

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**Teorema di Kuratowski**  
**per grafi planari**  
**e sua estensione ad altre superfici**

Tesi di Laurea in Algebra e Geometria

Relatore:  
Francesco Meazzini

Presentata da:  
Arianna Charrère

Anno Accademico 2022/2023



*A mia madre*



# Introduzione

I grafi sono strutture matematiche discrete, utilizzate in diversi ambiti della matematica e delle scienze per rappresentare relazioni e processi. La teoria dei grafi ebbe i suoi albori grazie al matematico svizzero Eulero, il quale, nel 1736, rispose alla domanda sulla possibilità dell'esistenza di un cammino percorribile una sola volta, tra i ponti della città di Königsberg (Vedi [9] Chap. 6). Egli riuscì nell'intento, grazie alla schematizzazione del problema mediante, appunto, un grafo. Diede così inizio allo studio di questa nuova disciplina, inizialmente chiamata teoria dei collegamenti. Nel corso degli ultimi due secoli, la teoria dei grafi divenne sempre più centrale nella ricerca matematica, soprattutto grazie alle sue innumerevoli applicazioni, tra le quali le reti neurali.

Nella seguente dissertazione vorrei porre l'attenzione su una caratteristica intrinseca dei grafi: la possibilità di rappresentarli su differenti superfici mediante punti e curve che non si intersecano. Questa proprietà, nel caso del piano, è chiamata planarità e divide i grafi in due sottocategorie. Non è banale stabilire quando un grafo è planare, ovvero trovare una sua rappresentazione sul piano. Un enorme passo avanti verso questo obiettivo ci viene fornito nel 1930 da Kuratowski, attraverso una caratterizzazione di questa tipologia di grafo. Fu egli, infatti, il primo a dare una definizione matematica e astratta di grafo. Il matematico polacco giunse alla conclusione che un grafo è planare se e solo se non possiede suddivisione dei grafi  $K_5$  e  $K_{3,3}$ . Però questa condizione necessaria e sufficiente non risolse completamente il problema. Per quel che concerne grafi di grandi dimensioni, non vi sono ancora algoritmi ottimali in grado di definire quando un grafo sia o meno inscrivibile sul piano.

Nel primo capitolo, verranno riportate alcune definizioni preliminari relative a questa disciplina. Andremo, in seguito, ad introdurre i grafi planari, dimostrando poi il Teorema di Eulero e i suoi innumerevoli corollari. Tra questi, di particolare rilevanza, troviamo la non planarità del grafo completo  $K_5$  e del grafo completo bipartito  $K_{3,3}$ .

Il secondo capitolo è interamente dedicato alla dimostrazione del Teorema di Kuratowski e del Teorema di Wagner, il quale ci restituisce una caratterizzazione equivalente a quella enunciata da Kuratowski.

Infine, nel terzo capitolo, verranno proposti alcuni spunti relativi ai grafi su superfici differenti dal piano. Nel primo paragrafo introdurremo le nozioni di inscrivibilità e quella più forte di mappabilità di un grafo. Quest'ultima ci permetterà di estendere il Teorema di Eulero ad altre superfici e di parlare di caratteristica di Eulero per superfici. A differenza del caso planare, vedremo che non si conoscono ancora caratterizzazioni ma solo condizioni o necessarie o sufficienti per la mappabilità di un grafo. In particolare ci concentreremo sui grafi mappabili sul toro. Nell'ultimo paragrafo, cercando di estendere i Teoremi di Kuratowski e Wagner ad altre superfici, illustreremo un incredibile e recente risultato. Parleremo, quindi, di grafi proibiti, ovvero di quei grafi la cui presenza come sottografi preclude l'inscrivibilità dei loro supergrafi. Ad oggi, a differenza del caso planare, non esiste una lista di grafi proibiti per ogni superficie, ma, grazie all'incredibile lavoro svolto da Robertson-Seymour, nel 2004 si è riusciti a dimostrare la congettura di Wagner, la quale asserisce che per ogni superficie esiste un numero finito di grafi proibiti.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Grafi</b>	<b>1</b>
1.1 Nozioni preliminari . . . . .	1
1.2 Grafi planari . . . . .	5
<b>2 Caratterizzazione dei grafi planari: il Teorema di Kuratowski</b>	<b>13</b>
2.1 Teoremi e lemmi utili . . . . .	13
2.2 Teorema di Kuratowski . . . . .	19
2.3 Teorema di Wagner . . . . .	21
<b>3 Rappresentazione di grafi su altre superfici</b>	<b>25</b>
3.1 Grafi mappabili su superfici . . . . .	25
3.2 Grafi toroidali e Teorema di Robertson-Seymour . . . . .	31
<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>



# Capitolo 1

## Grafi

In questo capitolo andremo ad introdurre il concetto di grafo. Inizieremo col fornire alcune definizioni e proprietà di base della teoria dei grafi, per poi spostarci ad una particolare tipologia di grafi: i grafi planari.

### 1.1 Nozioni preliminari

**Definizione 1.1 (Grafo).** Un **grafo** o **ipergrafo**  $G$  è una coppia ordinata  $(V, E)$  dove:

- i.  $V$  è un insieme non vuoto di **vertici** (o nodi),
- ii.  $E$  è un insieme di **archi** (o lati).

Un arco  $e$  è una relazione binaria tra due vertici  $u$  e  $v$  di  $V$ ,  $e = (v, u)$ , chiamati **estremi** dell'arco. L'arco  $e$  viene anche indicato con  $e = (u, v)$ , quando si vogliono esplicitare gli estremi, e diciamo che l'arco  $e$  connette i vertici  $v$  e  $u$ .

Se  $e = (v, u)$  è una coppia ordinata, ovvero viene indicata una direzione di “percorrenza”, allora un grafo si dice **orientato**; in caso contrario il grafo si dice **non orientato**.

**Osservazione 1.2.** In un grafo  $G$  ci possono essere più archi che connettono gli stessi vertici. Inoltre, si noti che la definizione di arco non esclude l'esistenza di archi con entrambi gli estremi corrispondenti allo stesso vertice.

**Definizione 1.3 (Loop e link).** Un arco i cui estremi coincidono è chiamato **loop**. Altrimenti, l'arco è detto **link**.

**Definizione 1.4 (Grafo semplice).** Un grafo è detto **semplice** se non ci sono loop e se non ci sono due link aventi gli stessi vertici non ordinati.

Nella nostra trattazione faremo riferimento solo a grafi semplici e non orientati, che chiameremo, con abuso di notazione, semplicemente grafi. Tuttavia, alcuni risultati possono valere anche per grafi non semplici e orientati.

**Definizione 1.5 (Vertici adiacenti).** Due vertici  $u$  e  $v$  di un grafo non orientato si dicono **adiacenti** se esiste un arco  $e = (u, v)$  che ha come estremi  $u$  e  $v$ . Un vertice  $v$  e un arco  $e$  si dicono **incidenti** se  $v$  è un estremo di  $e$ .

**Definizione 1.6 (Archi consecutivi).** Due archi  $e$  e  $f$  si dicono **consecutivi** se hanno un estremo  $u$  in comune.

**Definizione 1.7 (Intorno di un vertice).** L'insieme di tutti i vertici adiacenti al vertice  $v$  è detto **intorno** di  $v$  nel grafo  $G = (V, E)$ . Esso viene indicato con  $N(v)$ . Se  $A$  è un sottoinsieme di  $V$  denotiamo  $N(A)$  l'insieme di tutti i vertici in  $G$  che sono adiacenti ad almeno un vertice appartenente ad  $A$ :

$$N(A) := \cup_{v \in A} N(v).$$

**Definizione 1.8 (Grado di un vertice).** Chiamiamo **grado** (o **valenza**) di un vertice  $v$  il numero di archi incidenti a  $v$ , dove un loop conta come due archi. Esso viene denotato con  $\deg(v)$ . Un vertice che non è incidente ad alcun arco (cioè tale che  $\deg(v) = 0$ ) si dice vertice **isolato** di  $G$ .

Un primo risultato generale nella teoria dei grafi è una semplice ma importante osservazione.

**Teorema 1.9.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Allora:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|,$$

dove  $|E|$  è la cardinalità dell'insieme  $E$ .

*Dimostrazione.* Sia  $v \in V$  denotiamo con  $n(v)$  l'insieme degli archi incidenti in  $v$ ; sia  $e \in E$  denotiamo con  $m(e)$  l'insieme degli estremi di  $e$ . Allora:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} \deg(v) &= \sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in n(v)} 1 \right) = \sum_{e \in E} \left( \sum_{v \in m(e)} 1 \right) = \sum_{e \in E} 2 = \\ &= 2|E|. \end{aligned}$$

□

**Definizione 1.10 (Vertici pari o dispari).** Un vertice  $v$  si dice che è **pari** (**dispari**) se il suo grado  $\deg(v)$  è pari (**dispari**).

Presentiamo alcune proprietà intrinseche dei grafi:

**Definizione 1.11 (Regolarità).** *Un grafo si dice **regolare** se tutti i suoi vertici hanno lo stesso grado  $d$ ; se tale grado comune è  $d$ , si dice che il grafo è regolare  $d$ -valente, o  $d$ -regolare. I grafi 3-regolari sono spesso chiamati grafi cubici.*

*Osservazione 1.12.* Si noti che se  $G$  è un grafo  $d$ -regolare allora il teorema (1.9) diventa:  $d|V| = 2|E|$ .

**Definizione 1.13 (Cammini).** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo, e siano  $v, w \in V$  due vertici di  $G$  (non necessariamente distinti). Un **cammino** in  $G$  da  $v$  a  $w$  è una sequenza:*

$$W = v(= v_0)e_1v_1 \dots v_{n-1}e_nv_n(= w)$$

di vertici  $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$  (non necessariamente distinti), ed archi  $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$  tutti distinti tale che  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . I vertici  $\{v_i\}_{i=1, \dots, n-1}$  sono detti vertici interni al cammino  $W$  mentre  $v$  e  $w$  sono detti esterni a  $W$ .

L'intero  $n \geq 0$  è detto **lunghezza** del cammino  $W$  e lo indichiamo con  $len(W)$ . Osserviamo che si prendono in considerazione anche cammini di lunghezza 0, formati cioè da un solo vertice e nessun arco.

Un cammino si dice **semplice** se tutti i vertici che lo compongono, tranne, eventualmente, il primo e l'ultimo, sono diversi; ovvero, se per ogni  $1 \leq \{i, j\} \leq n$ , con  $i \neq j$  allora  $v_i \neq v_j$  (il cammino non "ripassa" per uno stesso vertice).

**Definizione 1.14 (Distanza tra due vertici).** *Sia  $G$  un grafo connesso e  $v, u \in V$  due vertici di  $G$ . La **distanza**  $d(v, u)$  tra  $v$  e  $u$  è il numero intero positivo così definito:*

$$d(v, u) = \min\{len(W) : W \text{ è un cammino tra } v \text{ e } u\}.$$

Ovvero è la lunghezza del minimo cammino che congiunge  $v$  a  $u$ .

**Definizione 1.15 (Circuiti e cicli).** *Un cammino semplice  $W = v_0e_1 \dots v_n$  tale che  $v_0 = v_n$ , è detto **circuito**. Un circuito semplice con almeno tre archi è detto anche **ciclo**.*

**Definizione 1.16 (Albero).** *Un grafo connesso privo di circuiti non banali (il che equivale all'essere connesso e privo di cicli) si dice **albero**. Un grafo privo di cicli (ma non necessariamente connesso) si chiama **foresta**; è chiaro dunque che un grafo è una foresta se e solo se ogni sua componente connessa è un albero.*

**Definizione 1.17 (Calibro).** Sia  $G$  un grafo, chiamiamo **calibro** di  $G$  (in inglese *girth*) la lunghezza minima di un ciclo non banale contenuto in  $G$ ; di solito, esso è denotato con  $g = g(G)$ . Per quanto riguarda gli alberi (che non hanno alcun ciclo), si conviene di dire che non hanno calibro, oppure che hanno calibro infinito. Il concetto opposto è quello di **circonferenza** di un grafo  $G$ , che indica la lunghezza massima di un ciclo di  $G$ .

**Definizione 1.18 (Connessione).** Un grafo  $G$  si dice **connesso** se per ogni coppia di suoi vertici  $v, w$  esiste in  $G$  un cammino tra  $v$  e  $w$ .

**Definizione 1.19 (Sottografo).** Un grafo  $H = (U, F)$  è un **sottografo** di  $G = (V, E)$  se  $U$  è un sottoinsieme di  $V$  non vuoto,  $U \subset V$  e  $F \subset E$  e per ogni arco  $e = (v, u) \in F$ , i suoi estremi appartengono all'insieme  $U$ ,  $\{v, u\} \in U$ .  $G$  è detto **supergrafo** di  $H$  se  $H$  è un suo sottografo.

**Definizione 1.20 (Componenti connesse).** Sia  $H$  un sottografo massimale del grafo  $G$  connesso, ossia un sottografo di  $G$  tale che non possiede supergrafi connessi, allora si dice che  $H$  è una **componente connessa** di  $G$ . Il numero delle componenti connesse di un grafo  $G$  viene indicato con  $\omega(G)$ . Un arco  $e$  è detto **ponte** o *cut edge* se  $\omega(G - e) > \omega(G)$ , ovvero se è un arco la cui eliminazione aumenta il numero di componenti connesse del grafo  $G$ .

**Definizione 1.21 (Completezza).** Un grafo  $G$  si dice **completo** se per ogni coppia di vertici distinti  $v, w \in V$  esiste un arco che li connette. Indichiamo con  $K_m$  il grafo completo con  $m$  vertici.

Osservazione 1.22. Se  $K_n = (V, E)$  è un grafo completo allora posto  $n = |V|$ , vale :

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1.1)$$

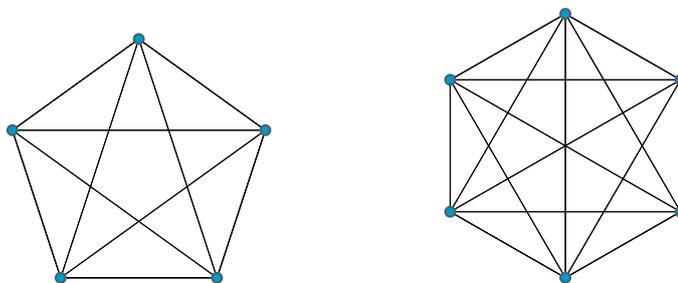


Figura 1.1: A sinistra il grafo completo con 5 vertici,  $K_5$  e a destra quello con 6 vertici  $K_6$

**Definizione 1.23 (Bipartizione).** Un grafo  $G$  si dice **bipartito** se l'insieme  $V$  dei suoi vertici può essere suddiviso in due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti,  $V_1$  e  $V_2$ , tali che ogni arco  $e = (u, v)$  in  $G$  è tale che  $u \in V_1$  e  $v \in V_2$ . Ovvero, ogni arco in  $G$  connette un vertice di  $V_1$  a un vertice di  $V_2$ . Chiamiamo la coppia  $(V_1, V_2)$  bipartizione dei vertici  $V$  di  $G$ .

**Definizione 1.24 (Grafi completi bipartiti).** Un grafo  $G$  si dice **completo bipartito** se esso è bipartito e, data una bipartizione  $(V_1, V_2)$  di  $V$ , per ogni  $v \in V_1$  e per ogni  $u \in V_2$  esiste un unico arco  $e = (v, u)$  di estremi  $v$  e  $u$ . Indichiamo con  $K_{m,n}$  il grafo completo bipartito tale che  $|V_1| = m$  e  $|V_2| = n$ .

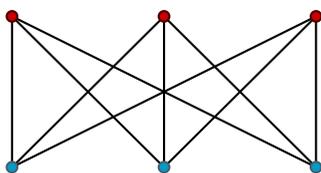


Figura 1.2: Grafo completo bipartito  $K_{3,3}$  in rosso e celeste i vertici della bipartizione.

## 1.2 Grafi planari

Un metodo per disegnare un grafo  $G$  è quello di rappresentare i vertici mediante punti, e gli archi mediante segmenti congiungenti gli estremi dell'arco. Nel caso in cui un grafo è orientato, l'arco è rappresentato da una freccia che indica il secondo estremo (ovvero la direzione dell'arco). Questa raffigurazione grafica è detta **diagramma**. Ovviamente, esistono più diagrammi per uno stesso grafo. Come posso, quindi, capire se due grafi o due diagrammi sono "lo stesso grafo"? Ricordiamo che un grafo  $G = (V, E)$  è sostanzialmente l'espressione di una relazione binaria simmetrica (descritta dall'insieme  $E$ ) su  $V$ , indipendentemente dalla natura degli elementi di  $V$ . È naturale quindi dare la seguente definizione:

**Definizione 1.25 (Isomorfismo tra grafi).** Un **isomorfismo** tra due grafi  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  è una biezione  $\alpha : V \rightarrow V'$  tra gli insiemi dei vertici tale che: per ogni  $u, v \in V$ ,

$$(u, v) \in E \Leftrightarrow (\alpha(u), \alpha(v)) \in E'$$

Se una tale applicazione esiste, si dice che  $G$  e  $G'$  sono **isomorfi** (e si usa scrivere l'isomorfismo come  $\alpha : G \rightarrow G'$ ).

Questo concetto giustifica, quindi, il fatto che un grafo possa essere rappresentato mediante un diagramma. Infatti, esso contiene tutte le informazioni sul grafo in quanto tale: in un certo senso, esso è il grafo.

**Definizione 1.26 (Grafi planari).** *Un grafo  $G$  è detto **planare** se può essere rappresentato tramite un diagramma in cui non ci sono archi che si intersecano. Il diagramma in questione viene chiamato **rappresentazione planare** o **immersione planare** di  $G$  ed essa non è unica.*

*Osservazione 1.27.* La proprietà di essere planare appartiene al grafo, e non ad un suo particolare diagramma. Vediamo l'esempio del grafo planare completo  $K_4$ .

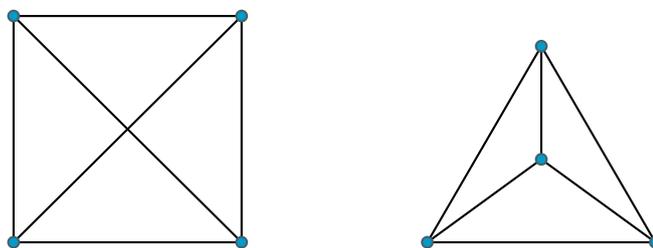


Figura 1.3: Due diagrammi del grafo completo  $K_4$ , il diagramma a sinistra non è planare mentre quello a destra è un'immersione planare di  $K_4$ .

Un grafo planare può, quindi, essere visto come un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  costituito da un insieme finito  $V$  di punti (i vertici del grafo) e da un insieme di archi o segmenti semplici. Gli archi congiungono i punti corrispondenti agli estremi di esso, e ciò avviene in modo tale da non intersecare gli altri archi.

Diamo ora l'enunciato del Teorema della curva di Jordan enunciato in [2], senza darne una dimostrazione poiché, nonostante l'intuitività della tesi, ci sono volute diverse decine di anni prima che Oswald Veblen riuscì a dimostrare il teorema nel 1905.

**Teorema 1.28 (Teorema della curva di Jordan).** *Ogni curva semplice chiusa sul piano separa il piano in due regioni semplicemente connesse, una interna ed una esterna.*

*Dimostrazione.* È possibile trovare una dimostrazione in [7]. □

Una conseguenza, piuttosto intuitiva, ma importante del teorema, è che, dato un grafo planare  $G$ , esso risulta suddiviso in un numero finito di regioni connesse. Possiamo, quindi, introdurre il concetto di facce di un grafo.

**Definizione 1.29 (Facce di un grafo).** *Le regioni connesse di un grafo planare vengono chiamate **facce** del grafo  $G$ . Ogni faccia è limitata e racchiusa da un numero finito di*

curve, corrispondenti agli archi di un ciclo del grafo e ad archi di taglio (ovvero da archi che non appartengono a nessun ciclo), ad eccezione di una che ha area infinita (la regione “esterna”).

Il numero di facce di un grafo  $G$  viene denotato con  $\phi$ . Inoltre, il grado di una faccia  $f$ , denotato con  $\deg(f)$ , è il numero di archi che la racchiudono, dove gli archi di taglio vengono contati due volte.

**Definizione 1.30 (Duale).** Il **duale** di un grafo planare  $G$ , denotato con  $G^*$ , è un grafo costruito nel seguente modo: a ogni vertice  $v^*$  di  $G^*$  corrisponde una faccia  $f$  di  $G$  e a ogni arco  $e^*$  di  $G^*$  corrisponde un arco  $e$  di  $G$ . Due vertici di  $G^*$ ,  $v^*$  e  $u^*$ , sono collegati da un arco  $e^*$  di  $G^*$  se e solo se le loro corrispondenti facce in  $G$ ,  $f$  e  $g$ , sono separate dall'arco  $e$ .

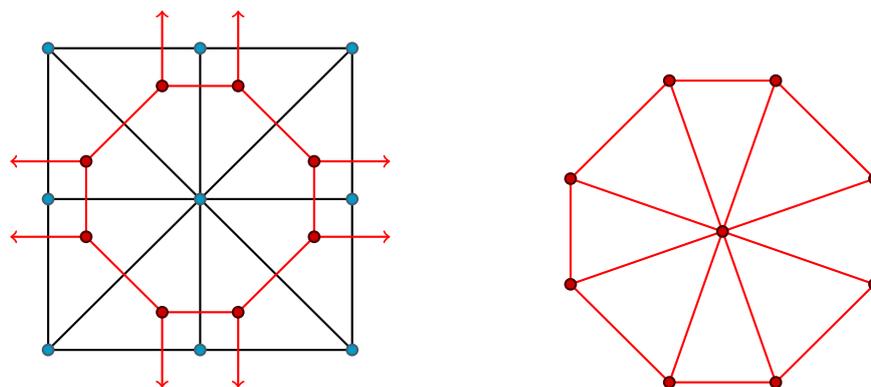


Figura 1.4: Grafo  $G$  in nero e in rosso il suo duale  $G^*$ , le frecce del duale indicano che quegli archi hanno tutti lo stesso estremo corrispondente al vertice associato alla faccia esterna, a fianco una rappresentazione planare del grafo duale  $G^*$ .

*Osservazione 1.31.* Il duale di un grafo planare semplice non sempre è un grafo semplice. Sono infatti molto comuni casi in cui il duale di un grafo semplice è un multigrafo. Un esempio in Figura 1.5

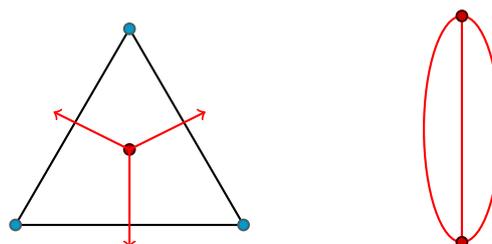


Figura 1.5: Grafo completo  $K_3$  con il suo duale in rosso.

**Teorema 1.32.** *Sia  $G$  un grafo planare, denotiamo con  $F(G)$  l'insieme delle facce di  $G$ . Allora vale:*

$$\sum_{f \in F(G)} \deg(f) = 2\varepsilon.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il duale  $G^*$  di  $G$ , per il Teorema 1.9 vale:

$$\sum_{v^* \in V^*} \deg(v^*) = 2\varepsilon^*.$$

Per come abbiamo definito il duale, per ogni  $f \in F(G)$ ,  $\deg(f) = \deg(v^*)$  e  $\varepsilon = \varepsilon^*$ . Da cui:

$$\sum_{f \in F(G)} \deg(f) = \sum_{v^* \in V^*} \deg(v^*) = 2\varepsilon^* = 2\varepsilon.$$

□

**Teorema 1.33 (Formula di Eulero).** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo planare connesso, denotando  $\nu$  il numero di vertici di  $G$ ,  $\varepsilon$  il numero di archi di  $G$  e  $\phi$  il numero di facce di  $G$ , vale:*

$$\nu - \varepsilon + \phi = 2.$$

*Dimostrazione.* Se  $G$  è costituito soltanto da un vertice, allora il teorema è banalmente verificato, infatti,  $\nu = 1$ ,  $\varepsilon = 0$  e  $\phi = 1$ .

Supponiamo ora che  $G$  non sia banale, ovvero abbia almeno un arco. Fissato un diagramma del grafo  $G$ , dimostriamo il teorema per induzione sul numero di archi del grafo. Andremo, infatti, a costruire una successione di sottografi  $G_1, G_2, \dots, G_\varepsilon = G$  di  $G$ , aggiungendo un arco ad ogni passaggio. Questa successione è così definita: senza perdita di generalità, sia  $e_1$  un arco di  $G$ , definiamo  $G_1$  come il grafo formato dall'arco  $e_1$  e dai suoi due estremi. Costruiamo i grafi successivi per ricorsione:

$$G_{k+1} = G_k \cup \{e_{k+1}\} \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, \varepsilon - 1,$$

dove  $e_{k+1}$  è un arco di  $G \setminus G_k$  tale che sia incidente ad un vertice di  $G_k$ . Notiamo che questa costruzione è ben posta poiché  $G$  è completo.

Siano ora  $\nu_n$ ,  $\varepsilon_n$  e  $\phi_n$  rispettivamente il numero di vertici, di lati e di facce del sottografo  $G_n$ . Procediamo per induzione su  $n$ .

- Passo base: Se  $n = 1$ , la relazione  $\nu_1 - \varepsilon_1 + \phi_1 = 2$  vale per  $G_1$ , infatti  $\nu = 2$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $\phi = 1$ .
- Passo induttivo: supponiamo che valga la relazione per  $n$ :  $\nu_n - \varepsilon_n + \phi_n = 2$ . Sia  $e_{n+1} = (v_{n+1}, u_{n+1})$  l'arco aggiunto a  $G_n$ , consideriamo due casi:

Nel primo caso, entrambi i vertici  $v_{n+1}$  e  $u_{n+1}$  appartengono anche a  $G_n$ . I due vertici si trovano, quindi, sul bordo di una comune regione  $R$ ; se non lo fossero, sarebbe impossibile aggiungere un arco senza che esso ne intersechi un altro. Segue che, aggiungendo questo arco la regione  $R$  viene divisa in due regioni distinte. In questo caso si ha:  $\nu_{n+1} = \nu_n$ ,  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + 1$  e  $\phi_{n+1} = \phi_n + 1$ . Da cui:

$$\nu_{n+1} - \varepsilon_{n+1} + \phi_{n+1} = \nu_n - (\varepsilon_n + 1) + \phi_n + 1 = \nu_n - \varepsilon_n + \phi_n = 2.$$

Nel secondo caso, uno dei due vertici non appartiene a  $G_n$ ; senza perdita di generalità, supponiamo sia  $v_{n+1}$ . L'aggiunta di un nuovo arco non genera una nuova regione. In questo caso quindi si ha:  $\nu_{n+1} = \nu_n + 1$ ,  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + 1$  e  $\phi_{n+1} = \phi_n$ . Da cui:

$$\nu_{n+1} - \varepsilon_{n+1} + \phi_{n+1} = \nu_n + 1 - (\varepsilon_n + 1) + \phi_n = \nu_n - \varepsilon_n + \phi_n = 2.$$

Per ipotesi induttiva il teorema è verificato. □

**Proposizione 1.34.** *Sia  $G$  un grafo planare semplice e connesso, con  $\varepsilon$  archi e  $\nu$  vertici; se  $\nu \geq 3$  allora:*

$$\varepsilon \leq 3\nu - 6.$$

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $G$  è un grafo semplice con  $\nu \geq 3$ , allora anche la sua rappresentazione planare,  $G'$ , sarà semplice. Posto  $\nu'$  come il numero di vertici di  $G'$ , varrà  $\nu' \geq 3$ . Per ogni faccia  $f'$  di  $G'$  si possono avere tre possibilità:

- i. se  $f'$  è racchiusa da un ciclo; siccome  $G'$  è semplice; il numero minimo di archi di un ciclo è 3, quindi,  $\deg_{G'}(f') \geq 3$ ,
- ii. se  $f'$  è racchiusa in un ciclo con archi di taglio, allora,  $\deg_{G'}(f') > 3$ ,
- iii. se  $f'$  non è racchiusa in alcun ciclo, allora il grafo è un albero con almeno due archi. Quindi,  $\deg_{G'}(f') \geq 4 > 3$ .

In tutti questi casi esaminati vale che, per ogni faccia  $f' \in F(G')$ ,

$$\sum \deg_{G'}(f') \geq 3\phi',$$

dove  $\phi'$  è il numero di facce di  $G'$ . Dal Teorema 1.32,

$$\sum_{f \in F(G')} \deg(f') = 2\varepsilon' \geq 3\phi',$$

quindi:

$$\phi' \leq \frac{2}{3}\varepsilon'.$$

Per la Formula di Eulero 1.33, vale:

$$2 = \nu' - \varepsilon' + \phi' \leq \nu' - \varepsilon' + \frac{2}{3}\varepsilon' = \nu' - \frac{1}{3}\varepsilon' = \nu - \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Dal momento che  $\varepsilon = \varepsilon'$  e  $\nu = \nu'$ , abbiamo provato la tesi, ovvero che  $\varepsilon \leq 3\nu - 6$ .  $\square$

**Corollario 1.35.**  $K_5$  è non planare.

*Dimostrazione.* Proviamo che  $K_5$  non è planare mostrando che non vale la Proposizione 1.34:

$$\varepsilon_{K_5} = \binom{5}{2} = 10 > 3\nu_{K_5} - 6 = 15 - 6 = 9.$$

Da cui  $K_5$  non è planare.  $\square$

**Corollario 1.36.** Se  $G$  è un grafo planare semplice, connesso con  $\varepsilon$  archi e  $\nu \geq 3$  vertici tale che  $G$  non abbia cicli di lunghezza 3, allora  $\varepsilon \leq 2\nu - 4$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga alla dimostrazione della Proposizione 1.34 ma al posto di avere  $\deg_{G'} \geq 3$  si ha che  $\deg_{G'} \geq 4$  per ipotesi quindi abbiamo che

$$\sum_{f' \in F(G')} \deg(f') = 2\varepsilon' \geq 4\phi'.$$

$\square$

**Corollario 1.37.**  $K_{3,3}$  è non planare.

*Dimostrazione.* Osserviamo che per un grafo semplice bipartito, la minima lunghezza di un ciclo è 4, quindi possiamo ricondurci alle ipotesi del corollario precedente, supponendo che  $K_{3,3}$  sia planare. Dunque:

$$\varepsilon_{K_{3,3}} = 9 > 2\nu_{K_{3,3}} - 4 = 12 - 4 = 8.$$

Assurdo, dunque  $K_{3,3}$  non è planare.  $\square$

**Corollario 1.38.** Un grafo planare ha almeno un vertice con grado minore o uguale a 5.

*Dimostrazione.* Sia  $G = (V, E)$  un grafo planare con  $\nu$  vertici e  $\varepsilon$  archi; supponiamo per assurdo che ogni vertice abbia grado almeno 6. Allora, per il Teorema 1.9:

$$6\nu \leq \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2\varepsilon.$$

Abbiamo, quindi, che  $\varepsilon \geq 3\nu$ ; il che contraddice il Corollario 1.36.  $\square$

**Definizione 1.39 (Ponte).** Sia  $H = (U, F)$  un sottografo del grafo  $G = (V, E)$ . Definiamo la relazione di equivalenza  $\sim_F$  su  $E \setminus F$  come segue: siano  $a, b \in E$ , allora  $a \sim_F b$  se esiste un cammino  $W$  in  $G$  con archi iniziale e finale rispettivamente  $a$  e  $b$  tale che  $W$  non ha vertici interni appartenenti a  $U$ .

Un **ponte** (o *bridge*) di  $H$  in  $G$  è un sottografo di  $G - F$  (ovvero un sottografo di  $G$  a cui sono stati tolti gli archi di  $H$ ) indotto dalla relazione di equivalenza  $\sim_F$ . Cioè, un ponte contenente un arco  $e \in G$  è un sottografo contenente ogni  $e' \in G$  tale che  $e' \sim_F e$ . Sia  $B = (U', F')$  un ponte di  $H$ , chiamiamo **vertici di collegamento** di  $B$  i vertici nell'insieme  $U' \cap U$ .

Sia ora  $C$  un ciclo. Due ponti di  $C$ ,  $B_1$  e  $B_2$ , si dicono **alternati** (*skew*) se dati due vertici di collegamento di  $B_1$ , siano essi  $v_1$  e  $u_1$ , e dati quelli di  $B_2$ , siano essi  $v_2$  e  $u_2$ , appaiono nel seguente ordine  $v_1, v_2, u_1, u_2$  sul ciclo  $C$ .

**Definizione 1.40 (Ponti interni ed esteri).** Sia  $C$  un ciclo in una rappresentazione planare di un grafo planare  $G$ . Allora dato un ponte  $B$  esso è contenuto o in  $Int(C)$  (la regione interna a  $C$ ) oppure in  $Ext(C)$  (la regione esterna a  $C$ ). Un ponte in  $Int(C)$  è un **ponte interno**, mentre uno in  $Ext(C)$  è un **ponte esterno**.

In una rappresentazione planare, ponti interni (esterni) si “evitano”: ovvero per ogni  $B_1$  e  $B_2$ , coppia di ponti interni (esterni), tutti i vertici di collegamento in  $B_1$  giacciono su un cammino  $W$  da  $u$  a  $v$  di  $C$ , il quale non contiene vertici di collegamento di  $B_2$  all'infuori, al massimo, di  $u$  e  $v$ .

*Osservazione 1.41.* L'essere un ponte interno o esterno, ovviamente, non è una caratteristica intrinseca del ponte, ma dipende strettamente dalla rappresentazione planare usata.

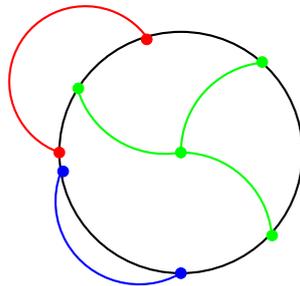


Figura 1.6: Un esempio di 3 ponti su un ciclo, rappresentato in nero. In rosso un ponte esterno alterno a quello verde interno, mentre il ponte blu è trasferibile

**Definizione 1.42 (Ponti trasferibili).** Sia  $B$  un ponte di  $C$  (ciclo di  $G$ ) in una rappresentazione planare  $G_1$  nel quale è un ponte interno. Diciamo che  $B$  è trasferibile se

esiste un'altra rappresentazione planare  $G_2$ , nella quale  $B$  è un ponte esterno, ma tutto il resto resta invariato.

**Teorema 1.43.** *Sia  $G$  un grafo planare e  $C$  un ciclo in  $G$ . Un ponte interno  $B$  di  $C$  è trasferibile se  $B$  evita ogni ponte esterno di  $C$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $B$  un ponte interno che evita ogni ponte esterno. Possiamo quindi trovare una faccia in  $Ext(C)$  che contiene tutti i vertici di collegamento di  $B$ . Ora, disegnando  $B$  in questa faccia, troviamo un nuovo diagramma in cui  $B$  è esterno. Quindi  $B$  è trasferibile.  $\square$

# Capitolo 2

## Caratterizzazione dei grafi planari: il Teorema di Kuratowski

### 2.1 Teoremi e lemmi utili

Vogliamo ora dimostrare il Teorema di Kuratowski, il quale fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo sia planare.

Nel 1930, il matematico polacco Kuratowski giunse alla conclusione che un grafo è planare se e solo se non contiene suddivisioni di  $K_5$  o  $K_{3,3}$  come sottografi. Questo teorema rappresentò un punto di svolta per lo studio di questa tipologia di grafi, e la sua dimostrazione, pur non richiedendo strumenti particolarmente complicati, esige numerosi lemmi e teoremi preliminari.

**Lemma 2.1.** *Ogni sottografo  $H$  di un grafo planare  $G$  è planare.*

*Dimostrazione.* Se  $G$  è planare, allora esiste una sua immersione planare  $G'$ . Per ogni sottografo  $H$  di  $G$ , possiamo individuare i vertici e gli archi di  $H$  su  $G'$ . Abbiamo così un'immersione planare di  $H$ . □

**Definizione 2.2 (Suddivisione di un grafo).** *La **suddivisione** di un arco è l'operazione di suddivisione di tale arco in due archi distinti, mediante l'aggiunta di un nuovo vertice al grafo originale; questo nuovo vertice viene chiamato **vertice di suddivisione** e i due nuovi archi vengono chiamati **archi di suddivisione**.*

*Possiamo definire una **suddivisione** di un grafo  $G$ , come un grafo  $G'$ , ottenuto mediante una sequenza di operazioni di suddivisioni di archi di  $G$ .*

*Osservazione 2.3.* Una suddivisione di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$  è detta **suddivisione di Kuratowski**.

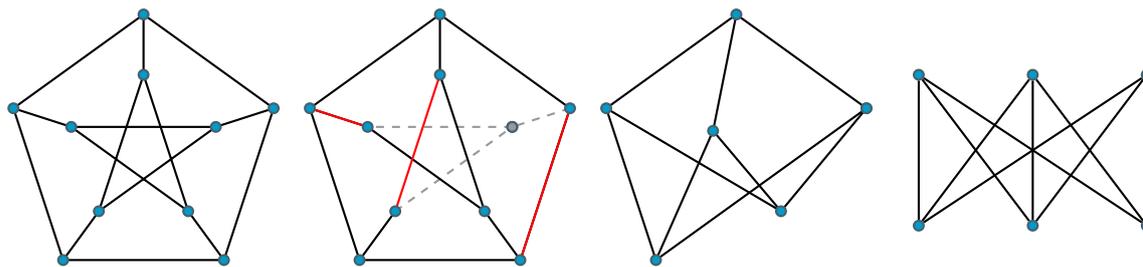


Figura 2.1: A destra il grafo  $P$  di Petersen, alla sua sinistra la suddivisione di  $K_{3,3}$  come sottografo di  $P$  dove gli archi in rosso sono gli archi di suddivisione, alla sua sinistra troviamo la rappresentazione di  $K_{3,3}$  ottenuta dalla sua suddivisione contraendo gli archi di suddivisione. A sinistra  $K_{3,3}$  nella sua rappresentazione canonica.

**Lemma 2.4.** *Ogni suddivisione di un grafo non planare è non planare.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista una rappresentazione planare  $G'$  di una suddivisione di  $G$ . Ora togliamo i vertici aggiunti con la suddivisione di archi, senza però cambiare la posizione degli archi del diagramma. Per costruzione abbiamo una rappresentazione planare di  $G$ . Segue che se  $G$  è non planare, allora ogni sua suddivisione è non planare.  $\square$

Notiamo che grazie a questi due lemmi è provata la condizione necessaria del Teorema di Kuratowski. Ovverosia, se un grafo è planare, allora non contiene suddivisioni di Kuratowski. Ora non ci resta che dimostrare che, se un grafo  $G$  è non planare, allora contiene qualche suddivisione di  $K_5$  o  $K_{3,3}$ . Mostrando ciò, proviamo che, avere una suddivisione di  $K_5$  o  $K_{3,3}$  è una condizione sufficiente per la non planarità. Per farlo avremo bisogno del concetto di grafo non planare minimale.

**Definizione 2.5 (Taglio di vertici).** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo, un **taglio di vertici**  $V'$  è un sottoinsieme non vuoto di  $V$ , tale che la sua rimozione rende  $G - V'$  sconnesso. Dove per rimozione di un insieme di vertici si intende la rimozione di un vertice dal grafo e tutti gli archi di cui è estremo. Chiamiamo **ordine del taglio di vertici** la cardinalità del taglio di vertici  $V'$ .*

**Definizione 2.6 ( $k$ -connessione).** *La **connettività** di  $G$ , denotata con  $\kappa(G)$ , è la minima cardinalità di un taglio di vertici  $V'$ , ovvero*

$$\kappa(G) = \min\{n \in \mathbb{N} : |V'| = n \wedge V' \text{ è un taglio di vertici}\}.$$

Un grafo  $G$  è detto  **$k$ -connesso** se  $k \leq \kappa(G)$ .

*Osservazione 2.7.* Osserviamo che un grafo  $G$  è 1-connesso se e solo se è connesso. Dalla definizione di 1-connessione segue immediatamente che  $G$  è connesso. Viceversa, se un grafo  $G$  è connesso, allora  $k(G) \geq 1$ , pertanto  $G$  è 1-connesso.

**Definizione 2.8 (Grafo minimale).** *Sia  $G$  un grafo.  $H = (U, F)$  è un sottografo proprio di  $G = (V, E)$  se  $U \subset V$  e  $F \subset E$ . Un grafo non planare  $G$  si dice **grafo minimale** se ogni suo sottografo proprio è planare.*

Per provare il Teorema di Kuratowski, ci basta dimostrare che il teorema vale per uno qualsiasi dei suoi grafi minimali. Per farlo utilizzeremo la seguente strategia:

- (i) supporremo per assurdo che esista un grafo minimale  $G$  non contenente suddivisioni di  $K_5$  o  $K_{3,3}$  come sottografi, e faremo vedere che, sotto questa ipotesi, il grafo  $G$  è semplice e 3-connesso.
- (ii) Faremo poi vedere che ogni grafo 3-connesso, non contenente suddivisioni di  $K_5$  o  $K_{3,3}$  come sottografi, è un grafo planare.

Da questo seguirà l'assurdo e quindi la tesi. Per farlo ci servono alcuni lemmi ulteriori.

**Lemma 2.9.** *Un grafo non planare minimale è 2-connesso.*

*Dimostrazione.* Prima mostriamo che un grafo non planare minimale è 1-connesso, ovvero basta dimostrare che è connesso. Supponiamo  $G$  sconnesso e non planare, tale che tutte le sue componenti connesse siano planari. Senza perdita di generalità, supponiamo che  $G$  abbia due componenti connesse,  $G_1$  e  $G_2$ . Siccome  $G_1$  e  $G_2$  sono planari, possiamo "accostare" le due rappresentazioni planari, ad esempio facendo coincidere la faccia esterna, ovvero quella con area infinita, ottenendo così una rappresentazione planare per  $G$ . Quindi  $G$  è planare, assurdo.

Proviamo ora che è 2-connesso. Supponiamo che  $G$  abbia connettività  $\kappa(G) = 1$ , allora, per definizione di connettività, esiste un vertice  $v \in G$  tale che  $G - v$  è sconnesso. Senza perdita di generalità, supponiamo che  $G - v$  abbia due componenti connesse,  $H_1$  e  $H_2$ . Poiché  $G$  è un grafo minimale non planare, tutti i suoi sottografi sono planari, quindi,  $H_1 \cup \{v\}$  e  $H_2 \cup \{v\}$  sono planari. (L'unione di un sottografo con un vertice è intesa come l'aggiunta del vertice  $v$  e di tutti gli archi appartenenti a  $G$  che connettono  $v$  ai vertici del sottografo). In ciascuna delle due immersioni planari vi è almeno una faccia  $f$  il cui bordo contiene  $v$ . Mediante proiezione stereografica, possiamo fare in modo che nelle due rappresentazioni planari  $v$  appartenga al bordo della faccia illimitata, mandando come punto all'infinito un punto interno alla faccia  $f$ . Ora possiamo unire  $H_1 \cup v$  e  $H_2 \cup v$  facendo coincidere  $v$ , ottenendo così una rappresentazione planare di  $G$ . Abbiamo

quindi una contraddizione con le ipotesi. Concludiamo che, se  $G$  è un grafo non planare minimale, allora  $G$  è 2-connesso.  $\square$

**Lemma 2.10.** *Sia  $G$  un grafo tale che, tra tutti grafi non planari, abbia il minor numero possibile di archi affinché esso non abbia suddivisioni di  $K_5$  o  $K_{3,3}$  come sottografi. Allora  $G$  è 3-connesso.*

*Dimostrazione.* Dalle ipotesi,  $G$  è un grafo non planare minimale e dal Lemma 2.9 sappiamo che  $G$  è 2-connesso. Supponiamo per assurdo che  $\kappa(G) = 2$ . Allora, esiste un taglio di vertici  $\{v, u\}$  tale che  $G - \{v, u\}$  è sconnesso. Siano  $H_1, H_2, \dots, H_k$  le componenti connesse di  $G - \{v, u\}$ . Definiamo  $M_1, M_2, \dots, M_k$  come  $M_j := H_j \cup \{v, u\}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , con l'ulteriore aggiunta di un arco  $e = (v, u)$  con estremi  $v$  e  $u$ . Vogliamo far vedere che esiste almeno un  $\hat{j} \in \{1, \dots, k\}$  tale che  $M_{\hat{j}}$  sia non planare così che avremo un assurdo poiché, per ipotesi,  $G$  è un grafo non planare minimale.

Supponiamo che  $M_i$  sia planare per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Allora esiste una rappresentazione planare per ciascuno degli  $M_i$ . Dal momento che l'arco  $e = (v, u)$  è l'unico elemento in comune tra i grafi  $\{M_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ , possiamo unire le rappresentazioni grafiche degli  $\{M_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$  facendo coincidere solo l'arco  $e$ . Otteniamo, dunque, una rappresentazione planare di  $G + e$  ( $G \cup \{e\}$ ). Quindi  $G + e$  è planare. Per il Lemma 2.4 segue che  $G$  è planare, e ciò crea un assurdo. Pertanto, esiste un  $\hat{j} \in \{1, \dots, k\}$  tale che  $M_{\hat{j}}$  sia non planare.

Ovviamente,  $\varepsilon_{H_{\hat{j}}} < \varepsilon_G$ ; quindi, siccome per ipotesi  $G$  è il più piccolo grafo connesso non planare che non contiene suddivisioni di Kuratowski, allora  $M_{\hat{j}}$  ha suddivisioni di  $K_5$  o  $K_{3,3}$  come sottografi. Inoltre, per la stessa ragione,  $M_{\hat{j}}$  non può essere un sottografo di  $G$ . Quindi  $e = (v, u)$  non è un arco di  $G$ . Ora uniamo  $M_{\hat{j}} - \{e\}$  con  $M_i - \{e\}$ , dove  $i \neq \hat{j}$   $i \in 1, \dots, k$ , fondendo i due vertici  $v$  e i due vertici  $u_i$  otteniamo così un sottografo di  $G$ . Giacché  $M_p - \{e\}$  è connesso, esiste un cammino che congiunge  $u$  a  $v$ . Aggiungendo questo cammino a  $M_{\hat{j}} - \{e\}$ , ricaviamo una suddivisione di  $K_5$  o  $K_{3,3}$  in  $G$ . Ma ciò è assurdo quindi  $G$  deve essere 3-connesso.  $\square$

Abbiamo appena mostrato il punto (i), ci resta da dimostrare il punto (ii). Per farlo utilizzeremo i seguenti lemmi:

**Lemma 2.11 (Teorema di Whitney).** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo con  $\nu \geq 3$ . Allora  $G$  è 2-connesso se e solo se per ogni  $v, u \in V$  esistono almeno due cammini internamente disgiunti, ovvero due cammini che non hanno vertici interni in comune che li congiungono.*

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Se ogni coppia di vertici in  $G$  è connessa da almeno due cammini internamente disgiunti, allora non può esistere un taglio di vertice di cardinalità 1.

(Non importa quale vertice elimini, tra i due vertici ci sarà almeno un cammino che li congiunge). Quindi  $\kappa(G) \geq 2$ , e, dunque,  $G$  è 2-connesso.

( $\Rightarrow$ ) Supponiamo ora che  $G$  sia 2-connesso. Proveremo che, per ogni  $v, u \in V$  esistono almeno due cammini internamente disgiunti, e lo faremo per induzione sulla distanza  $d(u, v)$  tra  $u$  e  $v$ .

- i. Passo base:  $d(u, v) = 1$ . Siccome  $G$  è 2-connesso, esiste almeno un cammino che connette  $u$  a  $v$  e che non contiene l'arco  $e = (u, v)$  che realizza la distanza 1 fra i vertici  $u$  e  $v$ .
- ii. Passo induttivo: Supponiamo che esistano almeno due cammini tra ogni coppia di vertici  $u$  e  $v$  tali che  $d(u, v) \leq n$ . Dimostriamo che vale anche per vertici tali che  $d(u, v) = n+1$ . Siano  $x$  e  $y$  due vertici in  $G$  tali che  $d(x, y) = n+1$ . Siano, inoltre,  $P_0$  un cammino di lunghezza  $d(x, y)$  e  $z$  un vertice appartenente al cammino  $P_0$  che sia vicino a  $y$ , ovvero  $d(z, y) = 1$ . Allora  $d(x, z) = d(x, y) - 1$ , e, per ipotesi induttiva, esistono almeno due cammini  $P_1$  e  $P_2$  internamente disgiunti che collegano  $x$  a  $z$ . Inoltre, dal momento che  $G$  è 2-connesso per ipotesi, esiste un ulteriore cammino  $Q$  che collega  $x$  a  $y$  che non contiene  $z$ . Infatti, se tale  $Q$  non esistesse, il taglio di vertici  $V = \{z\}$  sconetterebbe  $G$  e otterremmo un assurdo. Consideriamo dunque l'intersezione

$$U := \{h \in Q \mid h \in P_1 \cup P_2\} = Q \cap (P_1 \cup P_2) .$$

Distinguiamo due casi.

- Se  $U = \emptyset$  allora  $Q$  e  $P_1 \cup (z, y)$  sono due cammini internamente disgiunti che collegano  $x$  a  $y$ ; dove con  $P_1 \cup (z, y)$  abbiamo denotato il cammino  $P_1$  a cui è stato aggiunto l'arco  $(z, y)$ . Segue immediatamente la tesi.
- Se  $U \neq \emptyset$ , definiamo  $w$  come il vertice in  $P_1 \cup P_2$  tale che

$$d_Q(w, z) \leq d_Q(h, y) \quad \text{per ogni } h \in P_1 \cup P_2 .$$

Sottolineiamo che  $d_Q$  rappresenta la distanza “ristretta al cammino  $Q$ ”; in altre parole  $w$  rappresenta il vertice in  $U$  più vicino a  $y$  quando consideriamo il sottografo definito da  $Q$ . Senza perdere di generalità, supponiamo  $w \in P_1$  e definiamo i seguenti cammini.

- (a)  $R_1$  da  $x$  a  $y$ , dato dalla concatenazione di  $P_1$  (fino a  $w$ ) e  $Q$  (uscendo da  $w$ ):

$$x \xrightarrow{P_1} w \xrightarrow{Q} y .$$

(b)  $R_2$  da  $x$  a  $y$ , dato dalla concatenazione di  $P_2$  e dell'arco  $(z, y)$ :

$$x \xrightarrow{P_2} z \xrightarrow{(z,y)} y .$$

Per costruzione  $R_1$  e  $R_2$  sono due cammini internamente disgiunti che collegano  $x$  a  $y$ . Ne segue la tesi. □

**Lemma 2.12.** *Se  $G$  è un grafo semplice 3-connesso e  $e = (u, v)$  è un arco di  $G$ , allora  $G - \{e\}$  è 2-connesso.*

*Dimostrazione.* Sia  $G - \{e\} = (U, F)$ , vogliamo fare vedere che, per ogni coppia di vertici  $a, b \in U$ , esistono almeno due cammini internamente disgiunti tra di essi in  $G - \{e\}$ . In altre parole, vogliamo fare vedere che, per ogni coppia di vertici in  $G - \{e\}$ , esiste un ciclo di cui essi fanno parte. Discutiamo 3 casi:

- i.  $\{a, b\} = \{u, v\}$ . Ovviamente  $\nu \geq 4$ . Prendiamo altri due vertici  $c$  e  $d$  in  $G - \{e\}$ . Senza perdita di generalità, assumiamo  $a = u$ . Consideriamo ora  $a$  e  $c$ . Siccome  $G$  è 3-connesso non esistono tagli di vertici di ordine 2, quindi, se rimuoviamo  $b$  e  $d$ , allora  $a$  e  $c$  rimangono connessi da un cammino. In altre parole, esiste un cammino  $P_1$  che congiunge  $a$  a  $c$  e che non contiene  $b$  e  $d$ . Analogamente, esistono un cammino  $P_2$  che congiunge  $c$  a  $b$  e che non contiene  $a$  e  $d$ , un cammino  $P_3$  che congiunge  $b$  a  $d$  e che non contiene  $c$  e  $a$  e un cammino  $P_4$  che congiunge  $d$  a  $a$  e che non contiene  $b$  e  $c$ . Otteniamo così che  $a = u$  e  $b = v$  giacciono sul seguente ciclo:  $u - P_1 - c - P_2 - v - P_3 - d - P_4 - u$ .
- ii. Uno e un solo vertice tra  $a$  e  $b$  è  $u$  o  $v$ . Senza perdita di generalità, sia  $a = u$  e  $b \neq v$ . Sia ora  $c \notin \{b, u, v\}$ , procedendo come nel punto (i.), possiamo trovare un cammino  $P_1$  che congiunge  $u$  a  $b$  e che non contiene  $c$  e  $v$ , uno,  $P_2$ , tra  $b$  e  $c$  che non contiene  $u$  e  $v$ , uno,  $P_3$ , tra  $c$  e  $u$  che non contiene  $v$ . Abbiamo trovato così il ciclo  $u - P_1 - b - P_2 - c - P_3 - u$  su cui giacciono  $u = a$  e  $b$ .
- iii. Ne  $a$  ne  $b$  sono uguali a  $v$  o a  $u$ . Procedendo come sopra, possiamo trovare un cammino  $P_1$  che congiunge  $a$  a  $b$  che non contiene  $u$  e  $v$ , uno,  $P_2$ , tra  $b$  e  $v$  che non contiene  $u$  e  $a$ , uno,  $P_3$ , tra  $v$  e  $a$  che non contiene  $u$  e  $b$ . Abbiamo trovato così il ciclo  $a - P_1 - b - P_2 - v - P_3 - a$  su cui giacciono  $a$  e  $b$ .

In tutti e tre i casi, abbiamo costruito un ciclo su cui giacciono  $a$  e  $b$  ma che non contiene l'arco  $e = (u, v)$ , quindi lo stesso ciclo può essere costruito in  $G - \{e\}$ . Da cui  $G - \{e\}$  è 2-connesso. □

## 2.2 Teorema di Kuratowski

Ora, abbiamo tutti gli strumenti per dare una dimostrazione completa del Teorema di Kuratowski.

**Teorema 2.13 (Teorema di Kuratowski).** *Un grafo è planare se e solo se non contiene suddivisioni di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$ .*

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Ovvio per i primi due lemmi della sezione precedente.

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che esista un grafo non planare senza suddivisioni di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$ . Senza perdita di generalità, sia esso  $G = (V, E)$ , e supponiamo, inoltre, che  $G$  abbia il minor numero di archi possibili affinché sia verificata la prima ipotesi. Allora  $G$  è un grafo non planare minimale. Per il Lemma 2.10,  $G$  è 3-connesso (e semplice). Presi due vertici adiacenti  $v, u \in V$ , consideriamo il sottografo  $G - \{e = (u, v)\}$ . Per la minimalità della non planarità di  $G$ ,  $G - \{e\}$  è planare.

Per il Lemma 2.12,  $G - \{e\}$  è 2-connesso e, per il Teorema di Whitney 2.11, ci sono almeno due cammini internamente disgiunti che collegano  $u$  a  $v$ . In altre parole,  $u$  e  $v$  giacciono su uno stesso ciclo. Tra tutti i cicli in  $G - \{e\}$  che contengono  $u$  e  $v$ , consideriamo  $C_0$ , quello con più archi in  $Int(C_0)$ .

Ora esaminiamo un ponte di  $C_0$  in  $G - \{e\}$ . Se  $G - \{e\}$  non contenesse alcun ponte di  $C_0$ , è chiaro che, anche con l'aggiunta di  $e$ , il grafo è ancora planare, quindi  $G$  è planare, assurdo. Supponiamo, quindi, che esista un ponte con un unico vertice di collegamento  $v_1$ . Allora,  $v_1$  è un taglio di vertici di ordine 1 di  $G - \{e\}$ ; ma ciò contraddice l'ipotesi di 2-connettività di  $G - \{e\}$ . Pertanto, tutti i ponti di  $C_0$  in  $G - \{e\}$  hanno almeno due vertici di collegamento. Inoltre, se un ponte esterno di  $C_0$  ha più di due vertici di collegamento, possiamo sempre trovare un nuovo ciclo che contiene parte del ponte esterno, e che, quindi, ha più archi interni rispetto a  $C_0$ . Per questo motivo, tutti i ponti esterni di  $C_0$  devono avere esattamente due vertici di collegamento. Seguendo lo stesso ragionamento, se esistesse un ponte esterno che evita il cammino  $uv$  su  $C_0$  da  $u$  a  $v$ , allora ci sarebbe un altro ciclo di  $G$ , con più archi al suo interno. Tutti i ponti esterni, dunque, si sovrappongono: cioè, per ogni ponte esterno i vertici di collegamento non giacciono tutti sullo stesso cammino  $uv$ . In aggiunta, se un ponte esterno ha lunghezza maggiore di uno, allora esiste un vertice del ponte che non appartiene a  $C_0$ . In questo caso, i due vertici di collegamento formano un taglio di vertici di ordine 2 sia su  $G$  che su  $G - \{e\}$ . Ciò contraddice l'ipotesi che  $G$  è 3-connesso. Pertanto, possiamo concludere che tutti i ponti esterni di  $C_0$  hanno esattamente due vertici di collegamento, che sono di lunghezza 1 e che si sovrappongono con il cammino  $uv$  su  $C_0$ .

Siano ora,  $B_1$  un ponte esterno e  $B_2$  un ponte interno che si sovrappongono. Possiamo trovarli nel seguente modo. Se tutti i ponti di  $C_0$  sono interni (esterni), allora possiamo disegnare l'arco  $e = (u, v)$  come arco all'esterno (interno) del ciclo  $C_0$  e ottenere una rappresentazione planare di  $G$  e ciò contraddirebbe l'ipotesi. Quindi  $C_0$  deve avere sia ponti interni che esterni. La ragione per la quale esiste almeno una coppia di ponti che si sovrappongono è dovuta al fatto che, se essa non esistesse, ogni ponte interno di  $C_0$  eviterebbe ogni ponte esterno, e, per il Teorema 1.43, tutti i ponti interni di  $C_0$  sono trasferibili. Possiamo così trovare una rappresentazione planare di  $G - \{e = (u, v)\}$  dove  $C_0$  ha solo ponti esterni, e ciò contraddice la congettura iniziale.

Siano ora  $x_1$  e  $x_2$  i vertici di collegamento di  $B_1$ , e  $y_1, y_2, \dots$  quelli di  $B_2$ . Sappiamo che  $B_2$  si sovrappone con il cammino  $uv$  di  $C_0$  ed è alternante con  $B_1$ . Consideriamo 4 casi in termini di relative posizioni di  $B_1$  e  $B_2$ . Senza perdita di generalità, supponiamo che  $u, x_1, v, x_2$  giacciono sul ciclo  $C_0$  in senso orario.

- (1) tra tutti i vertici di collegamento di  $B_2$  ne esistono due  $y_1$  e  $y_2$ , tali che  $y_1$  giace tra  $x_1$  e  $v$ , e  $y_2$  giace tra  $u$  e  $x_2$ . Allora  $G$  contiene una suddivisione di  $K_{3,3}$ , ma ciò va contro le nostre assunzioni.
- (2) tra tutti i vertici di collegamento di  $B_2$  ne esistono due,  $y_1$  e  $y_2$ , tali che  $y_1$  giace tra  $x_2$  e  $v$ , e  $y_2$  giace tra  $u$  e  $x_1$ . Anche in questo caso  $G$  contiene una suddivisione di  $K_{3,3}$  e ciò è assurdo.
- (3) Esistono quattro vertici di collegamento  $y_1, y_2, y_3, y_4$  di  $B_2$ :

$$\{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{v, x_1, u, x_2\}$$

tali che il cammino  $P_1$  da  $u$  a  $v$  e il cammino  $P_2$  da  $x_1$  a  $x_2$  hanno uno e un solo vertice in comune  $z$  ( $P_1$  e  $P_2$  devono avere almeno un vertice in comune per la planarità di  $G - \{e\}$ ). Allora  $G$  contiene una suddivisione di  $K_5$  che crea una contraddizione con le ipotesi.

- (4) Esistono quattro vertici di collegamento  $y_1, y_2, y_3, y_4$  di  $B_2$ :

$$\{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{v, x_1, u, x_2\}$$

tali che il cammino  $P_1$  da  $u$  a  $v$  e il cammino  $P_2$  da  $x_1$  a  $x_2$  hanno più di un vertice in comune. Anche in questo caso, troviamo una suddivisione di  $K_{3,3}$ .

Abbiamo così visto tutti i casi possibili trovando sempre delle contraddizioni. Da cui la tesi del Teorema di Kuratowski.  $\square$

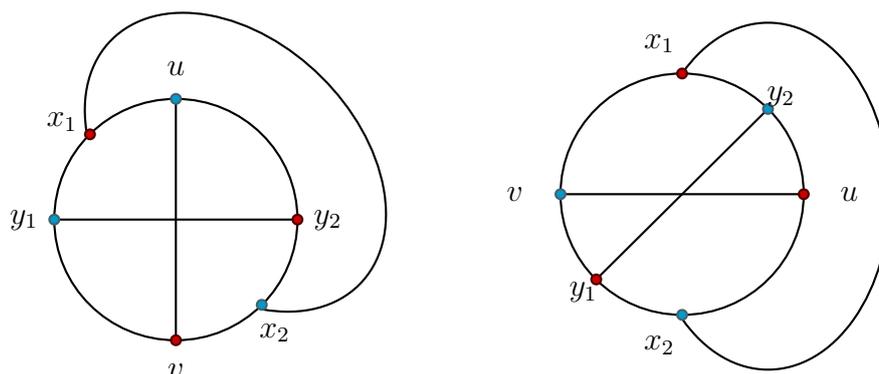


Figura 2.2: Caso (1) a sinistra e (2) a destra (in rosso e celeste le due partizioni di  $K_{3,3}$ ).

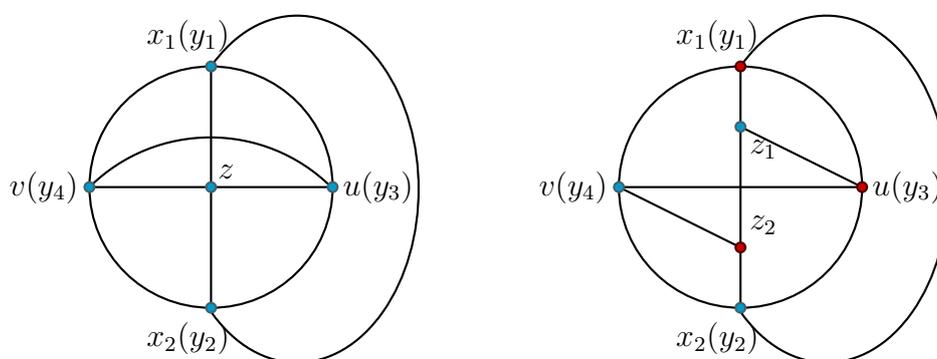


Figura 2.3: Caso (3) a sinistra e (4) a destra (in rosso e celeste le due partizioni di  $K_{3,3}$ ).

## 2.3 Teorema di Wagner

Un risultato analogo al Teorema di Kuratowski è stato enunciato nel 1937 da Wagner. Egli andò a considerare non più le suddivisioni di  $K_5$  e  $K_{3,3}$ , ma i minori di un grafo. Dimostrò una caratterizzazione dei grafi planari che è del tutto equivalente a quella data precedentemente da Kuratowski. Vediamo, quindi, cosa si intende per minori di un grafo.

Dato un grafo  $G$  consideriamo i tre seguenti modi per ridurlo:

- Eliminazione di un arco;
- Contrazione di un arco;
- Eliminazione di un vertice isolato  $v$  ( $\deg(v) = 0$ ).

Per contrazione di un arco si intende la seguente operazione:

**Definizione 2.14 (Contrazione di un arco).** *Sia dato un grafo  $G = (V, E)$  ed un suo arco  $e \in E$ . L'operazione di **contrazione** dell'arco  $e = (u, v)$  consiste nel trasformare il*

grafo  $G$  nel grafo  $G' = (V', E')$ , dove i nodi  $u$  e  $v$  sono costituiti da un unico nodo  $w_{u,v}$ ; cioè:

$$V' = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{w_{u,v}\}$$

e gli archi  $E'$  di  $G'$  sono gli stessi di  $G$  per quel che riguarda gli archi che non hanno estremi  $u$  e  $v$ , mentre l'arco  $e$  viene eliminato e ogni arco che ha come uno dei due estremi  $u$  oppure  $v$  sostituisce tale estremo con il nodo  $w_{u,v}$ ; ad esempio, l'arco  $h = (k, v) \in E$  viene sostituito con l'arco  $h' = (k, w_{u,v})$ . Quindi:

$$E' = \{e = (i, j) \in E : i \neq u, v, j \neq u, v\} \cup$$

$$\cup \{(w_{u,v}, k), (k, w_{u,v}) : k \neq u, v, (u, k) \in E \vee (v, k) \in E\} \setminus \{e = (u, v)\}.$$

**Definizione 2.15 (minori di un grafo).** Un grafo  $G'$  ottenuto da un grafo  $G$  mediante una sequenza di queste tre operazioni è un **minore** di  $G$ .

*Esempio 2.16.* Il  $K_5$  è un minore del grafo di Petersen:

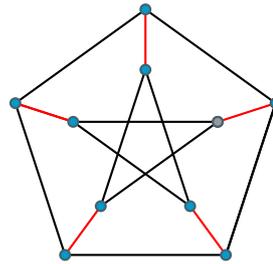


Figura 2.4: Grafo di Petersen con in rosso gli archi da contrarre per ottenere  $K_5$  come minore.

**Teorema 2.17 (Teorema di Wagner).** Un grafo  $G$  è planare se e solo se  $G$  non contiene  $K_5$  o  $K_{3,3}$  come grafi minori.

Prima di dimostrarlo ci serve un lemma preliminare:

**Lemma 2.18.** Sia  $G$  un grafo. Se  $G$  non ha sottgrafi di Kuratowski, allora per ogni arco  $e \in G$  la sua contrazione  $G/\{e\}$  non ha sottgrafi di Kuratowski

*Dimostrazione.* Fissato un arco  $e$  proviamo che, se  $G/\{e\}$  possiede un sottografo di Kuratowski, allora lo possiede anche  $G$ . Senza perdere di generalità, possiamo supporre  $G$  semplice, poiché, loop e multiarchi non cambiano la planarità di un grafo.

Sia  $H = (U, F)$  un sottografo di Kuratowski in  $G/\{e = (u, v)\}$ . Chiaramente il vertice  $w_{u,v}$ , formato dalla contrazione dell'arco  $e$ , appartiene a  $H$ ; se così non fosse, allora  $H$

sarebbe un sottografo di Kuratowski in  $G$ . Per ogni  $x \in U$ , definiamo  $deg_H(x)$  come il numero di vertici in  $H$  adiacenti a  $x$ . Abbiamo, dunque, che per ogni  $x \in U$   $deg_H(x)$  può valere 4 -caso in cui sia un vertice principale di  $K_5$ -, 3 - se  $v$  è un vertice principale di  $K_{3,3}$ - o 2 -se  $v$  è un vertice di separazione-. Consideriamo ora i seguenti casi:

- i. Tutti i vertici in  $H$  che sono adiacenti a  $w_{u,v}$  in  $G/\{e\}$ , sono adiacenti ad uno solo dei due estremi di  $e$ . Senza perdita di generalità, supponiamo siano adiacenti a  $v$  in  $G$ . Allora, possiamo trovare un sottografo di Kuratowski in  $G$  isomorfo a  $H$ :  $\alpha : H \rightarrow G$   $\alpha(x) = x$  se  $x \neq w_{u,v}$  e  $\alpha(w_{u,v}) = v$ . Quindi anche  $G$  ha un sottografo di Kuratowski, assurdo.
- ii. Tutti i vertici in  $H$ , che sono adiacenti a  $w_{u,v}$  in  $G/\{e\}$ , sono adiacenti ad uno solo dei due estremi di  $e$ , SPDG, sia esso  $v$ , ad eccezione di uno che è adiacente a  $u$  e che chiameremo  $a$ . Ora, come nel caso precedente, disegniamo un sottografo di Kuratowski  $K$  in  $G$ :  $K$  non è altro che una suddivisione di  $H$  in  $G$ ; infatti, differiscono semplicemente per l'aggiunta di un cammino di lunghezza 2 da  $v$  ad  $a$ , passante per  $u$ .
- iii. Se  $deg_H(w_{u,v}) = 4$  e, sia  $u$  che  $v$ , hanno esattamente due vertici adiacenti in  $G$  che appartengono a  $H$ , allora  $H$  è sicuramente una suddivisione di  $K_5$ . Provando a costruire un sottografo di Kuratowski in  $G$  come fatto in precedenza, otteniamo una suddivisione del grafo in Figura 2.5 che contiene  $K_{3,3}$  come sottografo. Assurdo.

Abbiamo quindi la tesi. □

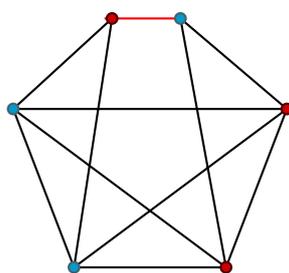


Figura 2.5: Grafo riferito alla dimostrazione del lemma precedente, la bipartizione dei vertici è contrassegnata dai colori rosso e celeste. In rosso, invece, l'arco che può essere contratto per avere  $K_5$  come minore.

Grazie a questo risultato il Teorema di Wagner diventa un corollario del Teorema di Kuratowski.

*Dimostrazione Teorema di Wagner.* ( $\Rightarrow$ ) Supponiamo che  $G$  abbia  $K_5$  o  $K_{3,3}$  come grafi minori. Allora, per il Lemma 2.18,  $G$  contiene un sottografo di Kuratowski e, quindi, per il Teorema di Kuratowski 2.13,  $G$  non è planare.

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $G$  sia non planare. Allora, per il Teorema di Kuratowski 2.13,  $G$  ha come sottografo almeno una suddivisione di  $K_5$  e  $K_{3,3}$ ,  $H$ . Prendendo in  $H$  un arco incidente ad un vertice di suddivisione e contraendolo, otteniamo un sottografo di Kuratowski con un vertice di suddivisione in meno. Ripetendo il procedimento fino a che non vi sono più vertici di suddivisione, rimaniamo con  $K_5$  o  $K_{3,3}$ , che non è altro che un grafo minore di  $G$ .  $\square$

A un primo sguardo, il Teorema di Wagner potrebbe sembrare irrilevante poiché abbiamo già una caratterizzazione dei grafi planari del tutto analoga. Questo risultato, però, è di grande importanza, in quanto per grafi di dimensioni vaste risulta non banale trovare suddivisioni di Kuratowski, mentre potrebbe essere più intuitivo trovare un minimo grafo. Un esempio è il grafo di Petersen sopra citato in Figura (2.4).

# Capitolo 3

## Rappresentazione di grafi su altre superfici

In questo capitolo andremo a parlare di grafi immersi su altre superfici che non siano il piano. Quando parleremo di superficie, intenderemo una varietà topologica  $M$  di dimensione 2; cioè, uno spazio topologico connesso di dimensione 2 che è  $T_2$ ,  $N_2$  e localmente euclideo. Ricordiamo brevemente le definizioni di  $T_2$ ,  $N_2$  e localmente euclideo: Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è  $T_2$  se per ogni  $x, y \in X$  esistono due intorni  $U_x, U_y \subset X$  rispettivamente di  $x$  e  $y$  tali che abbiano intersezione nulla:  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .  $(X, \tau)$  è  $N_2$  se  $X$  ammette una base numerabile  $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .  $(X, \tau)$  è localmente euclideo se per ogni  $x \in X$  esiste un intorno aperto  $U_x \subset X$  tale che  $U_x$  è omeomorfo a un disco aperto di  $\mathbb{R}^2$ . In alcuni testi, ci si riferisce a superfici di questo genere con l'espressione superfici senza bordo.

Abbiamo già visto che, grazie alla proiezione stereografica, vi è una corrispondenza tra grafi planari e grafi inscrivibili su una sfera. Mentre nel caso planare esiste una caratterizzazione per i grafi inscrivibili, vedremo che su altre superfici ci sono numerose complicazioni.

### 3.1 Grafi mappabili su superfici

**Definizione 3.1 (Grafo inscrivibile su superfici).** Diciamo che un grafo  $G$  è *inscrivibile* su una superficie  $S$  se può essere disegnato sulla superficie in modo tale che gli archi si incrocino solo nei vertici.

**Definizione 3.2 (mappa).** Chiamiamo mappa di un grafo la sua rappresentazione mediante facce omeomorfe a un disco aperto di  $\mathbb{R}^2$ , delimitate dagli archi del grafo.

Osserviamo che, nel caso del piano, e, quindi, della sfera, la definizione di mappa coincide con quella di rappresentazione planare. Di conseguenza lo studio della mappatura di un grafo corrisponde a quello della planarità, trattato nel capitolo precedente. Vedremo che su altre superfici non sarà intuitivo valutare se un grafo, inscrivibile su tale superficie, può essere rappresentato mediante una mappa.

Ad esempio, è possibile inscrivere un triangolo  $K_3$  sul toro. Sostanzialmente, ciò avviene nei tre seguenti modi descritti in Figura 3.1: nel primo caso, il triangolo separa il toro in due componenti: un disco e un toro con un buco. Nel secondo e nel terzo, non vi è un parte interna del “triangolo” - che, in questa rappresentazione, assomiglia più a una circonferenza -. Nel secondo caso, se rimuoviamo il triangolo rimane un cilindro, mentre nel terzo rimane una corona circolare che è anch’essa omeomorfa a un cilindro. Pertanto, per ogni rappresentazione di  $K_3$  sul toro non è possibile trovare una sua mappa.

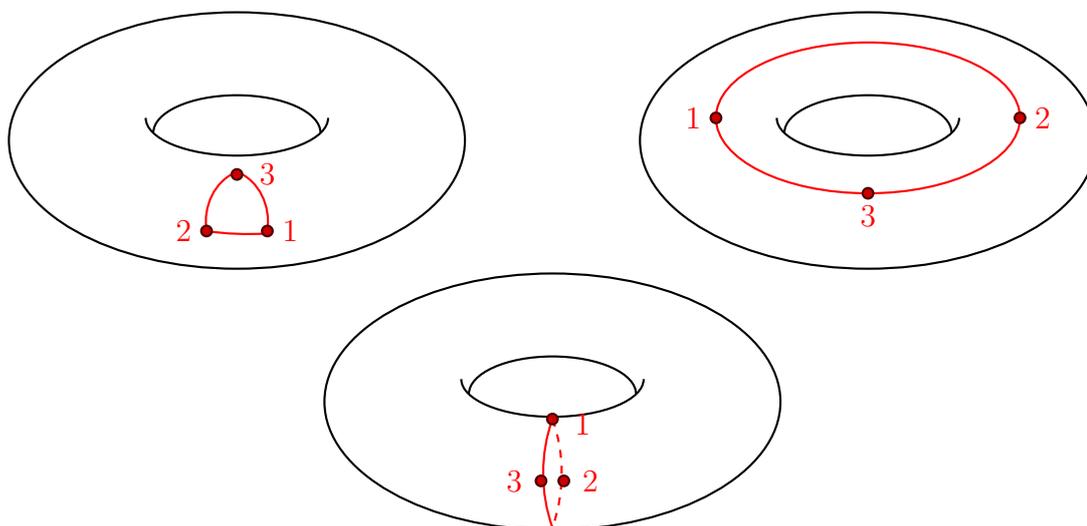


Figura 3.1: Tre differenti modi di inscrivere  $K_3$  sul toro.

**Definizione 3.3 (Grafo mappato su superfici).** Diciamo che un grafo  $G$  può essere mappato su una superficie  $S$  se può essere inscritto su una superficie nel seguente modo: se, eliminando tutti gli archi del grafo dalla superficie, essa collassa in dischi topologici aperti. Tale rappresentazione è detta **mappa** o **immersione cellulare** di  $G$  su  $S$ , e chiamiamo questi dischi, con l’aggiunta del loro bordo, le **facce** di  $G$  nella sua mappa.

*Osservazione 3.4.* Come nel caso dei grafi planari, non esiste un’unica mappa di un grafo, né un’unica iscrizione sulla superficie. Questo rende particolarmente ostico lo studio della mappabilità dei grafi.

*Esempio 3.5.* Vediamo come  $K_4$  viene inscritto sul toro e come può essere mappato su di esso. Per comodità rappresentiamo il toro nella sua raffigurazione bidimensionale con la relazione di equivalenza:

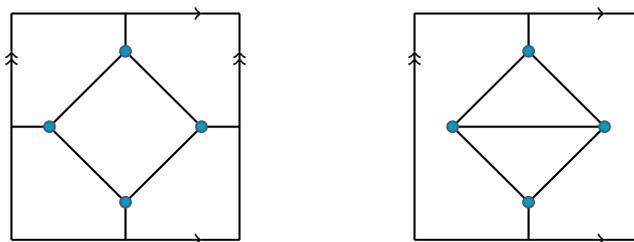


Figura 3.2: A sinistra una mappa di  $K_4$  sul toro, a destra  $K_4$  inscritto sul toro, notiamo che questa rappresentazione non è una mappa poiché la “faccia esterna” è omeomorfa a un cilindro.

Grazie alla definizione di grafo mappato su una superficie  $S$ , possiamo arrivare alla definizione formale di suddivisione di una superficie, che ci servirà, in seguito, per introdurre la caratteristica di Eulero per superfici differenti dal piano o dalla sfera.

**Definizione 3.6 (Suddivisione di una sfera).** *Sia  $S$  una superficie. Una suddivisione  $M$  di  $S$  consiste in un insieme finito  $V$  di vertici, un insieme finito  $E$  di archi inscritti su  $S$ , tali che:*

- $G = (V, E)$  è un grafo semplice connesso;
- $G$  è mappabile su tale superficie;
- la suddivisione  $M$  non è altro che una mappa del grafo  $G$  su  $S$ .

Nel caso in cui la superficie abbia bordo, chiediamo inoltre che il bordo sia costituito da archi del grafo.

*Osservazione 3.7.* Le definizioni di mappa e suddivisione sono strettamente correlate. Data una mappa di un grafo  $G$  su una superficie  $S$ , essa stabilisce una suddivisione di  $S$ ; viceversa, una suddivisione di  $S$  non è altro che una mappa di un grafo mappabile.

La nozione di suddivisione ci consente di classificare le superfici grazie a un numero chiamato caratteristica di Eulero.

**Definizione 3.8 (Caratteristica di Eulero di una suddivisione).** *Sia  $S$  una superficie e  $M$  una sua suddivisione. La **caratteristica di Eulero**  $\chi$  della suddivisione  $M$  è il numero intero:*

$$\chi = \nu - \varepsilon + \phi.$$

dove  $\nu, \varepsilon$  e  $\phi$  sono rispettivamente il numero di vertici, di archi e di faccie della suddivisione.

Spesso ci si riferisce alla formula  $\chi = \nu - \varepsilon + \phi$  come Formula di Eulero.

**Teorema 3.9.** *Siano  $M_1$  e  $M_2$  due suddivisioni della stessa superficie  $S$ ; allora,  $M_1$  e  $M_2$  hanno la stessa caratteristica di Eulero.*

La dimostrazione di questo risultato generale è ostica e relativamente recente, per questo motivo la ometterò; sono però degne di considerazione le conseguenze che esso ha portato. Questo teorema infatti, ci permette di parlare di caratteristica di Eulero per una superficie, indipendentemente dalla scelta della sua suddivisione, e di calcolarla usando la suddivisione più conveniente.

*Osservazione 3.10.* Osserviamo che, assumendo che la superficie sia compatta, allora la caratteristica di Eulero è sempre finita.

Calcoliamo ora la caratteristica di Eulero per il toro che ci servirà in seguito: per comodità consideriamo il grafo completo  $K_4$  e la sua mappa su di esso: (Vedi Figura 3.2)  $\nu_{K_4} = 4$ ,  $\varepsilon_{K_4} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  e  $\phi_{K_4} = 2$ . Quindi:

$$\chi = \nu - \varepsilon + \phi = 4 - 6 + 2 = 0$$

Ritorniamo ora ai grafi mappabili su superfici.

**Definizione 3.11 (Mappa duale).** *Data un mappa  $M$  di un grafo  $G$ , tale che  $G$  non abbia archi tagliati - nel caso esistessero basta non considerarli della costruzione della mappa duale -, allora è possibile costruire la sua **mappa duale**  $M^*$ . A ogni faccia di  $M$  corrisponde un vertice di  $M^*$  e a ogni arco  $e^*$  di  $M^*$  corrisponde un arco  $e$  di  $M$ . Due vertici di  $M^*$ ,  $v^*$  e  $u^*$ , sono collegati da un arco  $e^*$  di  $M^*$  se e solo se le loro corrispondenti facce in  $M$ ,  $f$  e  $g$ , sono separate da un arco  $e$  di  $M$ .*

*Osservazione 3.12.* La definizione di mappa duale, nel caso di grafi iscritti su una sfera, corrisponde alla definizione di duale di un grafo planare.

Dalla definizione di mappatura e dall'osservazione riguardante la definizione di essa, nel caso della sfera ne deriva la seguente proposizione:

**Proposizione 3.13.** *Sia  $G$  un grafo e  $S$  una superficie. Allora:*

- i. Se  $G$  può essere mappato su  $S$  allora  $G$  è inscrivibile su  $S$ .
- ii.  $G$  può essere mappato su una sfera se e solo se può essere iscritto su essa.

Il punto *ii.* è dovuto al fatto che sul piano, e quindi sulla sfera, le definizioni di grafo inscrivibile e mappabile coincidono. Grazie al Teorema di Jordan 1.28, infatti, il piano viene suddiviso in componenti semplicemente connesse.

**Proposizione 3.14.** *Sia  $G$  un grafo con  $\nu$  vertici,  $\varepsilon$  lati e calibro  $g$ . Supponiamo che  $G$  sia mappabile su una superficie  $S$  con caratteristica di Eulero  $\chi$ . Sia  $\phi = \chi + \varepsilon - \nu$ . Allora:*

$$\frac{2\varepsilon}{\phi} \geq g$$

*Dimostrazione.* Nella dimostrazione useremo che la mappa di  $G$  ha esattamente  $\phi$  facce, dove  $\phi = \chi + \varepsilon - \nu$ . Osserviamo che se  $\phi$  è il numero di facce di  $G$ , allora la quantità  $\frac{2\varepsilon}{\phi}$  non è altro che la media del numero di archi che circondano ogni faccia. Quindi, se  $\frac{2\varepsilon}{\phi}$  è minore del calibro di  $G$ , la mappa avrà almeno una faccia con un numero minore del suo calibro di archi che la circondano, ma ciò è assurdo.  $\square$

**Proposizione 3.15.** *Siano  $S$  una superficie e  $G$  un grafo connesso e semplice con  $\varepsilon$  archi e  $\nu$  vertici tale che esista una sua mappa su  $S$ . Allora:*

$$\varepsilon \leq 3(\nu - \chi).$$

*Dimostrazione.* Siccome  $G$  è mappabile su  $S$ , ogni faccia di  $G$  avrà come bordo almeno 3 archi, e, giacchè gli archi per ogni faccia vengono contati due volte, troviamo la seguente disuguaglianza:

$$2\varepsilon \geq 3\phi,$$

Da cui otteniamo:

$$\phi \leq \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Per la caratteristica di Eulero di  $G$  sappiamo che vale:

$$\varepsilon = \nu - \chi + \phi \leq \nu - \chi + \frac{2}{3}\varepsilon;$$

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right)\varepsilon \leq \nu - \chi;$$

$$\varepsilon \leq 3(\nu - \chi).$$

$\square$

**Corollario 3.16.** *Il numero maggiore  $n$  per il quale  $K_n$  può essere mappato su un toro è 7.*

*Dimostrazione.* Per  $K_n$  sappiamo che  $\nu = n$ ,  $\varepsilon = \frac{n(n-1)}{2}$ . Poiché la caratteristica di Eulero per il toro è 0,  $\phi = \chi + \varepsilon - \nu = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-3n}{2}$ . Inoltre il calibro di  $K_n$  è  $g = 3$ , quindi per la Proposizione 3.14:

$$\frac{2\varepsilon}{\phi} = \frac{2n(n-1)}{n^2-3n} \geq g = 3.$$

La disuguaglianza è verificata se e solo se  $3n^2 - 9n \leq 2n^2 - 2n$ , ovvero se e solo se  $n^2 - 7n \leq 0$ . Quindi  $n \leq 7$ .  $\square$

Il teorema sopra enunciato non ci assicura che  $K_n$ ,  $n = 4, 5, 6, 7$ , sono mappabili sul toro, ma siccome si tratta di grafi “piccoli” è relativamente facile costruire una mappa di essi sul toro.

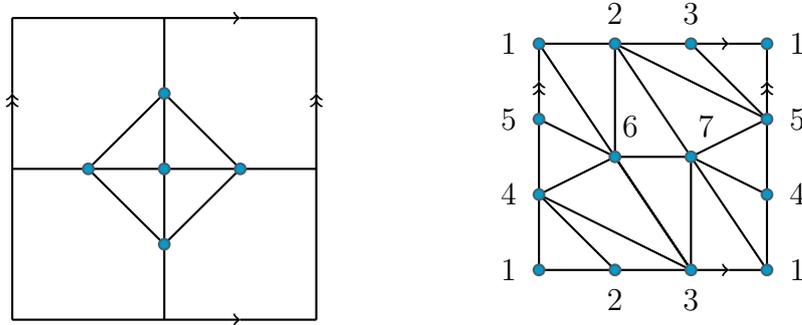


Figura 3.3: Due mappe sul toro, rispettivamente a destra  $K_5$  e a sinistra  $K_7$ .

*Osservazione 3.17.* Osserviamo che, avendo trovato una mappa di  $K_7$  sul toro, quella di  $K_6$  è gratuita. Basta eliminare, ad esempio, il vertice 7 e tutti gli archi ad esso incidenti.

Vediamo ora alcune condizioni necessarie per la mappabilità di un grafo sul toro, ricordando che, se un grafo è mappabile su una superficie, allora:

$$2\varepsilon \geq 3\phi. \quad (3.1)$$

**Proposizione 3.18.** *Sia  $G$  un grafo inscrivibile su un toro tale che abbia  $\varepsilon$  archi,  $\nu$  vertici. Allora:*

$$\frac{\varepsilon}{\nu} \leq 3.$$

*Dimostrazione.* Per la Formula di Eulero e per la 3.1 vale:

$$0 = \nu - \varepsilon + \phi \leq \nu - \varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = \nu - \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Da cui la tesi. □

**Proposizione 3.19.** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo mappabile su un toro tale che abbia  $\varepsilon$  archi,  $\nu$  vertici e calibro  $g$ . Allora:*

$$2\varepsilon \geq g \cdot \nu.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che per la definizione di calibro vale:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \geq g \cdot \nu;$$

concludiamo ricordando il Teorema 1.9:

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq g \cdot \nu.$$

□

**Proposizione 3.20.** *Sia  $G$  un grafo mappabile su un toro tale che abbia  $\varepsilon$  archi,  $\nu$  vertici e calibro  $g$ . Allora:*

$$g \leq 6.$$

*Dimostrazione.* Dalla Formula di Eulero per il toro e dalla Proposizione 3.19 vale:

$$0 = \nu - \varepsilon + \phi \geq \frac{2}{g}\varepsilon - \varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon;$$

$$0 \geq \left(\frac{2}{g} - 1 + \frac{2}{3}\right)\varepsilon.$$

Da cui, siccome  $\varepsilon \geq 0$ :

$$\frac{2}{g} \leq \frac{1}{3};$$

$$g \leq 2 \cdot 3 = 6.$$

□

Capire quando un grafo è mappabile sul toro o su altre superfici più complesse è ancora argomento di ricerca. Ad oggi, infatti, non vi è un teorema di caratterizzazione, ma si conoscono solo alcune condizioni necessarie o sufficienti per poter mappare un grafo; come, ad esempio, quelle citate sopra.

## 3.2 Grafi toroidali e Teorema di Robertson-Seymour

**Definizione 3.21 (Genere di un grafo).** *Il **genere**  $\gamma(G)$  di un grafo  $G$  è il minimo numero di “buchi” che bisogna aggiungere ad una sfera per fare in modo che un grafo sia inscrivibile su tale superficie.*

**Definizione 3.22 (Numero di intersezione toroidale).** *Il **numero di intersezione toroidale**,  $Cr_1$ , è il minor numero di intersezione tra gli archi di un grafo tale per cui esso può essere “disegnato” su un toro.*

**Definizione 3.23 (Grafi toroidali).** *Diciamo che un grafo  $G$  è **toroidale** se  $\gamma(G) = 1$ , ovvero se è un grafo non planare inscrivibile su un toro. Equivalentemente, definiamo grafo toroidale un grafo non planare con numero di intersezione toroidale 0.*

*Se il genere  $\gamma(G) = 2$  diciamo che il grafo è **doppiamente toroidale**, mentre se  $\gamma(G) = 3$  diciamo che  $G$  è un grafo **predzel**.*

*Esempio 3.24.* Un grafo planare ha genere e numero di intersezione toroidale nulli.

*Osservazione 3.25.* Un grafo che diventa planare con l'eliminazione di un arco ha numero di intersezione planare nullo. Il viceversa non vale, ovvero esistono grafi non planari con  $Cr_1 = 0$  che, per qualunque arco rimosso, rimangono non planari. Questa condizione è quindi sufficiente ma non necessaria.

*Esempio 3.26.* Un esempio di grafo toroidale che, per qualunque arco rimosso, rimane non planare, è il grafo di Petersen (Figura 3.4). Esso è toroidale poiché non è planare, infatti possiede una suddivisione di  $K_{3,3}$ , come già mostrato precedentemente. È, inoltre, inscrivibile su un toro come mostra la Figura 3.4. Osserviamo, in aggiunta, che, per ogni arco rimosso, possiamo sempre trovare una sua suddivisione di  $K_{3,3}$ .

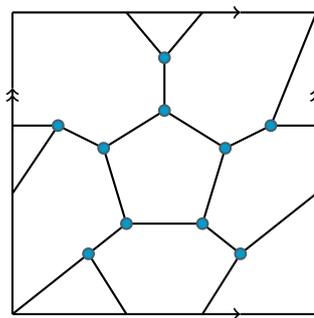


Figura 3.4: Grafo di Petersen mappato sul toro.

Un metodo per capire se un grafo è inscrivibile su una superficie è quello di trovare suddivisioni di grafi “proibiti” (forbidden) come suoi sottografi, ovvero grafi minimali non inscrivibili su tale superficie. Chiamiamo le suddivisioni di questi grafi proibiti **ostruttori** per una data superficie. Nel caso planare abbiamo visto che ci sono solo due grafi proibiti che sono  $K_5$  e  $K_{3,3}$ :

$$Forb(\mathbb{R}^2) = \{K_5, K_{3,3}\}$$

**Definizione 3.27.** Sia  $S$  una superficie, definiamo l'insieme dei grafi proibiti di  $S$  come:

$$Forb(S) = \{G \text{ è un grafo proibito per } S\}.$$

*Dove un grafo proibito è un grafo minimale non inscrivibile in  $S$ . Ovvero, un grafo tale che tutti i suoi sottografi propri siano inscrivibili su tale superficie.*

Negli anni 30, Erdos e Konig si chiesero se per ogni superficie  $S$  esistesse un numero finito di suoi grafi proibiti. Tra il 1983 e il 2004 i matematici Neil Robertson e Paul D. Seymour provarono il teorema in una serie di venti pubblicazioni che si estendono oltre le 500 pagine. Prima di questa incredibile dissertazione, il teorema era conosciuto con l'appellativo di congettura Wagner, anche se egli dichiarò di non averla mai congetturata.

Questo teorema ora prende il nome di Teorema di Robertson-Seymour o Teorema dei grafi minori e asserisce:

**Teorema 3.28 (Teorema di Robertson-Seymour).** *Per ogni superficie  $S$  esiste una lista finita di grafi  $G_1, \dots, G_n$  tali che un grafo arbitrario può essere topologicamente immerso in  $S$  se e solo se  $G$  non contiene una suddivisione di nessun  $G_i$ . Equivalentemente, per ogni superficie  $S$  esiste una lista finita di grafi  $G_1, \dots, G_n$  tali che un grafo arbitrario può essere topologicamente immerso in  $S$  se e solo se non possiede nessuno di questi grafi come minore.*

*Dimostrazione.* È possibile trovarne una dimostrazione negli articoli [4] e [3] □

Nonostante questo incredibile risultato, resta comunque un problema aperto trovare tutti gli ostruttori per una superficie. Ad oggi, sono stati trovati tutti e soli i 103 grafi ostruttori per il piano proiettivo [1]. Per quanto riguarda il toro se ne conoscono alcuni, ma non ancora tutti.



# Bibliografia

- [1] D. Archdeacon, *A Kuratowski Theorem for the projective plane*, J. Graph Theory 5 ,1981, 243-246.
- [2] C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Gauthier-Villars, Paris, 1887, vol. 3, 587-594.
- [3] N. Robertson, P. D. Seymour, *Graph minors. VIII. A Kuratowski theorem for general surfaces*, J. Combin. Theory, Ser. B 48 ,1990, 255-288.
- [4] N. Robertson, P.D. Seymour, *Graph Minors. XX. Wagner's Conjecture*. Elsevier Inc., 2004
- [5] Kenneth H. Rosen: *Discrete Mathematics and Its Applications*. Eighth Edition. McGraw-Hill Education: New York, 2019.
- [6] S. Tamar-Mattis, *Planar graphs and Wagner's and Kuratowski's Theorem*. Abstract.
- [7] O. Veblen *Theory on Plane Curves in Non-Metrical Analysis Situs*. Transactions of the American Mathematical Society, 1905, 6, 83-98.
- [8] K. Wagner, *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*. Mathematische Annalen, 1937, Volume 114, Number 1, 570
- [9] Robin J. Wilson, *Introducton to Graph Theory. Forth edition*. Longman Group Ltd, 1996
- [10] Yifan Xu, *Kuratowski's Theorem*. Abstract.