esempio . . . . .	22
3.3	Determinanti di funzionali . . . . .	25
3.4	Splitting energetico dei due livelli di energia minore . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Decadimento di uno stato metastabile</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Tunnelling con molti gradi di libertà</b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>44</b>

# 1

## Introduzione

*Our planet is a lonely speck in the great enveloping cosmic dark. In our obscurity, in all this vastness, there is no hint that help will come from elsewhere to save us from ourselves. It has been said that astronomy is a humbling and character-building experience. [...] to me, it underscores our responsibility to deal more kindly with one another, and to preserve and cherish the pale blue dot, the only home we've ever known.*

– Carl Sagan

Mentre i metodi della meccanica quantistica nella formulazione operatoriale hanno varie applicazioni, non sempre risultano sufficienti allo studio efficace di un sistema. Ad esempio, anche se la teoria perturbativa è molto efficace nella risoluzione di problemi, soprattutto a livello locale, non sempre costituisce l'approccio migliore, dato che rischia di non prendere in considerazione certi aspetti fondamentali del sistema che si sta studiando, come la sua instabilità. Queste considerazioni derivano dal fatto che la meccanica quantistica rende possibili alcuni decadimenti che non sarebbero permessi nella teoria classica, grazie all'effetto tunnel (o *tunnelling*). La meccanica quantistica nella formulazione canonica prevede una descrizione probabilistica tramite onde di probabilità inscritte nella funzione d'onda

$$\Psi(\vec{r}, t). \tag{1.1}$$

In questo modo un sistema evolve seguendo l'equazione di Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) = -\frac{i}{\hbar}H\Psi(\vec{r}, t). \tag{1.2}$$

Questa può essere interpretata in termini probabilistici: il modulo quadro della funzione d'onda rappresenta la distribuzione di probabilità della particella di trovarsi nella posizione  $\vec{r}$  al tempo  $t$  grazie a

$$P = \int d^3\vec{r} |\Psi(\vec{r}, t)|^2. \tag{1.3}$$

La formulazione ad integrali di percorso invece prevede una descrizione basata sull'idea che una particella emessa da un punto  $a$  e rivelata in  $b$ , invece di seguire una traiettoria classicamente definita, segua tutti i possibili percorsi che collegano i due punti. Questo significa che sarà necessario integrare su tutti questi percorsi tra i due estremi, a ognuno dei quali si associa un'ampiezza in modo tale da ottenere la  $\Psi(\vec{r}_b, t_b)$  come integrale di sovrapposizione. Questo tipo di approccio permette di introdurre il concetto di quantizzazione tramite l'idea di alternative (o percorsi alternativi). L'evoluzione del sistema è quindi data non classicamente dal principio di minima azione, bensì dalla somma di tutte le possibili "alternative".

## 2

# Formulazione ad integrali di percorso della meccanica quantistica

*Nobody ever figures out what life is all about, and it doesn't matter. Explore the world. Nearly everything is really interesting if you go into it deeply enough.*

– Richard Feynman

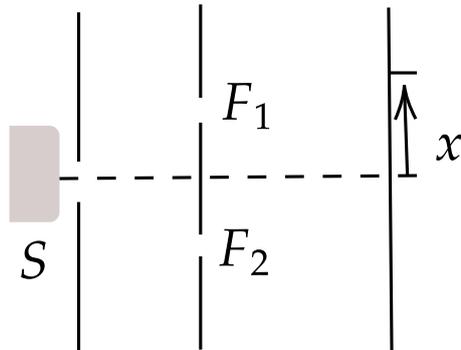
## 2.1 La meccanica quantistica come descrizione di probabilità

Ciò che separa definitivamente la meccanica quantistica dalla descrizione classica della natura è il carattere probabilistico della teoria: nel limite in cui  $\hbar$  è grande i comportamenti dei sistemi fisici non sono determinati, bensì descritti secondo distribuzioni di probabilità tramite la funzione d'onda associata  $\Psi$ . Inoltre, tali probabilità non seguono le leggi classiche di composizione: la probabilità di un evento resta infatti classicamente definita come una frequenza attesa del suo verificarsi su un grande numero di iterazioni, ma cambia il modo in cui tale probabilità viene calcolata.

### 2.1.1 L'esperimento della doppia fenditura

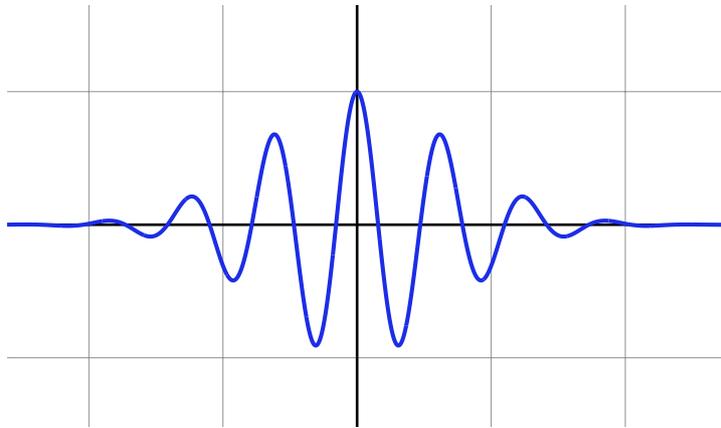
L'esperimento esemplificativo di questo concetto è quello della doppia fenditura, in cui un fascio di particelle viene fatto passare attraverso due fenditure e poi le particelle sono rivelate su uno schermo in una posizione  $x$  (si veda la figura 2.1).

Ciò che viene misurato nell'esperimento è il numero medio di particelle al secondo che giungono al punto  $x$ , ovvero in buona approssimazione (su un grande numero di



**Fig. 2.1:** *Set up sperimentale per l'esperimento della doppia fenditura: la sorgente  $S$  è a bassa intensità in modo tale da avere un flusso di particelle che arrivano al contatore che sia discontinuo, ovvero l'arrivo di ogni particella è rivelato singolarmente in un punto  $x$  dello schermo.*

iterazioni) la probabilità  $P(x)$  che la particella emessa in  $S$  arrivi nel punto  $x$  dello schermo.



**Fig. 2.2:** *Pattern di interferenza risultante dall'esperimento della doppia fenditura quando entrambe le fenditure sono aperte: ne risulta un comportamento ondulatorio da parte delle particelle.*

In figura 2.2 si può vedere tale funzione graficata. Le ipotesi errate della fisica classica in tal senso sono supporre che la particella, dopo essere stata emessa, debba necessariamente passare da una delle due fenditure, seguendo il concetto classico di traiettoria, o, in termini di leggi di composizione delle probabilità, aspettarsi che la curva finale sia riproducibile a partire dalle curve dei due casi in cui solo una delle due fenditure è aperta, ovvero  $P = P_1 + P_2$ , dove  $P_1$ ,  $P_2$  sono le probabilità della particella di arrivare

in  $x$  dopo essere passata rispettivamente dalla fenditura 1 o 2, cioè due curve piccate in corrispondenza della fenditura. Sperimentalmente è però facile dimostrare che tale relazione non sussiste. In effetti si ha invece  $P = P_1 + P_2 + P_{int}$ , dove la struttura di  $P_{int}$  corrisponde all'interferenza tra due onde che passano dalle due fenditure (e infatti la  $P(x)$  riprodotta è identica a quella che si trova nel caso di interferenza fra due onde). Matematicamente si può affermare che esistono due numeri complessi  $\Phi_1, \Phi_2$  tali che

$$P = |\Phi|^2$$

con  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  e  $P_1 = |\Phi_1|^2, P_2 = |\Phi_2|^2$ . Perciò la funzione che descrive il flusso delle particelle sullo schermo è da considerarsi una densità di probabilità in accordo con l'interpretazione di Copenhagen della meccanica quantistica. A differenza quindi del caso della fisica classica, a sommarsi non sono le probabilità, bensì le ampiezze. Si osserva perciò un dualismo tra caratteristiche ondulatorie e particellari: ad esempio, sempre nell'esperimento della doppia fenditura è possibile determinare il percorso seguito dalla particella, a costo però di perdere l'interferenza quantistica, ovvero chiudendo una delle due fenditure o mettendo un rivelatore su di essa. Poiché  $P \neq P_1 + P_2$ , dobbiamo dunque abbandonare l'ipotesi classica secondo cui la particella passa necessariamente attraverso  $F_1$  o  $F_2$ .

Questo apparente paradosso del comportamento duale è spiegato dal Principio di indeterminazione di Heisenberg.

### 2.1.2 Il principio di indeterminazione

Una formulazione generale del principio di indeterminazione è la seguente: *ogni determinazione dell'alternativa seguita da un processo che sia in grado di seguire più di una alternativa, distrugge l'interferenza tra le alternative.*

In effetti tale principio è in accordo con la conclusione trovata secondo cui la probabilità di un evento non si trova sommando le singole probabilità per ogni alternativa. È inoltre necessario distinguere tra alternative escludentesi (come le due fenditure nel caso in cui si osservi il passaggio della particella o nel caso in cui una delle due fenditure sia chiusa) e alternative interferenti. In quest'ultimo caso, invece della somma delle probabilità si avrà quindi la somma delle ampiezze.

## 2.2 Formalismo degli integrali di percorso

L'idea alla base della formulazione ad integrali di percorso della meccanica quantistica consiste nel calcolare la probabilità associata ad un evento sommando le ampiezze associate a tutte le possibili alternative interferenti. Prendiamo ad esempio il caso di una particella che si muove da un punto  $a$  a un punto  $b$  dello spazio: ad ogni possibile traiettoria (o più in generale ad ogni possibile percorso nello spazio e nel tempo) che

collegli i due punti possiamo associare un'ampiezza; l'ampiezza risultante sarà quindi data dalla somma delle ampiezze dei singoli percorsi. Questo esempio può essere considerato una generalizzazione dell'esperimento della doppia fenditura. Possiamo infatti immaginare di aggiungere al *set up* in figura 2.1 ulteriori schermi e di creare su ognuno di essi un numero sempre maggiore di fenditure. Aumentando sempre di più il numero di fenditure, si raggiunge il caso limite di una distribuzione continua di possibili posizioni per la particella lungo uno schermo fissato; in questo modo la posizione della particella sullo schermo  $a$ , di posizione  $y_a$ , sarà definita da un numero  $x_a \in \mathbb{R}$ . Aumentando poi il numero di schermi, anche la posizione dello schermo diventa una variabile continua  $y$  e in questo modo si ha che, per il principio di sovrapposizione, l'ampiezza del processo sarà data dall'integrale doppio - su tutti i punti dello schermo e su tutti i possibili schermi - delle ampiezze dei percorsi, dove un percorso è così definito dalla funzione  $x(y)$ . Oltre al percorso nello spazio, tuttavia, se ne può definire la percorrenza nel tempo, ovvero un percorso è dato dalle due funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

## 2.3 Formulazione della meccanica quantistica

Ci domandiamo ora quale sia la forma dell'ampiezza da associare ad ogni possibile traiettoria. Consideriamo per semplicità il caso unidimensionale, ovvero il moto di una particella che vada da un punto  $x_i$  al tempo  $t_i$  ad un punto  $x_f$  al tempo  $t_f$ . La traiettoria sarà descritta da una funzione  $x(t)$  tale che  $x(t_i) = x_i$  e  $x(t_f) = x_f$ . L'ampiezza di probabilità del processo (o *kernel*) è indicata come  $K(x_f, t_f; x_i, t_i) \equiv K(i \rightarrow f)$  ed è data dalla somma dei contributi per ogni possibile traiettoria  $\gamma$  tra i punti iniziale e finale, cioè

$$K(i \rightarrow f) = \sum_{\{\gamma\}} \Phi(\{\gamma\}). \quad (2.1)$$

Indichiamo invece con  $\bar{x}(t)$  la traiettoria classica, che è unica; ci aspettiamo di ritrovare tale risultato come limite classico della teoria, ovvero quando  $\hbar \rightarrow 0$ . In meccanica classica la traiettoria è definita dal *principio di minima azione*, secondo cui  $\bar{x}(t)$  costituisce un punto estremale del funzionale di azione

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(\dot{x}, x, t), \quad (2.2)$$

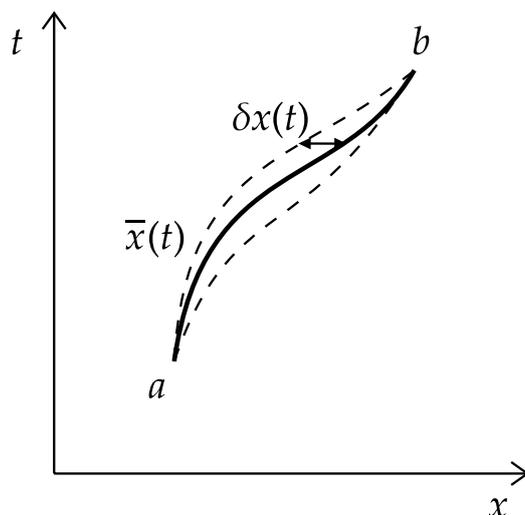
dove  $\mathcal{L}$  è la lagrangiana del sistema. La condizione  $\delta S = 0$  porta quindi a ritrovare la curva della traiettoria classica come quella per la quale valgono le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

In meccanica quantistica, invece, bisogna determinare il contributo di ciascun percorso, ma è naturale ipotizzare  $\Phi[\gamma] = f\left(\frac{S[\gamma]}{\hbar}\right)$ , poiché vogliamo ritrovare il risultato classico per  $\hbar \rightarrow 0$ . In particolare, la scelta che si effettua è

$$\Phi[\gamma] = ce^{i\frac{S[\gamma]}{\hbar}}, \quad (2.4)$$

dove  $c$  è una costante di normalizzazione. Questa forma permette in primo luogo di ritrovare euristicamente il limite classico: in una situazione macroscopica, infatti, poiché  $S \gg \hbar$ , la fase del contributo  $S/\hbar$  è un angolo molto piccolo. Per una variazione del percorso  $\delta x$  (o  $\delta\gamma$ ) che sia piccola nella scala classica, si ha quindi una piccola variazione dell'azione  $\delta S$ , che però risulta grande se misurata in unità di  $\hbar$ . Piccole variazioni nel percorso risultano dunque in grandi variazioni nella fase, ossia grandi oscillazioni del termine che dà il contributo all'ampiezza. Il contributo totale sarà perciò nullo (si veda la figura 2.3).



**Fig. 2.3:** La traiettoria classica e piccole variazioni da essa per un percorso con punti estremali  $a$  e  $b$  in un caso unidimensionale.

Solo in prossimità della traiettoria classica  $\bar{x}(t)$ , dove le variazioni  $\delta S \approx 0$ , cammini vicini interferiscono costruttivamente poiché hanno fasi simili. In questo modo si ritrova dunque il limite classico.

In questo modo la meccanica quantistica individua anche un'unità naturale per misurare l'azione  $S$ . Nel caso classico, visto che il solo contributo che non si annulla è quello dato dalla traiettoria classica, ci si aspetta di trovare

$$K_{cl}(i \rightarrow f) \sim e^{i\frac{S_{cl}}{\hbar}}. \quad (2.5)$$

In meccanica quantistica, invece, è necessario sommare i contributi derivanti da tutti i cammini.

## 2.4 Integrali di percorso: la costruzione di Feynman

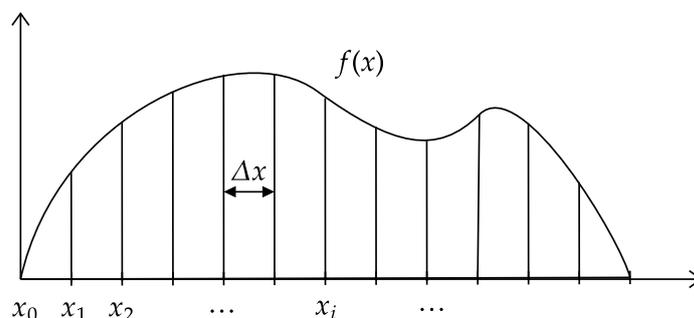
Per effettuare la somma (ovvero integrare) su tutti i percorsi possibili è necessario capire quale misura associare allo spazio dei cammini; a tale scopo può risultare utile l'analogia con l'integrale di Riemann.

L'idea dietro questo integrale è, in due dimensioni, di rappresentare l'area sottesa da una curva come somma delle ordinate dei vari punti che la caratterizzano. Iniziando dal caso discreto si ha

$$A = \Delta x \sum_i f(x_i), \quad (2.6)$$

dove  $\Delta x$  è la distanza tra i punti  $x_i$  (figura 2.4). Aumentando il numero di punti a infinito (ovvero riducendo la spaziatura tra essi a zero), si ottiene il limite

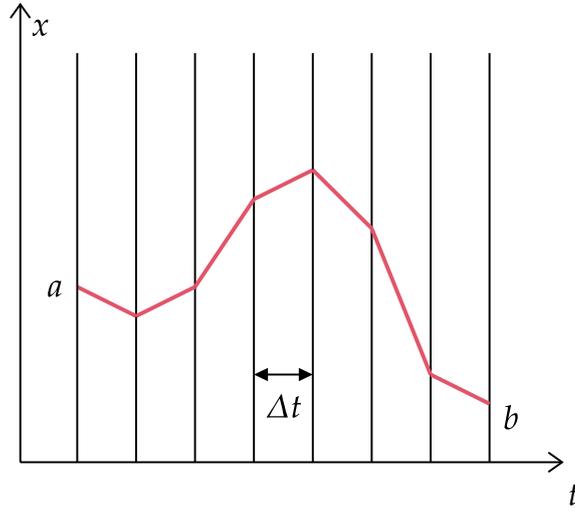
$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \Delta x \sum_i f(x_i) \right) \equiv \int dx f(x) \quad (2.7)$$



**Fig. 2.4:** *Costruzione dell'integrale di Riemann: l'area sottesa dalla funzione  $f(x)$  è approssimata dalla somma delle ordinate dei vari rettangoli per la loro base  $\Delta x$ ; nel limite  $\Delta x \rightarrow dx \rightarrow 0$ , ogni punto viene considerato e la somma diventa un integrale.*

Per trovare la somma su tutti i percorsi si procede analogamente, prima di tutto scegliendo un sottoinsieme di tutti i percorsi discretizzando la variabile temporale in valori  $t_i$  di spaziatura  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  tra gli estremi  $t_a$  e  $t_b$ .

Per ogni  $t_i$  si può successivamente fissare un  $x_i$  e quindi un percorso sarà dato dal collegamento degli  $x_i$  selezionati (figura 2.5).



**Fig. 2.5:** Discretizzando la variabile  $t$  in intervalli di  $\Delta t$  si definisce un percorso (o cammino) come l'insieme dei segmenti che uniscono i punti  $x_i$  presi ai tempi  $t_i$ .

La somma sarà data dall'integrale su tutti i valori di  $x_i$  per  $i = 1, \dots, N - 1$ , dove  $N$  è il numero di punti  $t_i$ :  $N\Delta t = t_b - t_a$ , con estremi  $t_0 = t_a$ ,  $t_N = t_b$ . Quindi, evitando di integrare sugli estremi che sono fissati a  $x_0 = x_a$  e  $x_N = x_b$ , si ottiene:

$$K(b \rightarrow a) \sim \int \int \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \phi[x(t)] \quad (2.8)$$

che corrisponde formalmente all'equazione (2.7). Tuttavia, prima di procedere al limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , è necessario ottenere il fattore di normalizzazione, altrimenti il limite non esiste. Questo problema non si può però risolvere in generale, ma solo in casi specifici.

### 2.4.1 Esempio

Nel caso di una particella di massa  $m$  soggetta ad un potenziale che dipende dal tempo e dalla posizione (unidimensionale), la lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, t)$$

e il fattore di normalizzazione è dato da  $A^{-N}$ , dove  $A = \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m}\right)^{1/2}$  (per la derivazione si rimanda alla sezione 4-1 di [1]). In questo modo il limite esiste e otteniamo:

$$K(a \rightarrow b) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int \int \dots \int \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \dots \frac{dx_{N-1}}{A} e^{\frac{i}{\hbar} S[a,b]}, \quad (2.9)$$

dove

$$S[a, b] = \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}(\dot{x}, x, t) \quad (2.10)$$

è l'integrale sulla traiettoria che passa dai punti  $x_i$  con righe dritte tra di essi (figura 2.5).

È possibile però definire il percorso in un modo più elegante usando sezioni dell'orbita classica invece di segmenti tra gli  $x_i$ , cioè in modo tale che  $S$  sia il minimo della lagrangiana su tutti i percorsi che passano tra i punti  $(x_i, t_i)$ , senza dover ricorrere a linee arbitrarie.

Così come l'integrale di Riemann non è sempre adeguato ed a volte risulta necessario ricorrere ad altre definizioni come quella dell'integrale di Lebesgue, il metodo di integrazione sopra definito non sempre risulta ottimale da un punto di vista matematico. È quindi a volte necessario ridefinire il metodo di integrazione, senza che però il concetto alla base cambi. Perciò è possibile darle una definizione che non dipenda dalla misura che scegliamo di associare ai cammini. In tal senso si può scrivere

$$K(a \rightarrow b) = \int_a^b \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[a, b]}, \quad (2.11)$$

che chiamiamo integrale di percorso (o di cammino). Il differenziale  $\mathcal{D}x$  rappresenta la misura del percorso a prescindere da come questa venga definita o da quale metodo di integrazione si utilizzi.

## 2.5 Composizione delle ampiezze

Per eventi che si susseguono temporalmente (ai tempi  $t_a < t_c < t_b$ ), l'azione lungo ogni percorso tra  $a$  e  $b$  si può scrivere come

$$S[a, b] = S[a, c] + S[c, b] \quad (2.12)$$

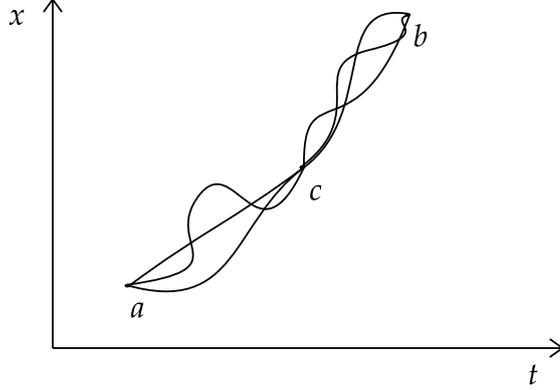
e ciò segue dalla definizione stessa di azione. Quindi per l'ampiezza si ha

$$K(a \rightarrow b) = \int_a^b \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[a, c] + \frac{i}{\hbar} S[c, b]}. \quad (2.13)$$

Ogni percorso può essere spezzato in due percorsi, da  $x_a$  a  $x_c = x(t_c)$  e da  $x_c$  a  $x_b$  (figura 2.6).

L'ampiezza sarà quindi data prima dall'integrale tra tutti i percorsi da  $a$  a  $c$  e poi su tutti i percorsi da  $c$  a  $b$ , dove è necessario integrare anche su tutti i possibili valori di  $x_c$ :

$$K(a \rightarrow b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_c \int_c^b \mathcal{D}x(t) K(a \rightarrow c) e^{\frac{i}{\hbar} S[c, b]} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_c K(c \rightarrow b) K(a \rightarrow c). \quad (2.14)$$



**Fig. 2.6:** Il percorso tra due punti  $a$  e  $b$  può risultare dalla composizione con un punto intermedio  $c$ . Nel momento in cui si considera l'integrando i percorsi, però, bisogna tenere conto del fatto che, a differenza degli estremi, il punto  $c$  non è fisso.

Ne concludiamo che: *Le ampiezze per eventi che avvengono in successione temporale si moltiplicano.*

Il ragionamento può essere esteso a vari eventi (figura 2.7).

Aggiungendo infatti una divisione in tutti i cammini in  $t_d$ , si ha

$$K(a \rightarrow b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_c dx_d K(d \rightarrow b) K(c \rightarrow d) K(a \rightarrow c). \quad (2.15)$$

Reiterando il medesimo processo si ottiene un asse temporale diviso in  $N$  intervalli, con risultato:

$$K(a \rightarrow b) = \int_{x_{N-1}} \cdots \int_{x_2} \int_{x_1} dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} K(x_{N-1} \rightarrow b) \dots K(x_1 \rightarrow x_2) K(a \rightarrow x_1). \quad (2.16)$$

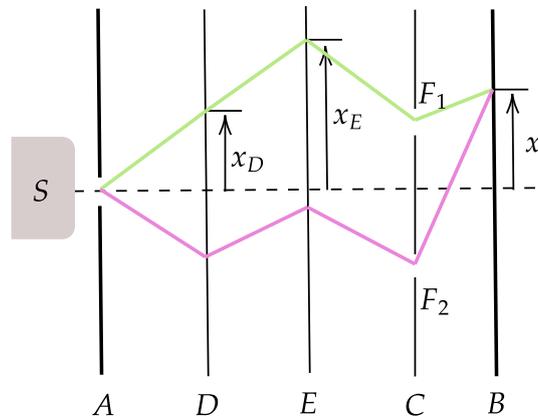
Possiamo quindi definire il *kernel* di una particella che si muove tra due punti separati da un intervallo temporale infinitesimo  $\epsilon$  in modo diverso, corretto al primo ordine in  $\epsilon$ :

$$K(i \rightarrow i+1) \sim \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon \mathcal{L} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}, \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) \right\} \quad (2.17)$$

(si veda la figura 2.5, dove  $\Delta t$  corrisponde a  $\epsilon$ ).

Perciò, poiché le ampiezze di eventi successivi si moltiplicano, si ha che l'ampiezza di un percorso completo è:

$$\phi[x(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=0}^{N-1} K(i \rightarrow i+1). \quad (2.18)$$



**Fig. 2.7:** *I percorsi possono essere ottenuti in analogia con il caso dell'esperimento della doppia fenditura: si tratta qui di aggiungere  $N$  ipotetici schermi tra i due estremi fissati e di integrare su tutti i valori  $x_c, x_d \dots$  che la variabile può assumere su ogni schermo.*

Poi sommando le ampiezze per cammini alternativi si ottiene la definizione per  $K(a \rightarrow b)$ , che è in realtà la stessa dell'equazione (2.9).

# 3

## Il fenomeno del tunnelling in meccanica quantistica

*Plus claire la lumière, plus sombre l'obscurité... Il est impossible d'apprécier correctement la lumière sans connaître les ténèbres.*

– Jean-Paul Sartre

Il termine *tunnelling* si riferisce ad un fenomeno che si verifica in meccanica quantistica secondo cui una particella può attraversare una barriera di potenziale pur non avendo l'energia che classicamente sarebbe necessaria per tale processo. Si tratta tuttavia di un evento spiegabile con la teoria quantistica grazie al concetto di dualismo onda-particella.

### 3.1 Tunnelling in una dimensione

Il caso più semplice è quello di un pacchetto di onde (cui corrisponde un fascio di particelle) che si muove in una dimensione verso una barriera di potenziale  $V(x)$  il cui massimo sia più alto dell'energia del fascio (figura 3.1). In meccanica quantistica la probabilità di trasmissione attraverso la barriera risulta, a differenza del caso classico, non nulla.

In questo caso, in base all'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, si ha:

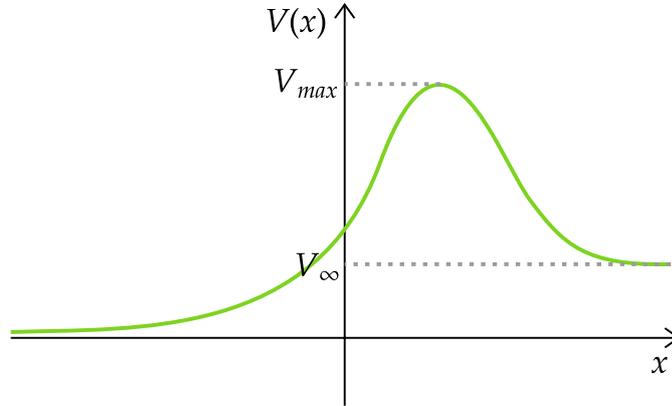
$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \Phi(x) = E\Phi(x), \quad (3.1)$$

che si può riscrivere come

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \Phi(x). \quad (3.2)$$

Per una barriera di potenziale sufficientemente alta e larga si può calcolare il coefficiente di trasmissione utilizzando l'approssimazione semiclassica WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin):

$$T = A_t e^{-B}, \quad (3.3)$$



**Fig. 3.1:** Esempio di barriera di potenziale; una particella che arrivi da  $-\infty$  con energia  $E < V_{max}$  non può classicamente superare la barriera, ma quantisticamente è possibile per l'effetto tunnel, ovvero la probabilità che la particella attraversi la barriera è non nulla.

con

$$B = \frac{2}{\hbar} \int_a^b dx |p(x)| = \frac{2}{\hbar} \int_a^b dx \sqrt{2m[V(x) - E]}, \quad (3.4)$$

in cui  $E$  è l'energia del fascio e  $a, b$  sono gli estremi classici  $V(a) = V(b) = E$ , ovvero i punti iniziale e finale del *tunnel*.

Perciò l'ampiezza per la trasmissione risolve:

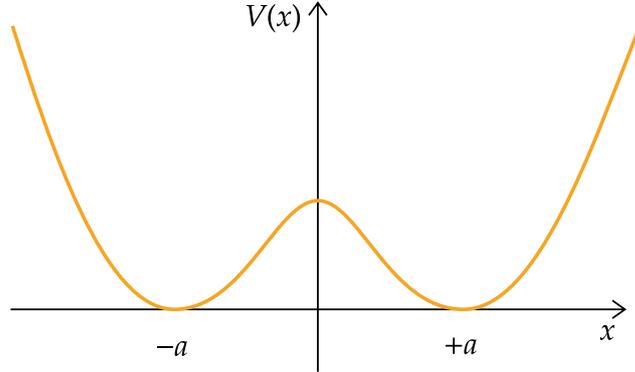
$$|T(E)| = e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b dx \sqrt{2(V(x) - E)}} (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \quad (3.5)$$

## 3.2 Il doppio pozzo di potenziale

Si consideri il caso di un potenziale simmetrico con due minimi locali degeneri (figura 3.2), che può avere una forma analitica del tipo

$$V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2. \quad (3.6)$$

Classicamente questo potenziale presenta due livelli fondamentali (*ground state*) in  $x = \pm a$  uguali tra loro poiché  $V(a) = V(-a) = V_0$ . Questo esempio potrebbe essere risolto perturbativamente con i metodi soliti della meccanica quantistica ignorando uno dei due minimi (e.g. ci si può focalizzare solo su  $x = -a$ ) e identificando localmente il potenziale come quello di un oscillatore armonico. Simmetricamente, si può fare lo stesso calcolo per  $x = a$  e si troverebbero gli stessi valori per i livelli energetici; secondo la teoria perturbativa, avremmo quindi un insieme di autovalori energetici doppiamente



**Fig. 3.2:** Esempio di doppio pozzo di potenziale simmetrico con due minimi degeneri in  $x = \pm a$ .

degeneri. Nella teoria quantistica, invece, si trova un unico stato fondamentale privo di degenerazioni, questo a causa del *quantum tunnelling*, la cui ampiezza è sempre data dall'equazione (3.5).

Ci si domanda quindi quali siano i due autovalori energetici minori  $E_0, E_1$  e lo splitting tra essi  $E_1 - E_0$ , sapendo che nella teoria perturbativa questo è zero. L'obiettivo che ci poniamo è di dimostrare che il contributo allo splitting energetico può essere calcolato in via semiclassica tramite i cosiddetti *istantoni*: traiettorie semiclassiche in un tempo immaginario.

Ipotizziamo che il potenziale  $V(x)$  presenti i due minimi degeneri nei punti  $x = \pm a$  (ma con  $V_0 = V(\pm a) \neq 0$ ) e che la derivata seconda sia  $V''(\pm a) = m\omega^2$  dove  $m$  è la massa della particella e  $\omega$  una costante reale. Per fare un esempio esplicito, utile al fine di calcoli analitici, consideriamo

$$V(x) = \frac{m\omega}{8a^2}(x^2 - a^2)^2. \quad (3.7)$$

Vogliamo calcolare le ampiezze di transizione

$$\begin{aligned} \langle -a | e^{-\frac{iHT}{\hbar}} | -a \rangle &= \langle a | e^{-\frac{iHT}{\hbar}} | a \rangle, \\ \langle a | e^{-\frac{iHT}{\hbar}} | -a \rangle &= \langle -a | e^{-\frac{iHT}{\hbar}} | a \rangle, \end{aligned} \quad (3.8)$$

dove  $T$  è il tempo necessario perché la particella passi da  $-a$  ad  $a$ .

Possiamo però, alternativamente, calcolare l'evoluzione utilizzando il tempo immaginario  $t = i\tau$ , con il fattore  $e^{-HT/\hbar}$ ; con la sostituzione  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i} \frac{dx}{d\tau}$  la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x) = -\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \quad (3.9)$$

dove  $x$  è la posizione della particella e  $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$ , con momento associato  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -m\dot{x}$ . L'hamiltoniana risulta quindi

$$H(x, p) = p\dot{x} - \mathcal{L}(\dot{x}, x) = -\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x), \quad (3.10)$$

che viene chiamata hamiltoniana euclidea, poiché abbiamo utilizzato lo spazio di Minkowski ma con un tempo immaginario, cioè tale che la metrica risulti euclidea; questo procedimento prende il nome di rotazione di Wick ed è un tipo di continuazione analitica. Notiamo che l'equazione del moto corrispondente dopo tale operazione corrisponde a quella in un tempo reale ma con potenziale invertito  $V_E(x) = -V(x)$

Consideriamo ora le ampiezze di probabilità affinché la particella parta dal punto  $x = -a$  al tempo  $\tau = -\frac{T}{2}$  e arrivi in  $x = \pm a$  a  $\tau = \frac{T}{2}$ :

$$K_{\pm}(T) = \langle \pm a | e^{-\frac{HT}{\hbar}} | a \rangle, \quad (3.11)$$

dove  $|\pm a\rangle$  sono autostati di posizione con autovalori  $\pm a$ ; è necessario studiare le traiettorie classiche nel potenziale invertito. La prima soluzione è quella triviale  $x(\tau) \equiv \pm a$ , che dà i contributi più importanti all'ampiezza  $K_{-}(T)$ , nel caso in cui la particella resta fissa in uno dei due minimi del potenziale.

Il secondo caso di interesse è quello in cui viene attraversata la barriera; si tratta delle soluzioni di instantone (da  $-a$  ad  $a$ ) e anti-instantone (da  $a$  a  $-a$ ), che costituiscono soluzioni esatte nel limite  $T \rightarrow \infty$ . Utilizzando un insieme completo di autostati energetici  $H|n\rangle = E_n|n\rangle$  si può scrivere, racchiudendo nella notazione anche il caso triviale,

$$K_{\pm}(T) = \sum_n e^{-\frac{E_n T}{\hbar}} \langle \pm a | n \rangle \langle n | a \rangle. \quad (3.12)$$

Nel limite di grandi  $T$  (poiché alla fine si intende prendere il caso  $T \rightarrow \infty$ ) e nel caso di una barriera di potenziale sufficientemente alta e larga tra i due minimi, allora questa somma è dominata dai due autovalori più bassi (o dai minimi dell'azione euclidea):

$$\begin{aligned} K_{-}(T) &\approx e^{-\frac{E_1 T}{\hbar}} \langle -a | 1 \rangle \langle 1 | a \rangle + e^{-\frac{E_2 T}{\hbar}} \langle -a | 2 \rangle \langle 2 | a \rangle, \\ K_{+}(T) &\approx e^{-\frac{E_1 T}{\hbar}} \langle +a | 1 \rangle \langle 1 | a \rangle + e^{-\frac{E_2 T}{\hbar}} \langle +a | 2 \rangle \langle 2 | a \rangle. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Inoltre, le funzioni d'onda dei due autostati nella rappresentazione della posizione rispettano:  $\langle +a | 1 \rangle = \langle -a | 1 \rangle$ ,  $\langle +a | 2 \rangle = -\langle -a | 2 \rangle$ , ossia sono rispettivamente pari e dispari e tali che  $|\langle 1 | +a \rangle|^2 = |\langle 2 | +a \rangle|^2$ , perciò si ha

$$\begin{aligned} K_{-}(T) &= |\langle 1 | a \rangle|^2 \left( e^{-\frac{E_1 T}{\hbar}} + e^{-\frac{E_2 T}{\hbar}} \right), \\ K_{+}(T) &= |\langle 1 | a \rangle|^2 \left( e^{-\frac{E_1 T}{\hbar}} - e^{-\frac{E_2 T}{\hbar}} \right); \end{aligned} \quad (3.14)$$

quindi, per grandi  $T$ ,

$$\frac{K_-(T) - K_+(T)}{K_-(T) + K_+(T)} = e^{-\frac{(E_2 - E_1)T}{\hbar}} \quad (3.15)$$

e cioè

$$E_2 - E_1 = -\hbar \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \frac{K_-(T) - K_+(T)}{K_-(T) + K_+(T)}. \quad (3.16)$$

L'equazione (3.16) permette di calcolare lo *splitting* energetico tra i due stati ad energia minore, ipotizzando che le ampiezze  $K_{\pm}(T)$  possano essere calcolate in modo indipendente. Tale modo è fornito dal formalismo degli integrali di percorso, ovvero tramite l'integrale:

$$K_{\pm}(T) = \int \mathcal{D}x e^{-\frac{S[x]}{\hbar}}, \quad (3.17)$$

dove il funzionale  $\mathcal{D}x$  rappresenta in questo caso i percorsi  $x(\tau)$  tali che  $x(-T/2) = -a$  e  $x(T/2) = \pm a$ . Ipotizziamo che l'azione

$$S[x] = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \mathcal{L} = - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \right] \quad (3.18)$$

abbia un punto stazionario  $\bar{x}(\tau)$ ; si può quindi utilizzare il metodo dell'approssimazione del punto di sella (*saddle-point approximation*) per calcolare l'integrale. All'ordine 0 otteniamo semplicemente il valore dell'integrando in corrispondenza della traiettoria classica  $\bar{x}(\tau)$ . Al primo ordine invece bisogna calcolare le variazioni dell'esponente attorno al punto stazionario, per cui serve il concetto di derivata di un funzionale, che viene definita tramite

$$\frac{\delta x(\tau)}{\delta x(\tau')} = \delta(\tau - \tau'). \quad (3.19)$$

Per la derivata prima si trova quindi, applicando le solite regole per la differenziazione di somme e prodotti,

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(\tau)} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau' \left[ m \frac{dx}{d\tau'} \frac{d}{d\tau'} \delta(\tau - \tau') + V'(x) \delta(\tau - \tau') \right] = -m\ddot{x}(\tau) + V'(x(\tau)), \quad (3.20)$$

dove si è usato

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau f(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} \delta(\tau) = (-1)^n \frac{d^n f(0)}{d\tau^n}. \quad (3.21)$$

La traiettoria classica risolve l'equazione del moto:

$$\left. \frac{\delta S[x]}{\delta x(\tau)} \right|_{x=\bar{x}} = -m\ddot{\bar{x}} + V'(\bar{x}) = 0, \quad (3.22)$$

che corrisponde all'equazione del moto di un sistema classico con tempo reale con un potenziale invertito  $V_E(x) = -V(x)$ . Per la derivata seconda invece si ottiene:

$$\frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(\tau') \delta x(\tau)} = -m \frac{d^2}{d\tau^2} \delta(\tau - \tau') + V''(x) \delta(\tau - \tau') = \left[ -m \frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x) \right] \delta(\tau - \tau'), \quad (3.23)$$

che si può indicare come  $S''[x] \delta(\tau - \tau')$ . Quindi l'espansione di  $S[x]$  in corrispondenza della traiettoria classica  $\bar{x}(\tau)$  fornisce

$$\begin{aligned} S[x] &= S[\bar{x}] + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau' \delta x(\tau) S''[\bar{x}] \delta(\tau - \tau') \delta x(\tau') + \mathcal{O}(\delta x^3) = \\ &= S[\bar{x}] + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \delta x(\tau) S''[\bar{x}] \delta x(\tau) + \mathcal{O}(\delta x^3), \end{aligned} \quad (3.24)$$

con  $\delta x(\tau) = x(\tau) - \bar{x}(\tau)$ . Per convenienza introduciamo un insieme di autofunzioni di  $S''[\bar{x}]$  con autovalori  $\lambda_n$ :

$$S''[\bar{x}] \psi_n(\tau) = \left[ -m \frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}) \right] \psi_n(\tau) = \lambda_n \psi_n(\tau), \quad (3.25)$$

che assumiamo essere ortonormali (con  $\psi_n(\pm \frac{T}{2}) = 0$ ):

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \psi_n(\tau) \psi_m(\tau) = \delta_{nm}. \quad (3.26)$$

In questo modo possiamo parametrizzare un cammino generico come

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \sum_n c_n \psi_n(\tau), \quad (3.27)$$

perciò l'integrale su tutti i percorsi diventa un integrale su tutti i possibili valori dei coefficienti della combinazione lineare  $c_n$ . Quindi la misura che possiamo usare nello spazio dei cammini è, a meno delle costanti moltiplicative che introduciamo per successiva convenienza,

$$\mathcal{D}x = N \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (3.28)$$

In questo modo l'espansione di  $S[x]$  in un intorno di  $\bar{x}$  diventa

$$S[x] = S[\bar{x}] + \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2 + \mathcal{O}(c_n^3) \quad (3.29)$$

e l'equazione (3.17) può essere calcolata come prodotto infinito di integrali gaussiani:

$$K_{\pm}(T) = Ne^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} \prod \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dc_n e^{-\frac{1}{2\hbar}\lambda_n c_n^2} = Ne^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} \prod_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad (3.30)$$

dove la dipendenza dai segni  $\pm$  è inclusa nei valori al contorno del percorso  $\bar{x}$  e degli autovalori  $\lambda_n$ .

Può essere utile a livello formale definire il determinante di un funzionale come il prodotto dei suoi autovalori:

$$\det S''[\bar{x}] = \prod_n \lambda_n, \quad (3.31)$$

così che formalmente si abbia

$$K_{\pm}(T) = Ne^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\det S''[\bar{x}]}}. \quad (3.32)$$

Possiamo notare che:

1. per poter scrivere l'ampiezza nella forma dell'equazione (3.32) è necessario che tutti gli autovalori  $\lambda_n$  siano maggiori o uguali a 0, anche se non è sempre questo il caso;
2. il determinante così definito (equazione (3.31)) è divergente, poiché prodotto infinito di numeri positivi e crescenti. Questo problema è ovviato facendo ricorso alla definizione della costante  $N$ ;
3. se esiste più di un percorso che minimizza l'azione, allora  $K_{\pm}$  è data dalla somma dei vari contributi:

$$K_{\pm}(T) = N \sum_i e^{-\frac{S[\bar{x}_i]}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\det S''[\bar{x}_i]}}; \quad (3.33)$$

4. per completare il calcolo dello splitting energetico  $E_2 - E_1$  è necessario prima di tutto trovare tutti i percorsi che minimizzano l'azione e poi capire come calcolare il determinante di un funzionale.

### 3.2.1 Percorsi stazionari

I percorsi stazionari  $\bar{x}(\tau)$  sono quelli che minimizzano l'azione euclidea. Per  $K_-(T)$  si ha  $x(T/2) = -a$ , perciò, come già anticipato, una soluzione è

$$\bar{x}(\tau) = x_0(\tau) = -a \quad \forall \tau. \quad (3.34)$$

In questo caso si ha quindi

$$\begin{aligned} S[x_0] &= V_0 T, \\ S''[x_0] &= -m \frac{d^2}{d\tau^2} + m\omega^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

e il contributo corrispondente all'integrale sui cammini è

$$I[x_0] = \frac{N}{\sqrt{\det S''[x_0]}} e^{-\frac{S[x_0]}{\hbar}}. \quad (3.36)$$

Notiamo che  $S[x_0] = 0$  se richiediamo che  $V(\pm a) = V_0 = 0$ .

Un'altra soluzione è  $x_1(\tau)$  in cui la particella parte in  $x = -a$  al tempo  $\tau_i = -T/2$  e raggiunge  $x = a$  al tempo  $\tau_f = T/2$ . Questa soluzione viene chiamata *instantone* (o *pseudoparticella*), perché si tratta di soluzioni che matematicamente hanno la stessa struttura di soluzioni di tipo particella nella teoria classica dei campi, ma sono strutture nel tempo (da cui il prefisso "instant-").

La forma di  $x_1(\tau)$  dipende dal potenziale, ma alcune caratteristiche generali restano invariate:

1. Poiché abbiamo assunto  $V(x)$  pari e le equazioni del moto sono invarianti per parità temporale, si ha  $x_1(-\tau) = -x_1(\tau)$  e quindi  $x_1(0) = 0$ ;  $\tau = 0$  viene detto il *centro* dell'istantone;
2. Dalla conservazione dell'energia si ha

$$-\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + V(x_1) = V_0, \quad (3.37)$$

perciò:

$$\frac{dx_1(\tau)}{d\tau} = \sqrt{\frac{2[V(x_1) - V_0]}{m}}, \quad (3.38)$$

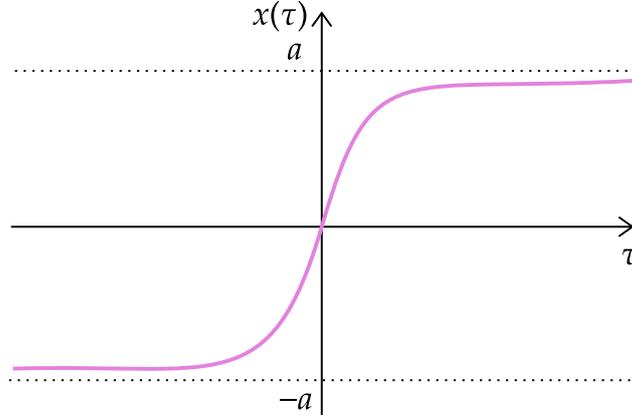
con segno positivo poiché  $x_1(\tau)$  è crescente; questo significa che una particella spende la maggior parte del tempo in corrispondenza delle posizioni iniziale  $x_i = -a$  e finale  $x_f = +a$ ; la transizione tra queste due posizioni avviene in un intervallo temporale dell'ordine di  $1/\omega$ , detto *dimensione* dell'istantone (figura 3.3);

3. Per  $T \rightarrow \infty$  il centro dell'istantone può essere ovunque, quindi in questo limite vanno considerate tutte le soluzioni  $x_1(\tau - \tau_1)$  con centro in  $\tau_1 \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ; il contributo all'integrale sui percorsi è quindi calcolato in questo caso integrando su tutti i possibili valori del centro, cioè su  $\tau_1$ :

$$I[x_1] = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau_1 \frac{N}{\sqrt{\det S''[x_1]}} e^{-\frac{S[x_1]}{\hbar}} = \frac{N}{\sqrt{\det S''[x_1]}} T e^{-\frac{S[x_1]}{\hbar}}; \quad (3.39)$$

4. Possiamo esprimere l'azione dell'istantone  $S[x_1]$  in funzione del potenziale utilizzando l'equazione (3.37):

$$S[x_1] = S[x_0] + \int_{-a}^a dx \sqrt{2m[V(x) - V_0]}, \quad (3.40)$$



**Fig. 3.3:** *Struttura temporale generica di un instantone con centro in  $\tau = 0$ .*

oppure in funzione dell'energia cinetica:

$$S[x_1] = S[x_0] + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau m \dot{x}_1^2; \quad (3.41)$$

5. Notiamo che  $S[x_0]$  (e quindi  $S[x_1]$ ) è finita solo per valori finiti di  $T$ , mentre la differenza  $S[x_1] - S[x_0]$  è finita anche per  $T \rightarrow \infty$ .

### 3.2.2 Esempio

É possibile verificare esplicitamente alcune proprietà per il caso di un potenziale dato, come quello dell'equazione (3.7); in questo caso possiamo integrare l'equazione (3.38) ottenendo:

$$x_1(\tau) = a \frac{e^{\omega\tau} - 1}{e^{\omega\tau} + 1}. \quad (3.42)$$

L'azione diventa invece (usando  $S[x_0] = 0$ ):

$$S[x_1] = \frac{m\omega}{2a} \int_{-a}^a dx (a^2 - x^2) = \frac{2ma^2\omega}{3}. \quad (3.43)$$

Ci domandiamo però quali siano altre soluzioni (approssimate) dell'equazione del moto. Data una soluzione di tipo instantone  $x_1(\tau)$ , possiamo applicare l'invarianza temporale:

$$x_1(-\tau) = -x_1(\tau) \quad (3.44)$$

e otteniamo così un'ulteriore soluzione, che chiamiamo *anti-instantone*. Notiamo che, per la stessa ragione, ogni sequenza di  $n$  soluzioni alternate di instantoni e anti-instantoni contribuisce alla stima di  $K_-(T)$  (se  $n$  pari) o  $K_+(T)$  (se  $n$  dispari). Indichiamo tali soluzioni (approssimate) come  $x_n(\tau)$ ; rappresentano particelle che, dopo aver attraversato la barriera di potenziale in una direzione, la riattraversano  $n - 1$  volte.

Con l'obiettivo di calcolare  $S[x_n]$  per i multi-instantoni, possiamo osservare che, come nel caso di un singolo instantone, possiamo usare la conservazione dell'energia per scrivere

$$S[x_n] = S[x_0] + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau m \dot{x}_n^2. \quad (3.45)$$

Ipotizziamo che gli  $n$  instantoni siano ben distanziati, nell'approssimazione che prende il nome di *gas diluito di instantoni*. In questo caso possiamo considerare che, poiché la funzione  $x_n(\tau)$  sarà approssimativamente uguale a  $\pm a$  per quasi ogni istante di tempo, facendo eccezione per  $n$  intervalli dell'ordine di  $1/\omega$  (piccolo), dove invece ha il comportamento di una soluzione di singolo instantone o anti-instantone, possiamo approssimarla come

$$x_n(\tau) \approx x_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} [x_1(\tau - \tau_k) - x_0], \quad (3.46)$$

che fornisce

$$\dot{x}_n^2 = \left[ \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} [\dot{x}_1(\tau - \tau_k)] \right]^2 \approx \sum_{k=1}^n \dot{x}_1^2(\tau - \tau_k), \quad (3.47)$$

dal momento che  $x_1(\tau - \tau_k) \approx \text{const}$  per  $\tau$  distante da  $\tau_k$ . Perciò nel limite di grandi  $T$  si ha

$$S[x_n] = n(S[x_1] - S[x_0]) + S[x_0] \quad (3.48)$$

e il contributo corrispondente è

$$I[x_n] = e^{-\frac{S[x_0]}{\hbar}} \left( e^{-\frac{S[x_1]-S[x_0]}{\hbar}} \right)^n \int \mathcal{D}x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_n] x(\tau) \right\}. \quad (3.49)$$

Per calcolare l'integrale possiamo osservare che  $S''[x_n]$  è approssimabile come:

$$S''[x_n] \approx \begin{cases} S''[x_1(\tau - \tau_k)] & \text{se } \tau_k - \delta < \tau < \tau_k + \delta \\ S''[x_0] & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.50)$$

con  $k = 1, \dots, n$  e  $\delta \sim 1/\omega$ . Questo grazie all'approssimazione di gas diluito, in cui le varie soluzioni di instantone e anti-instantone sono ben separate. Indichiamo con  $\mathcal{D}_k x$  la misura di integrazione sui cammini  $x(\tau)$  che siano notevolmente diversi da zero solo

nell'intervallo  $\tau_k - \delta < \tau < \tau_k + \delta$ , dove  $\tau_k$  con  $k = 1, \dots, n$  sono i centri degli  $n$  instantoni e anti-instantoni. Usando l'approssimazione dell'equazione (3.50) si ottiene

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}_k x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_n] x(\tau) \right\} \approx \\
& \approx \int \mathcal{D}_k x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_0] x(\tau) \right\} \times \\
& \times \prod_{k=1}^n \frac{\int \mathcal{D}_k x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_1(\tau - \tau_k)] x(\tau) \right\}}{\int \mathcal{D}_k x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_0] x(\tau) \right\}}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Il termine nella produttoria può essere riscritto, considerandone l'effettiva indipendenza da  $k$ , come

$$\begin{aligned}
& \prod_{k=1}^n \frac{\int \mathcal{D}_k x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_1(\tau - \tau_k)] x(\tau) \right\}}{\int \mathcal{D}_k x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_0] x(\tau) \right\}} = \\
& = \left[ \frac{\int \mathcal{D}_k x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_1(\tau - \tau_k)] x(\tau) \right\}}{\int \mathcal{D}_k x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_0] x(\tau) \right\}} \right]^n = \\
& = \left[ \frac{\int \mathcal{D} x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_1(\tau - \tau_k)] x(\tau) \right\}}{\int \mathcal{D} x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_0] x(\tau) \right\}} \right]^n,
\end{aligned} \tag{3.52}$$

dove nell'ultimo passaggio si è estesa l'integrazione a tutti i cammini invece di considerare solo quelli considerevolmente diversi da zero solo in corrispondenza del centro  $\tau_k$ ; questo è permesso osservando che nella frazione abbiamo  $S''[x_1(\tau - \tau_k)] \approx S''[x_0]$  per  $\tau \approx \tau_k$ . Si ha quindi

$$\int \mathcal{D} x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x(\tau) S''[x_n] x(\tau) \right\} \approx \frac{N}{\sqrt{\det S''[x_0]}} \left[ \sqrt{\frac{\det S''[x_0]}{\det S''[x_1]}} \right]^n. \tag{3.53}$$

Per completare il calcolo del contributo del multi-instantone è necessario:

- rimuovere l'autovalore uguale a zero da ogni fattore di  $\det S''[x_1]$ ;
- includere  $n$  fattori jacobiani:

$$\sqrt{\frac{S[x_1] - S[x_0]}{2\pi\hbar m}}; \tag{3.54}$$

- integrare su tutte le possibili posizioni degli  $n$  centri  $\tau_1, \dots, \tau_n$  degli instantoni.

Queste considerazioni portano ad un fattore complessivo pari a

$$\sqrt{\frac{S[x_1] - S[x_0]}{2\pi\hbar m}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau_2 \cdots \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau_n = \sqrt{\frac{S[x_1] - S[x_0]}{2\pi\hbar m}} \frac{T^n}{n!}. \quad (3.55)$$

Perciò il contributo da considerare è

$$I[x_n] = \frac{N}{\sqrt{\det S''[x_0]}} \frac{K^n T^n}{n!} e^{-\frac{n(S[x_1] - S[x_0])}{\hbar}} e^{-\frac{S[x_0]}{\hbar}} = I[x_0] \frac{1}{n!} \left[ K T e^{-\frac{n(S[x_1] - S[x_0])}{\hbar}} \right], \quad (3.56)$$

dove  $K$  è definita come:

$$K = \frac{N}{\det S''[x_1]} \sqrt{\frac{\det S''[x_0]}{\det_0 S''[x_1]}}, \quad (3.57)$$

in cui indichiamo con  $\det_0$  un determinante a cui sia stato rimosso l'autovalore zero. Notiamo che per  $n = 0$  si ritrova il risultato dell'equazione (3.36), mentre per  $n = 1$  abbiamo il caso nell'esempio sopracitato.

Possiamo ora giustificare l'ipotesi fatta di gas diluito: sommando su tutti i contributi  $I[x_n]$ , il contributo dominante è quello dei valori di  $n$  tali che:

$$\frac{1}{n!} \left[ K T e^{-\frac{S[x_1] - S[x_0]}{\hbar}} \right]^n \sim \frac{1}{(n-1)!} \left[ K T e^{-\frac{S[x_1] - S[x_0]}{\hbar}} \right]^{n-1}, \quad (3.58)$$

oppure

$$\frac{n}{T} \sim K e^{-\frac{S[x_1] - S[x_0]}{\hbar}}. \quad (3.59)$$

La densità di instantoni  $\frac{n}{T}$  viene quindi esponenzialmente soppressa per i contributi rilevanti a patto che si abbia  $S[x_1] - S[x_0] \gg \hbar$ , che coincide con la condizione di validità per l'approssimazione semiclassica. Questa considerazione costituisce una conferma *a posteriori* dell'assunzione iniziale sulla separazione degli instantoni.

### 3.3 Determinanti di funzionali

Consideriamo ora il problema di calcolare il termine

$$\frac{\det S''[x_0]}{\det_0 S''[x_1]} \quad (3.60)$$

che compare nella definizione di  $K$  (equazione (3.57)). Ci chiediamo in primo luogo come valutare in generale il rapporto

$$\frac{\det O_1}{\det O_2}, \quad (3.61)$$

dove

$$O_i = -m \frac{d^2}{d\tau^2} + W_i(\tau), \quad i = 1, 2 \quad (3.62)$$

con  $W_i(\tau)$  funzioni arbitrarie di  $\tau$  nell'intervallo  $-T/2 < \tau < T/2$ . A questo punto rimuoviamo dal denominatore nell'equazione (3.61) il contributo dell'autovalore minore (diverso da zero finché  $T$  è finito) e poi possiamo considerare il limite  $T \rightarrow \infty$ . Siano  $\phi_\lambda^{(i)}(\tau)$  le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} O_i \phi_\lambda^{(i)}(\tau) = \lambda \phi_\lambda^{(i)}(\tau) \\ \phi_\lambda^{(i)}\left(-\frac{T}{2}\right) = 0 \\ \dot{\phi}_\lambda^{(i)}\left(-\frac{T}{2}\right) = 1. \end{cases} \quad (3.63)$$

Notiamo che la funzione  $\phi_\lambda^{(i)}(\tau)$  (che sicuramente esiste in quanto unica soluzione del problema di Cauchy appena identificato) non è necessariamente un autostato di  $O_i$ , in quanto  $\phi_\lambda^{(i)}\left(\frac{T}{2}\right)$  è in generale diverso da zero. Possiamo quindi definire le funzioni

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{\det(O_1 - \lambda)}{\det(O_2 - \lambda)}, \\ G(\lambda) &= \frac{\phi_\lambda^{(1)}\left(\frac{T}{2}\right)}{\phi_\lambda^{(2)}\left(\frac{T}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Notiamo che  $F(\lambda)$  ha uno zero semplice quando  $\lambda$  è un autovalore  $\lambda_n^{(1)}$  di  $O_1$  e un polo semplice quando  $\lambda$  è un autovalore  $\lambda_n^{(2)}$  di  $O_2$  e che la funzione  $G(\lambda)$  ha esattamente gli stessi poli e zeri. Per il teorema di Liouville, quindi, si ha  $\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} = \text{const}$ . In particolare, poiché  $F(\lambda), G(\lambda) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} 1$  in ogni direzione fatta eccezione per l'asse reale dove entrambe presentano dei poli semplici, la costante sarà uguale a uno, cioè

$$F(\lambda) = G(\lambda) \quad (3.65)$$

su tutto il piano complesso  $\lambda$ . In particolare, per  $\lambda \rightarrow 0$  si ha

$$\frac{\det O_1}{\det O_2} = \frac{\phi_0^{(1)}\left(\frac{T}{2}\right)}{\phi_0^{(2)}\left(\frac{T}{2}\right)}, \quad (3.66)$$

che è il risultato che cercavamo. Siamo interessati al caso in cui

$$\begin{aligned} O_1 &= S''[x_0] = -m \frac{d^2}{d\tau^2} + m\omega^2, \\ O_2 &= S''[x_1] = -m \frac{d^2}{d\tau^2} + V(x_1), \end{aligned} \quad (3.67)$$

perciò ci servono le soluzioni ai problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \left(-m \frac{d^2}{d\tau^2} + m\omega^2\right) \phi_0(\tau) = 0 \\ \phi_0\left(-\frac{T}{2}\right) = 0 \\ \dot{\phi}_0\left(-\frac{T}{2}\right) = 1 \end{cases} \quad (3.68)$$

$$\begin{cases} \left(-m \frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_1)\right) \psi_0(\tau) = 0 \\ \psi_0\left(-\frac{T}{2}\right) = 0 \\ \dot{\psi}_0\left(-\frac{T}{2}\right) = 1 \end{cases} \quad (3.69)$$

La soluzione per il problema (3.68) può essere trovata facilmente:

$$\phi_0(\tau) = \frac{e^{\omega(\tau+T/2)} - e^{-\omega(\tau+T/2)}}{2\omega} = \frac{1}{\omega} \sinh \omega \left( \tau + \frac{T}{2} \right); \quad (3.70)$$

il problema (3.69) invece è più complesso. Possiamo scrivere una soluzione generica come

$$\psi_0(\tau) = c_1 f(\tau) + c_2 g(\tau), \quad (3.71)$$

con  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  soluzioni indipendenti con determinante wronskiano  $w(\tau) = \text{const.}$  È possibile sceglierne la normalizzazione in modo tale che

$$w(\tau) \equiv f(\tau)\dot{g}(\tau) - \dot{f}(\tau)g(\tau) = 1. \quad (3.72)$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} \psi_0\left(-\frac{T}{2}\right) = c_1 f\left(-\frac{T}{2}\right) + c_2 g\left(-\frac{T}{2}\right) = 0 \\ \dot{\psi}_0\left(-\frac{T}{2}\right) = c_1 \dot{f}\left(-\frac{T}{2}\right) + c_2 \dot{g}\left(-\frac{T}{2}\right) = 1 \end{cases} \quad (3.73)$$

si ottengono i due coefficienti:

$$\begin{aligned} c_1 &= -g\left(-\frac{T}{2}\right), \\ c_2 &= f\left(-\frac{T}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.74)$$

sempre utilizzando la scelta dell'equazione (3.72). Poiché siamo interessati unicamente ai valori di  $\psi_0(T/2)$  per grandi  $T$ , possiamo limitarci a studiare i comportamenti asintotici di  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$  per  $\tau \rightarrow \infty$ . Sapendo che  $f(\tau) = \dot{x}_1(\tau)$ , il comportamento asintotico di  $f(\tau)$  si può ricavare dall'equazione (3.38) e dal fatto che  $x_1 \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} a$ . In questo limite si ha

$$f_\infty(\tau) = \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} = \sqrt{\frac{2}{m}[V(x_1) - V_0]} \approx -\omega(x_1 - a), \quad (3.75)$$

che, sempre nello stesso limite, fornisce

$$a - x_1(\tau) \approx \hat{a}e^{-\omega\tau} \implies f_\infty(\tau) = \dot{x}_1(\tau) \approx \omega\hat{a}e^{-\omega\tau}, \quad (3.76)$$

dove  $\hat{a}$  è una costante positiva, determinata tramite

$$\begin{cases} \tau = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{V(x) - V_0}} \\ \tau = -\frac{1}{\omega} \log \frac{\epsilon}{\hat{a}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{cases} \quad (3.77)$$

rispettivamente dalle equazioni (3.38) e (3.76), con  $\epsilon = a - x_1$ . Dal sistema si ottiene quindi

$$\hat{a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \epsilon \exp \left[ m\omega \int_0^{a-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{2m[V(x) - V_0]}} \right] \right\}. \quad (3.78)$$

Osserviamo che l'integrale all'esponente nell'equazione (3.78) è logaritmicamente divergente per  $\epsilon \rightarrow 0$ , per il comportamento della funzione integranda in corrispondenza dell'estremo superiore di integrazione:

$$V(x) - V_0 = \frac{1}{2}m\omega^2(x - a)^2 + \mathcal{O}((x - a)^3); \quad (3.79)$$

perciò si ha

$$\begin{aligned} m\omega \int_0^{a-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{2m[V(x) - V_0]}} &= \int_0^{a-\epsilon} dx \left[ \frac{m\omega}{\sqrt{2m[V(x) - V_0]}} - \frac{1}{a-x} \right] + \int_0^{a-\epsilon} \frac{dx}{a-x} = \\ &= \int_0^{a-\epsilon} dx \left[ \frac{m\omega}{\sqrt{2m[V(x) - V_0]}} - \frac{1}{a-x} \right] + \log \frac{a}{\epsilon} \end{aligned} \quad (3.80)$$

e così l'integrale converge per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Perciò

$$\hat{a} = a \exp \int_0^a dx \left[ \frac{m\omega}{\sqrt{2m[V(x) - V_0]}} - \frac{1}{a-x} \right]. \quad (3.81)$$

Nel caso del potenziale preso come esempio nell'equazione (3.7) si ha

$$\sqrt{2m[V(x) - V_0]} = \frac{m\omega}{2a}(a^2 - x^2) \implies \hat{a} = 2a. \quad (3.82)$$

L'andamento asintotico di  $g(\tau)$  può essere ricavato dall'equazione (3.72), che si può riscrivere come

$$\frac{d}{d\tau} \frac{g(\tau)}{f(\tau)} = \frac{1}{f^2(\tau)}, \quad (3.83)$$

la cui soluzione per  $\tau \rightarrow \infty$  è

$$g_\infty(\tau) = \frac{1}{2\hat{a}\omega^2} e^{\omega\tau}. \quad (3.84)$$

Perciò, nel limite di grandi  $T$ ,

$$\psi_0\left(\frac{T}{2}\right) = -f\left(\frac{T}{2}\right)g\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(-\frac{T}{2}\right)g\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2\omega} \left[ e^{-\frac{\omega T}{2}} e^{\frac{\omega T}{2}} + e^{\frac{\omega T}{2}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \right] = \frac{1}{\omega}. \quad (3.85)$$

Infine, utilizzando l'equazione (3.72), otteniamo

$$\frac{\det S''[x_0]}{\det S''[x_1]} = \frac{\phi_0(T/2)}{\psi_0(T/2)} = \sinh(\omega T). \quad (3.86)$$

Il passaggio successivo è la rimozione del più piccolo autovalore dal denominatore dell'equazione (3.86). Per fare ciò, consideriamo l'equazione differenziale

$$\begin{cases} -m\ddot{\psi}_\lambda(\tau) + V''(\bar{x}_1)\psi_\lambda(\tau) = \lambda\psi_\lambda(\tau) \\ \psi_\lambda\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \\ \dot{\psi}_\lambda\left(-\frac{T}{2}\right) = 1 \end{cases} \quad (3.87)$$

dove assumiamo  $\lambda$  piccolo, poiché sappiamo che il minore autovalore è zero per grandi  $T$ :

$$\psi_\lambda(\tau) = \psi_0(\tau) + \lambda\eta(\tau) + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (3.88)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (3.87) ed espandendo al primo ordine in  $\lambda$  si ottiene

$$\begin{cases} -m\ddot{\eta}(\tau) + V''(x_1)\eta(\tau) = \psi_0(\tau) \\ \eta\left(-\frac{T}{2}\right) = \dot{\eta}\left(-\frac{T}{2}\right) = 0, \end{cases} \quad (3.89)$$

che può essere resa un'equazione integrale:

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &= -\frac{1}{m} \int_{\frac{T}{2}}^{\tau} d\tau'' \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau''} d\tau' [\psi_0(\tau') - V''(x_1)\eta(\tau')] = \\ &= -\frac{1}{m} \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau} d\tau' (\tau - \tau') [\psi_0(\tau') - V''(x_1)\eta(\tau')] \end{aligned} \quad (3.90)$$

e risolta per iterativamente. Il risultato sarà nella forma

$$\eta(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau} d\tau' k(\tau, \tau') \psi_0(\tau'), \quad (3.91)$$

dove  $k(\tau, \tau')$  è il *kernel* ed è soluzione di:

$$\begin{cases} \left( -m \frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_1) \right) k(\tau, \tau') = 0 \\ k(\tau, \tau) = 0 \\ \left. \frac{d}{d\tau} k(\tau, \tau') \right|_{\tau'=\tau} = -\frac{1}{m} \end{cases} \quad (3.92)$$

(si può controllare direttamente sostituendo l'equazione (3.91) nel problema (3.89)). Quindi  $k(\tau, \tau')$  è una combinazione lineare di  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  con coefficienti che dipendono da  $\tau'$ . Si trova

$$k(\tau, \tau') = \frac{1}{m} [f(\tau)g'(\tau) - g(\tau)f'(\tau)], \quad (3.93)$$

che rispetta le condizioni iniziali rilevanti grazie alla scelta dell'equazione (3.72), quindi infine si ha

$$\psi_\lambda(\tau) = \psi_0(\tau) + \frac{\lambda}{m} \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau} d\tau' [f(\tau)g'(\tau) - g(\tau)f'(\tau)] \psi_0(\tau') + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (3.94)$$

Il più piccolo autovalore è determinato dalla condizione  $\psi_\lambda(T/2) = 0$ , che possiamo applicare ottenendo

$$\frac{1}{\omega} + \frac{\lambda}{m} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau' \left[ f\left(\frac{T}{2}\right) g(\tau') - g\left(\frac{T}{2}\right) f(\tau') \right] \psi_0(\tau') = 0, \quad (3.95)$$

dove abbiamo utilizzato l'equazione (3.85). Per grandi  $T$  la funzione integranda è approssimabile come

$$\begin{aligned} & \left[ f\left(\frac{T}{2}\right) g(\tau') - g\left(\frac{T}{2}\right) f(\tau') \right] \left[ -g\left(-\frac{T}{2}\right) f(\tau') + f\left(-\frac{T}{2}\right) g(\tau') \right] \approx \\ & \approx \left[ \omega \hat{a} e^{-\frac{\omega T}{2}} g(\tau') - \frac{1}{2\hat{a}\omega^2} e^{\frac{\omega T}{2}} f(\tau') \right] \left[ \frac{1}{2\hat{a}\omega^2} e^{\frac{\omega T}{2}} f(\tau') + \omega \hat{a} e^{-\frac{\omega T}{2}} g(\tau') \right] \approx \\ & \approx -\frac{1}{4\omega^4 \hat{a}^2} f^2(\tau_1) e^{\omega T} \end{aligned} \quad (3.96)$$

e quindi in questo limite l'equazione (3.95) diventa:

$$1 - \frac{\lambda}{4m\omega^3 \hat{a}^2} e^{\omega T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau_1 f^2(\tau_1) = 1 - \frac{\lambda}{4m\omega^3 \hat{a}^2} e^{\omega T} \frac{S[x_1] - S[x_0]}{m} = 0, \quad (3.97)$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che, nel limite considerato, l'autofunzione con autovalore nullo dell'operatore  $S''[x_1]$  è

$$\psi_0(\tau) = \sqrt{\frac{m}{S[x_1] - S[x_0]}} \frac{dx_1(\tau)}{d\tau}. \quad (3.98)$$

Quindi si trova:

$$\lambda = \frac{4\hat{a}^2 m^2 \omega^3}{S[x_1] - S[x_0]} e^{-\omega T}. \quad (3.99)$$

Osserviamo che il minore autovalore tende a 0 per  $T \rightarrow \infty$ , come ci aspettavamo. Concludiamo quindi che

$$\frac{\det S''[x_0]}{\det_0 S''[x_1]} = \lambda \frac{\det S''[x_0]}{\det S''[x_1]} = \frac{4\hat{a}^2 m^2 \omega^3}{S[x_1] - S[x_0]} e^{-\omega T} \sinh(\omega T), \quad (3.100)$$

che è finito e indipendente da  $T$  per  $T \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\det S''[x_0]}{\det_0 S''[x_1]} = \frac{4\hat{a}^2 m^2 \omega^3}{S[x_1] - S[x_0]}. \quad (3.101)$$

### 3.4 Splitting energetico dei due livelli di energia minore

Riassumendo i risultati ottenuti finora, si ha che le due ampiezze di transizione dei casi di interesse sono date da

$$K_-(T) = \sum_{n \text{ pari}} I[x_n] = I[x_0] \sum_{n \text{ pari}} \frac{1}{n!} \left( KT e^{-\frac{S[x_1] - S[x_0]}{\hbar}} \right)^n = I[x_0] \cosh \left( KT e^{-\frac{S[x_1] - S[x_0]}{\hbar}} \right) \quad (3.102)$$

e

$$K_+(T) = \sum_{n \text{ dispari}} I[x_n] = I[x_0] \sum_{n \text{ dispari}} \frac{1}{n!} \left( KT e^{-\frac{S[x_1] - S[x_0]}{\hbar}} \right)^n = I[x_0] \sinh \left( KT e^{-\frac{S[x_1] - S[x_0]}{\hbar}} \right), \quad (3.103)$$

dove  $K$  è data da

$$K = \sqrt{\frac{S[x_1] - S[x_0]}{2\pi\hbar m}} \sqrt{\frac{\det S''[x_0]}{\det' S''[x_1]}} = \hat{a}\omega \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \quad (3.104)$$

e

$$I[x_0] = \frac{N}{\sqrt{\det S''[x_0]}} e^{-\frac{S[x_0]}{\hbar}}. \quad (3.105)$$

Possiamo comparare questo risultato con l'equazione (3.12) e si ha che i due livelli energetici minori hanno energie

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}\hbar\omega \pm \hbar K e^{-\frac{S[x_n]}{\hbar}}. \quad (3.106)$$

Lo splitting energetico  $E_2 - E_1$  è dato dall'equazione (3.16):

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega \left[ 2\hat{a} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \right] e^{-\frac{S[x_1]-S[x_0]}{\hbar}}, \quad (3.107)$$

dove

$$S[x_1] - S[x_0] = \int_{-a}^a dx \sqrt{2m[V(x) - V_0]}. \quad (3.108)$$

Osserviamo che questo valore è indipendente dalla costante  $N$ , che appariva nel funzionale di misura di integrazione, e dal determinante  $\det S''[x_0]$  perché i fattori  $I[x_0]$  si elidono nella frazione.

Si tratta del risultato che ci aspettavamo di ottenere: gli autostati energetici sono combinazioni pari o dispari di oscillatori armonici centrati in corrispondenza delle due buche di potenziale. La degenerazione che avremmo trovato classicamente viene rotta dalla trasmissione attraverso la barriera di potenziale (e infatti la differenza tra le due energie è proporzionale al fattore di penetrazione della barriera  $e^{-S/\hbar}$ ).

## 4

# Decadimento di uno stato metastabile

[...] *Llego a mi centro, a mi álgebra y mi clave, a mi espejo. Pronto sabré quién soy.*

– Jorges-Luis Borges, *Elogio de la sombra*

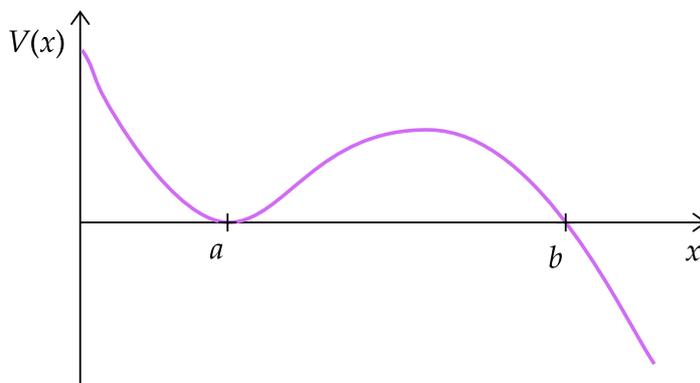
Il procedimento descritto nella sezione precedente si può estendere al caso della probabilità di decadimento per unità di tempo di uno stato instabile. Consideriamo ad esempio un potenziale unidimensionale  $V(x)$  che presenti un minimo locale stretto in  $x = a$ , con  $V(a) = V_0$  e  $V''(a) = m\omega^2$ , separato da un secondo minimo, più basso e largo, attraverso una barriera di potenziale (figura 4.1). Considerando la possibilità del *tunnelling*, ci aspettiamo che gli autostati della buca di potenziale in  $a$  diventino instabili, o equivalentemente, che gli autovalori energetici acquisiscano una parte immaginaria; vedremo che la parte immaginaria dell'autostato minore, calcolabile grazie all'approccio a integrali di percorso, è legata alla probabilità di decadimento per unità di tempo del livello fondamentale (*ground state*) metastabile, cioè localmente stabile ma globalmente instabile.

Sia  $|n\rangle$  un insieme completo di autostati dell'hamiltoniana valutati senza considerare l'effetto *tunnel* ( $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ ) e si consideri l'ampiezza di probabilità

$$K(T) = \langle a | e^{-\frac{HT}{\hbar}} | a \rangle = \sum_n e^{-\frac{E_n T}{\hbar}} |\langle a | n \rangle|^2. \quad (4.1)$$

Poiché prendere in considerazione il caso del *tunnelling* porta lo stato di energia minore  $E_0$  a diventare instabile (o metastabile), ci si attende che questa acquisisca una parte immaginaria negativa, che possiamo scrivere come

$$\Im E_0 = -\frac{\Gamma}{2}, \quad (4.2)$$



**Fig. 4.1:** Esempio di potenziale che presenta un minimo locale instabile, con probabilità di decadimento quindi non nulla. Se utilizzassimo i metodi della teoria variazionale forniti dalla meccanica quantistica troveremmo degli autovalori energetici ma non ci accorgeremmo dell'instabilità dello stato.

legata alla probabilità di decadimento del livello fondamentale metastabile per unità di tempo  $\gamma$  dalla relazione

$$\Gamma = \hbar\gamma. \quad (4.3)$$

Il contributo all'ampiezza dell'equazione (4.1) del livello con minore parte reale dell'energia si ottiene considerando il limite  $T \rightarrow \infty$ :

$$E_0 = -\hbar \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log K(T) \implies \gamma = 2\Im \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log K(T). \quad (4.4)$$

Come nel caso della doppia buca di potenziale, l'ampiezza si può calcolare come

$$K(T) = \int \mathcal{D}x e^{-\frac{S[x]}{\hbar}} \quad (4.5)$$

e l'integrale si può valutare usando l'approssimazione del punto di sella. Cerchiamo quindi i punti stazionari dell'azione, cioè le soluzioni  $\bar{x}(\tau)$  dell'equazione del moto classica, con condizioni al contorno  $\bar{x}(-T/2) = \bar{x}(T/2) = a$ . La soluzione banale è quella costante:  $x_0(\tau) = a$ . Altre soluzioni sono date da sequenze delle cosiddette soluzioni di *bounce*, cioè soluzioni  $x_b(\tau)$  che iniziano in  $x = a$  al tempo  $\tau = -T/2$  con velocità nulla, raggiungono  $x = b$  oltre la barriera (con  $V(b) = V(a)$ ) a  $\tau = 0$  e infine ritornano in  $x = a$  per  $\tau = T/2$ . Per ottenere l'integrale di percorso sarà necessario sommare tutti i contributi di punto di sella attorno ad ogni sequenza di  $n$  soluzioni di *bounce*, integrando sulle possibili posizioni degli  $n$  *bounce*. Tali soluzioni presentano alcune caratteristiche fondamentali indipendentemente dalla forma specifica del potenziale; le studiamo prendendo in considerazione l'equazione del moto

$$\frac{d^2 x_b}{d\tau^2} = V'(x_b) \quad (4.6)$$

come un'equazione con tempo reale ma potenziale invertito  $V'(x) = -V(x)$ , che perciò presenta un massimo in  $x = a$  e una buca di potenziale per  $a < x < b$  (si confronti l'immagine 4.1).

Alcune proprietà che ne derivano sono:

1. in prossimità di  $x = a$ , si ha

$$\frac{dx_b}{d\tau} = \sqrt{\frac{2[V(x_b) - V(a)]}{m}} \approx \omega(x_b - a), \quad (4.7)$$

che ha soluzione

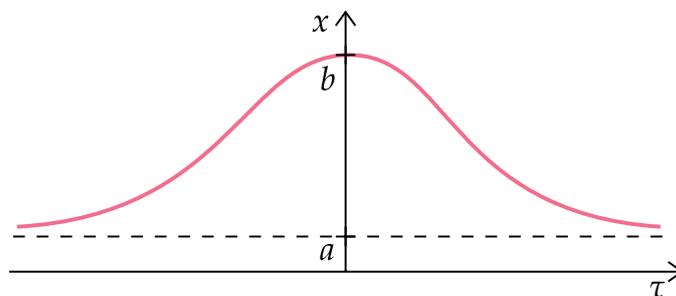
$$x_b(\tau) = a - Ce^{\omega\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} a, \quad (4.8)$$

perciò  $x_b(\tau)$  arriva ad  $a$  solo nel limite  $\tau \rightarrow -\infty$ ;

2.  $x_b(\tau)$  ha velocità nulla per  $\tau = 0$ , cioè quando raggiunge il punto di inversione  $x = b$  dove il potenziale presenta un altro zero dato che  $V(a) = V(b)$ :

$$\left. \frac{dx_b(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \sqrt{\frac{2[V(b) - V(a)]}{m}} = 0; \quad (4.9)$$

3. nel limite  $T \rightarrow \infty$ ,  $x_b(\tau)$  può raggiungere  $x = b$  per ogni tempo  $\tau_1$  (non necessariamente per  $\tau = \tau_1 = 0$ ); è quindi necessario integrare su tutti i possibili valori di  $\tau_1$ , in analogia con il caso dei centri degli instantoni nel capitolo precedente.



**Fig. 4.2:** *Struttura generale nel tempo della soluzione di bounce.*

Possiamo utilizzare i risultati ottenuti in precedenza per gli instantoni e otteniamo che l'ampiezza per il *bounce* si può scrivere come

$$\begin{aligned} K_b(T) &= \frac{N}{\sqrt{\det S''[x_0]}} e^{-\frac{S[x_0]}{\hbar}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^n T^n}{n!} e^{-\frac{n(S[x_b] - S[x_0])}{\hbar}} = \\ &= \frac{N}{\sqrt{\det S''[x_0]}} e^{-\frac{S[x_0]}{\hbar}} \exp\left(KT e^{-\frac{S[x_b] - S[x_0]}{\hbar}}\right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Per calcolare  $K$  ci si potrebbe aspettare una soluzione nella forma già trovata per gli instantoni (equazione (3.57)), ma c'è una differenza importante di cui bisogna tenere conto: poiché il *bounce* ha velocità nulla per  $\tau = 0$ ,  $\dot{x}_b(\tau)$  presenta un nodo e quindi, basandosi sui risultati per l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo in una dimensione, non può essere l'autovettore di  $S''[x_b]$  con autovalore minore. Questo implica che  $S''[x_b]$  ha un autovettore con autovalore negativo e quindi il determinante risulta negativo (dopo aver rimosso l'autovalore nullo); di conseguenza,  $K$  è immaginaria pura, come atteso per uno stato metastabile. Il fatto di avere un autovalore negativo per  $S''[x_b]$  significa che  $x_b$  non è un minimo per l'azione nello spazio dei cammini, ma piuttosto un punto di sella: esiste una direzione nello spazio delle configurazioni lungo cui  $S[x]$  presenta invece un massimo per  $x(\tau) = x_b(\tau)$ . Per trovare questa direzione, consideriamo i percorsi  $x(\tau)$  con  $x(\pm\infty) = a$  e un massimo in  $\tau = 0$ , che possiamo parametrizzare tramite il valore che assumono nel massimo:  $x(0) = c$ . Tra questi percorsi troviamo quello costante,  $x(\tau) \equiv a$ , per il quale  $c = a$ , e il *bounce*, per il quale  $c = b$ . Altri valori di  $c$  corrispondono a percorsi che tornano ad  $x = a$  senza passare dalla regione classicamente permessa dietro la barriera ( $c < b$ ), oppure vanno oltre il punto di svolta ( $c > b$ ). L'azione euclidea ristretta a questa famiglia di percorsi è una funzione  $S(c)$  e si ha

$$S(a) = S[x_0] = V(a)T, \quad (4.11)$$

che è un minimo locale, perché incrementare  $c$  rispetto ad  $a$  aumenta entrambi i termini nell'azione. Questa aumenta monotonamente fino a che  $c = b$  (*bounce*), dove presenta un punto stazionario:

$$\left. \frac{dS(c)}{dc} \right|_{c=b} = 0, \quad (4.12)$$

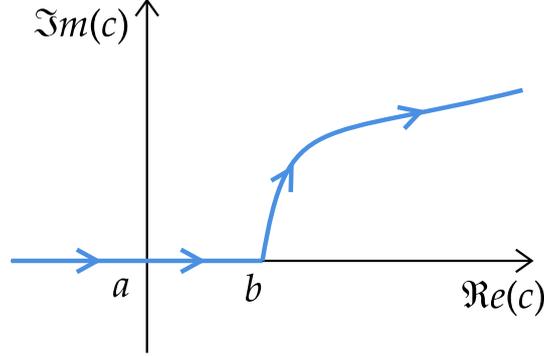
perché il *bounce* è un'altra soluzione dell'equazione del moto.

Se si aumenta ulteriormente  $c$ , l'azione diminuisce fino a  $-\infty$ , perché il percorso spende sempre più tempo nella regione in cui  $V(x) < V(a)$ ; perciò il *bounce* deve essere un massimo dal momento che non sono presenti altri punti stazionari. Ne concludiamo che il *bounce* è un minimo per i percorsi che tornano indietro in  $x = b$ , ma un massimo per quelli che tornano indietro per altri valori di  $x$ .

Tuttavia, considerando che l'azione va a  $-\infty$  per  $c$  che aumenta oltre  $c = b$ , il contributo all'integrale gaussiano in questa direzione risulta divergente. Deve essere definito per continuazione analitica a partire dal caso in cui  $x = a$  è un minimo globale; questo può essere fatto integrando non su tutto lo spazio delle configurazioni ma restringendosi alla direzione che corrisponde ad un massimo locale, cioè quella di salita massima poiché il vettore tangente per  $c = b$  è  $x_0$ , seguendo un percorso parametrizzato dalla variabile reale  $c$ . Il contributo diventa quindi

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dc e^{-\frac{S(c)}{\hbar}}, \quad (4.13)$$

che è convergente e reale se il potenziale ha un minimo assoluto in  $x = a$ . Possiamo deformare continuamente il potenziale in modo da passare da questa situazione a quella di interesse, mantenendo la convergenza dell'integrale. Questo può essere fatto modificando il contorno di integrazione nel piano complesso (si veda la figura 4.3).



**Fig. 4.3:** Il percorso di integrazione dall'asse reale può essere modificato nel piano complesso nel punto di sella  $c = b$ , dove si percorre poi una linea dove la parte immaginaria di  $S$  è costante per poter utilizzare il metodo del punto di sella (steepest descent).

Quindi, nell'approssimazione considerata,

$$\Im J = \Im \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_b^{b+i\infty} dc e^{-\frac{S(b)}{\hbar}} e^{-\frac{S''(b)(c-b)^2}{2\hbar}} = \frac{e^{-\frac{S(b)}{\hbar}}}{2\sqrt{|S''(b)|}}, \quad (4.14)$$

dove si è usato l'integrale gaussiano, ma aggiungendo un fattore  $\frac{1}{2}$  derivante dal fatto che si sta integrando solo su metà del picco gaussiano.

Quindi si trova un'espressione per  $K$  nel caso di un minimo instabile:

$$K = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{S[x_b] - S[x_0]}{2\pi\hbar m}} \frac{\sqrt{\det S''[x_0]}}{\sqrt{|\det_0 S''[x_b]|}}. \quad (4.15)$$

Possiamo a questo punto usare l'equazione (4.4) per calcolare la probabilità di decadimento per unità di tempo dello stato fondamentale metastabile:

$$\begin{aligned} \gamma &= 2\Im \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log K(T) = \\ &= 2\Im \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \log \left( \frac{N}{\sqrt{\det S''[x_0]}} e^{-\frac{S[x_0]}{\hbar}} \right) + K e^{-\frac{S[x_b] - S[x_0]}{\hbar}} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{S[x_b] - S[x_0]}{2\pi\hbar m}} \frac{\sqrt{\det S''[x_0]}}{\sqrt{|\det_0 S''[x_b]|}} e^{-\frac{S[x_b] - S[x_0]}{\hbar}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

e questo risultato può essere messo in relazione con

$$\gamma = Ae^{-B}. \quad (4.17)$$

Notiamo che

- il prefattore  $A$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, come atteso:

$$[A] = \text{massa}^{-1/2} \times \left( \frac{\text{massa}}{\text{tempo}^2} \right)^{1/2} = \text{tempo}^{-1} \quad (4.18)$$

- l'esponente è dato da

$$B = \frac{S[x_b] - S[x_0]}{\hbar} \quad (4.19)$$

e può essere calcolato in termini del potenziale usando la conservazione dell'energia:

$$-\frac{1}{2}m \left( \frac{dx_b}{d\tau} \right)^2 + V(x_b) = V(a) \quad (4.20)$$

Per l'esponente si trova quindi

$$S[x_0] = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \left[ \frac{1}{2}m \left( \frac{dx_0}{d\tau} \right)^2 + V(x_0) \right] = V(a)T \quad (4.21)$$

e

$$\begin{aligned} S[x_b] - S[x_0] &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \left[ \frac{1}{2}m \left( \frac{dx_b}{d\tau} \right)^2 + V(x_b) \right] = \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau 2[V(x_b) - V(a)]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

L'ultimo integrale si può trasformare in un integrale spaziale utilizzando l'equazione (4.20) e ottenendo infine

$$B = \frac{2}{\hbar} \int_a^b dx \sqrt{2m[V(x) - V(a)]}. \quad (4.23)$$

# 5

## Tunnelling con molti gradi di libertà

*If the doors of perception were cleansed every thing would appear to man as it is, Infinite. For man has closed himself up, till he sees all things thro' narrow chinks of his cavern.*

– William Blake

I risultati dei capitoli precedenti possono essere estesi dal caso unidimensionale a sistemi con  $N$  gradi di libertà. Possiamo organizzarne le coordinate generalizzate in un vettore  $N$ -dimensionale  $\mathbf{q}$ , cui corrispondono le velocità generalizzate  $\dot{\mathbf{q}}$ . La lagrangiana può quindi essere scritta come

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \left| \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} \right|^2 - V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{q}}(t)|^2 - V(\mathbf{q}). \quad (5.1)$$

Assumiamo che il potenziale abbia un minimo locale in  $\mathbf{q} = \mathbf{a}$  e che il sistema si trovi inizialmente nello stato fondamentale nel minimo, con energia  $E$  tale che  $E - V(\mathbf{a}) \sim \hbar$ . A causa dell'effetto tunnel, esiste una probabilità non nulla  $\gamma$  per unità di tempo che il sistema penetri la barriera di potenziale ed emerga in un punto  $\mathbf{q} = \mathbf{b}$  su una superficie  $\Sigma = \{\mathbf{q} | V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{a})\}$  dello spazio delle configurazioni. Si può dimostrare che

$$\gamma = Ae^{-B}, \quad (5.2)$$

con  $B$  dato da

$$B = \frac{2}{\hbar} \int_0^{s_f} ds \sqrt{2[V(\mathbf{q}(s)) - E]}, \quad (5.3)$$

in analogia con il caso unidimensionale; si è parametrizzato il percorso con  $\mathbf{q}(s)$ , che rappresenta i percorsi che iniziano nel minimo locale in  $\mathbf{a}$  e terminano in  $\mathbf{b} \in \Sigma$ :

$$\begin{cases} \mathbf{q}(0) = \mathbf{a} \\ \mathbf{q}(s_f) = \mathbf{b}, \end{cases} \quad (5.4)$$

normalizzato in modo tale che

$$\left| \frac{d\mathbf{q}(s)}{ds} \right|^2 = \sum_i \frac{dq_i(s)}{ds} \frac{dq_i(s)}{ds} = 1. \quad (5.5)$$

Il tunnelling avviene lungo il percorso o i percorsi  $\mathbf{q}(s)$  che massimizzano la probabilità  $\gamma$ , ovvero che minimizzano l'esponente  $B$ . Il problema è analogo al problema variazionale classico di trovare la traiettoria del moto senza fare riferimento alla dipendenza temporale delle coordinate generalizzate, che si risolve grazie al principio di Maupertuis. Questo consiste nello scrivere l'azione del sistema come funzione della configurazione  $\mathbf{q}(t)$  al tempo  $t$  e del tempo stesso:

$$S(\mathbf{q}(t), t) = \int_{t_0}^t dt' \mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}(t'), \mathbf{q}(t')), \quad (5.6)$$

dove  $\mathbf{q}(t')$  è una soluzione delle equazioni del moto con punto iniziale  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{a}$ . Se l'energia del sistema è conservata, si ha

$$S(\mathbf{q}(t), t) = S_0(\mathbf{q}(t)) - E(t - t_0), \quad (5.7)$$

dove

$$S_0(\mathbf{q}(t)) = \sum_i \int_{a_i}^{q_i} dq'_i p_i(\mathbf{q}'), \quad (5.8)$$

viene detta azione ridotta e

$$p_i(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (5.9)$$

è il momento coniugato di  $q_i$ . Si può dimostrare che  $S_0(\mathbf{q}(t))$  è stazionaria per variazioni di  $\mathbf{q}(t')$  rispetto a una soluzione  $\mathbf{q}'$  delle equazioni del moto (con  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{q}(t)$  fissi, ma  $t$  variabile). Inoltre si può vedere che

$$S_0(\mathbf{q}(t)) = \int_0^{s_f} ds \sqrt{2[E - V(\mathbf{q}(s))]} \quad (5.10)$$

Le differenze con il problema di minimizzare  $B$  sono due:

1. le quantità sotto la radice nelle equazioni (5.3) e (5.10) hanno segno opposto; questo è in accordo con il problema che stiamo studiando poiché mentre la soluzione delle equazioni del moto consiste di traiettorie permesse classicamente (ovvero con energia  $E \geq V(\mathbf{q})$ ), l'esponente  $B$  prende in considerazione la regione che classicamente è vietata, in cui cioè  $E \leq V(\mathbf{q})$ ;
2. minimizzare  $B$  nell'equazione (5.3) significa farlo sia rispetto al percorso  $\mathbf{q}(t)$  che rispetto al punto di arrivo  $\mathbf{b}$ , mentre nell'equazione (5.10) si minimizza  $S_0(\mathbf{q}(t))$  tenendo fisso l'estremo  $\mathbf{q}(t)$ .

Limitandosi a considerare il primo punto, notiamo che è possibile ricondursi al problema classico spostandosi su una variabile temporale immaginaria

$$t = i\tau, \quad (5.11)$$

come è stato fatto nei capitoli precedenti. La lagrangiana diventa quindi

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{dq_i}{d\tau} \frac{dq_i}{d\tau} - V(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 - V(\mathbf{q}) \quad (5.12)$$

con momenti coniugati a  $q_i$  dati da

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{q}_i. \quad (5.13)$$

Perciò l'hamiltoniana è

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{dq_i}{d\tau} \frac{dq_i}{d\tau} + V(\mathbf{q}) = E, \quad (5.14)$$

mentre l'azione viene sempre definita come l'integrale della lagrangiana:

$$S(\mathbf{q}(\tau), \tau) = - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}(\tau'), \mathbf{q}(\tau')) \quad (5.15)$$

e si può scrivere in funzione dell'azione ridotta come

$$S(\mathbf{q}(\tau), \tau) = S_0(\mathbf{q}(\tau)) + E(\tau - \tau_0), \quad (5.16)$$

dove

$$S_0(\mathbf{q}(\tau)) = - \sum_i \int_{a_i}^{q_i(\tau)} dq_i p_i = \int_0^{s_f} ds \sqrt{2[V(\mathbf{q}(s)) - E]} = \frac{\hbar}{2} B. \quad (5.17)$$

Perciò i percorsi che minimizzano l'esponente  $B$  sono le soluzioni dell'equazione del moto con tempo euclideo

$$\frac{d^2 q_i}{d\tau^2} = \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_i}, \quad (5.18)$$

con  $\mathbf{q}(\tau_0) = \mathbf{a}$  e  $\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{b}$ , dove  $\mathbf{b}$  è un punto generico per il quale  $V(\mathbf{b}) = V(\mathbf{a})$ .

Ci chiediamo ora come minimizzare il percorso rispetto al suo estremo  $\mathbf{b}$ ; notiamo che l'azione ridotta e quindi l'esponente  $B$  sono automaticamente minimizzati per variazioni di  $\mathbf{b} = \mathbf{q}(\tau)$  del percorso  $\mathbf{q}(s)$ . Infatti

$$\frac{\partial}{\partial b_i} S_0(\mathbf{b}) = -\sqrt{2[V(\mathbf{b}) - E]} \frac{dx_i(s)}{ds} \Big|_{s=s_f}, \quad (5.19)$$

che è nullo per ogni punto  $\mathbf{b} \in \Sigma$ . Osserviamo che l'equazione (5.18) può essere interpretata come un'equazione del moto con tempo reale in un potenziale invertito  $V'(\mathbf{q}) = -V(\mathbf{q})$  che ha ora un massimo locale in  $\mathbf{q} = \mathbf{a}$ . Possiamo elencare alcune caratteristiche generali della soluzione, indipendenti dalla forma specifica del potenziale:

1. la soluzione  $\mathbf{q}(\tau)$  può iniziare nel punto  $\mathbf{a}$  solo per un tempo  $\tau_0 = -\frac{T}{2} \rightarrow -\infty$ ; infatti, avendo un minimo in  $\mathbf{q} = \mathbf{a}$ , si ha che

$$V(\mathbf{q}) = E + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}(\mathbf{a})(q_i - a_i)(q_j - a_j) + \mathcal{O}(|\mathbf{q} - \mathbf{a}|^3), \quad (5.20)$$

dove la matrice  $V_{ij}(\mathbf{a})$  è definita positiva con autovalori  $\omega_i^2$ . È quindi possibile ruotare nello spazio delle configurazioni per ottenere le equazioni del moto in prossimità di  $\mathbf{q} = \mathbf{a}$  nella forma

$$q_i(\tau) - a_i = A_i e^{\omega_i \tau} + B_i e^{-\omega_i \tau}; \quad (5.21)$$

2. poiché  $\tau_0 = -\infty$ , è possibile traslare nel tempo in modo che  $\mathbf{q} = \mathbf{b}$  al tempo  $\tau = 0$ ;  
 3. la soluzione raggiunge  $\mathbf{q} = \mathbf{b}$  con velocità nulla. Infatti, dall'equazione (5.14) si trova

$$\left| \frac{d\mathbf{q}(\tau)}{d\tau} \right|^2 = 2[V(\mathbf{q}) - E] \xrightarrow{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{b}} 0 \quad (5.22)$$

poiché  $V(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{b}} E$ .

L'esponente  $B$  può essere messo in relazione con l'azione di una soluzione delle equazioni del moto utilizzando l'invarianza temporale, secondo cui se  $\mathbf{q}(\tau)$  è una soluzione (con  $\tau \in \mathbb{R}$ ), allora anche  $\mathbf{q}(-\tau)$  è una soluzione con la stessa azione. Quindi

$$\mathbf{q}_b(\tau) = \mathbf{q}(\tau) + \mathbf{q}(-\tau) \quad (5.23)$$

è soluzione con

$$\begin{cases} \mathbf{q}_b(\pm\infty) = \mathbf{a} \\ \mathbf{q}_b(0) = \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{q}}_b(0) = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

e azione classica

$$S[\mathbf{q}_b] = 2S[\mathbf{q}] = 2S_0[\mathbf{q}] + ET. \quad (5.25)$$

In analogia con il caso unidimensionale, tale soluzione viene chiamata soluzione di *bounce*, perché ne ha l'andamento caratteristico. Anche la soluzione costante

$$\mathbf{q}_0(\tau) = \mathbf{a} \quad (5.26)$$

è soluzione delle equazioni del moto con le stesse condizioni al contorno, con azione corrispondente

$$S[\mathbf{q}_0] = ET. \quad (5.27)$$

Si ha quindi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (S[\mathbf{q}_b] - S[\mathbf{q}_0]) = \lim_{T \rightarrow \infty} (2S_0[\mathbf{q}]) = \hbar B. \quad (5.28)$$

Poiché il potenziale è definito a meno di una costante, possiamo sceglierlo in modo tale che  $V(\mathbf{a}) = E = 0$ ; così si ha che  $S = S_0$  e  $S[\mathbf{q}_b] = \hbar B$  per tutte le soluzioni con energia nulla.

## 6

# Conclusioni

Nell'elaborato proposto è stata esposta la formulazione ad integrali di percorso della meccanica quantistica, seguendo i ragionamenti proposti da Feynman. Questo formalismo risulta in certi casi più intuitivo di quello canonico, anche se spesso richiede calcoli più laboriosi; si tratta in ogni caso di risultati importanti, poiché facilmente generalizzabili alla teoria quantistica dei campi.

Successivamente è stato studiato il fenomeno del *tunnelling* in meccanica quantistica, nei due casi specifici di un potenziale con due minimi degeneri e di quello con un minimo locale; per fare ciò è stato sfruttato il formalismo degli integrali sui cammini.

Questo studio può essere generalizzato alla teoria dei campi dove il potenziale diventa una funzione del campo considerato  $V(\phi)$  e i minimi locali vengono considerati *false vacuum*, mentre solo il minimo globale può essere considerato un *true vacuum*, poiché costituisce lo stato fondamentale del sistema. Anche in questo caso si troverà una formula per la probabilità di decadimento da uno stato  $\phi_{FV}$  a  $\phi_{TV}$  che si può scrivere, in analogia con quanto trovato nei capitoli precedenti, come

$$\gamma = Ae^{-B}. \quad (6.1)$$

L'importanza dello studio effettuato risiede nel fatto che anche in questo caso i due parametri  $A$  e  $B$  possono essere ricavati da generalizzazioni degli argomenti già proposti.

Questi concetti possono inoltre essere applicati alla cosmologia, in quanto lo stato di "vuoto" in cui si trova attualmente l'universo in cui viviamo potrebbe non essere un minimo totale dell'energia, bensì un minimo locale e in tal caso si tratterebbe di un livello metastabile con probabilità  $\gamma$  per unità di tempo di decadere al vuoto vero.

*The possibility that we are living in a false vacuum has never been a cheering one to contemplate. Vacuum decay is the ultimate ecological catastrophe; in the new vacuum there are new constants of nature; after vacuum decay, not only is life as we know it impossible, so is chemistry as we know it.*

– Sidney Coleman, *Gravitational effects on and of vacuum decay*, 1980

# Bibliografia

- [1] Richard P. Feynman, Albert R. Hibbs (1965) *Quantum mechanics and path integrals*, Dover Publications.
- [2] Riccardo Rattazzi (2011) *The path integral approach to quantum mechanics, lecture notes for quantum mechanics*.
- [3] Sidney Coleman (1977) *Aspects of symmetry*, Cambridge University Press.
- [4] Federica Devoto, Simone Devoto, Luca Di Luzio, Giovanni Ridolfi (2022) *False vacuum decay: an introductory review*.