Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

SOLUZIONI FONDAMENTALI DI OPERATORI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI COSTANTI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:

Chiar.mo Prof. Giovanni Cupini

Correlatore:

Chiar.mo Prof. Davide Guidetti

Presentata da:

Eugenio Mancinelli

Anno Accademico 2022-2023

Al mio amico Stefano

Introduzione

Lo scopo di questa Tesi è di presentare i principali risultati riguardanti le soluzioni fondamentali di operatori differenziali a coefficienti costanti. Per fare ciò, sarà necessario introdurre lo *spazio delle distribuzioni* $\mathcal{D}'(\Omega)$ e studiare le proprietà di cui esse godono. Dopo alcuni richiami sulle nozioni preliminari di *spazio delle funzioni test* $\mathcal{D}(\Omega)$, trasformata di Fourier e *spazio di Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nel primo capitolo viene introdotta la teoria delle distribuzioni, sviluppata per la prima volta da S. Sobolev attorno al 1936, per lo studio delle soluzioni deboli dell'equazione delle onde, e formalizzata da L. Schwartz in *Theorie des distributions* nel 1950. In seguito, verranno considerati alcuni classici esempi, come la *delta di Dirac* δ, che risulterà necessaria per la definizione di *soluzione fondamentale*, e *il valore principale di Cauchy* $p.v.\frac{1}{x}$, e verranno chiariti i motivi che hanno indotto alcuni matematici di metà '900 a prendere in considerazione tali oggetti, determinando un nuovo approccio nello studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

> *"In differential calculus one encounters immediately the unpleasant fact that not every function is differentiable. The purpose of distribution theory is to remedy this flaw; indeed, the space of distributions is essentially the smallest extension of the space of continuous functions where differentiation is always well defined."*[5]

Le distribuzioni sono strumenti che generalizzano il concetto di funzione e, nel corso del capitolo, viene giustificato il modo in cui si estendono a questi oggetti le usuali operazioni tra funzioni. Nella seconda metà del capitolo, si mostra che, in virtù del *Teorema di Paley-Wiener*, non è possibile estendere la nozione di trasformata di Fourier in $\mathcal{D}'(\Omega)$

e, per farlo, risulta necessario introdurre una sua sottoclasse, quella delle *distribuzioni temperate* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Il secondo capitolo, invece, si propone di studiare le proprietà degli operatori differenziali a coefficienti costanti, ordinari e parziali, sfruttando le loro soluzioni fondamentali. In particolare, si dimostra che ogni operatore differenziale $A(\mathrm{D})$ a coefficienti costanti (non nullo) ammette una soluzione fondamentale $\mathcal{E}$ (*Teorema di Malgrange–Ehrenpreis*, 1950) e, se f è una distribuzione a supporto compatto, l'equazione $A(\mathrm{D})u = f$ ha come soluzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$ la distribuzione $u = \mathcal{E} * f$. Oltre a risultati riguardanti l'esistenza delle soluzioni, si analizzano proprietà di regolarità. In particolare, viene introdotta la nozione di operatore *ipoellittico* e si mostra un risultato che caratterizza tale natura. Infine, viene presentata la costruzione delle soluzioni fondamentali di due importanti operatori della fisica matematica, l'*operatore di Laplace* Δ e l'*operatore del calore* $\mathrm{D}_t - \Delta_x$, e si prova che sono entrambi ipoellittici.

Indice

Notazione

Illustriamo qui la notazione che andremo ad utilizzare in questo lavoro.

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$: insieme dei numeri naturali;
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali;
- $\mathbb{R}^+ : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$: insieme dei numeri reali positivi;
- $\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi;
- Se $x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| := \sqrt{\sum_{j=0}^n x_j^2}$ è la sua norma euclidea;
- Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$, $B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$ è la palla di centro x_0 e raggio r;
- Se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, poniamo $A \pm B := \{x \pm y : x \in A, y \in B\}$;
- Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^n$, poniamo $A \pm z := A \pm \{z\}$;
- Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $A \subseteq \Omega$, $\bar{A}^{\Omega}$ indica la chiusura di A in Ω;
- Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $C(\Omega)$ lo spazio delle funzioni continue da Ω a $\mathbb{C}$. Se $m \in \mathbb{N}$, $C^m(\Omega)$ è il sottoinsieme di $C(\Omega)$ i cui elementi hanno tutte le derivate fino all'ordine m in $C(\Omega)$. Poniamo $C^{\infty}(\Omega) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$;
- Se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, e $x \in \Omega$, indichiamo con $J_f(x)$ la matrice jacobiana di f in x;

- Se $f \in C(\Omega)$, definiamo il supporto di f come l'insieme $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$;
- L_n: misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$;
- Se A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{C}$ misurabile e $1 \leq p < \infty$, diciamo che $f \in L^p(A)$ se $\int_A |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$;
- Siano Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ misurabile. Scriviamo $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e diciamo che f è localmente integrabile se $f_{|\mathcal{K}} \in L^1(\mathcal{K})$, per ogni compatto $\mathcal{K}$ di Ω.

Richiamiamo ora la notazione multi-indice. Se $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n, \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$, poniamo

$$\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

La scrittura $\alpha \leq \beta$ significa che $\alpha_i \leq \beta_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Il peso $|\alpha|$ di α è definito come $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Se $|\alpha| \leq m$ e $f \in C^m(\Omega)$, poniamo $\mathrm{D}^\alpha f := \mathrm{D}_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \mathrm{D}_{x_n}^{\alpha_n} f$.

Preliminari

0.1 Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$

Definizione 0.1.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e $\operatorname{supp}(\phi)$ è un compatto di Ω.

Diamo ora un esempio di elemento in $\mathcal{D}(\Omega)$, che sfrutteremo in seguito per alcune dimostrazioni.

Esempio 0.1.2. Consideriamo la funzione ausiliaria $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, così definita:

$$\zeta(t) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}), & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Non è difficile verificare che $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sia dato $r \in \mathbb{R}^+$ e definiamo la funzione $\phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \phi(x) := \zeta(r^2 - |x|^2)$. È chiaro che $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\operatorname{supp}(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$, che è compatto, quindi $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 0.1.3 ([4], Capitolo I)**.** Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora:

1. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\int_\Omega f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora $f(x) = 0$ quasi ovunque.

2. Sia $\mathcal{K}$ compatto, $\mathcal{K} \subseteq \Omega$. Allora, esiste $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tale che $\phi(x) = 1$ per ogni $x \in \mathcal{K}$.

Teorema 0.1.4. Sia $\mathcal{K}$ un compatto di $\mathbb{R}^n$ e siano $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ aperti di $\mathbb{R}^n$ tali che $\mathcal{K} \subseteq \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$. Allora esistono $\phi_1, \ldots, \phi_N$, appartenenti rispettivamente a $\mathcal{D}(\Omega_1), \ldots, \mathcal{D}(\Omega_N)$, tali che $\sum_{j=1}^N \phi_j(x) = 1$ per ogni $x \in \mathcal{K}$.

Teorema 0.1.5. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\Omega = \cup_{i\in\mathcal{I}}\Omega_i$ unione di aperti, e sia $\mathcal{I}$ un insieme di indici. Allora esiste una sottofamiglia $\{\Omega_{i'}\}_{i'\in\mathcal{I}'}$, con $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$, localmente finita [1] tale che, per ogni $i' \in \mathcal{I}'$, esiste $\phi_{i'} \in \mathcal{D}(\Omega_{i'})$ con $\phi_{i'}(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(\Omega_{i'})$ e $\sum_{i'\in\mathcal{I}'} \phi_{i'}(x) = 1$, per ogni $x \in \Omega$.

Introduciamo ora la nozioni di convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$.

Definizione 0.1.6. Sia $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{D}(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, e sia $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Diciamo che $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ in $\mathcal{D}(\Omega)$, e scriviamo $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. esiste $\mathcal{K}$ compatto di Ω tale che $\operatorname{supp}(\phi_k) \subseteq \mathcal{K}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$;

2. per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,
$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}^\alpha \phi_k(x) = \mathrm{D}^\alpha \phi(x)$$
uniformemente in Ω.

Definizione 0.1.7. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $C^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Diciamo che $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ in $C^\infty(\Omega)$, e scriviamo $\phi_k \to \phi$ in $C^\infty(\Omega)$, se, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{D}^\alpha \phi_k(x) = \mathrm{D}^\alpha \phi(x)$ uniformemente sui compatti di Ω.

Teorema 0.1.8 ([6], Capitolo XV)**.** Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora:

1. Esiste una topologia metrizzabile in $C^\infty(\Omega)$, che induce la nozione di convergenza della Definizione 0.1.7.

2. $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $C^\infty(\Omega)$, nel senso che, per ogni $\phi \in C^\infty(\Omega)$, esiste una successione $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, tale che $\phi_k \to \phi$ in $C^\infty(\Omega)$.

0.2 Trasformata di Fourier e spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definizione 0.2.1. Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definiamo la trasformata di Fourier di f come la funzione
$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} f(x)\mathrm{d}x,$$

[1] *localmente finita* significa che per ogni $x \in \Omega$, esiste un intorno V_x di x tale che $V_x \cap \Omega_{i'} = \emptyset$ solo per un numero finito di i'.

dove $\cdot$ indica il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$.

Valgono le seguenti proprietà:

Teorema 0.2.2 ([2], Capitolo 0, D)**.** Se f e g appartengono a $L^1(\mathbb{R}^n)$, allora

1. $\mathcal{F}$ è un operatore lineare da $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. $\hat{f}$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}^n$ e $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$;
3. $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x$.

Per poter dire qualcosa di più sulle proprietà di $\mathcal{F}$ introduciamo lo spazio di Schwartz, indicato con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 0.2.3. Diciamo che $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, per ogni $m \in \mathbb{N}_0$, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, la funzione $|x|^m \mathrm{D}^\alpha \phi(x)$ è limitata in $\mathbb{R}^n$.

Introduciamo anche la nozione di convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 0.2.4. Sia $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e sia $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Diciamo che $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e scriviamo $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se $\lim\limits_{k\to\infty} |x|^m \mathrm{D}^\alpha \phi_k(x) = |x|^m \mathrm{D}^\alpha \phi(x)$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$, per ogni $m \in \mathbb{N}_0$, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Osservazione 0.2.5. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è detto anche spazio delle funzioni a decrescenza rapida, nel senso che, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $\mathrm{D}^\alpha \phi(x) = o(|x|^{-m})$ per $|x| \to \infty$, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, per ogni $m \in \mathbb{N}_0$.

Un'altra definizione che ci sarà utile in seguito è quella di $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$: lo spazio delle funzioni a crescita lenta.

Definizione 0.2.6. Diciamo che $a \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ se $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, esistono $m(\alpha) \in \mathbb{R}$ e $C(\alpha) \in \mathbb{R}^+$, tali che

$$|\mathrm{D}^\alpha a(x)| \leq C(\alpha)(1 + |x|)^{m(\alpha)}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione 0.2.7. La crescita delle funzioni in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ è lenta nel senso che, se $a \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{D}^\alpha(x) = O(|x|^{m(\alpha)})$, per $|x| \to \infty$, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e per qualche $m(\alpha) \in \mathbb{R}$. In particolare, i polinomi appartengono a $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

Enunciamo ora alcune semplici proprietà di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, senza dimostrarle.

Teorema 0.2.8.
1. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$; inoltre, la convergenza in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ implica la convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, che implica quella in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. Se $a \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, $a\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, se $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $a\phi_k \to a\phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
3. Se $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathrm{D}^\alpha\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, se $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{D}^\alpha\phi_k \to \mathrm{D}^\alpha\phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
4. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$; inoltre, la convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ implica la convergenza in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Esempio 0.2.9. Un elemento in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ che non appartiene a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è $\phi(x) = e^{-|x|^2}$.

Teorema 0.2.10 ([2], Capitolo 0, D)**.** Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e l'applicazione $\mathcal{F} : \phi \mapsto \hat{\phi}$ è una biiezione di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in se stesso; in particolare vale la seguente formula

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{1}$$

Inoltre, si ha che $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\hat{\phi}_k \to \hat{\phi}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 0.2.11 ([2], Capitolo 0, D)**.** Per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ vale

$$\mathrm{D}^\alpha\hat{\phi}(\xi) = \mathcal{F}(x \mapsto (-ix)^\alpha\phi(x))(\xi).$$

Teorema 0.2.12. Per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, vale

$$(\mathcal{F}(\mathrm{D}^\alpha\phi))(\xi) = (i\xi)^\alpha(\mathcal{F}\phi)(\xi).$$

Proposizione 0.2.13 ([7], Capitolo II)**.** $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nel senso che per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esiste una successione $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 0.2.14 (Paley-Wiener)**.** Sia $\mathcal{K}$ un compatto convesso di $\mathbb{R}^n$. Una funzione U intera[2] è la trasformata di Fourier di una funzione di classe C^∞ con supporto in $\mathcal{K}$ se e solo se, per ogni $N \in \mathbb{N}_0$, esiste una costante $C_N > 0$ tale che, per ogni $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n$, vale

$$|U(\zeta)| \leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N}e^{I_\mathcal{K}},$$

dove $I_\mathcal{K} = \sup_{x\in\mathcal{K}} x \cdot \eta$.

[2]con *intera* indichiamo una funzione di variabile complessa olomorfa su tutto $\mathbb{C}^n$.

Capitolo 1

Distribuzioni

1.1 Definizione e primi esempi

Definizione 1.1.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una **distribuzione** su Ω è un funzionale lineare $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ tale che, se $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, allora $u(\phi_k) \to u(\phi)$ in $\mathbb{C}$. Indicheremo con $\mathcal{D}'(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni su Ω.

Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora scriveremo spesso (u, ϕ) o $(u(x), \phi(x))$, piuttosto che $u(\phi)$.

Esempio 1.1.2. Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Definiamo il funzionale u_f su $\mathcal{D}(\Omega)$ nel seguente modo:

$$(u_f, \phi) := \int_\Omega f(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

Mostriamo che $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
La linearità del funzionale segue banalmente dalla linearità dell'integrale.
Sia $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ e sia $\mathcal{K}$ un compatto di Ω tale che $\mathrm{supp}(\phi_k) \subseteq \mathcal{K}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora, $f(x)\phi_k(x) \to f(x)\phi(x)$ per ogni x in Ω e

$$\int_\Omega f(x)\phi_k(x)\mathrm{d}x = \int_\mathcal{K} f(x)\phi_k(x)\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Inoltre, esiste una costante positiva C tale che $|\phi_k(x)| \le C$ per ogni x $\in \mathcal{K}$ e

$$|f(x)\phi_k(x)| \le C|f(x)|\chi_\mathcal{K}(x) \text{ per ogni } x \in \Omega, \tag{1.2}$$

che è integrabile perché $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ per ipotesi. Dal teorema della convergenza dominata di Lebesgue segue che

$$\lim_{k\to\infty} u_f(\phi_k(x)) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{K}} f(x)\phi_k(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{K}} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = u_f(\phi), \tag{1.3}$$

quindi $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

In generale, data $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ spesso identificheremo u_f con f. I funzionali che hanno la forma di u_f si dicono **regolari** e ci saranno utili in seguito per estendere alle distribuzioni le operazioni di cui godono le funzioni. Vediamo ora un esempio di distribuzione non regolare.

Esempio 1.1.3. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \Omega$. Chiamiamo *delta di Dirac* nel punto x_0, e la indichiamo con δ_{x_0}, la distribuzione così definita:

$$(\delta_{x_0}, \phi) := \phi(x_0), \qquad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proviamo che δ_{x_0} non è regolare, cioè che non esiste $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che $\delta_{x_0} = u_f$.

Supponiamo per assurdo che una tale funzione f esista. Sia $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{x_0\})$ e sia ϕ la sua estensione a tutto Ω con $\phi(x_0) = 0$. Allora $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega\setminus\{x_0\}} f(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = (u_f, \phi) = (\delta_{x_0}, \phi) = \phi(x_0) = 0. \tag{1.4}$$

Dall'arbitrarietà di ψ e dal Teorema 0.1.3.1 segue che $f(x) = 0$ quasi ovunque in $\Omega \setminus \{x_0\}$ e, dato che $\{x_0\}$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^n$, $f(x) = 0$ quasi ovunque in Ω, da cui $\delta_{x_0} = 0$. Per mostrare che ciò rappresenta una contraddizione è sufficiente trovare una funzione $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\delta_{x_0}(\phi) \neq 0$, cioè $\phi(x_0) \neq 0$. A tale scopo consideriamo[1] $\phi(x) = \zeta(r^2 - |x - x_0|^2)$, con $r \in \mathbb{R}^+$ tale che $\overline{B_r(x_0)} \subseteq \Omega$.

1.2 Convergenza di una successione di distribuzioni

Definizione 1.2.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, siano $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diciamo che $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a u in $\mathcal{D}'(\Omega)$, e scriviamo $u_k \to u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, se

$$(u_k, \phi) \to (u, \phi), \qquad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

[1] ζ è la funzione definita nell'Esempio 0.1.2.

Esempio 1.2.2. Dati $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, poniamo $u_k(x) := \frac{k}{2}\chi_{\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)}(x)$. Mostriamo che $u_k \to \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\phi(x) = Re(\phi)(x) + iIm(\phi)(x)$. Si ha che

$$\begin{aligned}(u_k(x), \phi(x)) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{k}{2}\chi_{(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})}(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \frac{k}{2}\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{k}{2}\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} Re(\phi)(x)\mathrm{d}x + i\frac{k}{2}\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} Im(\phi)(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Per il teorema della media integrale, esistono $\varepsilon, \eta \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$ tali che

$$\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \frac{k}{2}\phi(x)dx = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right)(Re(\phi)(\varepsilon) + iIm(\eta)(\varepsilon)) = Re(\phi)(\varepsilon) + iIm(\phi)(\eta). \tag{1.6}$$

Infine,

$$\lim_{k\to\infty}(u_k, \phi) = \lim_{\varepsilon\to 0,\eta\to 0}(Re(\phi)(\varepsilon) + iIm(\phi)(\eta)) = Re(\phi)(0) + iIm(\phi)(0) = \phi(0) = (\delta_0, \phi), \tag{1.7}$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare.

Teorema 1.2.3 ([6], Capitolo XXXIV)**.** Sia $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{D}'(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, esista

$$u(\phi) := \lim_{k\to\infty} u_k(\phi).$$

Allora $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Come applicazione di questo teorema consideriamo il seguente esempio.

Esempio 1.2.4. Definiamo la distribuzione $p.v.\frac{1}{x}$[2] nel seguente modo: se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, poniamo

$$(p.v.\frac{1}{x}, \phi(x)) := \lim_{k\to\infty}\int_{|x|\geq\frac{1}{k}} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\geq\frac{1}{k}} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{|x|\geq 1} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{-\frac{1}{k}} \frac{\phi(x)}{x} \\ &= \int_{|x|\geq 1} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}\mathrm{d}x \to_{k\to\infty} \int_{|x|\geq 1} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{(0,1]} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

[2] $p.v.$ sta per "principal value".

Osserviamo ora che

$$\left|\int_{|x|\geq 1} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \leq \int_{|x|\geq 1} \frac{|\phi(x)|}{|x|}\mathrm{d}x \leq \int_{|x|\geq 1} |\phi(x)|\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

perché $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, mentre $\int_{(0,1]} \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\mathrm{d}x$ è convergente in quanto esiste $\lim_{x\to 0^+} \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x} \in \mathbb{R}$; infatti, considerando lo sviluppo di Taylor di $\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}$ intorno a 0 si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\phi'(0)x + o(x)}{x} = 2\phi'(0) \in \mathbb{R}.$$

Perciò, il limite $\lim_{k\to\infty} \int_{|x|\geq \frac{1}{k}} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x$ esiste sempre e quindi $p.v.\frac{1}{x}$ è limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ della successione di distribuzioni (regolari) $\left(\frac{\chi_{|x|\geq \frac{1}{k}}(x)}{x}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, quindi è una distribuzione.

1.3 Operazioni sulle distribuzioni

Per giustificare le definizioni di queste operazioni sulle distribuzioni, cominceremo a definirle sulle distribuzioni regolari (in maniera naturale) e poi cercheremo di estendere tali definizioni a distribuzioni generali.

1.3.1 Moltiplicazione per una funzione liscia

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, siano $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $a \in C^\infty(\Omega)$. Si verifica facilmente che $af \in L^1_{loc}(\Omega)$ e quindi possiamo considerare la distribuzione regolare u_{af} ad essa associata. Se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha che $a\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e

$$(u_{af}, \phi) = \int_\Omega a(x)f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = (u_f, a\phi). \tag{1.9}$$

Definizione 1.3.1. Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $a \in C^\infty(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Poniamo

$$(au, \phi) := (u, a\phi), \qquad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mostriamo che au così definita è effettivamente una distribuzione, osservando che se $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, allora $a\phi_k \to a\phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Sia $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ e sia $\mathcal{K}$ un compatto di Ω tale che $\text{supp}(\phi_k) \subseteq \mathcal{K}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\text{supp}(a\phi_k) \subseteq \text{supp}(\phi_k) \subseteq \mathcal{K} \tag{1.10}$$

e, ricordando che per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ vale

$$\mathrm{D}^\alpha(a(x)\phi_k(x)) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \mathrm{D}^\beta a(x) \mathrm{D}^{\alpha-\beta}\phi_k(x),$$

con $\beta \leq \alpha$ se $\beta_i \leq \alpha_i$ per ogni i $\in \{1, ..., n\}$ e $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$, possiamo concludere che, se $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, vale

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}^\alpha\left(a\phi_k\right)(x) &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \mathrm{D}^\beta a(x) \left(\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}^{\alpha-\beta}\phi_k(x)\right) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \mathrm{D}^\beta a(x) \mathrm{D}^{\alpha-\beta}\phi(x) = \mathrm{D}^\alpha(a\phi)(x) \end{aligned} \tag{1.11}$$

uniformemente in Ω, e quindi $a\phi_k \to a\phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, cioè $au \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Esempio 1.3.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ e $a \in C^\infty(\Omega)$. Se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si ha

$$(a\delta_{x_0}, \phi) = (\delta_{x_0}, a\phi) = a(x_0)\phi(x_0) = (a(x_0)\delta_{x_0}, \phi), \tag{1.12}$$

cioè $a\delta_{x_0} = a(x_0)\delta_{x_0}$.

Esempio 1.3.3. Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, abbiamo

$$(xp.v.\frac{1}{x}, \phi(x)) = (p.v.\frac{1}{x}, x\phi(x)) = \lim_{k\to\infty} \int_{|x|\geq \frac{1}{k}} \phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\mathrm{d}x = (1, \phi(x)), \tag{1.13}$$

da cui deduciamo che $xp.v.\frac{1}{x} = 1$.

1.3.2 Derivazione

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Se $f \in C^m(\Omega)$, con $m \geq |\alpha|$, allora $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e quindi possiamo considerare la distribuzione regolare u_f associata ad f. Se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, integrando per parti e sfruttando il fatto che supp$(\phi) \subset \Omega$, si conclude che

$$(u_{\mathrm{D}^\alpha f}, \phi) = \int_\Omega \mathrm{D}^\alpha f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)\mathrm{D}^\alpha\phi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}(u_f, \mathrm{D}^\alpha\phi). \tag{1.14}$$

Osserviamo che $\mathrm{D}^\alpha\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, poiché $\text{supp}(\mathrm{D}^\alpha\phi) \subseteq \text{supp}(\phi)$.

Definizione 1.3.4. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, siano $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, poniamo
$$(\mathrm{D}^\alpha u, \phi) := (-1)^{|\alpha|}(u, \mathrm{D}^\alpha \phi).$$

Poiché $\mathrm{supp}(\mathrm{D}^\alpha \phi) \subseteq \mathrm{supp}(\phi)$ si ha che se $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, allora $\mathrm{D}^\alpha \phi_k \to \mathrm{D}^\alpha \phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, e quindi $\mathrm{D}^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Vediamo un esempio in cui si chiarisce come questa nuova nozione di derivata distribuzionale generalizza quella di derivata classica.

Esempio 1.3.5. Siano $a \in \mathbb{R}, g \in C^1((-\infty, a]), h \in C^1([a, \infty))$. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ così definita:
$$f(x) := \begin{cases} g(x), & \text{se } -\infty < x < a, \\ h(x), & \text{se } a \leq x < \infty. \end{cases}$$

Dalla continuità di g e h segue che $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, e quindi possiamo considerare u_f, che per comodità indicheremo con f. In questo caso f' rappresenta la derivata di f in senso distribuzionale e, se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, abbiamo che
$$(f', \phi) = -(f, \phi') = -\int_{-\infty}^{a} g(x)\phi'(x)\mathrm{d}x - \int_{a}^{\infty} h(x)\phi'(x)\mathrm{d}x. \tag{1.15}$$

Integrando per parti si ottiene che il primo integrale è uguale a
$$-\left\{[g(x)\phi(x)]_{-\infty}^{a} - \int_{-\infty}^{a} g'(x)\phi(x)\mathrm{d}x\right\}$$
$$= -\left\{g(a)\phi(a) - \lim_{x\to-\infty} g(x)\phi(x) - \int_{-\infty}^{a} g'(x)\phi(x)\mathrm{d}x\right\}, \tag{1.16}$$

ma poiché ϕ è a supporto compatto, anche $g\phi$ lo è, e quindi $\lim_{x\to-\infty} g(x)\phi(x) = 0$, perciò
$$-\int_{-\infty}^{a} g(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = -g(a)\phi(a) + \int_{-\infty}^{a} g'(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

Procedendo in modo analogo per il secondo integrale si mostra che
$$-\int_{a}^{\infty} h(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = h(a)\phi(a) + \int_{a}^{\infty} h'(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

Indicando con g' e h' rispettivamente $u_{g'}$ e $u_{h'}$, abbiamo che

$$f' = g'\chi_{(-\infty,a)} + h'\chi_{(a,\infty)} + [h(a) - g(a)]\delta_a. \tag{1.17}$$

Osserviamo che nel caso in cui $g(a) = h(a)$, la derivata distribuzionale di f coincide quasi dappertutto con la sua derivata in senso classico.
Inoltre, se consideriamo la funzione gradino di Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

si ha che $H' = \delta_0$.

Esempio 1.3.6. Sia $g \in C(\mathbb{R})$. Consideriamo $f(t,x) := g(x-t) \in C(\mathbb{R}^2)$. Se $g \in C^1(\mathbb{R})$, allora abbiamo che $\mathrm{D}_t f(t,x) + \mathrm{D}_x f(t,x) = -g'(x-t) + g'(x-t) = 0$. Mostriamo ora che, anche quando $g \in C(\mathbb{R})$, f soddisfa l'equazione

$$\mathrm{D}_t f + \mathrm{D}_x f = 0,$$

considerando in questo caso le derivate distribuzionali. Dobbiamo provare che, per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $(f, -\mathrm{D}_t\phi - \mathrm{D}_x\phi) = 0$, cioè

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x-t)[\mathrm{D}_t\phi(t,x) + \mathrm{D}_x\phi(t,x)]\mathrm{d}t\mathrm{d}x = 0.$$

Considerando il cambio di variabili $\xi = x + t, \eta = x - t$, abbiamo

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} g(x-t)[\mathrm{D}_t\phi(t,x) + \mathrm{D}_x\phi(t,x)]\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} g(\eta)\left[\mathrm{D}_t\phi\left(\frac{\xi-\eta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + \mathrm{D}_x\phi\left(\frac{\xi-\eta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

Poniamo $\psi(\xi,\eta) := \phi\left(\frac{\xi-\eta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right)$. Abbiamo che $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ e, per ogni $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{D}_\xi\psi(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{D}_t\phi\left(\frac{\xi-\eta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + \mathrm{D}_x\phi\left(\frac{\xi-\eta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right)\right],$$

perciò, in virtù dei teoremi di Tonelli e Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x-t)[\mathrm{D}_t\phi(t,x) + \mathrm{D}_x\phi(t,x)]\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(\eta)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{D}_\xi\psi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta = 0,$$

dato che ψ è a supporto compatto.

Vale infine

Teorema 1.3.7 ([3]). Sia Ω un intervallo aperto reale e sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora esistono infiniti elementi $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, tali che $u' = f$. Se u_0 è una di queste distribuzioni, l'insieme delle soluzioni è dato da $\{u_0 + C : C \in \mathbb{C}\}$.

1.3.3 Composizione con un diffeomorfismo

Definizione 1.3.8. Siano Ω e O aperti di $\mathbb{R}^n$. Un **diffeomorfismo** C^∞ da Ω a O è una funzione $\chi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, tale che

1. $\chi(\Omega) = O$ e χ è invertibile;
2. $\det(J_\chi(x)) \neq 0$ per ogni $x \in \Omega$.

Dal teorema di invertibilità locale segue che se χ è un diffeomorfismo C^∞ da Ω a O, χ^{-1} è un diffeomorfismo C^∞ da O a Ω.
Da qui in avanti, ogni qualvolta considereremo un diffeomorfismo daremo per scontato che esso è di classe C^∞, e quindi eviteremo di specificarne la regolarità.

Siano $f \in L^1_{loc}(O)$ e χ diffeomorfismo da Ω a O. Allora $f \circ \chi \in L^1_{loc}(\Omega)$. Infatti, se $\mathcal{K}_\Omega$ è un compatto in Ω, allora $\mathcal{K}_O = \chi(\mathcal{K}_\Omega)$ è un compatto in O e vale

$$\int_{\mathcal{K}_\Omega} |f(\chi(x))| \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{K}_O} |\mathrm{det} J_{\chi^{-1}}(y)||f(y)| \mathrm{d}y \leq M \int_{\mathcal{K}_O} |f(y)| \mathrm{d}y < \infty, \tag{1.18}$$

dove $M = \max_{\mathcal{K}_O} |\det(J_{\chi^{-1}})|$.
Allora possiamo considerare la distribuzione $u_{f\circ\chi}$. Se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si ha

$$(u_{f\circ\chi}, \phi) = \int_\Omega f(\chi(x))\phi(x) \mathrm{d}x = \int_O f(y)\phi(\chi^{-1}(y))|\mathrm{det} J_{\chi^{-1}}(y)| \mathrm{d}y. \tag{1.19}$$

Osserviamo che $y \to \phi(\chi^{-1}(y))|\mathrm{det} J_{\chi^{-1}}(y)| \in \mathcal{D}(\Omega)$; infatti, se $\mathrm{supp}(\phi) = \mathcal{K}$, si ha che $\mathrm{supp}(\phi(\chi^{-1}(y))|\mathrm{det} J_{\chi^{-1}}(y)|) = \chi(\mathcal{K})$, che è ancora compatto.

Definizione 1.3.9. Siano Ω e O aperti in $\mathbb{R}^n$, sia χ diffeomorfismo da Ω a O e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, poniamo

$$((u \circ \chi)(x), \phi(x)) := (u(y), \phi(\chi^{-1}(y))|\det(J_{\chi^{-1}}(y))|).$$

Esempio 1.3.10. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La funzione $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \chi(x) = x - x_0$ è un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^n$ in sé stesso. Se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, abbiamo che

$$(\delta_0(x - x_0), \phi(x)) = (\delta_0(y), \phi(y + x_0) \cdot 1) = \phi(x_0) = (\delta_{x_0}, \phi), \tag{1.20}$$

quindi $\delta_0(x - x_0) = \delta_{x_0}$.

Definizione 1.3.11. Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ o $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Allora $\chi(x) = -x$ è un diffeomorfismo da Ω in sé stesso. Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diciamo che u è **pari** se $(u \circ \chi)(x) = u(-x) = u(x)$; se $u(-x) = -u(x)$ diciamo che u è **dispari**.

Esempio 1.3.12. Un esempio di distribuzione pari è data da δ_0. Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Allora si ha

$$(\delta_0(-x), \phi(x)) = (\delta_0(y), \phi(-y) \cdot 1) = \phi(0) = (\delta_0(x), \phi(x)), \tag{1.21}$$

da cui $\delta_0(-x) = \delta_0(x)$.

Esempio 1.3.13. $p.v.\frac{1}{x}$ è una distribuzione dispari, infatti, se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, abbiamo

$$\begin{aligned}(p.v.\frac{1}{x}(-x), \phi(x)) = (p.v.\frac{1}{x}(x), \phi(-x)) &= \lim_{k\to\infty} \int_{|x|\geq \frac{1}{k}} \frac{\phi(-x)}{x} \mathrm{d}x \\ &= -\lim_{k\to\infty} \int_{|x|\geq \frac{1}{k}} \frac{\phi(x)}{x} \mathrm{d}x = -(p.v.\frac{1}{x}(x), \phi(x)).\end{aligned} \tag{1.22}$$

1.3.4 Restrizione e supporto di una distribuzione

Siano Ω e O aperti di $\mathbb{R}^n$, con $O \subseteq \Omega$, e sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, poniamo
$\tilde{\phi}(x) := \begin{cases} \phi(x), \text{ se } x \in O, \\ 0, \text{ se } x \in \Omega \setminus O. \end{cases}$
È immediato verificare che supp$(\tilde{\phi})$ =supp(ϕ), e da ciò segue che $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ e, se $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{D}(O)$, allora $\tilde{\phi}_k \to \tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e sia $\phi \in \mathcal{D}(O)$, allora

$$(u_{f|O}, \phi) = \int_O f_{|O}(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\tilde{\phi}(x)\mathrm{d}x = (u_f, \tilde{\phi}). \tag{1.23}$$

Questo esempio ci suggerisce la seguente definizione:

Definizione 1.3.14. Siano Ω e O aperti di $\mathbb{R}^n$, con $O \subseteq \Omega$, e sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definiamo la **restrizione** $u_{|O}$ di u a O nel seguente modo:

$$\big(u_{|O}, \phi\big) := (u, \tilde{\phi}), \qquad\qquad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(O).$$

Esempio 1.3.15. Sia $O \subseteq \Omega$, O e Ω aperti di $\mathbb{R}^n$, e sia $x_0 \in \Omega \setminus O$. Allora, se $\phi \in \mathcal{D}(O)$, si ha che

$$\big(\delta_{x_0|O}, \phi\big) = (\delta_{x_0}, \tilde{\phi}) = \tilde{\phi}(x_0) = 0, \tag{1.24}$$

quindi $\delta_{x_0|O} = 0$.

Lemma 1.3.16. Siano $O \subseteq \Omega$, con O e Ω aperti di $\mathbb{R}^n$, e siano $u \in \mathcal{D}'(\Omega), a \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Allora valgono le seguenti:

1. $(au)_{|O} = a_{|O}u_{|O}$;
2. $\mathrm{D}^\alpha(u_{|O}) = (\mathrm{D}^\alpha u)_{|O}$.

Dimostrazione. Sia $\phi \in \mathcal{D}(O)$.

1. Osserviamo che
$$((au)_{|O}, \phi) = (au, \tilde{\phi}) = (u, a\tilde{\phi}), \tag{1.25}$$
e
$$(a_{|O}u_{|O}, \phi) = (u_{|O}, a_{|O}\phi) = (u, \widetilde{a_{|O}\phi}). \tag{1.26}$$
La conclusione segue dal fatto che
$$(a\tilde{\phi})(x) = (\widetilde{a_{|O}\phi})(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus O, \\ a(x)\phi(x), & \text{se } x \in O. \end{cases}$$

2. Abbiamo
$$((\mathrm{D}^\alpha u)_{|O}, \phi) = (\mathrm{D}^\alpha u, \tilde{\phi}) = (-1)^{|\alpha|}(u, \mathrm{D}^\alpha \tilde{\phi}); \tag{1.27}$$
e
$$(\mathrm{D}^\alpha(u_{|O}), \phi) = (-1)^{|\alpha|}(u_{|O}, \mathrm{D}^\alpha \phi) = (-1)^\alpha(u, \widetilde{\mathrm{D}^\alpha \phi}). \tag{1.28}$$
Si conclude osservando che $\mathrm{D}^\alpha \tilde{\phi} = \widetilde{\mathrm{D}^\alpha \phi}$.

□

Definizione 1.3.17. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$. Diciamo che x_0 appartiene al **supporto** di u, e scriviamo $x_0 \in \operatorname{supp}(u)$, se $u_{|O} \neq 0$, per ogni O aperto di Ω contenente x_0.

Osservazione 1.3.18. Dalla Definizione 1.3.17 segue che se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$, allora $x_0 \notin \operatorname{supp}(u)$ se e solo se esiste O aperto di Ω contenente x_0, tale che $u_{|O} = 0$.

Esempio 1.3.19. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \Omega$. Mostriamo che $\operatorname{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$. Se $x_1 \in \Omega \setminus \{x_0\}$, considerando l'aperto $O = B_r(x_1) \subseteq \Omega$, con $r \in \mathbb{R}^+$ tale che $x_0 \notin O$, segue dall'Esempio 1.3.15 che $\delta_{x_0|O} = 0$ e quindi $x_1 \notin \operatorname{supp}(\delta_{x_0})$.
Sia ora O un aperto di Ω contenente x_0 e sia $r \in \mathbb{R}^+$ tale che $\overline{B_r(x_0)} \subseteq O$. Allora, se consideriamo[3] $\phi(x) := \zeta\left(r^2 - |x - x_0|^2\right) \in \mathcal{D}(O)$, si ha che

$$\left(\delta_{x_0|O}(x), \phi(x)\right) = \zeta(r^2) \neq 0, \tag{1.29}$$

perciò $x_0 \in \operatorname{supp}(\delta_{x_0})$.

Le seguenti proprietà seguono immediatamente dal Lemma 1.3.16.

Proposizione 1.3.20. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora:

1. se $a \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}(au) \subseteq \operatorname{supp}(a) \cap \operatorname{supp}(u)$;
2. se $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\operatorname{supp}(\mathrm{D}^\alpha u) \subseteq \operatorname{supp}(u)$.

Dimostrazione.

1. Sia $x_0 \in \operatorname{supp}(au)$. Allora, per ogni $O \subseteq \Omega$ aperto con $x_0 \in O$, vale

$$0 \neq (au)_{|O} = a_{|O} u_{|O}, \tag{1.30}$$

quindi $a_{|O} \neq 0$ e $u_{|O} \neq 0$, perciò $x_0 \in \overline{\{x \in \Omega : a(x) \neq 0\}}$ e $x_0 \in \operatorname{supp}(u)$.

2. Sia $x_0 \in \operatorname{supp}(\mathrm{D}^\alpha u)$. Allora

$$0 \neq (\mathrm{D}^\alpha u)_{|O} = \mathrm{D}^\alpha(u_{|O}), \text{ per ogni } O \subseteq \Omega \text{ aperto con } x_0 \in O, \tag{1.31}$$

da cui segue che $u_{|O} \neq 0$, e quindi la tesi.

□

[3] ζ è la funzione definita nell'Esempio 0.1.2.

Osservazione 1.3.21. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega), a \in C^\infty(\Omega)$ e $a(x) = 0$ per ogni $x \in \text{supp}(u)$, allora au non è necessariamente 0. Come controesempio consideriamo il seguente caso: $\Omega = \mathbb{R}, u = \delta_0'$ e $a(x) = x$. È facile verificare che $\text{supp}(u) \subseteq \text{supp}(\delta_0) = \{0\}$ e $a(0) = 0$. Tuttavia, se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha

$$(au, \phi) = (\delta_0'(x), x\phi(x)) = -(\delta_0, \phi(x) + x\phi'(x)) = -\phi(0) = (-\delta_0, \phi), \tag{1.32}$$

quindi $au = -\delta_0$, che non è 0.

Teorema 1.3.22. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora $\text{supp}(u)$ è chiuso in Ω.

Dimostrazione. Mostriamo che $\Omega \setminus \text{supp}(u)$ è aperto in Ω. Se $x_0 \notin \text{supp}(u)$, allora esiste un aperto O_{x_0} di Ω, contenente x_0, tale per cui $u_{|O_{x_0}} = 0$. Dalla definizione segue subito che, se $u_{|O_{x_0}} = 0$, $u_{|V} = 0$ per ogni V aperto,$V \subseteq O$; perciò $O_{x_0} \cap \text{supp}(u) = \emptyset$. Abbiamo che $x_0 \in O_{x_0} \subseteq \Omega \setminus \text{supp}(u)$, con O_{x_0} aperto, e quindi $\Omega \setminus \text{supp}(u)$ è aperto, da cui la tesi. □

Teorema 1.3.23. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora:

1. $\text{supp}(u) = \emptyset$ se e solo se $u = 0$;
2. se $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e per ogni $x \in \Omega$ esiste un aperto Ω_x di Ω contenente x, tale che $u_{|\Omega_x} = v_{|\Omega_x}$, allora $u = v$.

Dimostrazione. 1. Il fatto che $\text{supp}(0) = \emptyset$ seguente banalmente dalla definizione di supporto data in precedenza. Mostriamo che vale anche il viceversa. Supponiamo che $\text{supp}(u) = \emptyset$ e proviamo che $u = 0$, cioè che $(u, \phi) = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Siano $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $x \in \text{supp}(\phi)$. Poiché $x \notin \text{supp}(u)$, esiste un aperto Ω_x di Ω tale che $u_{|\Omega_x} = 0$. L'insieme $\{\Omega_x : x \in \text{supp}(\phi)\}$ è un ricoprimento aperto di $\text{supp}(\phi)$, che è compatto, quindi esistono $x_1, \dots, x_N$ in $\text{supp}(\phi)$, tali che $\text{supp}(\phi) \subseteq \bigcup_{j=1}^N \Omega_{x_j}$. Per il Teorema 0.1.4, esistono $\phi_1, \dots, \phi_N$, appartenenti, rispettivamente, a $\mathcal{D}(\Omega_{x_1}), \dots, \mathcal{D}(\Omega_{x_N})$, tali che $\sum_{j=1}^N \phi_j(x) = 1$ per ogni $x \in \text{supp}(\phi)$. Infine, poiché $(\phi\phi_j)_{|\Omega_{x_j}} \in \mathcal{D}(\Omega_{x_j})$ per ogni $j \in \{1, \dots, N\}$, abbiamo che

$$(u, \phi) = \left(u, \sum_{j=1}^N \phi\phi_j\right) = \sum_{j=1}^N (u, \phi\phi_j) = \sum_{j=1}^N \left(u_{|\Omega_{x_j}}, (\phi\phi_j)_{|\Omega_{x_j}}\right) = 0, \tag{1.33}$$

da cui la tesi.

2. Si mostra applicando il punto precedente alla distribuzione $u - v$.

$\square$

Corollario 1.3.24. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia $a \in C^\infty(\Omega)$, tale che $a(x) = 1$ per ogni x in un aperto di Ω contenente supp(u). Allora $au = u$.

Dimostrazione. Abbiamo che $au = au - u + u = u + (a-1)u$. Per la Proposizione 1.3.20.1 abbiamo che supp$((a-1)u) \subseteq$ supp$(a-1) \cap$supp(u) e, per ipotesi, $a(x) - 1 = 0$ su un aperto contenente supp(u). Quindi, se $x_0 \in$ supp(u), $x_0 \notin \overline{\{x \in \Omega : a(x) - 1 \neq 0\}}$; pertanto, supp$(a-1) \cap$supp$(u) = \emptyset$, e, in virtù del Teorema 1.3.23.1, possiamo concludere che $(a-1)u = 0$, da cui la tesi. $\square$

Corollario 1.3.25. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Allora, se supp$(u) \cap$supp$(\phi) = \emptyset$, $(u, \phi) = 0$.

Dimostrazione. Sia $O := \Omega \setminus$ supp(u), aperto di Ω contenente supp(ϕ). Quindi, per ogni $x \notin O$, $\phi(x) = 0$, si ha che $(u, \phi) = (u_{|O}, \phi_{|O})$, ma supp$(u_{|O}) = O \cap$ supp$(u) = \emptyset$, e perciò $u_{|O} = 0$. $\square$

In seguito indicheremo con $\mathcal{E}'(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto in Ω.

Teorema 1.3.26 ([6], Capitolo XXIV)**.** Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, con supporto compatto. Allora:

1. u può essere estesa in modo unico ad un funzionale in $C^\infty(\Omega)$, che è continuo rispetto alla topologia menzionata nel Teorema 0.1.8.

2. Ogni funzionale lineare in $C^\infty(\Omega)$ che è continuo rispetto a tale topologia è, se ristretto a $\mathcal{D}(\Omega)$, una distribuzione a supporto compatto.

Se $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e $\phi \in C^\infty(\Omega)$, indicheremo con (u, ϕ) l'estensione di u applicata a ϕ.

Osservazione 1.3.27. Un esempio di distribuzione a supporto compatto è dato dalla delta di Dirac. Si veda Esempio 1.3.19.

1.3.5 Prodotto tensoriale di distribuzioni

Siano O e Ω aperti di $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ rispettivamente. Se $f \in L^1_{loc}(O)$ e $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, definiamo il **prodotto tensoriale** tra f e g come la funzione $f \otimes g$, definita in $O \times \Omega$, tale che

$$(f \otimes g)(x,y) := f(x)g(y), \qquad (x,y) \in O \times \Omega.$$

Osserviamo che per il teorema di Tonelli $f \otimes g \in L^1_{loc}(O \times \Omega)$, e quindi possiamo considerare $u_{f\otimes g}$. Inoltre, se $\phi \in \mathcal{D}(O)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora $\phi \otimes \psi \in \mathcal{D}(O \times \Omega)$ e, dai teoremi di Tonelli e Fubini, si ha che

$$\begin{aligned}(u_{f\otimes g}, \phi \otimes \psi) &= \int_{O\times\Omega} (f \otimes g)(x,y)(\phi \otimes \psi)(x,y)\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_{O\times\Omega} f(x)g(y)\phi(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_O f(x)\phi(x)\mathrm{d}x \int_\Omega g(y)\psi(y)\mathrm{d}y = (u_f, \phi)(u_g, \psi).\end{aligned} \tag{1.34}$$

Siano $u \in \mathcal{D}'(O)$ e $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Ciò che vogliamo fare ora è definire una distribuzione $u \otimes v$ in $\mathcal{D}'(O \times \Omega)$, tale che

$$(u \otimes v, \phi \otimes \psi) = (u,\phi)(v,\psi), \qquad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(O), \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Lemma 1.3.28 ([1], Capitolo I)**.** Siano O e Ω aperti di $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ rispettivamente. Allora $\mathcal{D}(O) \otimes \mathcal{D}(\Omega)$ [4] è denso in $\mathcal{D}(O \times \Omega)$, cioè, per ogni $\phi \in \mathcal{D}(O \times \Omega)$ esiste una successione $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(O) \otimes \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{D}(O \times \Omega)$.

Teorema 1.3.29. Siano O e Ω aperti in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ rispettivamente, e siano $u \in \mathcal{D}'(O)$ e $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora esiste un'unica distribuzione $u \otimes v \in \mathcal{D}'(O \times \Omega)$, detta **prodotto tensoriale** tra u e v, tale che

$$(u \otimes v, \phi \otimes \psi) = (u,\phi)(v,\psi), \qquad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(O), \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.35}$$

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che se una tale distribuzione esiste, allora è unica. Siano τ e ν distribuzioni in $\mathcal{D}'(O \times \Omega)$ che soddisfano (1.35) e sia $\chi \in \mathcal{D}(O \times \Omega)$. Il

[4] $\mathcal{D}(O) \otimes \mathcal{D}(\Omega)$ è il sottospazio di $\mathcal{D}(O \times \Omega)$ generato da $\{\phi \otimes \psi\colon\ \phi \in \mathcal{D}(O), \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$.

Lemma 1.3.28 ci garantisce l'esistenza di una successione $(\phi_k \otimes \psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(O)\otimes\mathcal{D}(\Omega)$ tale $\phi_k \otimes \psi_k \to \chi$ in $\mathcal{D}(O\times\Omega)$, e vale che

$$(\tau,\chi) \leftarrow (\tau,\phi_k\otimes\psi_k) = (u,\phi_k)(v,\psi_k) = (\nu,\phi_k\otimes\psi_k) \to (\nu,\chi).$$

Per l'unicità del limite si ha che $(\tau,\chi)=(\nu,\chi)$, e dall'arbitrarietà di χ si deduce l'unicità. Diamo ora un abbozzo della dimostrazione dell'esistenza di $u\otimes v$. In primo luogo osserviamo che, se $\chi\in\mathcal{D}(O\times\Omega)$, allora la mappa $\chi(x,\cdot)\in\mathcal{D}(\Omega)$ per ogni $x\in O$. Possiamo quindi definire la funzione $\tilde{\chi}(x) := (v(y),\chi(x,y))$ di dominio O; si mostra che $\tilde{\chi}\in\mathcal{D}(\Omega)$. Infine, poniamo $(u\otimes v,\chi) := (u(x),\tilde{\chi}(x)) = (u(x),(v(y),\chi(x,y)))$. È possibile provare che $u\otimes v\in\mathcal{D}'(O\times\Omega)$. □

Per una dimostrazione completa si guardi [7],Capitolo II.

Osservazione 1.3.30. È possibile invertire i ruoli delle variabili x e y e definire, equivalentemente,

$$(u\otimes v,\chi) = (v(y),(u(x),\chi(x,y))), \text{ per ogni } \chi\in\mathcal{D}(O\times\Omega). \tag{1.36}$$

Esempio 1.3.31. Siano O e Ω aperti di $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ rispettivamente, e siano $x_0\in O$ e $y_0\in\Omega$. Allora, se $\chi\in\mathcal{D}(O\times\Omega)$, abbiamo

$$\begin{aligned}(\delta_{x_0}\otimes\delta_{y_0},\chi) &= (\delta_{x_0}(x),(\delta_{y_0}(y),\chi(x,y))) = (\delta_{x_0}(x),\chi(x,y_0)))\\ &= \chi(x_0,y_0) = (\delta_{(x_0,y_0)},\chi),\end{aligned} \tag{1.37}$$

quindi $\delta_{x_0}\otimes\delta_{y_0} = \delta_{(x_0,y_0)}$.

Proposizione 1.3.32. Siano O e Ω aperti di $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ rispettivamente, $u\in\mathcal{D}'(O)$, $v\in\mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^m$, $\beta\in\mathbb{N}_0^n$. Allora valgono le seguenti:

1. supp$(u\otimes v)$=supp$(u)\times$supp(v);
2. $\mathrm{D}_x^\alpha\mathrm{D}_y^\beta(u\otimes v) = \mathrm{D}_x^\alpha u\otimes\mathrm{D}_y^\beta v$.

Dimostrazione. 1. Mostriamo innanzitutto che supp$(u)\times$supp$(v)\subseteq$ supp$(u\otimes v)$. Sia $(x,y)\in$ supp$(u)\times$supp(v) e sia $\mathcal{W}$ un intorno di (x,y) in $O\times\Omega$. Allora esistono un intorno $\mathcal{U}(x)$ di x in O e un intorno $\mathcal{V}(y)$ di y in Ω tali che $\mathcal{U}(x)\times\mathcal{V}(y)\subseteq\mathcal{W}$.

Inoltre, dato che $x \in \text{supp}(u)$ e $y \in \text{supp}(v)$, esistono $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{U}(x))$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{V}(y))$ tali che $(u, \phi) \neq 0$ e $(v, \psi) \neq 0$. Si ha che $\text{supp}(\phi \otimes \psi) \subseteq \mathcal{U}(x) \times \mathcal{V}(y) \subseteq \mathcal{W}$ e $(u \otimes v, \phi \otimes \psi) = (u, \phi)(v, \psi) \neq 0$, da cui $(x, y) \in \text{supp}(u \otimes v)$. Per mostrare l'inclusione opposta consideriamo $(x, y) \in O \times \Omega \backslash (\text{supp}(u) \times \text{supp}(v))$. Senza perdita di generalità assumiamo che $x \notin \text{supp}(u)$. Allora esiste un intorno $\mathcal{U}(x)$ di x in O tale che $\overline{\mathcal{U}(x)} \cap \text{supp}(u) = \emptyset$. Consideriamo $\chi \in \mathcal{D}(O \times \Omega)$ con $\text{supp}(\chi) \subseteq \mathcal{U}(x) \times \Omega$. Osserviamo che per ogni $y' \in \Omega$ vale [5]

$$\{x' \in O : \chi(x', y') \neq 0\} \subseteq \pi_1(\text{supp}(\chi(\cdot), y')) \subseteq \mathcal{U}(x),$$

e dal Corollario 1.3.25 segue che $(u(\cdot), \chi(\cdot, y')) = 0$ per ogni $y' \in \Omega$. Di conseguenza, $(u \otimes v, \chi) = (v(y'), (u(x'), \chi(x', y'))) = 0$. Poiché χ è un elemento arbitrario di $\mathcal{D}(\mathcal{U}(x) \times \Omega)$, possiamo concludere che $(x, y) \notin \text{supp}(u \otimes v)$.

2. Sia $\chi \in \mathcal{D}(O \times \Omega)$. Allora

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_y^\beta (u \otimes v), \chi) &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}(u \otimes v, \mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_y^\beta \chi) \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}(u(x), (v(y), \mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_y^\beta \chi(x, y))) = (-1)^{|\alpha|}(u(x), (\mathrm{D}_y^\beta v(y), \mathrm{D}_x^\alpha \chi(x, y))) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(u(x), \mathrm{D}_x^\alpha (\mathrm{D}_y^\beta v(y), \chi(x, y))) = (\mathrm{D}_x^\alpha u(x), (\mathrm{D}_y^\beta v(y), \chi(x, y))) \\ &= (\mathrm{D}_x^\alpha u \otimes \mathrm{D}_y^\beta v, \chi). \quad (1.38)\end{aligned}$$

□

1.3.6 Convoluzione di distribuzioni

Siano $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. La convoluzione tra f e g è la funzione

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \mathrm{d}y.$$

$f * g$, tuttavia, non è sempre ben definita e una delle condizioni che ci assicurano che lo sia è:
(α) Per ogni $\mathcal{K}$, compatto di $\mathbb{R}^n$, esiste $\mathcal{K}_1$, ancora compatto di $\mathbb{R}^n$, tale che, per ogni $x \in \mathcal{K}$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_1$, esiste un intorno aperto O di y per cui $g(z) = 0$ quasi dappertutto in O, oppure $f(x - z) = 0$ quasi ovunque in O.

[5] π_1 indica la proiezione su O.

Teorema 1.3.33. Supponiamo che f e g siano elementi in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, per cui vale (α). Allora:

1. per quasi ogni x in $\mathbb{R}^n$, la funzione $y \to f(x-y)g(y)$ è sommabile in $\mathbb{R}^n$;

2. la funzione $(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$, arbitrariamente estesa a $\mathbb{R}^n$, appartiene a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Si può provare che la funzione $(x,y) \to f(x-y)g(y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Siano $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_1$ compatti di $\mathbb{R}^n$, con $\mathcal{K}_1$ scelto come in (α). Allora $f(x-y)g(y) = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_1$ e quindi, per il teorema di Tonelli, si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{K}} \left(\int_{\mathcal{K}_1} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathcal{K}_1} \left(\int_{\mathcal{K}-y} |f(x)|\mathrm{d}x \right) |g(y)|\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Sia $R \in \mathbb{R}^+$ tale che, se $x \in \mathcal{K}$ e $y \in \mathcal{K}_1$, $|x-y| \leq R$. Allora si ha che per ogni $y \in \mathcal{K}_1$ vale

$$\int_{\mathcal{K}-y} |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{B_R(0)} |f(x)|\mathrm{d}x =: C < \infty, \text{ perché } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \tag{1.40}$$

da cui segue che

$$\int_{\mathcal{K}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathcal{K}_1} |g(y)|\mathrm{d}y < \infty, \text{ perché } g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{1.41}$$

Dal teorema di Fubini segue che per ogni compatto $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^n$, la funzione $y \to f(x-y)g(y)$ è integrabile in $\mathbb{R}^n$ per quasi ogni $x \in \mathcal{K}$, e $x \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$, arbitrariamente estesa a $\mathcal{K}$, è integrabile in $\mathcal{K}$. Si conclude osservando che $\mathbb{R}^n$ è unione numerabile di compatti. $\square$

Osservazione 1.3.34. Se esiste $\mathcal{K}_1$ compatto di $\mathbb{R}^n$ tale che $g(y) = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_1$, la condizione (α) è automaticamente soddisfatta, con $\mathcal{K}_1$ indipendente da $\mathcal{K}$.

Esempio 1.3.35. Un caso più particolare in cui (α) continua a valere è il seguente: sia $n = 1$ e $f(x) = g(x) = 0$ quasi ovunque in $(-\infty, 0)$. Sia $\mathcal{K}$ un compatto di $\mathbb{R}$ e $R \in \mathbb{R}^+$ tale $\mathcal{K} \subseteq [-R, R]$. Allora, scegliendo $\mathcal{K}_1 = [0, R]$, si ha che, se $y < 0$, ci basta considerare come aperto O in cui g si annulla $O = (-\infty, 0)$; se $y > R$, prendiamo $O = (R, \infty)$ e si ha che $f(x-z) = 0$ quasi ovunque in O.

Osservazione 1.3.36. Siano $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e siano u_f, u_g le distribuzioni regolari ad esse rispettivamente associate. In [3] si mostra che la condizione (α) è equivalente a:
(α') Sia s: supp$(u_f)\times$supp$(u_g)\to \mathbb{R}^n, s(x,y) = x + y$. Allora s è **propria**, cioè vale che per ogni compatto $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^n$, $s^{-1}(\mathcal{K})$ è un compatto di supp$(u_f)\times$supp(u_g).

Osservazione 1.3.37. Osserviamo che se f e g soddisfano (α), allora anche g e f verificano la stessa condizione, e questo si vede facilmente osservando che in (α') i ruoli di f e g sono simmetrici.

Osservazione 1.3.38. Siano $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo che soddisfino (α). Sia inoltre $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con supp$(\phi)\subseteq \mathcal{K}$, con $\mathcal{K}$ compatto. Applicando il teorema di Tonelli e sfruttando il fatto che anche $|f|$ e $|g|$ soddisfano (α), si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)\phi(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathcal{K}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\right)|\phi(x)|\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathcal{K}}(|f|*|g|)(x)|\phi(x)|\mathrm{d}x. \quad (1.42)\end{aligned}$$

Per Weierstrass, esiste una costante positiva C tale $|\phi(x)| \leq C$ per ogni $x \in \mathcal{K}$, e quindi

$$\int_{\mathcal{K}}(|f|*|g|)(x)|\phi(x)|\mathrm{d}x \leq C\int_{\mathcal{K}}(|f|*|g|)(x)| < \infty, \quad (1.43)$$

perché $|f| * |g| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Quindi, $(x,y) \to f(x-y)g(y)\phi(x)$ è integrabile in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e, per il teorema di Fubini, vale

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\phi(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\phi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\phi(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(f\otimes g)(x,y)\phi(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad (1.44)\end{aligned}$$

Sulla base di questo esempio, sembrerebbe naturale definire la convoluzione tra due distribuzioni u e v in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ in modo tale che, per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, si abbia $(u * v, \phi)$ uguale a $((u \otimes v)(x,y), \phi(x+y))$. Tuttavia, questa definizione non sarebbe ben posta, dato che se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, con $\phi \neq 0$, allora $\tilde{\phi}(x,y) := \phi(x+y)$ non apparterrebbe a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Infatti supp$(\tilde{\phi})$=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x+y \in \text{supp}(\phi)\}$, che non è compatto.

Diamo quindi la seguente definizione:

Definizione 1.3.39. Siano u e v in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Diciamo che sono **convolubili** se l'applicazione $s:\text{supp}(u)\times\text{supp}(v)\to \mathbb{R}^n, s(x,y)=x+y$ è propria. In tal caso, definiamo la convoluzione tra u e v nel seguente modo: sia $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e sia $\mathcal{K}$ un compatto di $\mathbb{R}^n$ tale che supp(ϕ)$\subseteq \mathcal{K}$. Allora $s^{-1}(\mathcal{K})$ è un compatto di supp(u)$\times$supp(v). Inoltre, sia $a\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, tale che $a(x,y)=1$ in un qualche aperto O contenente $s^{-1}(\mathcal{K})$. Allora definiamo

$$(u*v,\phi):=((u\otimes v)(x,y),a(x,y)\phi(x+y)).$$

Osservazione 1.3.40. L'esistenza di una funzione a siffatta è garantita dal Teorema 0.1.3.2.

Osservazione 1.3.41. Questa definizione è ben posta, perché non dipende dalla scelta di a. Sia a_1 un altro elemento di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ tale che $a_1(x,y)=1$ su un aperto contenente $s^{-1}(\mathcal{K})$. Allora $a-a_1\equiv 0$ su $s^{-1}(\mathcal{K})$. Definendo $\tilde{\phi}(x,y):=[a(x,y)-a_1(x,y)]\phi(x+y)$, si ha che supp($u\otimes v$) $\cap$ supp($\tilde{\phi}$)=(supp(u)$\times$supp(v)) $\cap$ supp($\tilde{\phi}$) $=\emptyset$, quindi, per il Corollario 1.3.25, si ha che $((u\otimes v)(x,y),\tilde{\phi}(x,y))=0$, cioè $((u\otimes v)(x,y),a(x,y)\phi(x+y))=((u\otimes v)(x,y),a_1(x,y)\phi(x+y))$.

Esempio 1.3.42. Dall'Osservazione 1.3.34, segue che se $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $v\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, allora sono convolubili. Inoltre, dall'Esempio 1.3.35 si deduce che distribuzioni arbitrarie con supporto in $[0,+\infty)$ sono convolubili.

Esempio 1.3.43. Siano $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, con supp($\phi$)$\subseteq\mathcal{K}$, dove $\mathcal{K}$ è un compatto di $\mathbb{R}^n$. Poiché $\delta_0\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, u e δ_0 sono convolubili e supp($u\otimes\delta_0$) =supp(u)$\times\{0\}$. Sia $s:\text{supp}(u)\times\{0\}$,$s(x,y)=x+y$. Allora $s^{-1}(\mathcal{K})=(\text{supp}(u)\cap\mathcal{K})\times\{0\}$. Consideriamo $a\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ tale che $a(x,y)=1$ su un aperto contenente $(\text{supp}(u)\cap\mathcal{K})\times\{0\}$. Allora

$$\begin{aligned}(u*\delta_0,\phi)&=((u\otimes\delta_0)(x,y),a(x,y)\phi(x+y))=(u(x),(\delta_0(y),a(x,y)\phi(x+y)))\\&=(u(x),a(x,0)\phi(x))=(u(x),[a(x,0)-1]\phi(x))+(u(x),\phi(x))=(u(x),\phi(x)),\end{aligned}\tag{1.45}$$

cioè $u*\delta_0=u$ per ogni $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposizione 1.3.44 ([3])**.** Siano u e v distribuzioni convolubili in $\mathbb{R}^n$. Allora

1. v e u sono convolubili e $v*u=u*v$.

2. Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathrm{D}^\alpha u$ e $\mathrm{D}^\beta v$ sono convolubili e $\mathrm{D}^{\alpha+\beta}(u * v) = \mathrm{D}^\alpha u * \mathrm{D}^\beta v$.

Proposizione 1.3.45. Siano u e v distribuzioni convolubili in $\mathbb{R}^n$. Allora valgono le seguenti:

1. supp(u)+supp(v) è chiuso in $\mathbb{R}^n$.

2. supp$(u * v) \subseteq$ supp(u)+supp(v). In particolare, se u e v sono elementi di $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, allora $u * v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione.

1. Sia $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in supp$(u)\times$supp(v) tale che $(x_k, y_k) \to z$ in $\mathbb{R}^n$; vogliamo provare che $z \in$ supp(u)+supp(v). Dato che u e v sono convolubili e $\{x_k + y_k : k \in \mathbb{N}\}$ è relativamente compatto, allora anche $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ è relativamente compatto, quindi, a meno di passare a una sottosuccessione, possiamo supporre $x_k \to x$; poiché supp(u) è chiuso, $x \in$ supp(u). Infine, osserviamo che $y_k = (x_k + y_k) - x_k \to z - x \in$ supp(v), da cui la tesi.

2. Proviamo che la restrizione di $u * v$ a $\mathbb{R}^n \setminus (\text{supp}(u) + \text{supp}(v))$ è 0. Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che supp$(\phi) \subset \mathbb{R}^n \setminus (\text{supp}(u) + \text{supp}(v))$; allora $\phi(x + y) \equiv 0$ in un aperto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ contenente supp$(u)\times$supp(v)=supp$(u \otimes v)$. Di conseguenza, vale che $a(x, y)\phi(x + y) \equiv 0$ in tale aperto, per ogni $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, e ciò conclude la dimostrazione.

□

Teorema 1.3.46 ([5], Capitolo IV)**.** Siano $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ o $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora $u * v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dove

$$(u * v)(x) = (u(y), v(x - y)), \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.46}$$

Inoltre, vale

$$\mathrm{D}^\alpha(u * v)(x) = (u(y), \mathrm{D}^\alpha v(x - y)), \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.47}$$

1.4 Distribuzioni temperate

Il nostro scopo è quello di estendere la nozione di trasformata di Fourier alle distribuzioni in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Come vedremo, però, non saremo in grado di dare un'unica definizione valida per tutti questi funzionali ed è per questo che ci restringeremo ad una loro sottoclasse, quella delle distribuzioni temperate.

Osservazione 1.4.1. Il Teorema 0.2.2.3 ci suggerisce la seguente definizione di $\hat{u} = \mathcal{F}u$, per $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

$$(\hat{u}, \phi) = (u, \hat{\phi}), \text{ per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1.48}$$

Questa formula richiede che $\hat{\phi}$ appartenga a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; tuttavia, l'unico elemento ϕ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ per cui $\hat{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è $\phi \equiv 0$. Infatti, consideriamo, per semplicità, il caso n=1, e sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il teorema di Paley-Wiener ci assicura che $\hat{\phi}$ può essere estesa ad una funzione olomorfa su tutto il piano complesso:

$$\hat{\phi}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixz}\phi(x)\mathrm{d}x, z \in \mathbb{C}. \tag{1.49}$$

Se $\hat{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\hat{\phi}$ è zero su un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$ e, per il principio del prolungamento analitico, si ha che $\hat{\phi} \equiv 0$ su tutto $\mathbb{R}$, e $\mathbb{C}$. Infine, dalla formula di inversione della trasformata di Fourier, concludiamo che $\phi \equiv 0$. L'idea, quindi, è quella di sostituire $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con una classe di funzioni invarianti rispetto a $\mathcal{F}$; uno spazio con questa proprietà è lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 1.4.2. Sia $n \in \mathbb{N}$. Una **distribuzione temperata** in $\mathbb{R}^n$ è un funzionale lineare $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ tale che, se $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $\lim_{k\to\infty} u(\phi_k) = u(\phi)$ in $\mathbb{C}$. Lo spazio delle distribuzioni temperate in $\mathbb{R}^n$ è denotato con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 1.4.3. Dal Teorema 0.2.8.1 segue che se $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la restrizione di u a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è una distribuzione in $\mathbb{R}^n$; tale restrizione identifica unicamente u, per via della Proposizione 0.2.13.

Esempio 1.4.4. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ localmente integrabile, tale che esiste $m \in \mathbb{N}$ per cui $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-m}|f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$. Allora la distribuzione regolare u_f associata ad f è temperata. Infatti, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $f\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$|(u_f, \phi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^m|\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|)^{-m}\mathrm{d}x < +\infty. \tag{1.50}$$

Inoltre, se $\phi_k \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(u_f, \phi_k) \to 0$, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.

Esempio 1.4.5. Sia $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$. Proviamo che u_f, la distribuzione regolare associata ad f, non è temperata. Per fare ciò, ci basta costruire una successione $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\phi_k \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ma $(u_f, \phi) \nrightarrow 0$. Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tale che $\phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\phi(x) = 1$ se $|x| \leq 1$. Dato $k \in \mathbb{N}$, poniamo $\phi_k(x) := 2^{-k}\phi(x-k)$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e quindi $\phi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Inoltre, per ogni $\alpha, m \in \mathbb{N}_0$, abbiamo

$$\begin{aligned}
|x|^m|\phi_k^{(\alpha)}(x)| &= 2^{-k}|x|^m|\phi^{(\alpha)}(x-k)| = 2^{-k}|(x-k)+k|^m|\phi^{(\alpha)}(x-k)| \\
&= 2^{-k}\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}|x-k|^{m-j}k^j\right)|\phi^{(\alpha)}(x-k)| \\
&= 2^{-k}\left(\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m}{j}|x-k|^{m-j}k^j + |x-k|^m + k^m\right)|\phi^{(\alpha)}(x-k)| \\
&\leq C(m)2^{-k}(|x-k|^m + k^m)|\phi^{(\alpha)}(x-k)| \\
&\leq C(m)2^{-k}\left[\sup_{y\in\mathbb{R}}|y|^m|\phi^{(\alpha)}(y)| + k^m\sup_{y\in\mathbb{R}}|\phi^{(\alpha)}(y)|\right] \leq 2^{-k}C(m)[C_1 + C_2] \to 0.
\end{aligned}$$

Quindi $\phi_k \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'altra parte, abbiamo

$$\begin{aligned}
(u_f, \phi_k) = 2^{-k}\int_{\mathbb{R}} e^x\phi(x-k)\mathrm{d}x &\geq 2^{-k}\int_{k-1}^{k+1} e^x\phi(x-k)\mathrm{d}x = 2^{-k}\int_{k-1}^{k+1} e^x\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{e}{2}\right)^k(e - e^{-1}) \to +\infty.
\end{aligned}$$

Perciò u_f non è temperata.

Definizione 1.4.6. Sia $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Diciamo che $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a u in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, e scriviamo $u_k \to u$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, se

$$(u_k, \phi) \to (u, \phi), \qquad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Proposizione 1.4.7. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Allora:

1. Per ogni $\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, $au \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, se $u_k \to u$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora $au_k \to au$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2. Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \mathrm{D}^\alpha u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, se $u_k \to u$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora $\mathrm{D}^\alpha u_k \to \mathrm{D}^\alpha u$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3. Se $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \chi(x) = Ax + b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$[6] invertibile e $b \in \mathbb{R}^n$, allora $u \circ \chi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, se $u_k \to u$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora $u_k \circ \chi \to u \circ \chi$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. 1. Sia $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; allora abbiamo che, per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(au, \phi) = (u, a\phi)$. Chiaramente la linearità di au segue da quella di u, quindi, per provare che $au \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, basta mostrare che se $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $(au, \phi_k) \to (au, \phi)$ in $\mathbb{C}$. In virtù del Teorema 0.2.8.2 e delle proprietà di u, vale che

$$(au, \phi_k) = (u, a\phi_k) \to (u, a\phi) = (au, \phi), \tag{1.51}$$

quindi $au \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per quanto riguarda la seconda proprietà, è sufficiente osservare che, per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, abbiamo

$$(au_k, \phi) = (u_k, a\phi) \to (u, a\phi) = (au, \phi), \tag{1.52}$$

cioè $au_k \to au$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. Si mostra in maniera analoga al punto precedente.

3. Sia $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Posto $\phi^*(y) = \phi(\chi^{-1}(y))|det(J_{\chi^{-1}}(y))| = \phi(A^{-1}(y-b))|det(A)|^{-1}$, abbiamo che $\phi^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, se $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $\phi_k^* \to \phi^*$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Infatti,[7]

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\||Ax| \leq \|A^{-1}\||\chi(x)| + ||A^{-1}|||b|,$$

e

$$|\chi(x)| \leq \|A\||x| + |b|,$$

perciò

$$(u \circ \chi(x), \phi_k(x)) = (u(y), \phi_k^*(y)) \to (u(y), \phi^*(y)) = (u \circ \chi(x), \phi(x)).$$

$\square$

[6] con $\mathbb{R}^{n\times n}$ indichiamo lo spazio delle matrici quadrate reali di ordine n.

[7] con $\|A\| := \max_{|x|=1} |Ax|$.

1.4.1 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Siamo ora in grado di definire la trasformata di Fourier per una distribuzione temperata.

Definizione 1.4.8. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definiamo la **trasformata di Fourier** di u come l'elemento $\hat{u} = \mathcal{F}u$ di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, tale che

$$(\hat{u}, \phi) = (u, \hat{\phi}), \qquad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Osservazione 1.4.9. Questa definizione è ben posta. Infatti, dal Teorema 0.2.10, si ha che $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, se $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $\hat{\phi}_k \to \hat{\phi}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; perciò, $(\hat{u}, \phi_k) = (u, \hat{\phi}_k) \to (u, \hat{\phi}) = (\hat{u}, \phi)$ in $\mathbb{C}$ per ogni $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, quindi $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.4.10. La trasformata di Fourier definisce una biiezione di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in se stesso. Inoltre, si ha che

$$\mathcal{F}^{-1}v(\xi) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}v(-x), \qquad \text{per ogni } v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

e

$$u_k \to u \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ se e solo se } \hat{u_k} \to \hat{u} \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. Sia $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e cerchiamo $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{u} = v$. Se ciò accade, applicando Teorema 0.2.10 e la formula di inversione (1), vale, per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}(u(x), \phi(x)) &= (u(x), \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\phi(x)) = (\mathcal{F}u(\xi), \mathcal{F}^{-1}\phi(\xi)) = (v(\xi), \mathcal{F}^{-1}\phi(\xi)) \\ &= (2\pi)^{-n}(v(\xi), \mathcal{F}\phi(-\xi)) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}v(x), \phi(-x)) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}v(-x), \phi(x)).\end{aligned}$$

Quindi, può solo che essere $u(x) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}^{-1}v(-x)$. D'altra parte, se $u(x) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}^{-1}v(-x)$, abbiamo, per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$(\hat{u}(\xi), \phi(\xi)) = (2\pi)^{-n}(\hat{v}(\xi), \hat{\phi}(-\xi)) = (v(x), \mathcal{F}[(2\pi)^{-n}\hat{\phi}(-\xi)](x)) = (v(\xi), \phi(\xi)),$$

perciò $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è sia iniettiva che suriettiva. L'ultima proprietà segue dal Teorema 0.2.10. $\square$

Esempio 1.4.11. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Calcoliamo $\hat{\delta_{x_0}}$: per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, abbiamo

$$(\hat{\delta_{x_0}}, \phi) = (\delta_{x_0}, \hat{\phi}) = \hat{\phi}(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot x_0}\phi(x)\mathrm{d}x;$$

da cui segue che $\hat{\delta_{x_0}}(\xi) = e^{-i\xi\cdot x_0}$, identificando $f(\xi) = e^{-i\xi\cdot x_0}$ con la distribuzione regolare associata. In particolare, si ha che $\hat{\delta_0}(\xi) = 1$.

Proposizione 1.4.12. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Allora:

1. Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \hat{\mathrm{D}^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi), \mathcal{F}((-ix)^\alpha u) = \mathrm{D}^\alpha \hat{u}$.

2. Se $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \chi(x) = Ax + b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $b \in \mathbb{R}^n, \mathcal{F}(u \circ \chi)(y) = \frac{1}{|det(A)|}e^{i(A^T)^{-1}y\cdot b}\hat{u}((A^T)^{-1}y)$.

Dimostrazione. 1. Sia $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Osserviamo che $a(\xi) = (-i\xi)^\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, perché è un polinomio, e per Proposizione 1.4.7.1 $(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per Teorema 0.2.11, abbiamo che, per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}(\hat{\mathrm{D}^\alpha u}(\xi), \phi(\xi)) &= (\mathrm{D}^\alpha u(x), \hat{\phi}(x)) = (-1)^{|\alpha|}(u(x), \mathrm{D}^\alpha\hat{\phi}(x)) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(u(x), \mathcal{F}((-i\xi)^\alpha\phi(\xi))(x)) = (-1)^{|\alpha|}(\hat{u}(\xi), (-i\xi)^\alpha\phi(\xi)) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}((i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi), \phi(\xi)) = ((i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi), \phi(\xi)), \quad (1.53)\end{aligned}$$

quindi $\hat{\mathrm{D}^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}((-ix)^\alpha u(x))(\xi), \phi(\xi)) &= ((-ix)^\alpha u(x), \hat{\phi}(x)) = (u(x), (-ix)^\alpha\hat{\phi}(x)) \\ &= (u(x), (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}(\mathrm{D}^\alpha\phi(\xi))(x)) = (-1)^{|\alpha|}(\hat{u}(\xi), \mathrm{D}^\alpha\phi(\xi)) \\ &= (\mathrm{D}^\alpha\hat{u}(\xi), \phi(\xi)), \quad (1.54)\end{aligned}$$

da cui segue che $\mathcal{F}((-ix)^\alpha u(x))(\xi) = \mathrm{D}^\alpha\hat{u}(\xi)$.

2. Sia $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Vale che

$$(\mathcal{F}(u \circ \chi), \phi) = (u \circ \chi(\xi), \hat{\phi}(\xi)) = (u(y), \frac{1}{|det(A)|}\hat{\phi}(A^{-1}y - A^{-1}b)), \qquad (1.55)$$

dove

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(A^{-1}y - A^{-1}b) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i((A^T)^{-1})x)\cdot y - ((A^T)^{-1}x)\cdot b}\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |det(A)|e^{-iz\cdot y - iz\cdot b}\phi(A^Tz)\mathrm{d}z. \quad (1.56)\end{aligned}$$

Quindi,

$$(\mathcal{F}(u \circ \chi), \phi) = (u(y), \mathcal{F}[e^{iz \cdot b}\phi(A^T z)](y)) = (\hat{u}(z), e^{iz \cdot b}\phi(A^T z))$$
$$= \left(\frac{1}{|det(A)|} e^{i(A^T)^{-1}y \cdot b} \hat{u}((A^T)^{-1}y), \phi(y) \right) \quad (1.57)$$

da cui la tesi.

□

Corollario 1.4.13. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se u è pari (dispari), allora $\hat{u}$ è pari (dispari).

Dimostrazione. Consideriamo $\chi(x) = -I_n x$[8]. Supponiamo u pari; il caso con u dispari è analogo. Segue da Proposizione 1.4.12.2, che

$$\mathcal{F}u(y) = \mathcal{F}(u(x))(y) = \mathcal{F}(u(-x))(y) = \mathcal{F}(-y), \quad (1.58)$$

perciò $\hat{u}(-y) = \hat{u}(y)$. □

Esempio 1.4.14. Nell'Esempio 1.2.4 abbiamo introdotto la distribuzione $u(x) = p.v.\frac{1}{x}$; vediamo come calcolarne la trasformata di Fourier. Dai risultati ottenuti negli Esempi 1.3.3, 1.3.12, 1.4.11 e dal Teorema 1.4.10, abbiamo che

$$\mathcal{F}(xu(x))(y) = \mathcal{F}1(y) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}1(-\xi) = 2\pi\delta_0(-\xi) = 2\pi\delta_0(\xi), \quad (1.59)$$

da cui concludiamo che $\mathcal{F}(xu(x)) = 2\pi\delta_0$. Inoltre, dal risultato della Proposizione 1.4.10, applicato con $\alpha = 1$, segue che $-i\mathcal{F}(xu(x)) = \hat{u}'$, cioè $\mathcal{F}(xu) = i\hat{u}'$, e dall'Esempio 1.3.5 si deduce che $\hat{u} = -2\pi i H + C$, con $C \in \mathbb{C}$. Infine, nell'Esempio 1.3.13 abbiamo provato che u è dispari, quindi, per il Corollario 1.4.13, anche $\hat{u}$ è dispari. In particolare, abbiamo che

$$\hat{u}(-x) = \begin{cases} C, & \text{se } x > 0, \\ -2\pi i + C, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

e

$$-\hat{u}(x) = \begin{cases} 2\pi i - C, & \text{se } x > 0, \\ -C, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

[8] I_n rappresenta la matrice identità di ordine n.

e l'uguaglianza tra le due è verificata solo se $2\pi i - C = C$, ovvero se $C = \pi i$. Abbiamo mostrato che

$$\hat{u}(\xi) = -2\pi i H(\xi) + \pi i = \begin{cases} -\pi i, & \text{se } \xi \geq 0, \\ \pi i, & \text{se } \xi < 0, \end{cases} = -\pi i \begin{cases} 1, & \text{se } \xi \geq 0, \\ -1, & \text{se } \xi < 0. \end{cases} = -\pi i \ \ sgn(\xi).$$

Per poter dire qualcosa sulla trasformata di Fourier del prodotto tensoriale tra due distribuzioni in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, dobbiamo prima accertarci che questa operazione sia ben definita. A garantircelo è la seguente proprietà:

Proposizione 1.4.15 ([7], Capitolo II)**.** Siano $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Allora $u \otimes v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 1.4.16. Siano $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Allora $\mathcal{F}(u \otimes v) = \mathcal{F}u \otimes \mathcal{F}v$.

Dimostrazione. Siano $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Per la Proposizione 0.2.13 e il Lemma 1.3.28, è sufficiente provare che, per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, vale

$$(\mathcal{F}(u \otimes v), \phi \otimes \psi) = (u \otimes v, \mathcal{F}(\phi \otimes \psi)) = (\mathcal{F}u \otimes \mathcal{F}v, \phi \otimes \psi). \tag{1.60}$$

Dai teoremi di Tonelli e Fubini, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((\phi \otimes \psi)(x, y))(\xi, \eta) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} e^{-i\xi \cdot x} e^{-i\eta \cdot y} \phi(x)\psi(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \phi(x) \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\eta \cdot y} \psi(y) \mathrm{d}y = \mathcal{F}\phi(\xi) \otimes \mathcal{F}(\eta), \end{aligned} \tag{1.61}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} (u \otimes v, \mathcal{F}(\phi \otimes \psi)) &= (u \otimes v, \mathcal{F}\phi \otimes \mathcal{F}\psi) = (u, \mathcal{F}\phi)(v, \mathcal{F}\psi) \\ &= (\mathcal{F}u, \phi)(\mathcal{F}v, \psi) = (\mathcal{F}u \otimes \mathcal{F}v, \phi \otimes \psi). \end{aligned} \tag{1.62}$$

$\square$

Infine, per quanto riguarda la trasformata della convoluzione, vale il seguente risultato:

Teorema 1.4.17 ([7], Capitolo II)**.** Siano $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Allora $u * v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}u\mathcal{F}v$.

Capitolo 2

Soluzioni fondamentali per operatori differenziali a coefficienti costanti

2.1 Definizione e proprietà

Definizione 2.1.1. Un **operatore differenziale parziale lineare** è un operatore della forma

$$A(x, \mathrm{D}) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha,$$

dove ogni coefficiente a_α è una funzione definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ e a valori complessi e $m \in \mathbb{N}$..

Osservazione 2.1.2. Nel caso in cui $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ per ogni α, $A(x, \mathrm{D})u$ è ben definita per ogni $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dove Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

In questo capitolo, ci limiteremo ad analizzare operatori differenziali a coefficienti costanti, ovvero operatori della forma

$$A(\mathrm{D}) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha,$$

con $a_\alpha \in \mathbb{C}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, con $|\alpha| \leq m$. Per questa classe di operatori è cruciale la nozione di soluzione fondamentale:

Definizione 2.1.3. Sia $A(\mathrm{D})$ un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti e sia $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Diciamo che $\mathcal{E}$ è una **soluzione fondamentale** di $A(\mathrm{D})$ se $A(\mathrm{D})\mathcal{E} = \delta_0$.

Esempio 2.1.4. Sia $n = 1$. Nell'Esempio 1.3.5 abbiamo mostrato che H è una soluzione fondamentale di $A(\mathrm{D}) = \mathrm{D}$. In realtà, è immediato verificare che l'insieme delle soluzioni fondamentali di D è dato da $\{H + C : C \in \mathbb{C}\}$. Se $n \geq 2$ e $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\mathcal{E}_n(x', x_n) := \delta_0(x') \otimes H(x_n)$ è una soluzione fondamentale di D_n. Infatti, invocando le proprietà mostrate nella Proposizione 1.3.32.2 e nell'Esempio 1.3.31, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_n\mathcal{E}_n(x', x_n) &= \mathrm{D}^0_{x'}\mathrm{D}^1_{x_n}\delta_0(x') \otimes H(x_n) = \delta_0(x') \otimes \mathrm{D}_{x_n}H(x_n) \\ &= \delta_0(x') \otimes \delta_0(x_n) = \delta_{(0,0)}(x', x_n) = \delta_0(x). \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Osservazione 2.1.5. L'esempio precedente mostra che la soluzione fondamentale di un operatore differenziale non è unica.

Definizione 2.1.6. Sia $A(\mathrm{D})$ un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti. Usando la notazione vista precedentemente, chiamiamo **simbolo** dell'operatore $A(\mathrm{D})$ il polinomio

$$A(\xi) := \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Vediamo ora un lemma che ci sarà utile successivamente per mostrare un importante risultato legato all'esistenza di soluzioni fondamentali.

Lemma 2.1.7. Sia $Q(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha \xi^\alpha$ un polinomio a coefficienti complessi non nullo di grado m. Poniamo $r(Q) := \sup_{\theta \in \mathbb{R}^n, |\theta| \leq 1} \min_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |Q(z\theta)|$. Allora esiste una costante $C_0 > 0$, indipendente da Q, tale che $r(Q) \geq C_0 \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |b_\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}_m$ la classe dei polinomi di grado minore o uguale m e, per ogni $Q \in \mathcal{P}_m$, poniamo $||Q||_2 := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |b_\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e $||Q||_\infty := \sup_{\xi \in \mathbb{C}^n, |\xi| \leq 1} |Q(\xi)|$. Mostriamo che sono delle norme. Chiaramente sono entrambe quantità non negative e, per ogni Q e P in $\mathcal{P}_m$, abbiamo

$$\begin{aligned}||Q + P||_2^2 &\leq \sum_{\alpha \leq m} (|b_\alpha|^2 + |p_\alpha|^2) \\ &\leq \sum_{\alpha \leq m} |b_\alpha|^2 + \sum_{\alpha \leq m} |p_\alpha|^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{\alpha \leq m} |b_\alpha|^2\right)\left(\sum_{\alpha \leq m} |p_\alpha|^2\right)} = (||Q||_2 + ||P||_2)^2,\end{aligned}$$

e

$$||Q+P||_\infty = \max_{\xi\in\mathbb{C}^n,|\xi|\le 1} |Q(\xi)+P(\xi)| \le \max_{\xi\in\mathbb{C}^n,|\xi|\le 1} (|Q(\xi)|+|P(\xi)|) = ||Q||_\infty + ||P||_\infty.$$

Inoltre, se $||Q||_2 = 0$, si ha che, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le m$,

$$\frac{(\mathrm{D}^\alpha Q)(0)}{\alpha!} = b_\alpha = 0,$$

da cui segue che tutte le derivate $(\mathrm{D}^\alpha Q)(0)$ sono nulle per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le m$, e quindi Q è il polinomio nullo. Mentre, se $||Q||_\infty = 0$, abbiamo che, per ogni $\xi \in \mathbb{C}^n, |\xi| \le 1, Q(\xi) = 0$, ma allora Q ha infiniti zeri, e quindi $Q \equiv 0$. Dato che $\mathcal{P}_m$ è uno spazio di dimensione finita su $\mathbb{C}$, tutte le norme su tale spazio sono equivalenti, e in particolare lo sono $||\cdot||_2$ e $||\cdot||_\infty$. Proviamo che il funzionale r è continuo rispetto alla norma $||\cdot||_\infty$. Siano Q e $\tilde{Q}$ polinomi in $\mathcal{P}_m$ tali che $||Q-\tilde{Q}||_\infty \le \delta$, con $\delta > 0$ fissato. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}^n$, $|\theta| \le 1$, abbiamo che

$$\inf_{z\in\mathbb{C},|z|=1} |Q(z\theta)| = \min_{z\in\mathbb{C},|z|=1} |Q(z\theta)| = |Q(z_0\theta)| \ge |\tilde{Q}(z_0\theta)| - \delta \ge \inf_{|z|=1} |\tilde{Q}(z\theta)| - \delta.$$

Passando all'estremo superiore, otteniamo che

$$r(Q) \ge r(\tilde{Q}) - \delta.$$

Ragionando in modo analogo, invertendo i ruoli di Q e $\tilde{Q}$, otteniamo $r(\tilde{Q}) \ge r(Q) - \delta$, da cui deduciamo che $\delta \ge |r(Q) - r(\tilde{Q})|$. Osserviamo anche che r è omogeneo di grado 1, infatti, se $c \in \mathbb{C}$, abbiamo

$$r(cQ) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}^n,|\theta|\le 1} \min_{z\in\mathbb{C},|z|=1} |cQ(z\theta)| = |c| \sup_{\theta\in\mathbb{R}^n,|\theta|\le 1} \min_{z\in\mathbb{C},|z|=1} |Q(z\theta)| = |c|r(Q).$$

Infine, notiamo che se $r(Q) = 0$, allora $Q = 0$. Quando $r(Q) = 0$ abbiamo che, per ogni $\theta \in \mathbb{R}^n, |\theta| \le 1, \inf_{z\in\mathbb{C},|z|=1} |Q(z\theta)| = 0$, cioè, per ogni $\theta \in \mathbb{R}^n, |\theta| \le 1$, esiste $z = z(\theta) \in \mathbb{C}, |z| = 1$, tale che $|Q(z(\theta)\theta)| = 0$. Consideriamo $\theta \in \mathbb{R}^n, |\theta| = 1$ e $0 < C \le 1$. Dato che $|C\theta| \le 1$, allora esiste $z(C\theta) \in \mathbb{C}$ tale che $Q(z(C\theta)C\theta) = 0$ con $|z(C\theta)| = 1$, e perciò $|Cz(z\theta)| = C$. Quindi, se $\theta \in \mathbb{R}^n, |\theta| = 1$, per ogni costante $C \in \mathbb{R}$, con $0 < C \le 1$, esiste $z(C) \in \mathbb{C}$ con $|z(C)| = |C|$ e $Q(z(C)\theta) = 0$; perciò, il polinomio $z \mapsto Q(z\theta)$ ha infiniti zeri, e quindi è il polinomio nullo. Segue che $Q(\theta) \equiv 0$ su

$\{\theta \in \mathbb{R}^n : |\theta| \leq 1\}$, da cui $0 = \mathrm{D}^\alpha Q(0) = b_\alpha \alpha!$, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, e quindi $Q \equiv 0$. Notiamo che $\mathcal{K} := \{Q \in \mathcal{P}_m : ||Q||_\infty = 1\}$ è compatto, in quanto $\mathcal{P}_m$ ha dimensione finita e $\mathcal{K}$ è sia chiuso che limitato, e quindi, per Weierstrass, esiste una costante $C_1 > 0$ tale che, per ogni $Q \in \mathcal{K}$, $r(Q) \geq C_1$. Inoltre, dall'omogeneità di r, si ha che, per ogni $Q \in \mathcal{P}_m$, $r\left(\frac{Q}{||Q||_\infty}\right) \geq C_1$, da cui $r(Q) \geq ||Q||_\infty C_1$. Per l'equivalenza tra $||\cdot||_\infty$ e $||\cdot||_2$, esiste una costante $C_0 > 0$, tale che

$$r(Q) \geq C_2||Q||_\infty \geq C_0||Q||_2,$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare. □

Teorema 2.1.8 (Teorema di Malgrange–Ehrenpreis)**.** Sia $A(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ un polinomio di grado $m \geq 1$. Allora l'operatore differenziale associato $A(\mathrm{D}) = \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha$ ha una soluzione fondamentale $\mathcal{E}$.

Dimostrazione. Per ipotesi, il polinomio $A(\xi)$ ha grado $m \geq 1$, quindi esiste $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tale che $|\alpha| = m$ e $a_\alpha \neq 0$. Sia $Q(\xi) = A(-i\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha (i\xi)^\alpha$. Dato $\xi \in \mathbb{R}^n$, definiamo $Q_\xi(\eta) := Q(\xi + \eta)$. Verifichiamo che esiste una costante $C_1 > 0$, indipendente da ξ, tale che $r^1(Q_\xi(\eta)) \geq C_1$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$. Se $|\alpha| = m$, $\mathrm{D}^\alpha Q(\xi)$ è costante, quindi il coefficiente di ξ^α in Q_ξ è indipendente da ξ e, in virtù del Lemma 2.1.7, esiste una costante $C_0 > 0$, tale che

$$r(Q_\xi) \geq C_0 \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |\mathrm{D}^\alpha Q(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq C_0 \left(\sum_{|\alpha| = m} |\mathrm{D}^\alpha Q(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =: C_1,$$

con $C_1 > 0$ indipendente da ξ, in quanto C_0 lo è. Allora, abbiamo che, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, esiste $\theta(\xi) \in \mathbb{R}^n$, con $|\theta(\xi)| \leq 1$ tale che

$$\inf_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |Q(\xi + z\theta(\xi))| = \min_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |Q(\xi + z\theta(\xi))| \geq C_1 \geq \frac{C_1}{2} =: C_2$$

Se $|\xi_1 - \xi|$ è sufficientemente piccolo, per continuità, abbiamo che $\min_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |Q(\xi_1 + z\theta(\xi))| \geq C_2$, e quindi, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, esistono $V(\xi)$ intorno di ξ in $\mathbb{R}^n$ e $\theta(\xi) \in \mathbb{R}^n, |\theta(\xi)| \leq 1$ tali che

$$\inf_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |Q(\xi_1 + z\theta(\xi))| \geq C_2, \qquad \text{per ogni } \xi_1 \in V(\xi).$$

[1] r è il funzionale definito nel Lemma 2.1.7

Essendo $\{|\xi| \leq N\}$ compatto, per ogni $N \in \mathbb{N}$, per il Teorema 0.1.5, possiamo determinare un ricoprimento $\{V(\xi_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ localmente finito di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ partizione dell'unità subordinata a $\{V(\xi_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Definiamo su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ il seguente funzionale $\mathcal{E}$:

$$(\mathcal{E}, \phi) := \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(\xi) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\hat{\phi}(\xi + z\theta(\xi_k))}{Q(\xi + z\theta(\xi_k))} \frac{\mathrm{d}z}{z} \right) \mathrm{d}\xi.$$

Osserviamo che tale funzionale è ben definito. Infatti, per Paley-Wiener, se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\phi}$ può essere estesa ad una funzione intera su $\mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$\hat{\phi}(\xi + i\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(\xi+i\eta)} \phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{K}} e^{-ix\cdot(\xi+i\eta)} \phi(x)\mathrm{d}x,$$

dove $\mathcal{K}$ è il $\mathrm{supp}(\phi)$. Per ogni $m \in \mathbb{N}_0$, abbiamo che

$$(1 + |\xi|^2)^m \int_{\mathcal{K}} e^{-ix\cdot(\xi+i\eta)} \phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{K}} (1 - \Delta_x)^m (e^{-ix\cdot(\xi+i\eta)}) \phi(x)\mathrm{d}x,$$

e, integrando per parti, si ottiene

$$\int_{\mathcal{K}} e^{-ix\cdot(\xi+i\eta)} (1 - \Delta_x)^m \phi(x)\mathrm{d}x.$$

Maggiorando con il modulo si ha

$$(1 + |\xi|^2)^m |\hat{\phi}(\xi + i\eta)| \leq e^{x\cdot\eta} \int_{\mathcal{K}} |(1 - \Delta_x)^m \phi(x)|\mathrm{d}x \leq C(\mathcal{K}) \sup_{|\alpha|\leq 2m} |\mathrm{D}^\alpha \phi(\xi)|,$$

dove $C(\mathcal{K}) > 0$ è una costante che dipende da $L_n(\mathcal{K})$, che è una quantità finita. Pertanto, abbiamo mostrato che, per ogni $m \in \mathbb{N}_0$, esiste una costante $C_m > 0$, tale che

$$|\hat{\phi}(\xi + i\eta)| \leq C_m (1 + |\xi|^2)^{-m} \sup_{|\alpha|\leq 2m} |\mathrm{D}^\alpha \phi(\xi)|. \tag{2.2}$$

Notiamo che, per ogni $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{E}, \phi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(\xi) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{|\hat{\phi}(\xi + z\theta(\xi_k))|}{|Q(\xi + z\theta(\xi_k))|} \frac{\mathrm{d}z}{z} \right) \mathrm{d}\xi \\ &\leq C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(\xi) \left(\frac{C_m (1 + |\xi|^2)^{-m} \sup_{|\alpha|\leq 2m} |\mathrm{D}^\alpha \phi(\xi)|}{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} \right) \mathrm{d}\xi \\ &\leq C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(\xi) \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^m} \mathrm{d}\xi = C_5 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^m} \mathrm{d}\xi, \end{aligned}$$

con C_3, C_4, C_5 costanti reali positive. Scegliendo $m > \frac{n}{2}$, l'integrale $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^m} \mathrm{d}\xi$ converge, e quindi $\mathcal{E}$ è ben definito. Inoltre, notiamo che $\mathcal{E}$ così definito è una distribuzione. Infatti, se $\phi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\phi_k) \to \mathcal{E}(0) = 0$ in $\mathbb{C}$ per (2.2). Infine, mostriamo che $A(\mathrm{D})\mathcal{E} = \delta_0$. Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$
\begin{aligned}
(A(\mathrm{D})\mathcal{E}, \phi) &= (\mathcal{E}, A(-\mathrm{D})\phi) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(\xi) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{Q(\xi + z\theta(\xi_k))\hat{\phi}(\xi + z\theta(\xi_k))}{Q(\xi + z\theta(\xi_k))} \frac{\mathrm{d}z}{z} \right) \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(\xi)\hat{\phi}(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi)\mathrm{d}\xi = \phi(0) = (\delta_0, \phi),
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

e quindi $\mathcal{E}$ è una soluzione fondamentale di $A(\mathrm{D})$. □

Vediamo ora come il Teorema 2.1.8 ci permette di derivare importanti informazioni circa l'esistenza e l'unicità di soluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali a coefficienti costanti.

Teorema 2.1.9. Sia $A(\mathrm{D})$ un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti e sia $\mathcal{E}$ una soluzione fondamentale di $A(\mathrm{D})$. Allora:

1. Se $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è convolubile con $\mathcal{E}$, una soluzione dell'equazione $A(\mathrm{D})u = f$ è $u = \mathcal{E} * f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. In particolare, se $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, l'equazione $A(\mathrm{D})u = f$ è sempre risolubile in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$;

2. Se $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'equazione $A(\mathrm{D})u = f$ ha sempre una soluzione in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

3. Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è convolubile con $\mathcal{E}$ e $A(\mathrm{D})u = 0$, allora $u = 0$.

Dimostrazione. 1. Dalla Proposizione 1.3.44.2 abbiamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathrm{D}^\alpha\mathcal{E}$ e f sono convolubili e vale $\mathrm{D}^\alpha(\mathcal{E} * f) = \mathrm{D}^\alpha(\mathcal{E}) * f$; inoltre, in virtù dell'Esempio 1.3.43, sappiamo che $\delta_0 * f = f$. Sia $u = \mathcal{E} * f$ e mostriamo che vale $A(D)u = f$.

$$
A(\mathrm{D})u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha(\mathcal{E} * f) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha \mathcal{E} \right) * f = \delta_0 * f = f. \tag{2.4}
$$

La seconda parte della tesi segue dall'Esempio 1.3.42.

2. Segue dal punto precedente e dal Teorema 1.3.46.

3. Sfruttando la linearità di $A(\mathrm{D})$ e le proprietà richiamate nel punto 1, abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{E} * A(\mathrm{D})u = \mathcal{E} * \left(\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha u \right) &= \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \mathcal{E} * \mathrm{D}^\alpha u \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha \mathcal{E} \right) * u = \delta_0 * u = u. \end{aligned} \tag{2.5}$$

□

Le soluzioni fondamentali risultano essere anche un importante strumento per lo studio della regolarità di soluzioni di problemi del tipo $A(\mathrm{D})u = f$.

Definizione 2.1.10. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $A(x, \mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha$ un operatore differenziale, con coefficienti $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$. Diciamo che $A(x, \mathrm{D})$ è **ipoellittico** se per ogni U aperto di Ω e per ogni $u \in \mathcal{D}'(U)$ con $A(x, \mathrm{D})u \in C^\infty(U)$ si ha che $u \in C^\infty(U)$.

Esempio 2.1.11. Sia U un intervallo aperto reale. Consideriamo l'operatore differenziale $A(\mathrm{D}) = \mathrm{D}$. Sia $u \in \mathcal{D}'(U)$ con $\mathrm{D}u = u' = f \in C^\infty(U)$. Allora, per il Teorema 1.3.7, esiste $u_0 \in C^\infty(U)$, tale che $u_0' = f$, e $u = u_0 + C$, con $C \in \mathbb{C}$. Pertanto D è ipoellittico.

Esempio 2.1.12. Nell'Esempio 1.3.6 abbiamo visto che, se $g \in C(\mathbb{R})$ e $u(t, x) = g(t - x)$, allora $\mathrm{D}_t u + \mathrm{D}_x u = 0$, anche se, in generale, $u \notin C^\infty(\mathbb{R})$. Deduciamo quindi che l'operatore $A(\mathrm{D}) = \mathrm{D}_t + \mathrm{D}_x$ non è ipoellittico in $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.1.13. Sia $A(\xi)$ un polinomio in n variabili non nullo e sia $A(\mathrm{D})$ il corrispondente operatore differenziale a coefficienti costanti. Sono equivalenti le seguenti:

1. $A(\mathrm{D})$ è ipoellittico in $\mathbb{R}^n$;

2. se $\mathcal{E}$ è una soluzione fondamentale di $A(\mathrm{D})$, $\mathcal{E}_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$;

3. esiste una soluzione fondamentale $\mathcal{E}_0$ di $A(\mathrm{D})$, tale che $\mathcal{E}_{0|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Dimostrazione. 1. $\Longrightarrow$ 2. Supponiamo che $A(\mathrm{D})$ sia ipoellittico in $\mathbb{R}^n$, e sia $\mathcal{E}$ una sua soluzione fondamentale. Allora $A(\mathrm{D})\mathcal{E} = \delta_0$. Se $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, per l'Esempio 1.3.15, abbiamo che $A(\mathrm{D}) = 0$ in U, e dall'ipoellitticità di $A(\mathrm{D})$ segue che $\mathcal{E} \in C^\infty(U)$.
2. $\Longrightarrow$ 3. Per il Teorema 2.1.8, esiste $\mathcal{E}_0$ soluzione fondamentale di $A(\mathrm{D})$ e, per ipotesi, abbiamo che $\mathcal{E}_{0|\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.
3. $\Longrightarrow$ 1. Siano U aperto di $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(U)$ e $u \in \mathcal{D}'(U)$ tali che $A(\mathrm{D})u = f$. Vogliamo provare che $u \in C^\infty(U)$. Per il Teorema 1.3.23.2, è sufficiente mostrare che, per ogni $x_0 \in U$, esiste $r \in \mathbb{R}^+$ tale che $u_{|B_r(x_0)} \in C^\infty(B_r(x_0))$. Siano $x_0 \in U$ e $r_0 \in \mathbb{R}^+$ tali che $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subseteq U$, e sia $\phi \in \mathcal{D}(U)$ tale che $\phi(x) = 1$ per ogni $x \in \overline{B_{r_0}(x_0)}$. Allora $f\phi \in \mathcal{D}(U)$. Per il Teorema 2.1.9.2, esiste $v \in C^\infty(U)$ tale che $A(\mathrm{D})v = \phi f$. In $B_{r_0}(x_0)$, $f\phi = f$, quindi $A(\mathrm{D})u = \phi = A(\mathrm{D})v$, da cui $A(\mathrm{D})(u - v) = 0$, in $B_{r_0}(x_0)$. Se indichiamo con $u' := u - v$, ci siamo ricondotti al caso $A(\mathrm{D})u' = 0$. Sia $\chi \in \mathcal{D}(U)$ tale che $\chi(x) = 1$ se $|x - x_0| \leq r_1$ e $\chi(x) = 0$ se $|x - x_0| \geq 2r_1$, per qualche $r_1 \in \mathbb{R}^+$ tale che $\overline{B_{2r_1}(x_0)} \subseteq U$. Osserviamo che, se $x \notin B_{2r_1}(x_0)$, $\chi(x) = 0$, perciò $(\chi u')(x) = 0$, e quindi $x \notin \mathrm{supp}[A(\mathrm{D}(\chi u'))]$. Pertanto, $\mathrm{supp}[A(\mathrm{D})(\chi u')] \subseteq \overline{B_{2r_1}(x_0)}$. Inoltre, se $x \in B_{r_1}(x_0)$, $\chi(x) = 1$, e quindi $A(\mathrm{D})(\chi u')_{|B_{r_1}(x_0)} = A(\mathrm{D})(u')_{|B_{r_1}(x_0)} = 0$, da cui segue che $\mathrm{supp}[A(\mathrm{D})(\chi u')] \subseteq \overline{B_{2r_1}(x_0)} \setminus B_{r_1}(x_0)$, che è compatto. Sia ora $\mathcal{E}_0$ soluzione fondamentale di $A(\mathrm{D})$ tale che $\mathcal{E}_{0|\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Allora, sfruttando la proprietà vista nell'Esempio 1.3.43, vale

$$\chi u' = \delta_0 * (\chi u') = A(\mathrm{D})\mathcal{E}_0 * (\chi u') = \mathcal{E}_0 * A(\mathrm{D})(\chi u').$$

Sia $\delta \in \mathbb{R}^+$ con $2\delta < r_1$ e consideriamo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\psi(x) = 1$ se $|x| \leq \delta$ e $\psi(x) = 0$ se $|x| \geq 2\delta$. Poniamo $\mathcal{E}_1 := \psi\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_2 := (1-\psi)\mathcal{E}_0$. Osserviamo che $\mathcal{E}_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, in quanto

$$\mathcal{E}_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \geq \delta, \\ (1 - \psi(x))\mathcal{E}_0(x), & \text{se } \delta < |x| < 2\delta, \\ \mathcal{E}_0, & \text{se } |x| \geq 2\delta, \end{cases}$$

e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \mathcal{E}_{0|\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Abbiamo che

$$\chi u' = \mathcal{E}_0 * A(\mathrm{D})(\chi u') = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) * A(\mathrm{D})(\chi u') = \mathcal{E}_1 * A(\mathrm{D})(\chi u') + \mathcal{E}_2 * A(\mathrm{D})(\chi u').$$

Per la Proposizione 1.3.45.2, $\mathrm{supp}\ [\mathcal{E}_1 * A(\mathrm{D})(\chi u')] \subseteq\ \mathrm{supp}\ (\mathcal{E}_1) +\ \mathrm{supp}\ [A(\mathrm{D})(\chi u')] = \{x + y : x \in\ \mathrm{supp}\ (\mathcal{E}_1), y \in\ \mathrm{supp}\ [A(\mathrm{D})(\chi u')]\}$. Notiamo che $\mathrm{supp}(\mathcal{E}_1) \subseteq \overline{B_{2\delta}(x_0)}$, e quindi, se $x \in \mathrm{supp}(\mathcal{E}_1), y \in \mathrm{supp}[A(\mathrm{D})(\chi u')$,

$$|x+y| \geq |y| - |x| \geq r_1 - 2\delta =: r_2,$$

pertanto, supp $[\mathcal{E}_1 * A(\mathrm{D})(\chi u')] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B_{r_2}(x_0)$. Da cui segue che

$$(\chi u')_{|B_{r_2}(x_0)} = [\mathcal{E}_2 * A(\mathrm{D}(\chi u'))]_{|B_{r_2}(x_0)}.$$

Dato che $\mathcal{E}_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $A(\mathrm{D})(\chi u') \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema 1.3.46, $\mathcal{E}_2 * A(\mathrm{D})(\chi u') \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Poiché, $r_2 < r_1$, $\chi_{|B_{r_2}(x_0)} = 1$ e quindi

$$(\chi u')_{|B_{r_2}(x_0)} = u'_{|B_{r_2}(x_0)} = [\mathcal{E}_2 * A(\mathrm{D}(\chi u'))]_{|B_{r_2}(x_0)} \in C^\infty(B_{r_2}(x_0)).$$

□

Esempio 2.1.14. Consideriamo l'*operatore delle onde* in $\mathbb{R}^2$ così definito

$$A(\mathrm{D}) := \mathrm{D}_t^2 - \mathrm{D}_x^2.$$

Mostriamo che

$$\mathcal{E}(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } |x| \leq t, t > 0, \\ 0, & \text{altrimenti }, \end{cases}$$

è una soluzione fondamentale, cioè $A(\mathrm{D})\mathcal{E} = \delta_0$. Per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, abbiamo

$$\begin{aligned}(A(\mathrm{D})\mathcal{E}, \phi) = (\mathcal{E}, \mathrm{D}_t^2\phi - \mathrm{D}_x^2\phi) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\int_{-t}^t \left[\mathrm{D}_t^2\phi(t,x) - \mathrm{D}_x^2\phi(t,x)\right] \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \left(\int_{-t}^t \mathrm{D}_t^2\phi(t,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t - \int_0^\infty \left(\int_{-t}^t \mathrm{D}_x^2\phi(t,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\right). \quad (2.6)\end{aligned}$$

Indicando con $\mathcal{I}_1 := \int_0^\infty \left(\int_{-t}^t \mathrm{D}_t^2\phi(t,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$ e con $\mathcal{I}_2 := \int_0^\infty \left(\int_{-t}^t \mathrm{D}_x^2\phi(t,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$, risulta

$$(A(\mathrm{D})\mathcal{E}, \phi) = \frac{1}{2}(\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2). \quad (2.7)$$

Osserviamo che

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^\infty [\mathrm{D}_x\phi(t,x)]_{x=-t}^{x=t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty [\mathrm{D}_x\phi(t,t) - \mathrm{D}_x\phi(t,-t)]\,\mathrm{d}t. \quad (2.8)$$

Per quanto riguardo $\mathcal{I}_1$, invece, se scambiamo l'ordine di integrazione, otteniamo

$$\mathcal{I}_1 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|x|}^{\infty} \mathrm{D}_t^2 \phi(t,x) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{D}_t \phi(|x|, x) \mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

Pertanto, (2.7) diventa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left(- \int_{\mathbb{R}} \mathrm{D}_t \phi(|x|, x) \mathrm{d}x - \int_0^{\infty} \left[\mathrm{D}_x \phi(t,t) - \mathrm{D}_x \phi(t,-t) \right] \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(- \int_0^{\infty} \mathrm{D}_t \phi(x,x) \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{D}_t \phi(-x,x) \mathrm{d}x - \int_0^{\infty} \mathrm{D}_x \phi(t,t) \mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \mathrm{D}_x \phi(t,-t) \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(- \int_0^{\infty} \left[\mathrm{D}_t \phi(t,t) + \mathrm{D}_x \phi(t,t) \right] \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{D}_t \phi(-t,t) \mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \mathrm{D}_x \phi(t,-t) \mathrm{d}t \right). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\int_0^{\infty} \left[\mathrm{D}_t \phi(t,t) + \mathrm{D}_x \phi(t,t) \right] \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \mathrm{D}_t (t \mapsto \phi(t,t)) \mathrm{d}t = \left[\phi(t,t) \right]_0^{\infty} = -\phi(0,0), \tag{2.11}$$

e

$$\begin{aligned}
&- \int_{-\infty}^{0} \mathrm{D}_t \phi(-t,t) \mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \mathrm{D}_x \phi(t,t) \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \left[-\mathrm{D}_t \phi(t,-t) + \mathrm{D}_x \phi(t,-t) \right] \mathrm{d}t \\
&\qquad = - \int_0^{\infty} \mathrm{D}_t (t \mapsto \phi(t,-t)) \mathrm{d}t = - \left[\phi(t,-t) \right]_0^{\infty} = \phi(0,0). \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Pertanto possiamo concludere che, per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $(A(\mathrm{D})\mathcal{E}, \phi) = \phi(0,0) = (\delta_0, \phi)$. Chiaramente, $\mathcal{E}_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \notin C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, pertanto l'operatore delle onde $A(\mathrm{D}) = \mathrm{D}_t^2 - \mathrm{D}_x^2$, non è ipoellittico.

Consideriamo ora gli operatori differenziali ordinari a coefficienti costanti della forma

$$A(\mathrm{D}) := \sum_{j=0}^{m} a_j \mathrm{D}^j,$$

con $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ e $a_m \neq 0$. Vale il seguente risultato:

Teorema 2.1.15. Ogni operatore differenziale ordinario $A(\mathrm{D})$ con $A(\xi) \not\equiv 0$ ha una soluzione fondamentale $\mathcal{E}$ con supporto in $[0, \infty)$. Inoltre, $\mathcal{E}_{|\mathbb{R} \setminus \{0\}} \in C^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Dimostrazione. Procediamo cercando una soluzione fondamentale $\mathcal{E}$ che sia una distribuzione regolare della forma

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

con u soluzione dell'equazione differenziale ordinaria $A(\mathrm{D})u = 0$ in $\mathbb{R}$. Per il Teorema di esistenza e unicità per un problema di Cauchy, u è univocamente determinata dalla scelta di $u(0), u'(0), \ldots, u^{(m-1)}(0)$, mentre il Teorema 2.1.9.2 ci garantisce che $u \in C^\infty(\mathbb{R})$, e perciò $\mathcal{E}_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Siano ora $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1} \in \mathbb{C}$ fissati e assumiamo che $u^{(j)}(0) = u_j$ per ogni $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Dall'Esempio 1.3.5 segue che $\mathcal{E}' = u'H + u(0)\delta_0 = u'H + u_0\delta_0$ e $\mathcal{E}'' = u''H + u'(0)\delta_0 + u_0\delta_0' = u''H + u_1\delta_0 + u_0\delta_0'$; in generale, vale che

$$\mathcal{E}^{(j)} = u^{(j)}H + \sum_{i=0}^{j-1} u_{j-i-1}\delta_0^i.$$

Deduciamo che

$$\begin{aligned} A(\mathrm{D})\mathcal{E} &= \sum_{j=0}^{m} a_j \mathrm{D}^j \mathcal{E} = \sum_{j=1}^{m} a_j \left(u^{(j)}H + \sum_{i=0}^{j-1} u_{j-i-1}\delta_0^{(i)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_j u^{(j)} H + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{j-1} a_j u_{j-i-1}\delta_0^{(i)} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{j-1} a_j u_{j-i-1}\delta_0^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=i+1}^{m} a_j u_{j-i-1} \right) \delta_0^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} a_j u_{j-1}\delta_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{j=i+1}^{m} a_j u_{j-i-1} \right) \delta_0^{(i)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Per concludere, dobbiamo scegliere $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1} \in \mathbb{C}$ in modo tale che $\sum_{j=1}^{m} a_j u_{j-1} = 1$ e $\sum_{j=i+1}^{m} a_j u_{j-i-1} = 0$ per $i = 1, \cdots, m-1$; tale condizione è verificata per $u_0 = \cdots = u_{m-2} = 0, u_{m-1} = a_m^{-1}$. □

Corollario 2.1.16. Ogni operatore differenziale ordinario non nullo a coefficienti costanti è ipoellittico.

Dimostrazione. La tesi è un'immediata conseguenza dei Teoremi 2.1.13 e 2.1.15. □

2.2 Soluzioni fondamentali dell'operatore di Laplace

Definizione 2.2.1. Chiamiamo **operatore di Laplace** n-dimensionale in $\mathbb{R}^n$ l'operatore differenziale

$$\Delta := \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j^2.$$

Proposizione 2.2.2. L'operatore di Laplace è invariante per isometrie di $\mathbb{R}^n$, cioè, se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, Tx = Ax + b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonale e $b \in \mathbb{R}^n$, allora $\Delta(u \circ T) = \Delta u \circ T$, per ogni $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $T = (t_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ ortogonale. Abbiamo

$$\Delta(u \circ T)(x) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_{x_j}^2 (u \circ T)(x).$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, abbiamo

$$Tx = \left(\sum_{k=1}^{n} t_{1k}x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k \right),$$

e, per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$, vale

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{x_j}(u \circ T)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_{x_i} u(Tx) t_{ij}, \\
\mathrm{D}_{x_j}^2(u \circ T)(x) &= \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} \mathrm{D}_{x_i x_l} u(Tx) t_{lj} \right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} t_{ij}t_{lj}(\mathrm{D}_{x_i x_l} u)(Tx).
\end{aligned}$$

Perciò

$$\Delta(u\circ T)(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} t_{ij}t_{lj}(\mathrm{D}_{x_i x_l} u)(Tx) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}t_{lj}(\mathrm{D}_{x_i x_l} u)(Tx) \right). \quad (2.14)$$

Sappiamo che $TT^T = I_n$, e quindi, per ogni $i, p \in \{1, \ldots, n\}$, vale[2]

$$\sum_{m=1}^{n} t_{im}t_{mp}^T = \sum_{m=1}^{n} t_{im}t_{pm} = \delta_{ip}. \quad (2.15)$$

[2] δ_{ip} è il *delta di Kronecker*, ossia la funzione

$$\delta_{ip}(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } i = p, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Applicando questa proprietà al risultato (2.14), otteniamo

$$\Delta(u \circ T)(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} t_{ij} (\mathrm{D}_{x_i x_i} u)(Tx) \right) = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}_{x_i x_i} u)(Tx) = (\Delta u)(Tx). \tag{2.16}$$

□

Vediamo ora come determinare una soluzione fondamentale $\mathcal{E}$ per Δ. Per la proprietà appena mostrata, sembra naturale cercare tale soluzione tra le distribuzioni regolari della forma $\mathcal{E}(x) = F(|x|^2)$, con $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ liscia. Dall'Esempio 1.3.19 segue che

$$(\Delta \mathcal{E})_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = \delta_{0|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = 0,$$

cioè

$$4F''(|x|^2)|x|^2 + 2nF'(|x|^2) = 0, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{2.17}$$

Ponendo $r = |x|^2$ e $G(r) = F'(r)$, (2.17) è equivalente a

$$G'(r) + \frac{n}{2r} G(r) = 0. \tag{2.18}$$

Moltiplicando (2.18) per il fattore $r^{\frac{n}{2}}$ otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r^{\frac{n}{2}} G(r) \right) = r^{\frac{n}{2}} G'(r) + \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} G(r) = 0,$$

da cui segue che esiste una costante $C_0 \in \mathbb{R}$ tale che $F'(r) = C_0 r^{-\frac{n}{2}}$.

Integrando si ottiene

$$F(r) = \begin{cases} C_1 r^{1-\frac{n}{2}} + C_2, & \text{se } n \neq 2, \\ C_1 \ln(r) + C_2, & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Pertanto $\mathcal{E}$ è della forma

$$\mathcal{E}(x) = C\mathcal{E}_0(x) = \begin{cases} C|x|^{2-n}, & \text{se } n \neq 2, \\ C\ln(|x|), & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Osserviamo che $\mathcal{E}$ è una distribuzione regolare, indipendentemente dalla scelta di C. Richiamiamo ora la formula di Green, che ci sarà utile in seguito per determinare la costante C: Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^n$ e sia ν la sua normale esterna. Allora, se $u, v \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$[3], vale[4]

$$\int_\Omega (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta(u))\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}H^{n-1}. \tag{2.19}$$

Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Applicando (2.19) con $u(x) = \mathcal{E}_0(x), v(x) = \phi(x), \nu(x) = -\frac{x}{|x|}$, e sfruttando il fatto che $\Delta\mathcal{E}_{0|\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} = 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
(\Delta\mathcal{E}, \phi) = (\mathcal{E}, \Delta\phi) &= C\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon} \mathcal{E}_0(x)\Delta\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= C\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon} \left[\sum_{j=1}^n \mathrm{D}_j(\mathcal{E}_0\mathrm{D}_j\phi)(x) - \sum_{j=1}^n \mathrm{D}_j(\mathrm{D}_j\mathcal{E}_0\phi)(x) + \Delta\mathcal{E}_0(x)\phi(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= C\lim_{\epsilon\to 0}\left[-\int_{|x|=\epsilon}\sum_{j=1}^n \left[\mathcal{E}_0(x)\mathrm{D}_j\phi(x) - \mathrm{D}_j\mathcal{E}_0(x)\phi(x)\right] x_j\epsilon^{-1}\mathrm{d}\sigma(x)\right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
I_j := \left|\int_{|x|=\epsilon} \mathcal{E}_0(x)\mathrm{D}_j\phi(x)x_j\epsilon^{-1}\mathrm{d}\sigma(x)\right| &\leq \int_{|x|=\epsilon} |\mathcal{E}_0(x)||\mathrm{D}_j\phi(x)||x_j|\epsilon^{-1}\mathrm{d}\sigma(x) \\
&\leq C(n,\epsilon)\max_{|x|=\epsilon}|\mathrm{D}_j\phi(x)|H^{n-1}(S_{n-1}) = C(n,\epsilon)\max_{|x|=\epsilon}|\mathrm{D}_j\phi(x)|\sigma_{n-1}\epsilon^{n-1} \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

con

$$C(n,\epsilon) = \begin{cases} \epsilon^{2-n}, & \text{se } n \neq 2, \\ |\ln(\epsilon)|, & \text{se } n = 2, \end{cases}$$

e σ_{n-1} è la misura $n-1$ dimensionale di $S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Deduciamo che $\lim_{\epsilon\to 0} I_j = 0$, quindi

$$(\Delta\mathcal{E}, \phi) = C\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{j=1}^n\int_{|x|=\epsilon} \mathrm{D}_j\mathcal{E}_0(x)\phi(x)x_j\epsilon^{-1}\mathrm{d}\sigma(x).$$

Se $n \neq 2$, abbiamo

$$\int_{|x|=\epsilon}\phi(x)\sum_{j=1}^n \mathrm{D}_j\mathcal{E}_0(x)x_j\epsilon^{-1}\mathrm{d}\sigma(x) = (2-n)\epsilon^{1-n}\int_{|x|=\epsilon}\phi(x)\mathrm{d}\sigma(x) \to_{\epsilon\to 0} (2-n)\sigma_{n-1}\phi(0),$$

[3] $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ indica l'insieme delle funzioni di classe C^2 aventi come dominio un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente $\bar{\Omega}$ e codominio $\mathbb{R}$.

[4] $\partial\Omega$ indica il bordo di Ω.

e quindi $(\Delta\mathcal{E},\phi) = (2-n)\sigma_{n-1}(\delta_0,\phi)$. Se $n=2$, abbiamo

$$\int_{|x|=\epsilon} \phi(x) \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j\mathcal{E}_0(x)x_j\epsilon^{-1}\mathrm{d}\sigma(x) = \epsilon^{-1}\int_{|x|=\epsilon} \phi(x)\mathrm{d}\sigma(x) \to_{\epsilon\to 0} \sigma_1\phi(0) = 2\pi\phi(0),$$

da cui segue che $(\Delta\mathcal{E},\phi) = 2\pi(\delta_0,\phi)$. Sistemando C in modo tale che valga in entrambi i casi l'uguaglianza $(\Delta\mathcal{E},\phi) = (\delta_0,\phi)$, concludiamo che

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)\sigma_{n-1}}, & \text{se } n \neq 2, \\ \frac{\ln(|x|)}{2\pi}, & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Infine osserviamo che, in ogni caso, $\mathcal{E}_{|\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Possiamo riassumere quanto provato con il seguente

Teorema 2.2.3. L'operatore di Laplace Δ ammette come soluzione fondamentale la distribuzione regolare

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)\sigma_{n-1}}, & \text{se } n \neq 2, \\ \frac{\ln(|x|)}{2\pi}, & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Inoltre, poiché $\mathcal{E}_{|\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, l'operatore Δ è ipoellittico.

2.3 Una soluzione fondamentale dell'operatore del calore

Definizione 2.3.1. Chiamiamo **operatore del calore** in $\mathbb{R}^{n+1}$ l'operatore differenziale

$$A(\mathrm{D}) := \mathrm{D}_t - \Delta_x = \mathrm{D}_t - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}^2_{x_j},$$

dove $t\in\mathbb{R}$ e $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. L'operatore del calore talvolta è chiamato "operatore di diffusione".

Vogliamo cercare una soluzione fondamentale $\mathcal{E}(t,x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ che abbia la seguente forma:

$$(\mathcal{E}(t,x),\phi(t,x)) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{E}(t,\cdot),\phi(t,\cdot))\mathrm{d}t, \qquad \text{per ogni } \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.22}$$

Indichiamo con $\hat{\mathcal{E}}(t,\xi)$ la trasformata di Fourier $\mathcal{F}_x$ di $\mathcal{E}(t,\cdot)$ fatta rispetto a x, per ogni $t\in\mathbb{R}$. Applicando $\mathcal{F}_x$ ad entrambi i membri dell'equazione $A(\mathrm{D})\mathcal{E}(t,x)=\delta_{(0,0)}(t,x)=\delta_0(t)\otimes\delta_0(x)$, e osservando che $\mathcal{F}_x(\Delta_x\mathcal{E})(t,\xi)=-|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}(t,\xi)$, abbiamo

$$\mathrm{D}_t\hat{\mathcal{E}}(t,\xi)+|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}(t,\xi)=\delta_0(t)\otimes 1(\xi).$$

L'idea per procedere è quella di ottenere $\hat{\mathcal{E}}(t,\xi)$ andando a cercare la soluzione fondamentale dell'operatore differenziale ordinario $\mathrm{D}_t+|\xi|^2$. Dalla dimostrazione del Teorema 2.1.15, si evince che, per ogni $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\hat{\mathcal{E}}(t,\xi)$ ha supporto contenuto in $[0,+\infty)$ ed è della forma $\hat{\mathcal{E}}(t,\xi)=H(t)u(t,\xi)$, dove $u(t,\xi)$ è soluzione dell'equazione differenziale ordinaria $\mathrm{D}_tu+|\xi|^2u=0$. In particolare, vale che $\hat{\mathcal{E}}(t,\xi)=H(t)e^{-t|\xi|^2}$. Sia $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. Poniamo $\hat{\phi}(t,\xi)=\mathcal{F}_x[\phi(t,\cdot)](\xi)$, per $t\in\mathbb{R}$ e $\xi\in\mathbb{R}^n$. Per (2.22), abbiamo

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}(t,x),\phi(t,x))=\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(t,\cdot),\mathcal{F}_x[\mathcal{F}_x^{-1}\phi(t,\cdot)])\mathrm{d}t&=\int_{\mathbb{R}}(\hat{\mathcal{E}}(t,\xi),\mathcal{F}_x^{-1}\phi(t,\xi))\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty(e^{-t|\xi|^2},(2\pi)^{-n}\hat{\phi}(t,-\xi))\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Dato che $e^{-t|\xi|^2}\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, vista come funzione di ξ, si ha che (2.23) è equivalente a

$$(\mathcal{E}(t,x),\phi(t,x))=(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi}(t,-\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t.$$

Assumiamo quest'ultima uguaglianza come definizione di $\mathcal{E}$ e mostriamo che essa è ben posta e $\mathcal{E}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$. Siano $\phi\in\mathbb{R}^{n+1}$ e $N\in\mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi}(t,-\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t\right|&\le\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\phi}(t,-\xi)|\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t\\&\le\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^N(1+|\xi|^2)^{-N}(1+|t|)^N(1+|t|)^{-N}|\hat{\phi}(t,-\xi)|\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t\\&\le\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-N}(1+|t|)^{-N}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t\sup_{(t,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}}(1+|\xi|^2)^N(1+|t|)^N|\hat{\phi}(t,\xi)|\\&=\int_0^\infty(1+|t|)^{-N}\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-N}\mathrm{d}\xi\sup_{(t,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}}(1+|\xi|^2)^N(1+|t|)^N|\hat{\phi}(t,\xi)|.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Osserviamo che avendo scelto $N>\frac{n}{2}$, gli integrali $\int_0^\infty(1+|t|)^{-N}\mathrm{d}t$ e $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-N}\mathrm{d}\xi$ sono convergenti, e pertanto abbiamo che esiste una costante $C_1>0$ tale che

$$\left|\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi}(t,-\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t\right|\le C_1\sup_{(t,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}}(1+|\xi|^2)^N(1+|t|)^N|\hat{\phi}(t,\xi)|.$$

Stimiamo ora la quantità $(1+|\xi|^2)^N(1+|t|)^N|\hat{\phi}(t,\xi)|$. Abbiamo che, per ogni $t\in\mathbb{R}$ e $\xi\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}(1+|\xi|^2)^N(1+|t|)^N|\hat{\phi}(t,\xi)| &= (1+|\xi|^2)^N(1+|t|)^N\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}\phi(t,x)\mathrm{d}x\right|\\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}(1-\Delta_x)^N(e^{-ix\cdot\xi})(1+|x|)^{-M}(1+|x|)^M(1+|t|)^N\phi(t,x)\mathrm{d}x\right|,\end{aligned}$$

e, integrando per parti, otteniamo

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}(1+|x|)^{-M}(1+|t|)^N(1+|x|)^M(1-\Delta_x)^N\phi(t,x)\mathrm{d}x\right|\\ &\qquad\le\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-M}\mathrm{d}x\sup_{(t,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}}(1+|t|)^N(1+|x|)^M|(1-\Delta_x)^N\phi(t,x)|. \quad (2.25)\end{aligned}$$

Scegliendo $M\in\mathbb{N}, M>n$, l'integrale $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-M}$ converge, quindi possiamo concludere che esiste una costante $C>0$ tale che

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi}(t,-\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t\right| &\le C\sup_{(t,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}}(1+|t|)^N(1+|x|)^M|(1-\Delta_x)^N\phi(t,x)|\\ &\le C\sup_{(t,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}}(1+|t|)^N(1+|x|)^M\sup_{|\alpha|\le 2N}|\mathrm{D}^\alpha\phi(t,x)|, \quad (2.26)\end{aligned}$$

che è una quantità limitata in quanto $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e quindi $\mathcal{E}$ è ben definito. Inoltre, osserviamo che $\mathcal{E}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: da (2.26), infatti, segue che, se $\phi_k\to 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora $\mathcal{E}(\phi_k)\to\mathcal{E}(0)=0$ in $\mathbb{C}$. Proviamo ora che $\mathcal{E}$ è una soluzione fondamentale, cioè che soddisfa l'uguaglianza $A(\mathrm{D})\mathcal{E}=\delta_0$. In effetti, abbiamo

$$\begin{aligned}(A(\mathrm{D})\mathcal{E}(t,x),\phi(t,x)) &= (\mathrm{D}_t\mathcal{E}(t,x)-\Delta_x\mathcal{E}(t,x),\phi(t,x)) = -(\mathcal{E}(t,x),\mathrm{D}_t\phi(t,x)+\Delta_x\phi(t,x))\\ &= -(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^2}[\mathrm{D}_t\hat{\phi}(t,-\xi)+\mathcal{F}_x(\Delta_x\phi)(t,\xi)]\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t\\ &= -(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^2}\mathrm{D}_t\hat{\phi}(t,-\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t+(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi}(t,-\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t.\end{aligned} \quad (2.27)$$

Sia ora $\mathcal{I}:=-(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^2}\mathrm{D}_t\hat{\phi}(t,-\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t$. Integrando per parti, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= -(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}[e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi}(t,-\xi)]_0^\infty\mathrm{d}\xi-(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty|\xi|^2e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi}(t,-\xi)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\xi\\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}(0,-\xi)\mathrm{d}\xi-(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty|\xi|^2e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi}(t,-\xi)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

e quindi, (2.27) è equivalente a

$$(A(\mathrm{D})\mathcal{E}, \phi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(0, -\xi)\mathrm{d}\xi = \phi(0,0) = (\delta_0, \phi),$$

perciò $\mathcal{E}$ è effettivamente una soluzione fondamentale di $A(\mathrm{D})$. Calcoliamo ora $\mathcal{F}_\xi^{-1}[e^{-t|\xi|^2}]$, per $t \in \mathbb{R}^+$. Per fare ciò, richiamiamo il noto risultato:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau - t^2}\mathrm{d}t = \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\tau^2}{4}}, \tag{2.28}$$

dove $\tau \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Tonelli abbiamo

$$\mathcal{F}_\xi^{-1}[e^{-t|\xi|^2}](x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} e^{-t|\xi|^2}\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{ix_j\xi_j - t\xi_j^2}\mathrm{d}\xi_j. \tag{2.29}$$

Sia $\mathcal{I}_j := \int_{\mathbb{R}} e^{ix_j\xi_j - t\xi_j^2}\mathrm{d}\xi_j$. Considerando il cambio di variabile $\xi_j = \frac{\eta}{t^{\frac{1}{2}}}$, e sfruttando (2.28), abbiamo

$$\mathcal{I}_j = t^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{x_j}{t^{1/2}}\eta - \eta^2}\mathrm{d}\eta = t^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_j^2}{4t}}.$$

Perciò,

$$\mathcal{F}_\xi^{-1}[e^{-t|\xi|^2}](x) = (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^{n} t^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_j^2}{4t}} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \tag{2.30}$$

da cui deduciamo che, per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$(\mathcal{E}(t,x), \phi(t,x)) = \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \phi(t,x)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

Consideriamo ora la funzione $E(t,x) := \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. È evidente che $E(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^n))$. Osserviamo che, per ogni $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{x_j} E(t,x) &= \frac{-x_j}{2t} E(t,x), \\
\mathrm{D}_{x_j}^2 E(t,x) &= \frac{-1}{2t}[E(t,x) + x_j \mathrm{D}_{x_j} E(t,x)], \\
\mathrm{D}_t E(t,x) &= \frac{-n}{2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{|x|^2}{4} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}+3}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}},
\end{aligned}$$

e, in generale, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $k \in \mathbb{N}_0$, si ha che $\mathrm{D}_t^k \mathrm{D}_x^\alpha E(t,x)$ è combinazione lineare di termini della forma $t^{-\beta} x^\gamma e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, con $\beta \in \mathbb{R}^+$ e $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$. Inoltre,

$$t^{-\beta} x^\gamma e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \left(\frac{|x|^2}{t} \right)^\beta e^{-\frac{|x|^2}{4t}} |x|^{-2\beta} x^\gamma \to_{t\to 0} 0,$$

uniformemente nei compatti di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, per via del fattore $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, e quindi E estesa con 0 in $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\}$. Infine, osserviamo che, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\mathrm{d}x = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}(2t^{\frac{1}{2}})^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\mathrm{d}y \\ = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_j^2}\mathrm{d}y_j = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{n} \pi^{\frac{1}{2}} = 1, \quad (2.31)\end{aligned}$$

e quindi, per ogni $T \in \mathbb{R}^+$, abbiamo

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} E(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = T,$$

da cui segue che $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, perciò $\mathcal{E}$ è una distribuzione regolare.

Abbiamo quindi provato il seguente risultato:

Teorema 2.3.2. L'operatore del calore $\mathrm{D}_t - \Delta_x$ ammette come soluzione fondamentale la distribuzione regolare $\mathcal{E}(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Inoltre, poiché $\mathcal{E}_{|\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{(0,0)\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\})$, tale operatore è ipoellittico.

Bibliografia

[1] Chazarain J, Piriou A (1981), *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars.

[2] Folland G (1995), *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press.

[3] Guidetti D, *Dispense.*

[4] Hörmander L (1963), *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag.

[5] Hörmander L (1990), *The analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag.

[6] Treves F (1967), *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press.

[7] Vladimirov V S (1971), *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Inc..