

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITA' DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Varietà Differenziali & Teorema di Whitney

Tesi di Laurea in Geometria e Topologia Differenziale

Relatore:
Dott. Marco Moraschini

Presentata da:
Sara Andreis

Anno Accademico 2022/2023

Alla mia famiglia

Indice

1	Introduzione	1
2	Preliminari	3
2.1	Preliminari Topologici	3
2.1.1	Proiezione Stereografica	5
2.1.2	Compattificazione di Alexandroff	5
2.2	Preliminari Analitici	6
2.2.1	Condizioni di Cauchy-Riemann	7
3	Varietà Differenziabili	8
3.1	Varietà liscia	8
3.2	Esempi e costruzioni di varietà	10
4	Spazio Tangente, Immersioni & Sommersioni	11
4.1	Vettori Tangenti & Differenziale	11
4.2	Immersioni e Sommersioni	13
5	Il Teorema di Sard	14
5.1	Insiemi di misura nulla su una varietà	14
5.2	Teorema di Sard	16
5.3	Il Teorema Fondamentale dell'Algebra	20
6	Teorema di embedding di Whitney	22
6.1	Partizioni dell'unità	22
6.2	Teorema di embedding di Whitney	24
6.3	Applicazioni Teorema di embedding di Whitney	26
	Bibliografia	29

Capitolo 1

Introduzione

La nozione di *varietà differenziale* (o *liscia*) è il fulcro della geometria differenziale che si occupa dello studio di queste strutture tramite l'analisi matematica. La teoria delle varietà differenziali serve a trasferire sugli spazi topologici le proprietà, i concetti e gli strumenti del calcolo differenziale. Questa tesi si propone di studiare nel dettaglio questa struttura matematica, analizzando i concetti fondamentali che ne sottendono arrivando a dimostrare tre Teoremi importanti per lo studio di questa materia: *il Teorema di Sard, il Teorema Fondamentale dell'Algebra e il Teorema di embedding di Whitney*. Grazie alla definizione di varietà liscia sarà possibile introdurre la nozione di *mappa liscia*, cioè il corretto morfismo tra varietà lisce. Tuttavia, per poter utilizzare le varietà differenziali in modo preciso, abbiamo bisogno di fornire anche la definizione di *spazio tangente alla varietà in un punto*; per far ciò dovremo innanzitutto estendere la nozione di vettore tangente a un punto in \mathbb{R}^n a quella di *vettore tangente a una varietà liscia* tramite il concetto di *operatore di derivazione* e successivamente potremo introdurre gli spazi tangenti.

Studiando le mappe lisce, si possono capire diverse loro proprietà guardando solo il loro differenziale. In particolare, un modo importante nello studio delle mappe lisce è dato dal rango del loro differenziale. Sarà possibile definire quindi tre tipi di mappe lisce in base a come è fatto il suo differenziale, avremo quindi: le *sommersioni* (quando il differenziale è suriettivo in ogni punto), le *immersioni* (quando il differenziale è iniettivo in ogni punto) e gli *embedding* (immersioni lisce iniettive, omeomorfismi nell'immagine). Grazie a queste nozioni è stato possibile fare un passo fondamentale nello studio delle varietà lisce: il Teorema di Sard. Introdotto precedentemente come il Lemma di Morse-Sard, è stato dimostrato da Anthony P. Morse nel 1939 e generalizzato da Arthur Sard nel 1942. Il Teorema di Sard ci dice che l'insieme dei valori critici di una funzione liscia ha misura nulla. Per comprenderlo sarà quindi necessario definire i *valori critici* di una

mappa liscia e successivamente estendere la nozione di insieme di misura nulla in \mathbb{R}^n a *insiemi di misura nulla su una varietà liscia* in cui non esiste la nozione di volume. La teoria dei valori regolari e dei valori critici è fondamentale nella topologia differenziale, infatti si può utilizzare per dimostrare il Teorema Fondamentale dell'Algebra che dice che ogni polinomio complesso di grado positivo ha almeno uno zero.

Per concludere questo elaborato mostreremo il Teorema di embedding di Whitney, formulato da Hassler Whitney nel 1936. Questo Teorema fondamentale per la geometria differenziale dimostra che ogni varietà liscia compatta può essere embeddata in un appropriato spazio euclideo. Le applicazioni di questo teorema sono diverse, si può utilizzare per mostrare l'esistenza di un embedding del *Toro* in \mathbb{R}^5 o della *Bottiglia di Klein* in \mathbb{R}^5 ; oppure si può parlare di *intorni tubolari* che però non verranno discussi in questa tesi. Per approfondire i concetti studiati in questo elaborato, si può fare riferimento ai testi di Glen Bredon [1], John Lee [5] e John Milnor[6]

Capitolo 2

Preliminari

In questo capitolo richiameremo alcuni concetti fondamentali che verranno utilizzati in questo elaborato, quindi concetti utili per la sua comprensione. Dividiamo le nozioni in topologiche e analitiche.

2.1 Preliminari Topologici

Definiamo, in questa sezione, le nozioni topologiche basilari e vediamo alcuni risultati che verranno poi utilizzati nei capitoli successivi.

Definizione 2.1 (mappa continua). Siano X, Y due spazi topologici e $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione. Allora f si dice *continua in* $x_0 \in X$ se per ogni V intorno di $f(x_0)$ esiste U intorno di x_0 tale che $f(U) \subset V$; f si dice *continua* se per ogni A aperto in Y , $f^{-1}(A)$ è un insieme aperto in X .

Definizione 2.2 (mappa aperta). Una funzione $f: X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici è *aperta* se per ogni insieme aperto A di X la sua immagine $f(A)$ è aperta in Y .

Definizione 2.3 (mappa chiusa). Una funzione $f: X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici è *chiusa* se per ogni insieme chiuso F di X la sua immagine $f(F)$ è chiusa in Y .

Definizione 2.4 (omeomorfismo). Un *omeomorfismo* fra due spazi topologici X e Y è una funzione continua e biettiva $f: X \rightarrow Y$ tale che la sua inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ è anch'essa continua.

Equivalentemente, un *omeomorfismo* è una mappa biunivoca $f: X \rightarrow Y$ tra spazi topologici tale che

$$A \subset X \text{ aperto se e solo se } f(A) \subset Y \text{ è aperto}$$

Definizione 2.5 (compattezza per ricoprimenti). Uno spazio topologico X si dice *compatto* se da ogni suo ricoprimento si può estrarre una sottofamiglia finita che è ancora un ricoprimento di X .

Definizione 2.6 (spazio di Hausdorff). Uno spazio topologico X si dice *di Hausdorff* se soddisfa la seguente proprietà:

per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$, esistono due intorni aperti U, V di x, y tali che $U \cap V = \emptyset$.

In altre parole uno spazio topologico è di Hausdorff se per ogni due punti distinti si possono sempre trovare intorni aperti disgiunti.

Definizione 2.7 (spazio secondo numerabile). Uno spazio topologico si dice *secondo numerabile* se la sua topologia ammette una base numerabile.

Definizione 2.8 (spazio localmente compatto). Uno spazio topologico X si dice *localmente compatto* se ogni punto $x \in X$ ammette una base di intorni costituita di insiemi compatti.

Definizione 2.9 (ricoprimento aperto). Sia X spazio topologico, un *ricoprimento aperto* \mathcal{U} di X è una famiglia di aperti tali che X è contenuto nell'unione degli elementi di \mathcal{U} .

Definizione 2.10 (ricoprimento localmente finito). Un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di uno spazio topologico X si dice *localmente finito* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno V di x tale che il numero degli U_i che intersecano V è finito.

Definizione 2.11 (spazio paracompatto). Uno spazio topologico X si dice *paracompatto* se ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di X ammette un raffinamento localmente finito.

Definizione 2.12 (spazio proiettivo reale). Sia \mathbb{R}^{n+1} lo spazio euclideo $n+1$ -dimensionale. Lo *spazio proiettivo* n -dimensionale $\mathbb{R}P^n$ è definito come il quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sotto la relazione d'equivalenza $x \sim y$ se e solo se $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Proposizione 2.13. [Proposizione 12.9 Capitolo 1 di [1]]. *Se X spazio topologico paracompatto e $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto e localmente finito di X , allora esiste un ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i \in I}$ tale che $\overline{V_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$.*

Proposizione 2.14. [Proposizione A.16 di [5]]. *Sia X uno spazio topologico secondo numerabile. Ogni ricoprimento aperto di X ha un sottoricoprimento numerabile.*

Teorema 2.15. [Teorema 7.8 Capitolo 1 di [1]]. *Siano X uno spazio topologico compatto, Y uno spazio topologico di Hausdorff e $f: X \rightarrow Y$ una funzione continua e biettiva. Allora f è un omeomorfismo.*

2.1.1 Proiezione Stereografica

Per *proiezione stereografica* si intende la proiezione dei punti di una sfera da un punto N della sfera stessa al piano, solitamente si prende N come il polo nord della sfera.

Consideriamo quindi la sfera tangente al piano $\{z = 0\}$ in \mathbb{R}^3 :

$$S^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}.$$

La proiezione stereografica dal polo nord è la funzione $f : S - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che se $P \in S$ allora $N, P, f(P)$ sono allineati (come mostrato nella figura 2.1).

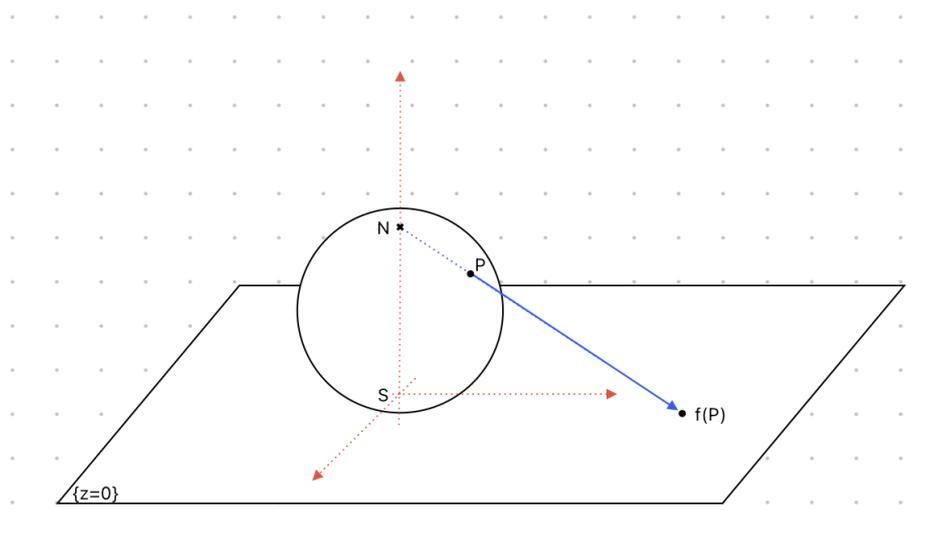


Figura 2.1: proiezione stereografica

2.1.2 Compattificazione di Alexandroff

In topologia una *compattificazione* è un processo mediante il quale è possibile estendere uno spazio topologico in modo da renderlo compatto. Esistono diversi tipi di *compattificazione*, per la stesura di questo elaborato ci è utile comprendere la *compattificazione di Alexandroff*.

Definizione 2.16 (compattificazione di Alexandroff). Sia (X, Γ) uno spazio topologico con la sua topologia associata. Allora la *compattificazione di Alexandroff* di (X, Γ) è lo spazio $(X^\infty, \Gamma^\infty)$ dove

- $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ dove ∞ non è un elemento di X ;
- $\Gamma^\infty = \Gamma \cup \{V \cup \{\infty\} \mid X \setminus V \text{ chiuso e compatto in } X\}$.

Osservazione 2.17. In altre parole, $A \subset X^\infty$ è aperto se e solo se $A \in \Gamma$ oppure $A^c \subset X$ è compatto e chiuso in X . Gli intorni di ∞ sono invece i complementari degli insiemi chiusi e compatti di X . Inoltre si dimostra facilmente che X^∞ è compatto. La dimostrazione è rimandata a [4] pagina 71.

Esempio 2.18 (Compattificazione di Alexandroff di \mathbb{R}^2). *La sfera S^2 è la compactificazione di Alexandroff del piano \mathbb{R}^2 . Infatti usando la proiezione stereografica \mathbb{R}^2 è omeomorfo a $S^2 \setminus \{N\}$, dove N = polo nord.*

Definizione 2.19 (mappa propria). Una funzione continua $f: X \rightarrow Y$ fra spazi topologici si dice *propria* se la controimmagine $f^{-1}(K)$ di ogni sottoinsieme compatto K di Y è un insieme compatto in X .

Proposizione 2.20. [Teorema 11.5 Capitolo 1 di [1]] *Sia $f: X \rightarrow Y$ una mappa propria tra due spazi topologici localmente compatti e di Hausdorff. Allora f è chiusa.*

2.2 Preliminari Analitici

Vediamo ora alcuni concetti analitici utili per la comprensione di questo elaborato.

Definizione 2.21 (funzione differenziabile). Una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definita su un insieme aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ si dice *differenziabile* in un punto $x_0 \in U$ se esiste un'applicazione lineare $L_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che valga:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_0(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Definizione 2.22 (supporto). Siano X uno spazio topologico, Y uno spazio vettoriale e $f: U \subset X \rightarrow Y$. Definiamo il *supporto di f* l'insieme

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}}$$

Definizione 2.23 (insieme convesso). In uno spazio euclideo un *insieme convesso* è un insieme nel quale per ogni coppia di punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme.

Definizione 2.24 (funzione Lipschitziana). Una funzione $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice *Lipschitziana su U* se esiste una costante $k \geq 0$ tale che:

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}} \leq k \text{ per ogni } x, y \in U, x \neq y.$$

La più piccola costante $k \geq 0$ che soddisfa la disuguaglianza è detta *costante di Lipschitz*.

Proposizione 2.25 (Stima di Lipschitz per le funzioni C^1). [Proposizione C.29 di [5]]. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ funzione di classe C^1 . Allora f è Lipschitziana su ogni sottoinsieme compatto K di U . La costante di Lipschitz può essere presa come il $\sup_{x \in K} |Df(x)|$.

2.2.1 Condizioni di Cauchy-Riemann

In analisi complessa le *condizioni di Cauchy-Riemann* sono due equazioni alle derivate parziali che esprimono una condizione necessaria affinché una funzione sia olomorfa.

Definizione 2.26 (funzione olomorfa). Sia U un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} . Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa se per ogni punto $z_0 \in U$ è derivabile in senso complesso in z_0 .

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione definita su un aperto D di \mathbb{C} , chiameremo

$$A(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$$

le funzioni rappresentanti la parte reale e la parte immaginaria della funzione f , quindi sarà possibile scrivere

$$f(x + iy) = A(x, y) + iB(x, y).$$

Proposizione 2.27 (Condizioni di Cauchy-Riemann). Se f è una funzione olomorfa su D allora $A(x, y)$ e $B(x, y)$ hanno derivate parziali prime che verificano la seguente condizione

$$A_x = B_y \quad \text{e} \quad A_y = -B_x.$$

Dimostrazione. Sappiamo che f è olomorfa in D quindi possiamo calcolare il limite $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(z+u) - f(z)}{u}$ dove $u = h + ik$. Calcoliamo il limite prima lungo la retta orizzontale quindi per $u = h$ e successivamente lungo la retta verticale quindi per $u = ik$ e otteniamo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = A_x(x, y) + iB_x(x, y)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} = B_y(x, y) - iA_y(x, y)$$

Quindi essendo f derivabile abbiamo

$$f'(z) = A_x(x, y) + iB_x(x, y) = B_y(x, y) - iA_y(x, y)$$

da cui

$$A_x = B_y \quad \text{e} \quad A_y = -B_x.$$

□

Capitolo 3

Varietà differenziali

In questo capitolo introdurremo la nozione di *varietà liscia*, che in termini semplici è uno spazio che *localmente assomiglia* a un qualche spazio Euclideo \mathbb{R}^n , su cui si possono fare *calcoli*. Le varietà differenziali sono gli elementi di base in geometria differenziale. La teoria matematica che si occupa di queste strutture, è l'incontro tra *analisi* e *topologia*: serve infatti a trasferire sugli *spazi topologici* i concetti e gli strumenti del *calcolo differenziale*.

3.1 Varietà liscia

Una *varietà topologica* è uno spazio di Hausdorff dove ogni punto ha un intorno omeomorfo a uno spazio euclideo n -dimensionale (o equivalentemente a un sottospazio di uno spazio euclideo n -dimensionale). La definizione topologica di varietà ci è utile per studiare le sue proprietà topologiche come compattezza, connessione, “numero di buchi”. Tuttavia, su una varietà così definita ci è impossibile fare calcoli. Infatti, per esempio, potremmo anche dare una definizione di derivata di una funzione su una varietà ma otterremmo che non abbiamo invarianza per omeomorfismo. In questo capitolo introdurremo quindi un tipo diverso di varietà: le *varietà lisce* (o *differenziabili*). Questa definizione ci renderà possibile parlare di derivata di funzioni su varietà, di curve, e di mappe tra le varietà che preservano la struttura differenziale. Daremo anche la definizione di *funzioni lisce su varietà* e di *varietà orientata*.

Definizione 3.1 (varietà liscia). Una *varietà liscia n -dimensionale* M^n è uno spazio topologico di Hausdorff, secondo numerabile a cui è associato un insieme di *carte* tale che

1. Una carta è un omeomorfismo $\phi : U \rightarrow U'$, con U un aperto di M^n e U' un aperto di \mathbb{R}^n ;

2. Ogni punto $x \in M$ è nel dominio di una qualche carta;
3. Date due carte $\phi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ e $\psi : V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$ tali che $U \cap V \neq \emptyset$, la funzione $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ è C^∞ . Questa funzione è chiamata *funzione di transizione*.

Un insieme che soddisfi (1), (2) e (3) è detto *atlante*. Diremo che un atlante è *massimale* se non è contenuto propriamente in un altro atlante.

Definizione 3.2 (mappa liscia). Una *mappa liscia* (o C^∞) è una funzione $f : M \rightarrow N$ tra due varietà lisce tale che per ogni carta ϕ di M e ψ di N vale che $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è liscia dove è definita.

Definizione 3.3 (diffeomorfismo). Siano M e N due varietà. Una mappa differenziabile $f : M \rightarrow N$ è detta *diffeomorfismo* se è una biezione e se anche la sua inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ è differenziabile.

Osservazione 3.4. Poichè le funzioni di transizione sono composizione di due omeomorfismi saranno anch'esse omeomorfismi.

In realtà in una varietà liscia le funzioni di transizione sono diffeomorfismi. Infatti, basta vedere che ognuna delle mappe sia C^∞ ; una volta provato quello, abbiamo che $\phi \circ \psi^{-1}$ è un diffeomorfismo perché l'inversa è data da $\psi \circ \phi^{-1}$ che è una delle funzioni di transizione che abbiamo già mostrato essere C^∞ .

Esempio 3.5. Abbiamo definito la nozione di atlante massimale perchè in generale ci possono essere più atlanti che danno la stessa struttura liscia. Per esempio i seguenti atlanti su \mathbb{R}^n

$$A_1 = \{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\} \quad e \quad A_2 = \{(B_1(x), id_{B_1(x)}) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

sono differenti ma le funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono lisce rispetto a entrambi gli atlanti se e solo se sono C^∞ . Quindi esiste $A_{max} = \bigcup A \supset A_1, A_2$ atlante di M .

Definizione 3.6 (varietà orientata). Una *varietà n -dimensionale orientata* è una varietà liscia dotata di un atlante tale che per ogni coppia di carte ϕ, ψ nell'atlante, lo Jacobiano della funzione del cambio di coordinate $\phi \circ \psi^{-1}$ abbia determinante positivo in tutti i punti del dominio.

L'atlante massimale rispetto a questa proprietà è chiamato un' *orientazione della varietà*. Una varietà che ha un atlante con questa proprietà è chiamata *orientabile*.

Osservazione 3.7. Notiamo che una varietà connessa orientabile ha esattamente due orientazioni, le carte di una hanno il determinante dello Jacobiano opposto a quello delle carte dell'altra orientazione.

3.2 Esempi e costruzioni di varietà

In questa sezione vedremo due esempi di varietà lisce entrambi verranno costruiti utilizzando le carte.

Esempio 3.8 (Toro). Consideriamo il toro T^2 definito come il quoziente di \mathbb{R}^2 con la relazione di equivalenza che mette in relazione due punti se le loro coordinate differiscono per numero intero. Sia $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ la proiezione canonica. Vogliamo dare al toro una struttura liscia, quindi dobbiamo definire le carte.

Innanzitutto vediamo che π è un *rivestimento topologico*. Un rivestimento topologico è una funzione continua e suriettiva $p: Y \rightarrow X$ tra spazi topologici tale che per ogni $x \in X$ esiste U intorno aperto di x la cui controimmagine in Y è unione di aperti disgiunti, tali che restringendo p su ciascuno di questi si ottiene un omeomorfismo su U .

Allora π risulta essere un omeomorfismo locale. Quindi preso $U \subset \mathbb{R}^2$ sufficientemente piccolo avrò che U è omeomorfo alla sua immagine $\pi(U) = U'$. Quindi l'inversa di $\pi|_U$ può essere presa come carta. Se ϕ e ψ sono due carte come prima definite, allora la composizione $\phi \circ \psi^{-1}$ è solo una traslazione quindi è C^∞ . Abbiamo così definito le carte sul toro e quindi una struttura liscia. (Come mostrato nella figura 3.1.)

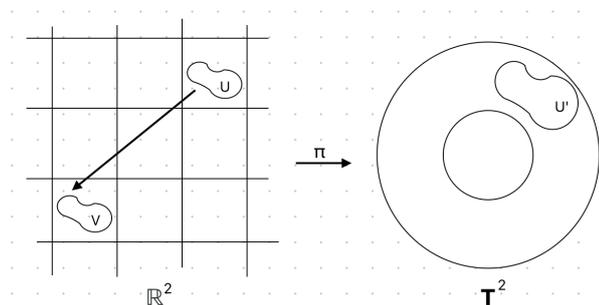


Figura 3.1: struttura liscia sul toro

Esempio 3.9 (Sfera). Prendiamo la sfera di raggio $1/2$ in \mathbb{R}^3 tangente al piano $\{z = 0\}$ sull'origine, e sia il polo nord il punto $(0,0,1)$ e il polo sud l'origine. Consideriamo la *proiezione stereografica* da $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ al piano, cioè prendendo la retta da $(0,0,1)$ a un altro punto della sfera e considerando l'intersezione tra la retta e il piano $\{z = 0\}$ (come spiegato nella Sezione 2.1.1). La carta ϕ è la mappa che associa al punto della sfera la proiezione sul piano (come mostrato nella figura 2.1). Per una seconda carta ψ prendiamo una proiezione simile ma dall'origine al piano $\{z = 1\}$ e trasliamo successivamente la proiezione sul piano $\{z = 0\}$. Abbiamo che $\psi \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ data da $x \mapsto x/||x||^2$ è una mappa C^∞ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Queste carte definiscono quindi un atlante su S^2 , che risulta così una varietà liscia.

Capitolo 4

Spazio Tangente, Immersioni & Sommersioni

Per dare senso al calcolo sulle varietà abbiamo bisogno di introdurre la nozione di *spazio tangente a una varietà in un punto* che possiamo pensare come una sorta di *modello lineare* che approssimi la varietà in quel punto. Dopo aver definito i *vettori tangenti a una varietà* introdurremo la nozione di *immersione liscia*, di *sommersione liscia* e di *embedding liscio*.

4.1 Vettori Tangenti & Differenziale

Ricordiamo che i *vettori tangenti a un punto in \mathbb{R}^n* possono essere visualizzati come “freccie” che partono da quel punto con una direzione e una lunghezza data. Esistono diversi modi per definire lo spazio tangente a una varietà liscia. Poichè la definizione di varietà lisce è costruita intorno all’idea di identificare quali funzioni sono lisce, per generalizzare i vettori tangenti in \mathbb{R}^n dobbiamo considerare le *derivate direzionali* delle funzioni lisce lungo di esse. L’osservazione fondamentale è che il processo di prendere derivate direzionali ci fornisce una naturale corrispondenza biettiva tra i vettori tangenti in \mathbb{R}^n e gli *operatori di derivazione* (mappe lineari tra $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e \mathbb{R}). Definiremo quindi i *vettori tangenti a una varietà liscia M* come l’operatore di derivazione di $C^\infty(M)$ in un punto. Infine definiremo il *fibrato tangente* che possiamo pensare come l’unione di tutti gli spazi tangenti a tutti i punti della varietà liscia, incollati assieme per formare questa nuova varietà.

Definizione 4.1 (operatore di derivazione e spazio tangente). Sia M una varietà liscia e p un punto di M . Una mappa lineare $v: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ è chiamato *operatore di derivazione*

in p se, per ogni $f, g \in C^\infty(M)$ soddisfa:

$$v(f \circ g) = f(p) \cdot v(g) + g(p) \cdot v(f)$$

L'insieme di tutti gli operatori di derivazione di $C^\infty(M)$ in p , denotato con T_pM , è uno spazio vettoriale chiamato *spazio tangente a M in p* . Gli elementi di T_pM sono chiamati *vettori tangenti in p* .

Per mettere in relazione i vettori tangenti astratti a una varietà e quelli geometrici in \mathbb{R}^n , dobbiamo osservare come essi vengano influenzati dalle mappe lisce. Nel caso di mappe lisce tra spazi euclidei, la derivata totale (rappresentata dallo Jacobiano) in un punto è la mappa lineare che meglio approssima il suo comportamento vicino a quel punto. Nel caso delle varietà lisce prendiamo il *differenziale*, una mappa lineare fra gli spazi tangenti (infatti non ha senso parlare di mappe lineari fra varietà).

Definizione 4.2 (differenziale di una mappa liscia). Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa liscia tra due varietà lisce. Definiamo il *differenziale* df_p di f nel punto $p \in M$ come la funzione $df_p: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ data da:

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f)$$

dove $v \in T_pM$ e $df_p(v)$ è l'operatore di derivazione in $f(p)$ che agisce su $g \in C^\infty(N)$ come sopra.

Osservazione 4.3. Notiamo che se $g \in C^\infty(N)$ allora $g \circ f \in C^\infty(M)$, quindi $v(g \circ f)$ è ben definita. Si mostra facilmente che l'operatore $df_p(v): C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare (dimostrazione rimandata a [5] pag.55-56).

Certe volte è utile considerare l'insieme di tutti i vettori tangenti in tutti i punti di una varietà, questo insieme è chiamato *fibrato tangente*.

Definizione 4.4 (fibrato tangente ad una varietà). Sia M una varietà liscia. Definiamo il *fibrato tangente a M* , denotato con TM , come l'unione disgiunta di tutti gli spazi tangenti T_pM al variare di $p \in M$:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

Indicheremo i suoi elementi con la coppia (p, v) dove $p \in M$ e $v \in T_pM$.

Definiamo anche la proiezione naturale $\pi: TM \rightarrow M$ che manda la coppia $(p, v) \in TM$ in $p \in M$

4.2 Immersioni e Sommersioni

Si possono capire diverse cose su una mappa liscia guardando solo il suo differenziale e le sue proprietà. Infatti, già studiandone il *rango* siamo in grado di definire diverse topologie di mappa liscia. Ricordando che il rango di una mappa liscia nel punto p è definito come il rango del differenziale. Il differenziale approssima meglio globalmente la mappa se questa ha rango costante, cioè se il rango del differenziale rimane lo stesso in ogni punto del dominio. Ci sono tre categorie di mappe di questo tipo che giocano un ruolo importante nella teoria:

1. *sommersione liscia* quando il differenziale è suriettivo in ogni punto,
2. *immersione liscia* quando il differenziale è iniettivo in ogni punto,
3. *embedding liscio*, ossia un'immersione liscia iniettiva che è anche omeomorfismo nell'immagine.

In seguito vorremmo classificare i punti del dominio di una mappa liscia in termini del suo rango.

Definizione 4.5 (punti critici). Se $f : M^m \rightarrow N^n$ è una mappa liscia allora un punto $p \in M^m$ è chiamato *punto critico* di f se il differenziale $df_p : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ ha rango $< n$. L'immagine in N^n di un punto critico è chiamata *valore critico*. Un punto di N^n che non è un valore critico è chiamato *valore regolare*, anche qualora non appartenesse all'immagine di f . Se $c \in N^n$ è un valore regolare allora l'insieme $f^{-1}(c)$ è chiamato *controimmagine regolare*.

Osservazione 4.6. Notiamo che ogni punto che non appartiene all'immagine di f è un valore regolare. Questa convenzione rende più facile enunciare e dimostrare i risultati riguardanti i valori regolari.

Definizione 4.7 (immersione liscia, sommersione liscia ed embedding liscio).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia allora

1. Se df è iniettiva per ogni $p \in M$, allora f è un *immersione liscia*;
2. Se df è suriettiva per ogni $p \in M$, allora f è una *sommersione liscia*;
3. Se f è un'immersione iniettiva, allora $f(M)$ è una *sottovarietà* di N ;
4. Se $f(M) \subset N$ è una sottovarietà e $f : M \rightarrow f(M)$ è un omeomorfismo, allora f è chiamata *embedding liscio*.

Osservazione 4.8. In altre parole una mappa liscia $f : M \rightarrow N$ è chiamata sommersione se $\text{rango}(f) = \dim(N)$ ed immersione se $\text{rango}(f) = \dim(M)$. Per definizione, un embedding è un'immersione liscia ma non vale il viceversa.

Capitolo 5

Teorema di Sard e i valori regolari

In questo capitolo introdurremo un importante teorema utile per studiare le proprietà delle varietà differenziali: il *Teorema di Sard*. Tale risultato ci dice che l'insieme dei *valori critici* di una funzione liscia ha misura nulla. Prima di enunciarlo dovremo però estendere la nozione di *insieme di misura nulla* nel caso di \mathbb{R}^n al caso di varietà arbitrarie. Successivamente potremo proseguire con la sua dimostrazione. Concluderemo il capitolo con una dimostrazione del *il Teorema Fondamentale dell'Algebra* attraverso la teoria dei valori regolari.

5.1 Insiemi di misura nulla su una varietà

In \mathbb{R}^n un *insieme di misura nulla* è un insieme così “sottile” che può essere trascurato nell'integrazione, ossia per cui possiamo dire di avere volume nullo. In questa sezione vedremo come definire un *insieme di misura nulla su una varietà* dove non abbiamo la nozione di volume. Per farlo iniziamo mostrando prima che le mappe lisce tra varietà mandano insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla.

Definizione 5.1 (insieme di misura nulla). Un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ si dice di *misura nulla* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una successione numerabile di cubi aperti Q_i con $K \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ e $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_i) < \epsilon$.

Osservazione 5.2. La definizione precedente è equivalente a dire che K può essere ricoperto da un insieme numerabile di palle arbitrariamente piccole, essendo che il rapporto del volume di un cubo e della palla circoscritta dipende solo da n e viceversa. Potremmo ovviamente fare lo stesso ragionamento con i rettangoli, dal momento che ogni rettangolo può essere ricoperto con un numero finito di cubi.

Il nostro scopo è estendere la nozione di insieme di misura nulla in \mathbb{R}^n a sottoinsiemi di varietà. Quindi, vorremmo che gli insiemi di misura nulla siano invarianti per diffeomorfismi. Notiamo che non possiamo usare la Definizione 5.1 anche per le varietà lisce perché ad esse non è associata una metrica quindi parlare di volume di cubi e di palle non avrebbe senso. La seguente proposizione ci darà la soluzione.

Proposizione 5.3. [Proposizione 6.5 di [5]]. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di misura nulla e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa liscia, allora $f(A)$ ha misura nulla*

Dimostrazione. Per ipotesi, per ogni punto $p \in A$, f può essere estesa a una mappa liscia (che indicheremo sempre con f) su un intorno di p in \mathbb{R}^n . Se necessario, restringendo questo intorno, possiamo assumere che esista una palla aperta U contenente p tale che f si estenda in modo liscio su tutto \bar{U} .

Per la Proposizione 2.14, l'insieme A è ricoperto da una quantità numerabile di tali aperti paracompatti, quindi $f(A)$ è unione di una quantità numerabile di insiemi della forma $f(A \cap \bar{U})$. È sufficiente perciò mostrare che questi insiemi abbiano misura nulla. Poiché \bar{U} è compatto, esiste una costante C tale che $|Df(x)| \leq C$ per ogni $x \in \bar{U}$. Per la stima di Lipschitz delle funzioni lisce (Proposizione 2.25), abbiamo

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|$$

per ogni $x, x' \in \bar{U}$. Preso $\delta > 0$, scegliamo ora un ricoprimento numerabile $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di $A \cap \bar{U}$ di palle aperte che soddisfano $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(B_j) < \delta$. Allora $f(\bar{U} \cap B_j)$ è contenuto in una palla \widetilde{B}_j il cui raggio è minore di C volte quello di B_j (come mostrato nella Figura 5.1).

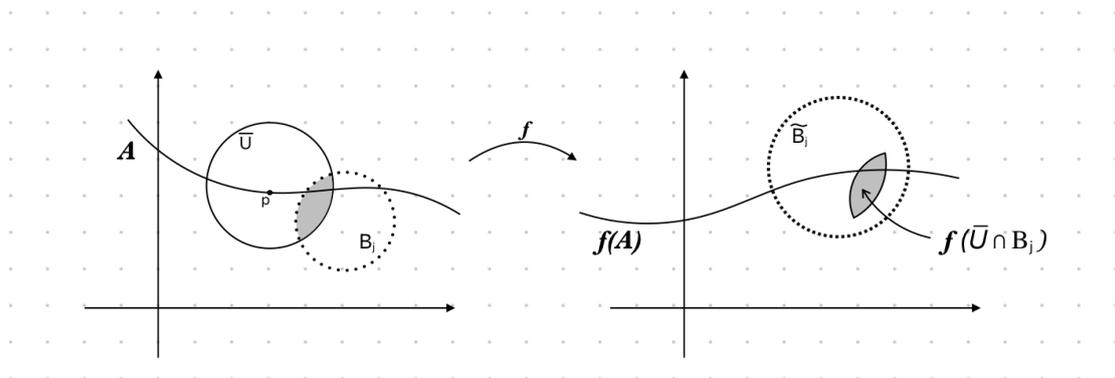


Figura 5.1: L'immagine di un insieme di misura nulla

Possiamo concludere che $f(A \cap \bar{U})$ è contenuto in un'unione di palle $\{\widetilde{B}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, la cui somma dei volumi è al massimo $C^n \delta$. Poiché $\delta > 0$ è arbitrario, il procedimento precedente può

essere fatto in modo che $C^n \delta$ sia piccolo quanto desiderato. Ne segue che $f(A \cap \bar{U})$ ha misura nulla. \square

Grazie al risultato precedente possiamo ora dare la definizione di insieme di misura nulla per varietà lisce.

Definizione 5.4 (insieme di misura nulla su varietà). Sia M è una varietà liscia di dimensione n . Diciamo che un insieme $A \subset M$ ha *misura nulla in M* se per ogni carta (U, ϕ) di M , l'insieme $\phi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme n -dimensionale di misura nulla.

5.2 Teorema di Sard

Possiamo ora enunciare e dimostrare il *Teorema di Sard* che afferma quanto segue: l'insieme dei valori critici di una funzione liscia fra due varietà lisce ha misura nulla. Tutte le nozioni introdotte nel Capitolo 4 ci saranno utili per la dimostrazione.

Teorema 5.5 (Teorema di Sard). *Sia $f: M^m \rightarrow N^n \subset \mathbb{R}^n$ una mappa liscia tra due varietà lisce. Allora l'insieme dei valori critici di f ha misura nulla in N^n*

Per dimostrare il Teorema di Sard avremo bisogno dei seguenti risultati:

Corollario 5.6 (Corollario Teorema di Taylor). [Corollario C.16 [5]]

Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $a \in U$ un punto e $f \in C^{k+1}(U)$ una funzione con $k \geq 0$. Se W è un sottoinsieme convesso di U contenente a sul quale tutte le derivate parziali $(k+1)$ -esime di f sono limitate in valore assoluto da una costante M , allora per ogni $x \in W$ vale:

$$|f(x) - P_k(x)| \leq \frac{n^{k+1}M}{(k+1)!} |x - a|^{k+1},$$

dove P_k è il k -esimo polinomio di Taylor di f in a .

Lemma 5.7. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto la cui intersezione con $\{c\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ha misura nulla $(n-1)$ -dimensionale per ogni $c \in \mathbb{R}$. Allora anche la misura n -dimensionale di A è nulla.*

Teorema 5.8 (Teorema dell'insieme di livello regolare). [Corollario 5.14 di [5]]. *Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa liscia. Per ogni valore regolare $c \in N$, $f^{-1}(c)$, cioè la controimmagine regolare, è una sottovarietà chiusa la cui dimensione è uguale a $\dim(M) - \text{rango}(f)$.*

La dimostrazione segue l'esposizione di [5], Teorema 6.10.

Dimostrazione del Teorema di Sard.

Proviamo il teorema per induzione su $m = \dim(M)$ e ricordiamo che $n = \dim(N)$.

Il caso $m = 0$ è immediato perché se $m = 0$ e $n = 0$ allora ho che f non ha punti critici, mentre se $m = 0$ e $n > 0$ l'intera immagine di f ha misura nulla perché è numerabile per definizione di varietà.

Supponiamo adesso $m \geq 1$ e assumiamo che il teorema valga per le mappe il cui dominio abbia dimensione minore di m . Ricoprendo M e N con un insieme numerabile di carte lisce, possiamo ridurci al caso in cui f sia una mappa liscia da un sottoinsieme aperto U di \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n . Scriveremo le coordinate del dominio U come $x = (x_1, \dots, x_m)$ e quelle del codominio come $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $f = (f_1(x, y), \dots, f_n(x, y))$.

Sia $C \subseteq U$ l'insieme dei punti critici di f . Possiamo definire una sequenza di insiemi

$$C \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$$

come segue:

$$C_k = \{a \in C \mid \text{per } 1 \leq i \leq k, \frac{\partial^i f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_i}} \text{ si annullano in } a \text{ con } x_{j_k} \in \{x_1, \dots, x_m\}\}$$

Quindi gli insiemi C_k sono i punti di C dove le derivate parziali i -esime di f si annullano in a , con $1 \leq i \leq k$. Poiché f è una funzione liscia, quindi continua con derivate continue, C e tutti i C_k sono chiusi in U in quanto preimmagini di chiusi. Proviamo che $f(C)$ ha misura nulla in tre passi

PASSO 1 *Mostrare che $f(C \setminus C_1)$ ha misura nulla*

Poiché C_1 è chiuso in U possiamo sostituire U con $U \setminus C_1$ e assumere che $C_1 = \emptyset$. Sia a un punto in C . Questa assunzione significa che alcune derivate parziali prime di f non si annullano in a . Riordinando le coordinate nel dominio e nel codominio, possiamo assumere che la coordinata dello Jacobiano $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \neq 0$. Questo significa che possiamo definire delle nuove coordinate lisce $(u, v) = (u, v_2, \dots, v_m)$ in un intorno V_a di a in U come

$$u = f_1, v_2 = x_2, \dots, v_m = x_m,$$

dato che lo Jacobiano della trasformazione di coordinate ha determinante diverso da zero in a . Restringendo V_a se necessario, possiamo assumere che $\overline{V_a}$ è compatto in U e le coordinate si estendono in modo liscio su tutto $\overline{V_a}$. In queste coordinate, f si rappresenta come

$$f(u, v_2, \dots, v_m) = (u, f_2(u, v), \dots, f_n(u, v)),$$

e lo Jacobiano è la seguente matrice $n \times m$

$$Df(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial f_i}{\partial v_j} \end{pmatrix}_{i=2, \dots, n; j=2, \dots, m}$$

Perciò, $C \cap \overline{V}_a$ consiste di esattamente quei punti dove la matrice $(\partial f_i / \partial v_j)$ di dimensioni $(n-1) \times (m-1)$, ha rango strettamente minore di $n-1$.

Adesso mostriamo che l'insieme $f(C \cap \overline{V}_a)$ ha misura nulla in \mathbb{R}^n . Questo insieme è compatto in quanto l'intersezione tra un insieme chiuso e uno compatto è ancora un insieme compatto e f è continua. Quindi per il Lemma 5.7 è sufficiente mostrare che l'intersezione con ogni iperpiano $y_1 = c$ ha misura nulla $(n-1)$ -dimensionale per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Sia $c \in \mathbb{R}$, sia $B_c = \{v \mid (c, v) \in \overline{V}_a\} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ e definiamo $f^c : B_c \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ come

$$f^c(v) = (f_2(c, v), \dots, f_n(c, v)).$$

Poichè $f(c, v) = (c, f^c(v))$, i valori critici di $f|_{\overline{V}_a}$ che appartengono all'iperpiano $y_1 = c$ sono esattamente i punti del tipo (c, w) con w un valore critico di f^c . Per ipotesi induttiva, l'insieme dei valori critici di ogni f^c ha misura nulla $(n-1)$ -dimensionale. Allora per il Lemma 5.7 anche l'insieme $f(C \cap \overline{V}_a)$ ha misura nulla. Poichè U è ricoperto da insiemi della forma \overline{V}_a numerabili, segue che $f(C \cap U)$ è un'unione numerabile di insiemi di misura nulla quindi ha misura nulla. Questo completa la dimostrazione del primo passo.

PASSO 2 *Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$, $f(C_k \setminus C_{k+1})$ ha misura nulla.*

Come nel PASSO 1 essendo C_{k+1} chiuso in U , possiamo scartarlo, prendere $U \setminus C_{k+1}$ e assumere che per ogni punto di C_k ci sia una $(k+1)$ -esima derivata parziale di f che non si annulla.

Sia $a \in C_k$ e $y : U \rightarrow \mathbb{R}$ una k -esima derivata parziale di f che ha almeno una derivata parziale prima in a che non si annulla. Allora a è un punto regolare della mappa liscia y perchè il differenziale ha rango massimo, quindi esiste un intorno V_a di a fatto interamente di punti regolari di y , per continuità di y . Sia Y l'insieme degli zeri di y in V_a , allora per il Teorema 5.8 Y è una *ipersuperficie* liscia di dimensione $\dim(U) - \text{rango}(y) = n-1$. Inoltre, per definizione di C_k , tutte le derivate k -esime di f (inclusa y) si annullano su C_k , quindi $C_k \cap V_a$ è contenuto in Y . Per ogni $p \in C_k \cap V_a$, df_p è non suriettivo, quindi anche il differenziale della restrizione $d(f|_Y)_p = (df_p)|_{T_p Y}$ è non suriettivo. Allora $f(C_k \cap V_a)$ è contenuto nell'insieme dei valori critici di $f|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, che ha misura nulla per ipotesi induttiva (dato che Y ha dimensione $n-1$). Poiché U può essere ricoperto con un insieme numerabile di intorni come V_a , segue che $f(C_k \setminus C_{k+1})$ è contenuto in un

unione numerabile di insiemi del tipo $f(C_k \cap V_a)$ che hanno misura nulla.

Non possiamo ancora dire di aver concluso la dimostrazione perché ci potrebbero essere dei punti di C nei quali tutte le derivate parziali di f si annullano, questo significa che non sono né in $C \setminus C_1$ né in $C_k \setminus C_{k+1}$ per alcuni k . Per questo abbiamo bisogno del passo seguente.

PASSO 3 *Mostrare che per $k > \frac{m}{n} - 1$, $f(C_k)$ ha misura nulla.*

Per ogni $a \in U$, esiste un cubo chiuso E tale che $a \in E \subseteq U$. Poiché U è secondo numerabile, può essere ricoperto con un insieme numerabile di cubi. È quindi sufficiente provare che $f(C_k \cap E)$ abbia misura nulla quando E è un cubo chiuso contenuto in U . Sia E un cubo come sopra, e sia A una costante maggiore di tutti i valori assoluti delle $(k+1)$ -esime derivate di f in E . Sia R la lunghezza del lato del cubo E , e sia K un numero intero che decideremo con precisione successivamente.

Possiamo dividere E in K^m cubi ognuno con lato lungo R/K , indicati con (E_1, \dots, E_{K^m}) . Se E_i è uno di questi cubi e esiste un punto $a_i \in C_k \cap E_i$, allora per il Corollario 5.6 del *Teorema di Taylor* abbiamo che per ogni $x \in E_i$ vale

$$|f(x) - f(a_i)| \leq A'|x - a_i|^{k+1},$$

dove A' è una costante reale che dipende solamente da A, k, m . Poiché ogni $f(E_i)$ è contenuto in una palla di raggio $A'(R/K)^{k+1}$ vale che $f(C_k \cap E)$ è contenuto in un'unione di K^m palle, la cui somma n -dimensionale dei volumi è al più

$$2^n K^m (A')^n (R/K)^{n(k+1)} = A'' K^{m-nk-n},$$

dove $A'' = 2^n (A')^n R^{n(k+1)}$. Poiché $k > \frac{m}{n} - 1 \Rightarrow m - n - nk < 0$, questo procedimento può essere fatto prendendo un K grande a piacere. Quindi $f(C_k \cap E)$ ha misura nulla. \square

Corollario 5.9. *Siano M e N due varietà lisce e sia $f: M \rightarrow N$ una mappa liscia. Se $\dim(M) < \dim(N)$, allora $f(M)$ ha misura nulla in N .*

Dimostrazione. In questo caso tutti i punti di M sono critici per f in quanto necessariamente il rango del differenziale df_p in ogni $p \in M$ è sempre strettamente minore di n . Ne segue che l'insieme $f(M) = \{\text{valori critici di } f\}$ ha misura nulla. \square

Osservazione 5.10. Notiamo che il Corollario 5.9 è falso se prendiamo f solamente continua. Per esempio, esiste una mappa continua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la cui immagine è l'intero quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. Questa funzione è chiamata “*space-filling curve*”.

5.3 Il Teorema Fondamentale dell'Algebra

La teoria dei valori regolari è fondamentale nella topologia differenziale. Vediamone un utilizzo classico nella dimostrazione del *Teorema Fondamentale dell'Algebra*. La dimostrazione segue l'esposizione di [1] e [6].

Per la dimostrazione ci sarà utile il *Teorema di Dini* anche detto *Teorema della Funzione Implicita*. Il Teorema della Funzione Implicita fornisce una condizione sufficiente affinché per una funzione $F(x, y)$ di classe C^1 esista un'unica funzione $y = f(x)$ in un intorno di un punto (a, b) tale che, esplicitando rispetto alla variabile y , $F(a, b) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

Teorema 5.11 (Teorema della funzione implicita). *Sia $F : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e le cui derivate parziali siano continue. Sia $(a, b) \in G$ tale che $F(a, b) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Allora esiste una funzione derivabile reale $g : [a - h, a + h] \rightarrow [b - k, b + k]$ con $h, k > 0$ la cui derivata prima sia continua.*

Possiamo ora enunciare e dimostrare il seguente:

Teorema 5.12 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Sia $p(z)$ un polinomio complesso di grado positivo, allora $p(z)$ ha almeno uno zero.*

Dimostrazione. Sia $z = x + iy$ un numero complesso e $u(x, y), v(x, y)$ rispettivamente la parte reale e immaginaria di $p(z)$, quindi $p(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. I polinomi sono funzioni olomorfe $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ quindi soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann: $p'(z) = p_x = -ip_y$ allora $p'(z) = u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y$ (come spiegato nella Sezione 2.2.1). Quindi lo Jacobiano si può riscrivere in forma matriciale come:

$$J = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix}$$

quindi il determinante è $u_x^2 + u_y^2$ che è zero se e solo se $p'(z) = 0$. Ci sono solo un numero finito di punti (gli zeri di p') che soddisfano questa condizione. Allora $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ha solo un numero finito di punti critici. Sia $F \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme finito dei valori critici di p . Se scriviamo $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ con $a_0 \neq 0$ per ipotesi, allora $|p(z)|$ tende a $+\infty$ per $|z| \rightarrow +\infty$. Questo significa che p può essere esteso con continuità alla compattificazione di Alexandroff S^2 di \mathbb{R}^2 quindi p è una *mappa propria*. Passiamo da \mathbb{R}^2 a S^2 perchè ci serve che $p(S^2)$ sia chiuso per evitare "patologicità". Allora, per la Proposizione 2.20, p è una mappa chiusa.

Per ogni $c \in \mathbb{R}^2$, $p^{-1}(c)$ è formato dagli zeri del polinomio $p(z) - c$ e quindi contiene al massimo n punti. Sia $k = k(c)$ il numero di punti in $p^{-1}(c)$. Se c è un valore regolare e

$p^{-1}(c) = \{z_1, \dots, z_k\}$ allora ogni z_i ha un intorno U_i che può essere mandato attraverso un diffeomorfismo in un intorno $V_i \subset \mathbb{R}^2 \setminus F$ di c . Poichè \mathbb{R}^2 è Hausdorff, possiamo assumere che gli U_i siano disgiunti. Esiste quindi un intorno aperto connesso V di c contenuto nell'insieme aperto $V_1 \cap \dots \cap V_k \setminus p(\mathbb{R}^2 \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_k))$.

Per ogni i definiamo ora $W_i = U_i \cap p^{-1}(V)$. Per costruzione ogni W_i è diffeomorfo tramite p a V . Il Teorema 5.11 ci assicura che p è un diffeomorfismo locale nei punti regolari in quanto le varietà di partenza e di arrivo hanno la stessa dimensione e lo Jacobiano è invertibile. Inoltre abbiamo un'unione disgiunta

$$p^{-1}(V) = W_1 \sqcup \dots \sqcup W_k$$

in quanto

$$W_1 \cup \dots \cup W_k \subseteq p^{-1}(V) \text{ e } p(z) \in V \Rightarrow z \in p^{-1}(V) \cap (U_1 \cup \dots \cup U_k) = W_1 \cup \dots \cup W_k.$$

Ne segue che $k(c)$ è localmente costante su $\mathbb{R}^2 \setminus F$, ossia sull'insieme dei valori regolari. Quest'ultimo insieme è connesso, perchè F è finito e quindi $k(c)$ è costante su $\mathbb{R}^2 \setminus F$. Questa costante non può però essere zero in quanto questo implicherebbe che l'immagine di p sia contenuta in F , e quindi che p sia costante in quanto la sua immagine è connessa (F è un insieme disgiunto di punti), ma per ipotesi p non è costante. Questo mostra che $p^{-1}(c) \neq \emptyset$ per ogni c valore regolare e quindi $p(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2 \setminus F) \cup F = \mathbb{R}^2$. In altre parole p prende tutti i valori incluso lo 0. \square

Capitolo 6

Embedding di Whitney

In questo capitolo mostreremo che ogni varietà liscia può essere embeddata in un appropriato spazio euclideo. Prima di enunciarlo facciamo delle considerazioni sulle *partizioni dell'unità* che ci saranno utili per la dimostrazione.

6.1 Partizioni dell'unità

Mostriamo l'esistenza di una *partizione dell'unità* su una varietà liscia.

Definizione 6.1 (partizione dell'unità). Una *partizione dell'unità* su uno spazio topologico X , è una famiglia di funzioni continue $f_i: X \rightarrow [0, 1]$ che soddisfano le seguenti proprietà:

1. In ogni punto, solo un numero finito di funzioni ha valore non nullo,
2. La somma di tutte queste funzioni è identicamente uno: $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.

L'esistenza di una partizione dell'unità è spesso data in relazione ad un particolare ricoprimento $\mathcal{U} = \cup_{i \in I} U_i$, si dice che la partizione è *subordinata al ricoprimento* \mathcal{U} di X se il supporto di f_i è contenuto in U_i per ogni $i \in I$.

Teorema 6.2. *Siano M una varietà liscia e $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di M . Allora esiste una partizione dell'unità $\{f_j\}_{j \in J}$ subordinata al ricoprimento tale che tutte le funzione f_j siano lisce.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che il ricoprimento sia localmente finito e che ogni aperto del ricoprimento sia contenuto nel dominio di una qualche carta e che la chiusura sia compatta. Allora per la Proposizione 2.13 esiste un ricoprimento $\{V_i\}_{i \in I}$ tale che $\overline{V_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$.

Completiamo la dimostrazione del Teorema 6.2 nei seguenti lemmi:

Lemma 6.3. *Esiste una funzione liscia $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $B(x) > 0$ su $(-1, 1)$ e $B(x) = 0$ per $|x| \geq 1$.*

Dimostrazione. Basta prendere la funzione

$$B(x) = \begin{cases} e^{-1/(x-1)^2} & |x| < 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

□

Lemma 6.4. *Sia $p \in U \subset M$ con U aperto e M varietà liscia. Allora esiste una mappa liscia $g: M \rightarrow [0, \infty)$ tale che $g(p) > 0$ e $\text{supp}(g) \subset U$. (Quindi g è identicamente nulla su un intorno di $M \setminus U$.)*

Dimostrazione. Sia $p = (x_1, \dots, x_n)$ e assumiamo che $\{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i| < \epsilon \text{ per ogni } i\}$ sia contenuto in U . Basta prendere $g(x) = B(\frac{x_1}{\epsilon}) \cdot \dots \cdot B(\frac{x_n}{\epsilon})$ dove $B(x)$ definite come nel Lemma 6.3. □

Lemma 6.5. *Sia $K \subset U \subset M$, dove K è un insieme compatto e U un insieme aperto. Allora esiste una funzione liscia $g: M \rightarrow [0, \infty[$ tale che $g(x) > 0$ per ogni $x \in K$ e $\text{supp}(g) \subset U$.*

Dimostrazione. Per ogni $p \in K$ prendiamo la funzione g_p definita nel Lemma 6.4. L'insieme $\{x \in M \mid g_p(x) > 0\}$ è aperto e al variare di p ricopre K . Possiamo estrarne un sottoricoprimento finito e concludere prendendo $g = \sum_p g_p$ □

Ora possiamo completare la dimostrazione del Teorema 6.2. Per ogni indice i usiamo il Lemma 6.5 per ottenere una funzione liscia $g_i: M \rightarrow [0, \infty)$ tale che $g_i(p) > 0$ se $p \in \bar{U}_i$ e $\text{supp}(g_i) \subset U_i$. Infine poniamo $f_i = g_i / \sum g_i$. □

Proposizione 6.6. *Siano U_i e f_i definite come nel Teorema 6.2. Sia $g_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia. Allora la funzione $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x) = \sum_i f_i(x)g_i(x)$ è liscia.*

Dimostrazione. Poichè f_i si annulla su un intorno di $M \setminus U_i$, la funzione $f_i g_i$ è liscia su U_i e si annulla su un intorno del bordo di U_i in M . Quindi $f_i g_i$ può essere estesa in modo liscio con 0 su tutto M . Allora per ogni punto $x \in M$ esiste un intorno nel quale tutte tranne un numero finito di $f_i g_i$ si annullano, quindi $\sum_i f_i g_i$ è ben posta ed è liscia. □

Teorema 6.7. *Sia M una varietà liscia e $K \subset M$ un suo sottoinsieme chiuso. Sia $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ liscia. Allora g si estende a una funzione liscia su tutta la varietà $\bar{g}: M \rightarrow \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Ricopriamo K con insiemi U_i aperti in M e tali che su ogni U_i esistano un'estensione liscia di g , cioè una funzione g_i che coincide con g su $U_i \cap K$. Possiamo ottenere un ricoprimento di M aggiungendo a $\{U_i\}_{i \in I}$ l'insieme $M \setminus K$ e la funzione nulla su $M \setminus K$. Questo ricoprimento lo possiamo assumere localmente finito. Per il Teorema 6.2 esiste una partizione dell'unità liscia $\{f_i\}_{i \in I}$ subordinata a questo ricoprimento. Per la Proposizione 6.6 la funzione $\bar{g}: M \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\bar{g}(x) = \sum_{i \in I} f_i(x)g_i(x)$ è liscia. Per $x \in K$ abbiamo che $\bar{g}(x) = \sum_{i \in I} (f_i(x)g(x)) = (\sum_{i \in I} f_i(x))g(x) = 1 \cdot g(x) = g(x)$. \square

6.2 Teorema di embedding di Whitney

In questa sezione dimostriamo il nostro risultato finale: il *Teorema di embedding di Whitney* che afferma che ogni varietà liscia può essere embeddata in uno spazio euclideo sufficientemente grande. La dimostrazione segue l'esposizione di [1], Teorema 10.7.

Teorema 6.8 (Teorema di embedding di Whitney). *Sia M^n una varietà compatta n -dimensionale. Allora esiste un embedding liscio $g: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.*

Dimostrazione. Data che M è compatta, possiamo ricoprire M con un numero finito di aperti U_i , dati dai domini delle carte coordinate ϕ_i con $i = 1, \dots, k$. Inoltre possiamo assumere che esista un'altra famiglia di insiemi V_i che ricopre M tale che $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni i . Per il Teorema 6.7 esistono anche delle funzioni lisce $\lambda_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ che valgono 1 su \bar{V}_i e hanno supporto contenuto in U_i .

Definiamo le seguenti mappe:

$$\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\psi_i(p) = \begin{cases} \lambda_i(p)\phi_i(p) & p \in U_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per costruire ogni ψ_i è liscia. Ora definiamo $\theta: M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k$ come

$$\theta(p) = (\psi_1(p), \dots, \psi_k(p), \lambda_1(p), \dots, \lambda_k(p))$$

e notiamo che $d\theta = d\psi_1 \times \dots \times d\psi_k \times d\lambda_1 \times \dots \times d\lambda_k$.

Mostriamo prima che θ è un'immersione. Dobbiamo quindi mostrare che il suo differenziale è iniettivo, il che significa che il suo Jacobiano ha rango massimo in ogni punto di M . Consideriamo un punto $p \in M$ che deve appartenere a un qualche V_i , supponiamo che $p \in V_j$. Poichè $\lambda_j = 1$ in un intorno di p , la funzione $\psi_j = \lambda_j\phi_j = \phi_j$ in un intorno di p . Quindi $d\psi_j = d\phi_j$ in un intorno di p . Inoltre abbiamo che $d\phi_j$ è un omomorfismo iniettivo in un intorno di p in quanto ϕ_j è una carta. Allora per definizione di $d\theta$ abbiamo che $d\theta$ è un omomorfismo iniettivo in p .

Ora mostriamo che θ è iniettiva. Se $\theta(p) = \theta(q)$ allora $\lambda_i(p) = \lambda_i(q)$ per ogni i . Sia $p \in V_i$ per qualche i e, per gli stessi i , $\lambda_i(p) = 1$. Allora $\phi_i(p) = \lambda_i(p)\psi_i(p) = \lambda_i(q)\psi_i(q) = \phi_i(q)$. Questo significa che $p = q$ in quanto ϕ_i è iniettiva perchè è una carta.

Poichè M^n è compatta e $(\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k$ è Haudorff, θ è una mappa continua e iniettiva, il che implica che θ è un omeomorfismo nell'immagine per il Teorema 2.15.

Abbiamo così mostrato che θ è un embedding di M^n in \mathbb{R}^N per un qualche N abbastanza grande.

Ora dobbiamo mostrare che possiamo far diminuire N a esattamente $2n + 1$ mantenendo tutte le proprietà. Supponiamo di trovare un vettore $w \in \mathbb{R}^N$ tale che:

1. Il vettore w non sia tangente a M^n in nessun punto,
2. Non esistano due punti $x, y \in M$ con $x - y$ parallelo a w .

Se riusciamo a trovare tale vettore allora è chiaro che la proiezione di M sull'iperpiano w^\perp è iniettiva e non modifica o rende nullo alcun vettore tangente a M . Questa proiezione rappresenta un'embedding di M^n in uno spazio di dimensione $N - 1$. Quindi è sufficiente mostrare che un vettore w con le proprietà desiderate esiste se $N > 2n + 1$. La prova è fatta attraverso l'idea di "posizione generale".

Consideriamo la mappa $\sigma: T(M^n) \setminus M^n \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}$ dove $\mathbb{R}P$ è lo spazio proiettivo reale di dimensione $N - 1$ (Definizione 2.12). La funzione σ prende un vettore tangente alla varietà e lo manda in un vettore in \mathbb{R}^N attraverso l'immersione e poi nel sua classe d'equivalenza sullo spazio proiettivo. Inoltre, consideriamo la mappa $\tau: M^n \times M^n \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}$ che manda la coppia (x, y) con $x \neq y$ sulla classe d'equivalenza di $x - y$ in $\mathbb{R}P^{N-1}$. Sia σ sia τ sono mappe lisce e in entrambe la dimensione del dominio uguale a $2n$, è minore della dimensione del codominio $N - 1$ per ipotesi. Dal Teorema di Sard 5.5 segue che l'immagine di entrambe le mappe (cioè l'insieme dei punti critici) sono di misura nulla. Quindi anche $Im(\sigma) \cup Im(\tau)$ ha misura nulla. Ne segue che esiste $w \in \mathbb{R}^n \setminus Im(\sigma) \cup Im(\tau)$. Per costruzione w soddisfa le proprietà richieste, da cui segue la tesi. \square

Esistono diversi raffinamenti del Teorema di embedding di Whitney. La spiegazione rimanda a [1] e [?].

1. Una varietà liscia M^n può essere embeddata come sottovarietà e insieme chiuso di \mathbb{R}^{2n+1} (abbiamo tolto l'ipotesi di compattezza);
2. Una varietà liscia M^n compatta può essere embeddata in \mathbb{R}^{2n} ;
3. Una varietà liscia compatta orientabile M^n può essere embeddata in \mathbb{R}^{2n-1} ;
4. Una varietà liscia M^n con $n \neq 2^k$ può essere embeddata in \mathbb{R}^{2n-1}

6.3 Applicazioni Teorema di embedding di Whitney

Il Teorema di embedding di Whitney afferma quindi che le varietà di dimensione n possono essere embeddate in spazi euclidei di dimensione $2n + 1$, ma nonostante questo esistono embedding in spazi euclidei di dimensione minore di $2n + 1$. È il caso del *Toro*. Vediamo anche il Teorema di embedding di Whitney applicato alla *Bottiglia di Klein*. Rimandare a [2] e a [3].

Esempio 6.9 (Toro). Il toro T^2 è una varietà differenziabile di dimensione 2 compatta. Per costruire il Toro prendiamo il quadrato $Q = [0, 1]^2$ e identifichiamo i lati opposti come si vede in figura 6.1.

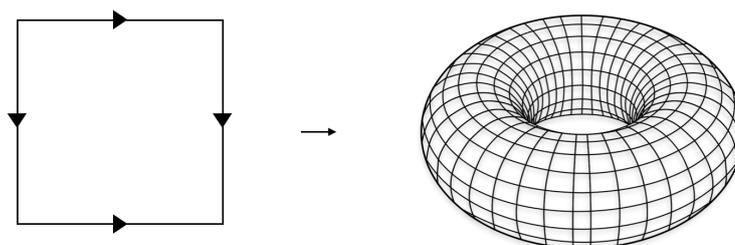


Figura 6.1: Toro come quoziente di un quadrato

Quindi il Teorema di Whitney può essere certamente applicato, esso ci permette di affermare che esiste un embedding del toro in \mathbb{R}^5 . Ma è possibile dimostrare che il toro può essere embeddato in \mathbb{R}^3 . Infatti come si vede nella Figura 6.1 il toro, se interpretato come quoziente di un quadrato si può embeddare in \mathbb{R}^3 .

Esempio 6.10 (Bottiglia di Klein). La bottiglia di Klein K è una varietà differenziabile compatta di dimensione 2 non orientabile. Per definirla prendiamo il quadrato $Q = [0, 2\pi]^2$ e identifichiamo i bordi opposti come mostrato nella figura 6.2, secondo l'orientamento delle frecce.

Utilizzando il Teorema di Whitney 6.8, la bottiglia di Klein può essere embeddata in \mathbb{R}^5 . Abbiamo però visto precedentemente che il Teorema di Whitney può essere raffinato ed è possibile mostrare che una varietà differenziabile compatta di dimensione n può essere embeddata in \mathbb{R}^{2n} . Quindi la bottiglia di Klein può essere embeddata in \mathbb{R}^4 .

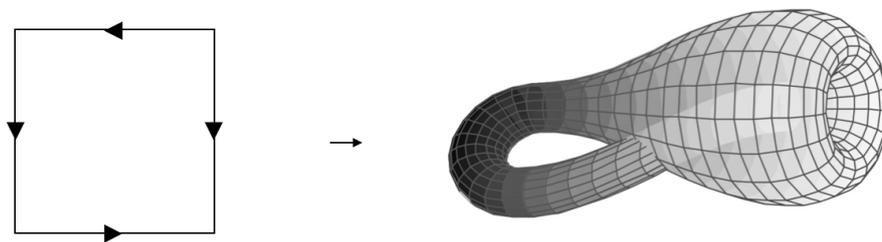


Figura 6.2: Bottiglia di Klein

D'altro canto, come mostrato nella figura 6.2, non è possibile trovare un embedding della bottiglia di Klein in \mathbb{R}^3 , dato che l'immersione $K \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ non sarà mai iniettiva (ossia l'immagine, come sottoinsieme di \mathbb{R}^3 , avrà autointersezioni).

Bibliografia

- [1] Bredon, Glen E., *Topology and Geometry*, Springer, 2000.
- [2] De Rosa, Andrea, *Un Teorema di Immersione di Whitney*, 2014, Tesi Magistrale UNIBO <https://amslaurea.unibo.it/8025/1/derosa-andrea-tesi.pdf>.
- [3] Do Carmo, Manfredo P., *Differential forms and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1944.
- [4] Francaviglia, Stefano, *Topologia (seconda edizione)*, 2020 <https://www.dm.unibo.it/~francavi/did/topologia2.pdf>.
- [5] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds (Second Edition)*, Springer, 2013.
- [6] Milnor, John W., *Topology from the differentiable viewpoint*, Based on notes by David W. Weaver, The University Press of Virginia Charlottesville, 1997.
- [7] Nacinovich, Mauro, *Lezioni di Geometria Differenziale I, Calcolo differenziale sulle varietà*, 2014-2015, <https://www.mat.uniroma2.it/~nacinovi/files/grim14.pdf>.