

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

TEOREMI LIMITE
SUL MODELLO
DI CURIE-WEISS

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
EMANUELE MINGIONE

Presentata da:
LUCREZIA SUPERBI

Anno Accademico 2022-2023

Introduzione

Questa tesi ha lo scopo di presentare sistemi meccanici di particelle interagenti con particolare attenzione al *modello di Curie-Weiss*. Tale modellizzazione viene utilizzata nella teoria del ferromagnetismo per studiare diverse proprietà, in particolare le transizioni di fase di materiali che, sottoposti all'azione di un campo magnetico, tendono a magnetizzarsi.

Nel capitolo 1 vengono richiamati alcuni concetti preliminari di teoria della probabilità e di meccanica statistica, fondamentali nella trattazione.

Nel secondo capitolo è presente la descrizione di sistemi di N particelle. Considerando lo spin σ_i e il momento magnetico h_i di ciascuna, è possibile studiare tali sistemi grazie alla funzione *Hamiltoniana* ad essi associata, che descrive l'energia totale. Il caso di modelli non interagenti risulta di poco interesse; lo studio si concentra infatti sui sistemi con coefficiente di interazione $J_{i,j} \neq 0$. Viene mostrata la costruzione di un modello ben posto dal punto di vista termodinamico, grazie alla misura di *Boltzmann-Gibbs*, da cui deriva il *Modello di Curie-Weiss*, dove si assume che le particelle abbiano interazione uniforme. Si introduce poi il *Lemma di Fekete*, grazie al quale si trova l'esistenza del limite termodinamico, ovvero il limite della pressione normalizzata al suo numero di particelle $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_N}{N}$. Per calcolare il valore della pressione nel modello di Curie-Weiss, si utilizza la tecnica dell'interpolazione, il cui scopo in questa tesi è quello di trasportare la misura di *Boltzmann* di un sistema ad N particelle nella misura prodotto per due suoi sottoinsiemi.

Nel capitolo 3, si introduce il funzionale $p_{var}(x; J, h)$, e si dimostra che la pressione per particella del modello di Curie-Weiss nel limite termodinamico

tende a $\sup_{x \in \mathbb{R}} p_{var}(x; J, h)$. Si studia poi il principio variazionale tramite le soluzioni dell'equazione di punto fisso $x = \tanh(Jx + h)$, ottenuta dalla derivata prima di $p_{var}(x; J, h)$ posta a 0. Tale equazione viene chiamata *equazione di consistenza*, e le sue soluzioni dipendono da J e h . Si analizza quindi il problema al variare dei due parametri. Se $J = 0$, gli spin (σ_i) sono variabili indipendenti e identicamente distribuite, quindi valgono entrambi Teorema centrale del limite e Legge dei grandi numeri, come nel caso del lancio di monete indipendenti. Nel caso in cui $J \neq 0$, le variabili σ_i non sono più indipendenti, quindi le ipotesi dei due teoremi sono violate. Nella sezione 3.2 si prova che, in alcune regioni dei parametri, valgono i due teoremi L.G.N. e T.C.L. in forma modificata. Per mostrare il primo si utilizza un risultato di convergenza della funzione generatrice e, per calcolarne il valore, si sfruttano la *trasformazione di Hubbard-Stratonovich*, l'*integrale di Gauss* e il *Metodo di Laplace*. Per mostrare la versione modificata di T.C.L., si enuncia e dimostra un generalizzazione del *Metodo di Laplace*.

Indice

Introduzione	i
1 Richiami	1
1.1 Spazi di probabilità	1
1.2 Concetti base di Meccanica Statistica	7
2 Modelli liberi e interagenti	11
2.1 Modelli Hamiltoniani	11
2.1.1 Misura di Boltzmann	12
2.2 Modello di Curie-Weiss	15
3 Soluzione del modello Curie-Weiss	25
3.1 Principio Variazionale	25
3.1.1 Equazioni di consistenza	28
3.2 Teorema centrale del limite e Legge dei grandi numeri	34
3.2.1 TCL e LGN per il modello di Curie-Weiss	35
Bibliografia	53

Elenco delle figure

2.1	Grafo completo a 6 vertici	16
3.1	Grafico p_{var} per $h = 0$	29
3.2	Superficie di magnetizzazione	33

Capitolo 1

Richiami

In questo capitolo verranno richiamati i concetti relativi agli spazi di probabilità, con particolare attenzione al caso discreto, e i concetti base della meccanica statistica, i quali risulteranno fondamentali nella trattazione.

1.1 Spazi di probabilità

Definizione 1.1.1 (Spazio di Probabilità). Uno spazio probabilità è una terna (Ω, \mathcal{F}, P) dove:

1. Ω è un insieme non vuoto;
2. \mathcal{F} è una σ -algebra su Ω , ossia \mathcal{F} è una famiglia di sottoinsiemi di Ω che soddisfa:
 - (a) se $A \in \mathcal{F}$, allora $A^c \in \mathcal{F}$;
 - (b) \mathcal{F} è una famiglia $\sigma - \cup$ -chiusa.
 - (c) $\Omega \in \mathcal{F}$.

e tale che $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ soddisfa gli assiomi di Kolmogorov:

1. $P(C) \geq 0$ per tutti $C \in \mathcal{F}$;
2. $P(\Omega) = 1$;

3. dati $\{A\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ con gli $\{A\}_i$ disgiunti,

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i).$$

Diciamo che uno spazio di probabilità è discreto se Ω è finito. In tal caso si considera \mathcal{F} l'insieme delle parti di Ω , cioè $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Definizione 1.1.2 (σ -Algebra di Borel in \mathbb{R}^d). È definita come la più piccola σ -algebra che contiene gli aperti di \mathbb{R}^d e viene indicata con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. I suoi elementi vengono chiamati *insiemi boreliani*.

Definizione 1.1.3 (Variabile aleatoria). Una *variabile aleatoria* (abbreviato in v.a.) sulla terna (Ω, \mathcal{F}, P) a valori sullo spazio misurabile $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ è una funzione

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

tale che $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Nell'applicazione dei concetti di statistica alla fisica matematica, gli spazi di probabilità rappresentano gli stati di un sistema, mentre le *variabili aleatorie* rappresentano quantità osservabili. L'insieme delle variabili aleatorie è infatti chiamato algebra delle osservabili.

Da questo momento andremo a considerare esclusivamente spazi di probabilità discreti.

Esempio 1.1.4 (Lancio di una moneta). Il lancio di una moneta prevede solamente gli eventi elementari testa e croce.

$$T = \text{testa} \quad C = \text{croce}$$

Il suo spazio di probabilità sarà quindi:

$$\Omega = \{T, C\}, \quad P = \{p, 1 - p\}.$$

Definizione 1.1.5 (Media e Varianza). Introduciamo il *funzionale valor medio o aspettazione* come la funzione definita da:

$$\mathbb{E}[f] := \sum_{i=1}^n p_i f_i.$$

Tale funzionale gode delle proprietà:

1. linearità: date due variabili aleatorie f e g :

$$\mathbb{E}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathbb{E}[f] + \beta \mathbb{E}[g],$$

2. positività: se f è positiva, $f_i \geq 0$, $\forall i \in \Omega$ allora $\mathbb{E}[f] \geq 0$,

3. normalizzazione:

$$\mathbb{E}[1] = 1.$$

La *varianza* di una variabile aleatoria è definita da:

$$\mathbb{V}[f] = \mathbb{E}[(f - \mathbb{E}[f])^2].$$

Osservazione 1.1.6. In generale, $\forall c$ variabile aleatoria costante, $\mathbb{E}[c] = c$.

Osservazione 1.1.7. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ ed f una variabile aleatoria,

$$\mathbb{V}[af + b] = a^2 \mathbb{V}[f].$$

L'uguaglianza è verificata per semplice calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[af + b] &= \mathbb{E}[(af + b - \mathbb{E}[af + b])^2] = \mathbb{E}[(af + b - a\mathbb{E}[f] - b)^2] = \\ &= \mathbb{E}[(a^2(f - \mathbb{E}[f])^2)] = a^2 \mathbb{V}[f]. \end{aligned}$$

Definizione 1.1.8 (funzione generatrice v.a.). Data X una variabile aleatoria, definiamo la sua funzione generatrice come

$$g(t) = \mathbb{E}[e^{tX}], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 1.1.9. Consideriamo N lanci indipendenti di monete e calcoliamo media e varianza. Introduciamo le variabili aleatorie ausiliarie nello spazio $\Omega = \{T, C\}$ nel seguente modo:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se } T \\ 0, & \text{se } C \end{cases}$$

dove $i = 1, \dots, N$ indica il numero del lancio. Denotiamo con

$$k = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad p = \mathbb{E}[X_1].$$

Con queste definizioni,

$$\mathbb{E}[k] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^N (p + 0(1-p)) = Np,$$

$$\mathbb{V}[k] = \sum_{i=1}^N \mathbb{V}[X_i] = \sum_{i=1}^N (\mathbb{E}[X_i^2] - p^2) = Np(1-p)$$

Enunciamo e dimostriamo ora la Legge dei grandi numeri e il Teorema centrale del limite, con lo schema di prove ripetute e indipendenti, come nell'esempio del lancio della moneta, ovvero per variabili aleatorie Bernoulliane.

Teorema 1.1.10 (Legge dei grandi numeri). La probabilità concentra intorno al valore $k/N = p$, cioè:

$$P\left(\left|\frac{k}{N} - p\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0,$$

per $N \rightarrow \infty, \forall \epsilon > 0$.

Dimostrazione. Definiamo:

$$\mathcal{A}_\epsilon := \{i \in \Omega : |k/N - p| > \epsilon\}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} P(|k/N - p| > \epsilon) &= \sum_{i \in \mathcal{A}_\epsilon} p_i \leq \sum_{i \in \mathcal{A}_\epsilon} p_i \frac{|k/N - p|^2}{\epsilon^2} \leq \sum_{i \in \Omega} p_i |k/N - p|^2 \frac{1}{\epsilon^2} = \\ &= \sum_{i \in \Omega} p_i |k/N - \mathbb{E}[k/N]|^2 \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{\mathbb{V}[k/N]}{\epsilon^2} = \frac{p(1-p)}{N\epsilon^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio deriva dal fatto che la varianza nell'esempio dello schema di prove ripetute e indipendenti, è lineare in N e scala col quadrato, cioè:

$$\mathbb{V}[\alpha f] = \alpha^2 \mathbb{V}[f], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Quindi se considero $k \rightarrow k/N$, la varianza scala di conseguenza:

$$\mathbb{V}[k] \rightarrow \frac{1}{N^2} \mathbb{V}[k] = \frac{p(1-p)}{N} \rightarrow 0, \quad \text{per } N \rightarrow \infty.$$

□

Osservazione 1.1.11. Al crescere di N , ovvero all'aumentare del numero di lanci, la varianza di k/N va a 0, cioè diventa certa. Si può quindi riscalarare in modo consono la variabile aleatoria k e identificare la natura delle sue fluttuazioni. Da questo si enuncia e dimostra il teorema centrale del limite, di cui vedremo in seguito un'applicazione:

Teorema 1.1.12 (Teorema di De Moivre-Laplace o Teorema Centrale del Limite). Se considero il limite $N \rightarrow \infty$ della variabile aleatoria

$$x := \frac{k - Np}{\sqrt{Np(1-p)}},$$

essa si distribuisce secondo una Gaussiana standard:

$$P\left(\left|\frac{k - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right| \leq c\right) \rightarrow \int_{-c}^c \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

per ogni $c \in \mathbb{R}_+$.

Dimostrazione. Indichiamo per brevità:

$$W_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Utilizziamo l'approssimazione di Stirling:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ponendo $q = 1 - p$, $u = \frac{k}{N} \in [0, 1]$ e definendo:

$$\epsilon(N, k) = O(1/N) + O(1/k) + O(1/(N - k)),$$

$$W_k = \frac{N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} (N - k)^{N-k} e^{-N+k} \sqrt{2\pi(N - k)}} p^k q^{N-k} (1 + \epsilon(N, k)) =$$

$$= \frac{e^{-NH(u)}}{\sqrt{2\pi Nu(1-u)}}(1 + \epsilon(N, k))$$

$$H(u) := u \log \frac{u}{p} + (1-u) \log \frac{1-u}{q}.$$

Si verifica che la funzione H , chiamata rate function o entropia, è convessa e ha un minimo in $u = p$ in cui si annulla, quindi $H(u) \geq 0$. Consideriamo

$$|x| \leq c, \quad \text{ovvero} \quad |u - p| \leq c\sqrt{pq/N}.$$

Dall'espressione di x troviamo:

$$u = p + x\sqrt{pq/N}, \quad 1 - u = q - x\sqrt{pq/N}.$$

Si ottiene:

$$u(1-u) = pq \left(1 + \frac{(q-p)x}{\sqrt{Npq}} - \frac{x^2}{N}\right)$$

e utilizzando lo sviluppo di Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi Nu(1-u)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \left(1 - \frac{(q-p)x}{2\sqrt{Npq}} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Abbiamo quindi stimato il denominatore dell'espressione di W_k . Per stimare l'esponenziale, procediamo sviluppando $H(u)$ intorno al suo minimo (trovato in precedenza). Derivo fino al terzo grado.

$$H'(u) = \log \frac{u}{p} - \log \frac{1-u}{q}$$

$$H''(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}$$

$$H'''(u) = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{(1-u)^2}$$

e calcolandole in $u=p$ otteniamo:

$$H'(p) = 0$$

$$H''(p) = \frac{1}{pq}$$

$$H'''(p) = \frac{p-q}{p^2q^2}.$$

Quindi, facendo lo sviluppo di H intorno a p e utilizzando le espressioni per u e $1 - u$ trovate in precedenza si ha:

$$\begin{aligned} H(u) &= H(p) + H'(p)(u-p) + \frac{1}{2}H''(p)(u-p)^2 + \frac{1}{6}H'''(p)(u-p)^3 + O((u-p)^4) = \\ &= \frac{x^2}{2N} - \left(\frac{q-p}{\sqrt{Npq}}\right) \frac{x^3}{6N} + O((u-p)^4). \end{aligned}$$

Dunque,

$$e^{-NH(u)} = e^{-x^2/2} \left(1 + \frac{(q-p)x^3}{6\sqrt{Npq}} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Mettendo insieme quanto visto prima, e osservando che $\epsilon(N, k) = O(1/N)$ quando $|x| \leq c$, si ottiene

$$W_k = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi Npq}} \left(1 + \frac{(q-p)(x^3 - 3x)}{6\sqrt{Npq}} + O(1/N)\right).$$

Esplicitando la dipendenza da k nell'espressione di x notiamo che:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{Npq}}.$$

Per concludere,

$$P(|x_k| \leq c) = \sum_{k:|x_k| \leq c} W_k = \sum_{k:|x_k| \leq c} \frac{-e^{(x_k)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \Delta x_k \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right).$$

A destra dell'uguaglianza abbiamo una somma di Riemann, quindi nel limite $N \rightarrow \infty$ si ottiene la tesi. \square

1.2 Concetti base di Meccanica Statistica

In questo paragrafo andiamo a richiamare concetti di meccanica statistica che risulteranno fondamentali nella trattazione. Studieremo diversi sistemi meccanici dotati di una funzione *Hamiltoniana* che è una misura dell'energia delle diverse configurazioni del sistema, cioè penseremo all'Hamiltoniana come a una variabile aleatoria associata allo spazio degli eventi elementari $\Omega = \{1, \dots, N\}$:

$$H = \{h_1, \dots, h_N\}$$

Definizione 1.2.1 (Entropia). Consideriamo lo spazio di probabilità discreto $(\Omega, 2^\Omega, P)$, dove la misura di probabilità è data dalla collezione $\{p_i\}_{i \in \Omega}$. Definiamo l'*entropia del sistema* come:

$$S[P] = - \sum_{i \in \Omega} p_i \log p_i.$$

Definizione 1.2.2 (Energia libera). Dato Ω uno spazio degli eventi elementari ed H la funzione Hamiltoniana, definiamo il funzionale *Energia libera* come :

$$F[P] = \mathbb{E}[H] - k_B T S[P],$$

dove con \mathbb{E} indichiamo il valore atteso della distribuzione rispetto alla misura di probabilità P , k_B e T sono numeri reali positivi. In particolare k_B è la *costante di Boltzmann* e T è la *temperatura*.

Per dimostrare risultati successivi è utile definire

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad e \quad U[P] = \mathbb{E}[H].$$

Osservazione 1.2.3. $F[P]$ è un *funzionale convesso*, $S[P]$ è invece *concavo*.

Teorema 1.2.4 (Misura di Gibbs). Il minimo della funzione energia libera

$$\inf_P F[P] = -\frac{1}{\beta} \log \sum_{i \in \Omega} e^{-\beta h_i}$$

viene raggiunto nella distribuzione di *Boltzmann-Gibbs*, cioè

$$p_i = \frac{e^{-\beta h_i}}{\sum_{j \in \Omega} e^{-\beta h_j}}.$$

Per semplicità, andiamo a nominare alcune quantità ricorrenti e utili ai nostri fini.

Definizione 1.2.5 (Fattore di Boltzmann e funzione di Partizione). Nominiamo la quantità $e^{-\beta h_i}$ *fattore di Boltzmann*.

Definiamo inoltre la funzione

$$Z(\beta) = \sum_{i \in \Omega} e^{-\beta h_i}$$

e la chiamiamo *funzione di partizione*.

Osservazione 1.2.6. Con queste nuove notazioni, osserviamo che il minimo della funzione energia libera si scrive

$$F(\beta) = -\frac{1}{\beta} \log Z(\beta).$$

Definizione 1.2.7 (Pressione). Definiamo *pressione* il funzionale generatore dei momenti dell'Hamiltoniana:

$$P(\beta) = \log Z(\beta) \equiv -\beta F(\beta).$$

Capitolo 2

Modelli liberi e interagenti

In questo capitolo introdurremo diversi sistemi meccanici, dando rilievo ai sistemi magnetici, poichè le loro Hamiltoniane risultano semplici da studiare. Questo permette di analizzare fenomeni che possono essere generalizzati a sistemi non magnetici. Nello specifico ci occuperemo di descrivere modelli di spin (non interagenti) e modelli interagenti, con particolare attenzione al modello di Curie-Weiss.

2.1 Modelli Hamiltoniani

Introduciamo un esempio di famiglia di misure di probabilità di Boltzmann-Gibbs attraverso la loro Hamiltoniana H . La meccanica di tali sistemi sarà risolta in modo elementare, essendo il caso più semplice rispetto ai modelli hamiltoniani interagenti.

Definizione 2.1.1 (spin). Uno *spin* è una variabile

$$\sigma = \{+1, -1\}.$$

In particolare, consideriamo un sistema di N particelle. A ciascuna particella è associato uno spin, che indichiamo con σ_i , $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, il quale descrive il momento angolare della particella i – *esima*.

Allo stesso modo, indichiamo con (h_i) , $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ i momenti magnetici associati alla particella i -esima.

Definizione 2.1.2 (Gas di spin). Data $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ la configurazione di un sistema di N particelle e detti h_i i campi magnetici della i -esima particella, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, il gas di spin (in un sistema di spin non interagente) è descritto dalla seguente Hamiltoniana:

$$H_N(\sigma) = - \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i.$$

2.1.1 Misura di Boltzmann

Con il simbolo $\{\pm 1\}^N$ andiamo a definire l'insieme delle N -uple in cui ogni termine può assumere i valori $\{+1, -1\}$, vale a dire l'insieme delle configurazioni di spin di un sistema.

Osserviamo che la misura di *Boltzmann-Gibbs* $\mu_N(\sigma)$ è una misura sullo spazio delle configurazioni $\{\pm 1\}^N$.

Osservazione 2.1.3 (Indipendenza). Ricordando la scrittura

$$\mu_N(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{Z(\beta)}$$

e utilizzando l'espressione dell'Hamiltoniana che descrive il gas di spin si ha:

$$\mu_N(\sigma) = \frac{e^{\beta \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i}}{\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{\beta \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i}}.$$

Vogliamo mostrare che gli spin sono variabili aleatorie indipendenti e quindi che vale:

$$\mu_N(\sigma) = \prod_{i=1}^N \mu_i(\sigma_i).$$

Osservando che, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$ vale:

$$\mu_i(\sigma_i) = \frac{e^{\beta h_i \sigma_i}}{\sum_{\sigma_i \in \{\pm 1\}^N} e^{\beta h_i \sigma_i}}$$

e applicando le proprietà dell'esponenziale è banalmente verificata la tesi.

Sostituiamo

$$\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{\beta h_i \sigma} = 2 \cosh \beta h_i$$

e calcoliamo la probabilità che l' i -esimo valore di spin della configurazione σ valga rispettivamente $+1$ e -1 , per ogni $i = 1, \dots, N$:

$$P(\sigma_i = +1) = \frac{e^{\beta h_i}}{2 \cosh \beta h_i}$$

e

$$P(\sigma_i = -1) = \frac{e^{-\beta h_i}}{2 \cosh \beta h_i}.$$

Osservazione 2.1.4. Notiamo che il sistema di spin non interagente equivale ad uno schema di prove ripetute indipendenti. Affinchè la probabilità sia equa, ovvero gli spin siano indipendenti e identicamente distribuiti, le due quantità devono coincidere e la loro somma deve dare 1, cioè la misura dell'intero spazio. Questo corrisponde al richiedere che tale quantità sia esattamente $1/2$. Allora, l'equazione

$$\frac{e^{\beta h_i}}{2 \cosh \beta h_i} = \frac{1}{2}$$

è risolta per $h_i = 0, \forall i = 1, \dots, N$.

Per indicare il funzionale media rispetto alla misura di Boltzmann utilizzeremo il simbolo ω_N .

Osservazione 2.1.5. Data una funzione

$$f: \{\pm 1, \dots\}^N \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.1.1}$$

$$\sigma \mapsto f(\sigma), \tag{2.1.2}$$

il funzionale media rispetto alla misura di Boltzmann ω_N è dato da:

$$\omega_N(f) = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \mu_N(\sigma) f(\sigma).$$

Siamo interessati a studiare alcune proprietà della misura di Boltzmann nel suo limite $N \rightarrow \infty$. L'esistenza di tale limite risulterà di particolare rilievo.

Definiremo la pressione per particella p_N come:

$$p_N = \frac{1}{N} \log Z_N(\beta). \quad (2.1.3)$$

Definizione 2.1.6 (Limite Termodinamico). Con il termine *Limite Termodinamico* indichiamo il limite per $N \rightarrow \infty$.

Da un punto di vista fisico siamo interessati al limite termodinamico di due oggetti: la pressione normalizzata al numero di particelle, cioè:

$$p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_N}{N},$$

e le medie di opportune osservabili f .

$$\omega_N(f) = \frac{\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} f(\sigma) e^{-\beta H_N(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-\beta H_N(\sigma)}}.$$

Indichiamo con $\omega(f)$ il limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \omega_N(f)$.

L'esistenza di tali limiti risulta importante in quanto garantisce che il modello che stiamo studiando è ben posto. Nel caso del gas di spin, con $h_i = h, \forall i = 1, \dots, N$ l'esistenza del limite è banale. Per verificarlo, basta calcolare la pressione:

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\sigma_2 = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_N = \pm 1} e^{\beta h_1 \sigma_1} e^{\beta h_2 \sigma_2} \dots e^{\beta h_N \sigma_N} \\ &= \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\sigma_2 = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_{N-1} = \pm 1} e^{\beta h_1 \sigma_1} e^{\beta h_2 \sigma_2} \dots e^{\beta h_{N-1} \sigma_{N-1}} \sum_{\sigma_N = \pm 1} e^{\beta h_N \sigma_N} \\ &= Z_{N-1} 2 \cosh(\beta h_N) = 2^N \prod_{i=1}^N \cosh \beta h_i. \end{aligned}$$

Se i parametri h_i (che rappresentano i campi magnetici della i -esima particella) sono tutti uguali, dove tale uguaglianza indica la presenza di gas

di spin omogeneo, ovvero il modello è invariante per azione del gruppo di permutazione sulle particelle, e risulta:

$$Z_N = (2 \cosh \beta h)^N.$$

In questo caso, per definizione, la pressione per particella del gas di spin vale:

$$P_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \log Z_N(\beta, h) = \log 2 \cosh(\beta h),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato una proprietà del logaritmo. Il suo limite esiste banalmente perchè la funzione è costante nella variabile N .

2.2 Modello di Curie-Weiss

In questa sezione andremo a descrivere il modello interagente di Curie-Weiss del ferromagnetismo, che sarà al centro del nostro interesse. Come precedentemente anticipato, studieremo il significato termodinamico mostrando in quali condizioni il suo limite esiste, ovvero descrive un sistema di particelle non banale.

Vogliamo costruire un modello in cui tutti gli spin interagiscano tra loro, come in figura 2.1.

Consideriamo la funzione Hamiltoniana:

$$H_N(\sigma) = -J \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (2.2.1)$$

dove il primo termine rappresenta proprio le interazioni nel modello. Si mostra facilmente che questo non è ben posto dal punto di vista termodinamico, infatti i termini dell'Hamiltoniana dovrebbero crescere in modo approssimativamente lineare con il numero di particelle. In particolare, proviamo a ridefinire un'Hamiltoniana aggiungendo un fattore $N^{-\alpha}$ al fattore di iterazione, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$H_N(\sigma) = -\frac{J}{N^\alpha} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (2.2.2)$$

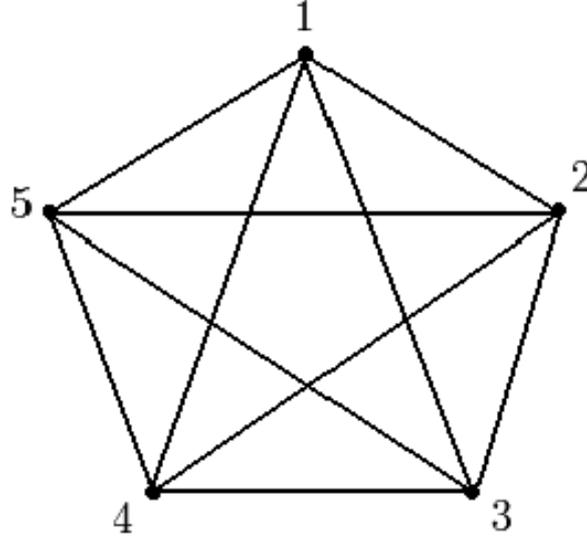


Figura 2.1: esempio di grafo completo a 6 vertici

Ponendo:

$$\omega_N(f)' = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \frac{(f(\sigma)) e^{h \sum_{i=1}^N \sigma_i}}{Z'_N},$$

dove

$$Z'_N = (2 \cosh h)^N.$$

Osserviamo che, per la definizione 2.1.3:

$$p_N = \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-H_N(\sigma)} = \frac{1}{N} \log \left(\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{\frac{J}{N^\alpha} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j} e^{h \sum_{i=1}^N \sigma_i} \right).$$

Moltiplicando e dividendo l'argomento del log per Z'_N , riusciamo a ricondurci all'espressione di $\omega'_N(e^{\frac{J}{N^\alpha} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j})$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \log \left(Z'_N \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \frac{e^{\frac{J}{N^\alpha} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j}}{Z'_N} e^{h \sum_{i=1}^N \sigma_i} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \log (2 \cosh h)^N + \frac{1}{N} \log (\omega'_N(e^{\frac{J}{N^\alpha} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j})), \end{aligned}$$

da cui usando le proprietà del logaritmo si trova:

$$p_N = \log 2 \cosh h + \frac{1}{N} \log \omega'_N(e^{\frac{J}{N^\alpha} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j}).$$

Per procedere applichiamo la disuguaglianza di Jensen.

Teorema 2.2.1 (Disuguaglianza di Jensen). [4] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa, siano $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, allora

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Osservando che la funzione \log è concava, da cui $-\log$ è convessa, vale la disuguaglianza 2.2.1 con il verso opposto applicata a $f(x) = \log(x)$, cioè:

$$\begin{aligned} p_N &\geq \log 2 \cosh h + \frac{J}{N^{\alpha+1}} \left(\sum_{i \neq j, 1}^N \omega'_N(\sigma_i) \omega'_N(\sigma_j) + N \right) = \\ &= \log 2 \cosh h + \frac{J}{N^\alpha} \left(\frac{1}{N} \sum_{i \neq j, 1}^N \omega'_N(\sigma_i) \omega'_N(\sigma_j) + 1 \right) = \\ &= \log 2 \cosh h + \frac{J}{N^\alpha} ((N-1) \tanh^2 h + 1). \end{aligned}$$

Dalla formula appena trovata vediamo che, se $\alpha < 1$ la pressione del modello diverge quando $h \neq 0$. Notiamo però che la differenza tra le pressioni di un modello con $h = 0$ ed uno con $h \neq 0$ è limitata. Infatti:

$$p_N - p_N|_{h=0} = \int_0^h \frac{1}{N} \omega_N\left(\sum_i \sigma_i\right) \Big|_{h=h'} dh' \in [-h, h].$$

Questo significa che se una delle due diverge, anche l'altra lo farà.

Al contrario, se $\alpha > 1$, in ogni caso avremo:

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} p_N \geq \log 2 \cosh h. \quad (2.2.3)$$

Ricordando che $\{\sigma_i, \sigma_j\} \in \{\pm 1\}$, si ha $J\sigma_i\sigma_j \leq |J|$, otteniamo:

$$p_N \leq \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{|J|N^{2-\alpha} + h \sum_{i=1}^N \sigma_i} = |J| N^{1-\alpha} + \log 2 \cosh h,$$

da cui

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} p_N \leq \log 2 \cosh h. \quad (2.2.4)$$

Mettendo insieme quanto trovato in 2.2.3 e 2.2.4 si ha

$$p := \liminf_{N \rightarrow \infty} p_N = \log 2 \cosh h$$

per ogni $\alpha > 1$.

Questo mostra che tale normalizzazione rende ininfluyente il termine interagente, dunque l'unico caso interessante è quello con $\alpha = 1$.

Definizione 2.2.2. Il modello di Curie-Weiss è descritto dall'hamiltoniana:

$$H_N(\sigma) = -\frac{J}{2N} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (2.2.5)$$

In questo modello, le interazioni che compaiono nell'Hamiltoniana vengono sostituite con il valore uniforme $J/2N$, e il fattore $1/2$ viene aggiunto per convenienza. Assumiamo quindi che tutte le particelle interagiscano con la stessa intensità. Questo permette di semplificare il problema riducendo il numero di parametri, perdendo però accuratezza.

Osservazione 2.2.3. Notiamo che: in 2.2.5 i termini diagonali di iterazione $i = j$ non influiscono se non per un $O(1)$:

$$-\frac{J}{N} \sum_{i=j=1}^N \sigma_i \sigma_j = -J.$$

In particolare, siamo interessati a studiare $H_N(\sigma)$ nel suo comportamento asintotico a N per due ragioni:

1. Ricordando:

$$\mu_N(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{Z(\beta)} = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-\beta H_N(\sigma)}},$$

osserviamo che, se abbiamo un'altra Hamiltoniana $\tilde{H}_N(\sigma) = H_N(\sigma) + c$, dove c è una costante reale ($c \sim O(1)$), allora la misura di *Boltzmann–Gibbs* diventa:

$$\mu_N(\sigma) = \frac{e^{-c\beta} e^{-\beta H_N(\sigma)}}{e^{-c\beta} \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-\beta H_N(\sigma)}} = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-\beta H_N(\sigma)}},$$

ovvero la misura resta invariata se all'Hamiltoniana sommiamo termini costanti .

2. dalla definizione della pressione per particella 2.1.3,

$$p_N = \frac{1}{N} \log Z_N,$$

osserviamo che i termini che influiscono sul risultato sono quelli per cui $Z_N \sim e^N$, cioè Z_N ha un andamento asintotico all'esponenziale, da cui, per definizione di Z_N , $H_N(\sigma) \sim O(N)$.

Andiamo ora a definire la *magnetizzazione spontanea*, la quale risulterà utile successivamente.

Definizione 2.2.4 (Magnetizzazione spontanea e termodinamica). Definiamo la magnetizzazione configurazionale

$$m_N(\sigma) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

Tale quantità è quindi definita come la media degli spin; definiamo la magnetizzazione termodinamica come la sua media rispetto alla misura di Boltzmann-Gibbs

$$\frac{\partial p_N}{\partial h} = \omega_N(m_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_N(\sigma_i).$$

Osservazione 2.2.5. Considerando la magnetizzazione configurazionale appena descritta, si ottiene:

$$H_N(\sigma) = -N \frac{J}{2} m_N^2(\sigma) - N h m_N(\sigma) = -N \left(\frac{J}{2} m_N^2(\sigma) + h m_N(\sigma) \right).$$

Osserviamo inoltre che il quadrato della magnetizzazione segnala la presenza di interazione, mentre la prima potenza segnala il modello libero.

Per dimostrare l'esistenza del limite per la pressione, enunciamo e dimostriamo il Lemma di Fekete.

Lemma 2.2.6 (Lemma di Fekete). Per $n \in \mathbb{N}$, sia a_n una successione tale che:

$$\exists \bar{c} \in \mathbb{R} : a_n \geq n\bar{c} \quad (2.2.6)$$

$$a_{n_1+n_2} \leq a_{n_1} + a_{n_2}, \quad \forall n_1, n_2 \quad (2.2.7)$$

allora esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$

Dimostrazione. Per iniziare, osserviamo che:

$$\frac{a_{2n}}{2n} \leq \frac{a_n + a_n}{2n} = \frac{2a_n}{2n} = \frac{a_n}{n}$$

e

$$\text{per ogni } k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{a_{kn}}{kn} \leq \frac{a_{(k-1)n} + a_n}{kn} \leq \frac{ka_n}{kn} = \frac{a_n}{n}$$

da cui segue che per sottosuccessioni di multipli interi la quantità $\frac{a_n}{n}$ è monotona decrescente. Definiamo

$$\mu = \inf_n \frac{a_n}{n} \geq \bar{c}.$$

Fissiamo un $m \geq 1$. Per quanto appena mostrato, e per l'ipotesi di sub-addittività ($a_{n_1+n_2} \leq a_{n_1} + a_{n_2}$), otteniamo:

$$a_{mq+r} \leq qa_m + a_r,$$

da cui

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{a_{mq+r}}{mq+r} \leq \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{qa_m + a_r}{mq+r} = \frac{a_m}{m}.$$

Per il Teorema del Resto di Euclide, sappiamo che ogni $n \in \mathbb{Z}$, tale che $n > m$ può essere scritto come $n = mq + r$ con $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, con m arbitrario, vediamo:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}.$$

Allora,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_m \frac{a_m}{m} = \mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$$

che conclude la dimostrazione. \square

Utilizziamo quindi il Lemma di Fekete nel modello di Curie-Weiss .

Osservazione 2.2.7. Osserviamo che

$$|H_N(\sigma)| = N \left| \frac{J}{2} m_N^2(\sigma) + h m_N(\sigma) \right| \leq N \left(\frac{|J|}{2} + |h| \right),$$

dove ho usato il fatto che $m_N \in [-1, 1]$.

Chiamando $K := \left(\frac{|J|}{2} + |h| \right)$ e utilizzando $-H_N(\sigma) \geq -NK$, si ha

$$P_N \geq \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-NK} = N(\log 2 - K),$$

e per $-H_N(\sigma) \leq NK$, si trova

$$P_N \leq \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{NK} = N(\log 2 + K).$$

Con $\bar{c} = \log 2 - K$ e $\bar{c} = \log 2 + K$, le due ipotesi 2.2.6 e 2.2.7 del Lemma di Fekete sono verificate e vale l'equivalente con disuguaglianza opposta.

Teorema 2.2.8 (Pressione nel modello Curie-Weiss). La pressione nel modello Curie-Weiss esiste e si ha:

$$P_N(J, h) = \log Z_N(J, h) = \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-H_N(\sigma)}$$

è tale che:

- è sub-additiva se $J > 0$, dove tale proprietà

$$P_{n+m} \leq P_n + P_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

- è super-additiva se $J < 0$ dove tale proprietà significa:

$$P_{n+m} \geq P_n + P_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Corollario 2.2.9 (Esistenza Limite Termodinamico). Il limite termodinamico del modello Curie-Weiss esiste e si ha:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_N}{N} = \begin{cases} \inf_N \frac{P_N}{N}, & \text{se } J > 0 \\ \sup_N \frac{P_N}{N}, & \text{se } J < 0 \end{cases}$$

Inoltre tale limite è finito.

Dimostrazione. Supponendo la sub-additività e la super-additività, l'esistenza di tale limite è assicurata dal Lemma di Fekete. Grazie a quanto osservato in 2.2.7, otteniamo anche un valore del limite finito sia per $J < 0$ che per $J > 0$. \square

Per dimostrare il teorema 2.2.8 dobbiamo introdurre la tecnica di interpolazione.

D'ora in poi andremo a considerare esclusivamente il caso $J > 0$.

Interpolazione e dimostrazione del Teorema 2.2.8

Definizione 2.2.10 (Hamiltoniana interpolante). Sia $t \in [0, 1]$. Date due hamiltoniane $H_N^{(1)}$ e $H_N^{(2)}$ su $\{\pm 1\}^N$, definiamo l'hamiltoniana interpolante

$$H_N(t) := tH_N^{(1)}(\sigma) + (1-t)H_N^{(2)}(\sigma)$$

da cui segue la relativa pressione interpolante:

$$p_N(t) = \frac{1}{N} \log Z_N(t) = \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-H_N(t)}. \quad (2.2.8)$$

La misura di Boltzmann-Gibbs relativa all'Hamiltoniana interpolante $H_N(t)$ viene indicata con $\omega_{N,t}$.

Utilizziamo l'interpolazione per dimostrare il teorema relativo alla pressione del modello di Curie-Weiss.

Nei nostri scopi, questa tecnica serve a trasportare la misura di Boltzmann di un sistema ad N particelle nella misura prodotto per due suoi sottoinsiemi. Consideriamo

$$H_N(t) := tH_N(\sigma) + (1-t)[H_{N_1}(\sigma) + H_{N_2}(\sigma)],$$

dove H_{N_1} dipende dai primi N_1 spin ed H_{N_2} dai secondi N_2 , ottengo:

$$H_{N_1}(\sigma) = -\frac{J}{2N_1} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \equiv -N_1 \frac{J}{2} m_{N_1}^2(\sigma) - N_1 h m_{N_1}(\sigma)$$

$$H_{N_2}(\sigma) = -\frac{J}{2N_2} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \equiv -N_2 \frac{J}{2} m_{N_2}^2(\sigma) - N_2 h m_{N_2}(\sigma)$$

e

$$N m_N(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i = \sum_{i=1}^{N_1} \sigma_i + \sum_{i=1+N_1}^N \sigma_i = N_1 m_{N_1}(\sigma) + N_2 m_{N_2}(\sigma). \quad (2.2.9)$$

Da questo segue la *decomposizione baricentrale* della magnetizzazione totale:

$$m_N(\sigma) = \frac{N_1}{N} m_{N_1}(\sigma) + \frac{N_2}{N} m_{N_2}(\sigma), \quad \text{con} \quad \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} = 1. \quad (2.2.10)$$

Con queste premesse, riusciamo finalmente a dimostrare il Teorema 2.2.8

Dimostrazione. Iniziamo considerando la pressione di interpolazione

$$p_N(t) = \log Z_N(t) = \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-[t H_N(\sigma) + (1-t)(H_{N_1}(\sigma) + H_{N_2}(\sigma))]}.$$

Calcoliamo la pressione agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$. In 0 vale:

$$\begin{aligned} P_N(0) &= \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-[H_{N_1}(\sigma) + H_{N_2}(\sigma)]} = \\ &= \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{N_1}} e^{-H_{N_1}(\sigma)} + \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{N_2}} e^{-H_{N_2}(\sigma)} = \\ &= P_{N_1} + P_{N_2}. \end{aligned}$$

Nell'altro estremo, $t = 1$ abbiamo:

$$P_N(1) = \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-H_N(\sigma)} = P_N.$$

Utilizzando il Teorema Fondamentale del calcolo integrale:

$$P_N(1) = P_N(0) + \int_0^1 dt \frac{d}{dt} P_N(t).$$

Basta mostrare la monotonia di $P_N(t)$ per assicurare super-additività o sub-additività (a seconda che sia crescente o decrescente rispettivamente).

$$\frac{d}{dt} P_N(t) = -\omega_{N,t} \left(\frac{dH_N(t)}{dt} \right) = -\omega_{N,t} (H_N - H_{N_1} - H_{N_2}) =$$

$$= \omega_{N,t} \left[J(Nm_N^2 - N_1m_{N_1}^2 - N_2m_{N_2}^2) + h(Nm_N - N_1m_{N_1} - N_2m_{N_2}) \right].$$

Osserviamo che il termine $(Nm_N - N_1m_{N_1} - N_2m_{N_2})$ è nullo per la decomposizione *baricentrale* della magnetizzazione totale (2.2.10). Allora, resta

$$\frac{d}{dt}P_N(t) = NJ\omega_{N,t} \left(m_N^2 - \frac{N_1}{N}m_{N_1}^2 - \frac{N_2}{N}m_{N_2}^2 \right).$$

Essendo la funzione $f(x) = x^2$ convessa, ovvero per $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1 - \lambda)f(x_2) \leq 0$$

otteniamo:

$$\left(\frac{N_1}{N}m_{N_1} + \frac{N_2}{N}m_{N_2} \right)^2 - \frac{N_1}{N}m_{N_1}^2 - \frac{N_2}{N}m_{N_2}^2 \leq 0.$$

Quindi, il segno della derivata dipende dal segno di J :

- se $J > 0$, $P'_N(t) \leq 0$, quindi vale

$$P_N \leq P_{N_1} + P_{N_2},$$

cioè la proprietà di sub-additività.

- se $J < 0$, $P'_N(t) \geq 0$, quindi vale

$$P_N \geq P_{N_1} + P_{N_2},$$

cioè la proprietà di super-additività.

□

Capitolo 3

Soluzione del modello

Curie-Weiss

Dopo aver introdotto il Modello di Curie-Weiss, in questo capitolo ci occuperemo di risolverlo tramite stime dall'alto e dal basso. Introduciamo inoltre un principio variazionale per calcolare la sua energia libera.

3.1 Principio Variazionale

Nel capitolo precedente, abbiamo trovato la scrittura della pressione del modello di Curie-Weiss, per ogni (β, h, J) fissati. Andiamo ora a considerare, senza perdita di generalità, la stessa con $\beta = 1$:

$$p_N(J, h) = \frac{1}{N} \log \sum_{\{\sigma \in \pm 1\}^N} e^{N(\frac{J}{2}m_N^2(\sigma) + hm_N(\sigma))}. \quad (3.1.1)$$

Ci occupiamo ora di calcolarne il limite

$$p(J, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} p_N(J, h), \quad (J, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

L'esistenza di tale valore è stata mostrata nel corollario 2.2.9 . Conosciamo per 2.2.8

$$p_N(0, h) = \log 2 \cosh(h).$$

Vale:

Teorema 3.1.1 (Principio Variazionale). Definendo :

$$p_{var}(x; J, h) := -\frac{Jx^2}{2} + \log 2 \cosh(Jx + h) \quad (3.1.2)$$

la pressione per particella del modello ferromagnetico di Curie-Weiss (con $J \geq 0$) nel limite termodinamico, allora vale:

$$p(J, h) = \sup_{x \in \mathbb{R}} p_{var}(x; J, h).$$

La dimostrazione del teorema verrà portata a termine grazie al Teorema dei due Carabinieri, procedendo cioè con stime dall'alto e dal basso.

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale:

$$(m_N - x)^2 \geq 0 \Rightarrow m_N^2 \geq 2m_N x - x^2. \quad (3.1.3)$$

La formula ha lo scopo di approssimare un modello interagente con un modello libero, aggiungendo un grado di libertà alla variabile x . Tale variabile sarà da ottimizzare. Sostituendo la disequazione 3.1.3 nella formula della pressione 3.1.1 si ha:

$$\begin{aligned} p_N &\geq \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{N(Jx m_N - \frac{Jx^2}{2} + h m_N)} = \\ &= \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{N m_N (Jx + h) - N \frac{Jx^2}{2}}, \end{aligned}$$

raccogliendo m_N all'esponente. Per le proprietà del logaritmo, portando fuori dalla sommatoria il primo fattore, la formula della pressione diventa:

$$\begin{aligned} p_N &\geq -\frac{Jx^2}{2} + \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{N m_N (Jx + h)} = \\ &-\frac{Jx^2}{2} + \log 2 \cosh(Jx + h) = p_{var}(x; J, h). \end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che l'Hamiltoniana di un gas di spin

$$H_N(\sigma) = -h \sum_{i=1}^N \sigma_i = -N h m_N(\sigma),$$

con campo magnetico $Jx + h$ è $Nm_N(Jx + h)$. Se ottimizziamo rispetto a x avremo uniformemente in N :

$$p_N(J, h) \geq \sup_x p_{var}(x; J, h).$$

Abbiamo quindi stimato dal basso la pressione del modello ferromagnetico di Curie-Weiss. Vediamo ora la stima dall'alto.

Introduciamo lo spettro della magnetizzazione per un sistema ad N particelle, cioè l'insieme dei valori assunti da m_N

$$\mathcal{S}_{m_N} = \{-1, -1 + 2/N, \dots, 1 - 2/N, 1\}, \text{ con } |\mathcal{S}_{m_N}| = N + 1$$

e le possibili transizioni ad ogni salto, cioè $m_N \rightarrow m_N + \frac{2}{N}$ quando uno spin positivo si negativizza e $m_N \rightarrow m_N - \frac{2}{N}$ quando uno spin negativo si positivizza.

La funzione di partizione Z_N può essere riscritta come:

$$Z_N = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{N(\frac{J}{2}m_N^2 + hm_N)} = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \sum_{x \in \mathcal{S}_{m_N}} \delta_{x, m_N} e^{N(\frac{J}{2}m_N^2 + hm_N)},$$

dove δ_{x, m_N} è la delta di Kroneker. Utilizzando la sua partizione dell'unità si ha:

$$\sum_{x \in \mathcal{S}_{m_N}} \delta_{x, m_N(\sigma)} = 1.$$

Otteniamo

$$p_N = \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \sum_{x \in \mathcal{S}_{m_N}} \delta_{x, m_N(\sigma)} e^{N(\frac{Jx^2}{2}m_N^2(\sigma) + hm_N(\sigma))}.$$

I termini che danno contributo non nullo sono quelli dove si ha:

$$m_N(\sigma) = x \Rightarrow (m_N - x)^2 = 0 \Rightarrow m_N^2(\sigma) = 2m_N(\sigma)x - x^2,$$

quindi

$$p_N = \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \sum_{x \in \mathcal{S}_{m_N}} \delta_{x, m_N(\sigma)} e^{NJm_N(\sigma)x - \frac{NJx^2}{2} + Nhm_N(\sigma)} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \sum_{x \in \mathcal{S}_{m_N}} e^{N J m_N(\sigma) x - \frac{N J x^2}{2} + N h m_N(\sigma)} = \\
&\frac{1}{N} \log \sum_{x \in \mathcal{S}_{m_N}} e^{N p_{var}(x; J, h)} \leq \frac{1}{N} \log \sum_{x \in \mathcal{S}_{m_N}} e^{N \sup_{x \in \mathbb{R}} p_{var}(x; J, h)} = \\
&= \frac{\log(N+1)}{N} + \sup_{x \in \mathbb{R}} p_{var}(x; J, h).
\end{aligned}$$

Per concludere,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} p_{var}(x; J, h) \leq p_N(J, h) \leq \frac{\log(N+1)}{N} + \sup_{x \in \mathbb{R}} p_{var}(x; J, h)$$

e calcolando il limite $N \rightarrow \infty$, applicando il Teorema dei due carabinieri, si ha la tesi. \square

3.1.1 Equazioni di consistenza

Abbiamo provato che

$$p(J, h) = \sup_{x \in \mathbb{R}} p_{var}(x; J, h),$$

allora, per calcolare la soluzione di tale problema, dobbiamo trovare l'estremo superiore del principio variazionale introdotto. Ne troviamo la derivata prima e la poniamo a 0. In particolare,

$$\frac{dp_{var}}{dx} = -Jx + J \tanh(Jx + h), \quad (3.1.4)$$

quindi, supponendo che \hat{x} sia la soluzione,

$$-J\hat{x} + J \tanh(J\hat{x} + h) = 0,$$

abbiamo ottenuto un'equazione di punto fisso:

$$\hat{x} = \tanh(J\hat{x} + h). \quad (3.1.5)$$

Quest'ultima viene anche chiamata *equazione di consistenza*. Le soluzioni dipenderanno da J e h , quindi studiamo il problema al variare di tali valori. Nell'insieme delle soluzioni, saranno compresi anche punto di flesso o estremi inferiori, di nessun interesse per il nostro studio. Dovremo quindi escludere tali punti e considerare solo quelli che realizzano il sup.

Proposizione 3.1.2. I punti che verificano il sup della funzione $p_{var}(x; J, h)$ dipendono da J, h . Valgono:

- se $h = 0, J < 1$, esiste un unico massimo globale $\hat{x} = 0$;
- se $h = 0, J > 1$, esistono due massimi simmetrici $\hat{x}_+, -\hat{x}_+$;
- se $h = 0, J = 1$, esiste un unico massimo globale $\hat{x} = 0$, chiamato punto critico. In particolare $p''_{var}(x; J, h)|_{x=0} = 0$;
- se $h > 0, J \geq 0$, esiste un unico massimo positivo.

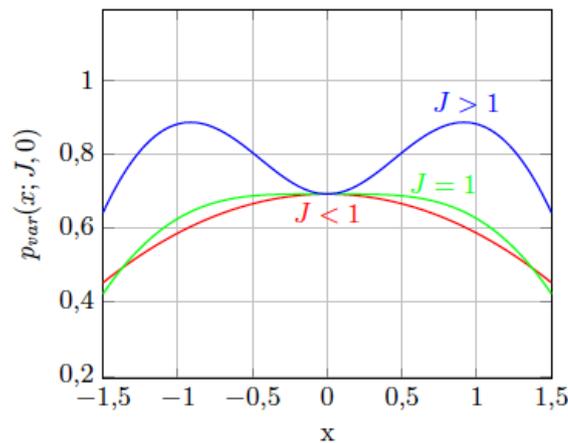


Figura 3.1: p_{var} nel caso $h = 0$, al variare di x e J

Dimostrazione.

Osservazione 3.1.3. Calcoliamo il limite funzione $p_{var}(x)$ all'infinito.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} -\frac{Jx^2}{2} + \log 2 \cosh(Jx + h) \sim \lim_{|x| \rightarrow \infty} -\frac{Jx^2}{2} = -\infty,$$

quindi il sup della funzione $p_{var}(x)$ sarà realizzato all'interno del dominio \mathbb{R} .

Enunciamo il teorema di Banach-Caccioppoli, risulterà utile nello studio.

Teorema 3.1.4 (Banach-Caccioppoli). [3] Sia (X, d) uno spazio metrico, completo e non vuoto e sia $f : X \rightarrow X$ una contrazione, cioè una funzione tale che:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists k \in [0, 1) \text{ t.c. } |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Allora esiste un unico punto fisso per f :

$$\hat{x} = f(\hat{x}) \text{ t.c. } \hat{x} \in X.$$

Iniziamo a studiare l'equazione di consistenza considerando il caso $h = 0$. L'equazione diventa

$$\hat{x} = \tanh(J\hat{x}).$$

Se $J < 1$,

la funzione $\tanh(Jx)$ risulta essere una contrazione, infatti, basta verificare che

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists k \in (0, 1) \text{ t.c. } |\tanh(Jx) - \tanh(Jy)| \leq k|x - y|.$$

Utilizziamo il teorema di Lagrange, mostrando che $|\frac{d \tanh(Jx)}{dx}| < 1$. Si ha

$$\frac{d \tanh(Jx)}{dx} = \frac{J}{(\cosh(Jx))^2} = J(\operatorname{sech}(Jx))^2.$$

Per ipotesi, $J \in (0, 1)$ e $\operatorname{sech}(Jx) \in (0, 1]$, quindi il loro prodotto sarà anch'esso compreso nell'intervallo aperto $(0, 1)$. Allora grazie al teorema di Banach-Caccioppoli esiste un unico punto fisso per tale funzione, quindi se troviamo un valore di \hat{x} che soddisfa l'equazione, sappiamo che non ce ne sono altri. Osserviamo che $\tanh(0) = 0$, allora la soluzione sarà

$$0 = \hat{x} = \tanh(J\hat{x}) = 0.$$

Calcolando la derivata seconda del principio variazionale riusciamo a verificare che $\hat{x} = 0$ è effettivamente il sup:

$$\frac{d^2 p_{var}}{dx^2} = -J + J^2(1 - \tanh^2(Jx)) \leq -J + J^2 < 0.$$

Se $J > 1$, l'equazione ha tre punti fissi, l'origine (trovata nel caso precedente) e due punti simmetrici, \hat{x}_+ e \hat{x}_- , dove $\hat{x}_- = -\hat{x}_+$. La simmetria dei due punti \hat{x}_- , \hat{x}_+ deriva dal fatto che la funzione $p_{var}(x)$ è pari, infatti

$$p_{var}(x) = -\frac{Jx^2}{2} + \log 2 \cosh(Jx+h) = -\frac{J(-x)^2}{2} + \log 2 \cosh(-Jx+h) = p_{var}(-x).$$

Il risultato si ottiene grazie al fatto che le due funzioni x^2 e $\cosh(x)$ sono entrambe pari.

Dobbiamo studiare questi ultimi due punti per capire di che tipo sono, e cioè se corrispondono alla soluzione dell'equazione o sono da escludere. Calcoliamo

$$(\tanh(Jx))' = J(1 - \tanh^2(Jx)).$$

In $\hat{x} = 0$, vale $J(1 - \tanh^2(0)) = J > 1$ per ipotesi, quindi la funzione non è una contrazione. Calcolando la derivata seconda in $\hat{x} = 0$, si ha:

$$\frac{d^2 p_{var}}{dx^2} = -J + J^2 = \begin{cases} = 0, & J = 1 \\ < 0, & J < 1 \\ > 0, & J > 1 \end{cases},$$

allora in questo caso l'origine non può essere un sup. Restano quindi $\{\pm\hat{x}_+\}$, intorno ai quali la funzione $\tanh(Jx)$ è una contrazione.

Studiamo ora il caso $J = 1$. Dimostriamo che vale

$$\tanh(x) < x \quad \text{se } x > 0,$$

$$\tanh(x) > x \quad \text{se } x < 0.$$

Calcoliamo la tangente a $\tanh(x)$ in $x = 0$. Si ha

$$(\tanh(x))' = (1 - \tanh^2(x)),$$

valutando la derivata prima in $x = 0$, otteniamo

$$(\tanh(x))'|_{x=0} = 1,$$

allora la retta tangente a $\tanh(x)$ in $x = 0$ è $y = x$. Inoltre osserviamo che

$$(\tanh(x))'' = -2 \tanh(x)(\operatorname{sech}(x))^2,$$

allora vale

$$(\tanh(x))'' = \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 0 \\ < 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Questo significa che per $x > 0$, la funzione $\tanh(x)$ è concava, quindi le tangenti stanno sopra al grafico della funzione, mentre per $x < 0$ è convessa quindi la tangente starà sotto al grafico di $\tanh(x)$.

Allora valgono le due disuguaglianze. In particolare, l'equazione di punto fisso $\tanh(x) = x$ non sarà mai realizzata per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre, osservando $0 = \hat{x} = \tanh(\hat{x}) = 0$, $\hat{x} = 0$ risulta essere l'unico punto fisso. Consideriamo ora il caso $h > 0$, $J \in \mathbb{R}_+$. Mostriamo che esiste un unico massimo globale per la funzione $p_{\text{var}}(x; J, h)$. Iniziamo dimostrando che la funzione $\tanh(Jx + h)$ ha un'unica soluzione positiva.

Lemma 3.1.5. Per ogni $x > 0$, vale

$$p_{\text{var}}(x) > p_{\text{var}}(-x)$$

Dimostrazione.

$$p_{\text{var}}(x) - p_{\text{var}}(-x) = \log \frac{\cosh(Jx + h)}{\cosh(-Jx + h)}.$$

Essendo $J > 0$, $h > 0$,

$$|-Jx + h| \leq |Jx + h|$$

cioè

$$\frac{\cosh(Jx + h)}{\cosh(-Jx + h)} > 1.$$

□

Dal lemma è banale osservare che se tale massimo globale \hat{x} esiste, sarà positivo. Ricordiamo:

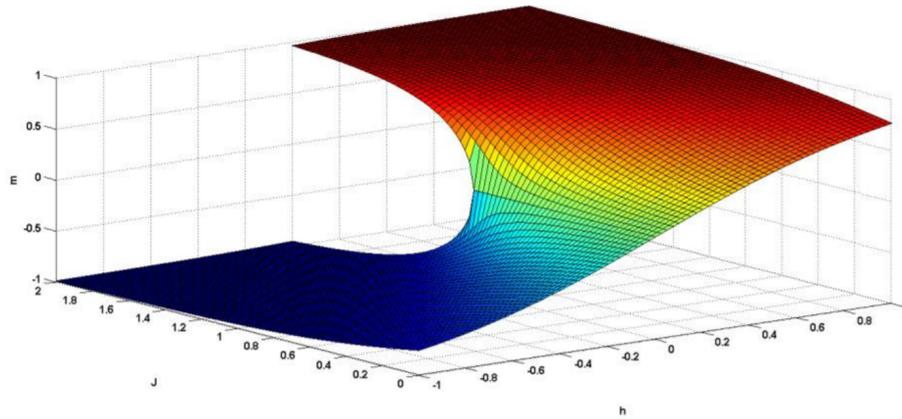


Figura 3.2: Superficie di magnetizzazione del modello C-W al variare di J e h

Teorema 3.1.6 (Teorema degli Zeri). Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Siano $f(a)$ e $f(b)$ discordi. Allora esiste almeno uno zero di f in $[a, b]$, cioè:

$$\exists x_0 \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_0) = 0.$$

Calcoliamo il massimo della funzione $p_{var}(x; J, h)$, ponendo a zero la derivata prima rispetto alla x .

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} p_{var}(x; J, h) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-Jx^2}{2} + \log 2 \cosh(Jx + h) \right).$$

Studiamo l'equazione di punto fisso

$$x = \tanh(Jx + h). \quad (3.1.6)$$

Definiamo $F(x) = \tanh(-Jx + h) - x$ e ne calcoliamo il valore agli estremi di \mathbb{R}_+ :

$$F(0) = \tanh(h) > 0,$$

perchè $h > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(Jx + h) - x = -\infty.$$

Allora, per il Teorema degli Zeri 3.1.6, sappiamo che esiste almeno uno zero per tale funzione. Studiamo la monotonia di F . Osserviamo che

$$F'(x) = \frac{J}{(\cosh(Jx + h))^2} \geq 0,$$

da cui notiamo che F è strettamente crescente, pertanto F ha un unico zero in $[0, +\infty)$. Possiamo quindi concludere che, per $J \geq 0, h > 0$, la funzione $p_{var}(x; J, h)$ ha un unico massimo positivo.

□

3.2 Teorema centrale del limite e Legge dei grandi numeri

Notiamo che se $J = 0$, gli spin σ_i sono variabili dicotomiche indipendenti e identicamente distribuite, quindi valgono sia il teorema del limite centrale che la legge dei grandi numeri, in maniera analoga a quanto visto per il lancio di monete indipendenti in 1.1.12 e 1.1.10. Nel caso in cui $J \neq 0$, le variabili σ_i non sono più indipendenti, essendo un caso di modello interagente. Di conseguenza, le ipotesi dei due teoremi 1.1.10 1.1.12 sono violate. In questa sezione dimostriamo che per opportuni valori dei parametri (J, h) continuano a valere. Lo studio è già stato proposto da R.Ellis e C.Newman nel 1978[12]. In tutte le dimostrazioni utilizziamo un risultato di probabilità che enunciamo:

Lemma 3.2.1 (convergenza in distribuzione). [8] Sia $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$ successione di variabili aleatorie e sia $(\Psi_N(t))_{N \in \mathbb{N}}$ la successione delle corrispondenti funzioni generatrici. Vale:

$$\text{Se } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Psi_N(t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \Psi(t) \Rightarrow X_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} X.$$

3.2.1 TCL e LGN per il modello di Curie-Weiss

Consideriamo dapprima il caso $h = 0$.

Se $J < 1$, abbiamo visto in 3.1.1 che esiste unica la soluzione al problema $\sup_{x \in \mathbb{R}} p_{var}(x)$, che abbiamo mostrato essere $\hat{x} = 0$.

L.G.N

Mostriamo la Legge dei grandi numeri.

Teorema 3.2.2. Se $J < 1$ e $h = 0$, vale

$$m_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \delta_0.$$

Dimostrazione. Per definizione 2.2.4, si ha $m_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i$ e per la 1.1.8, $\Psi_N(t) = \mathbb{E}[e^{tX_N}]$.

Allora, considerando la magnetizzazione rispetto alla misura di Boltzmann-Gibbs, vale:

$$\mathbb{E}[e^{tm_N}] = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \frac{e^{-H_N(\sigma)} e^{tm_N(\sigma)}}{Z_N}. \quad (3.2.1)$$

Per il Teorema 3.2.1 visto prima, sappiamo che se

$$\Psi_N(t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \Psi(t),$$

con $\Psi(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora

$$m_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \delta_0.$$

Dobbiamo quindi studiare $\Psi_N(t)$. Iniziamo con l'approssimazione del denominatore Z_N . Osservando che,

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i \sum_{j=1}^N \sigma_j = \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right)^2,$$

possiamo riscrivere la funzione Hamiltoniana per il modello di Curie-Weiss nel seguente modo:

$$H_N(\sigma) = -\frac{J}{2N} \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right)^2 - h \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (3.2.2)$$

Sostituendo la 3.2.2 nella scrittura di Z_N otteniamo:

$$Z_N = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-H_N(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{\frac{J}{2N}(\sum_{i=1}^N \sigma_i)^2 + h \sum_{i=1}^N \sigma_i}. \quad (3.2.3)$$

Proposizione 3.2.3 (Trasformazione di Hubbard-Stratonovich). Sia G una variabile aleatoria con distribuzione normale di media 0 e varianza a , ovvero $G \sim \mathcal{N}_{0,a}$ vale:

$$\mathbb{E}_G[e^{tG}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2a} + tz} dz = e^{\frac{t^2 a}{2}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.2.4)$$

Dimostrazione.

$$\mathbb{E}_G[e^{tG}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2a} + tz} dz \quad (3.2.5)$$

deriva semplicemente dalla definizione. Calcoliamo l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2a} + tz} dz,$$

grazie al completamento del quadrato. Osserviamo infatti che

$$-\frac{z^2}{2a} + tz = -\frac{z^2}{2a} + tz - \frac{at^2}{2} + \frac{at^2}{2} = -\left(\frac{z}{\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{at^2}{2}.$$

Tornando all'integrale,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2a} + tz} dz &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{at^2}{2}} dz = \\ &= e^{\frac{at^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\right)^2} dz. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Sfruttiamo la sostituzione $\left(\frac{z}{\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow x$, allora la 3.2.6 diventa:

$$e^{\frac{at^2}{2}} \sqrt{2a} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx. \quad (3.2.7)$$

Ricordiamo:

Teorema 3.2.4 (Integrale di Gauss). [4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

e

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

In modo analogo, troviamo anche il valore del secondo integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{Jx^2}{2}+Jx} dx = e^{\frac{J}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Utilizziamo 3.2.4 sull'integrale 3.2.7, troviamo:

$$e^{\frac{at^2}{2}} \sqrt{2a} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = e^{\frac{at^2}{2}} \sqrt{2\pi a}.$$

Dalla 3.2.5 e per quanto appena ottenuto, si ha

$$\mathbb{E}_G[e^{tG}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2a}+tz} dz = e^{\frac{t^2 a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{\frac{at^2}{2}} \sqrt{2\pi a} = e^{\frac{at^2}{2}},$$

da cui si ha la tesi. □

Corollario 3.2.5 (Generalizzazione integrale di Gauss).

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+b} dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Dimostrazione. Per calcolare il valore di tale integrale utilizziamo il metodo del completamento del quadrato. Vale

$$-ax^2 + b = -ax^2 + b + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} = -\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+b} dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 + \frac{b^2}{4a}} dx = \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}})^2} dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{a}} dz = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il cambio di variabile $(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}) \rightarrow z$ e il l'integrale di Gauss 3.2.4. □

Allora, possiamo applicare la Trasformazione di Hubbard-Stratonovich sul termine $e^{\frac{J}{N}(\sum_{i=1}^N \sigma_i)^2}$ di Z_N .

Considerando $Z \sim \mathcal{N}_{0, \frac{J}{N}}$ e $t = (\sum_{i=1}^N \sigma_i)$, troviamo:

$$Z_N = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{h \sum_{i=1}^N \sigma_i} \mathbb{E}_Z[e^{tZ}] =$$

$$= \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{h \sum_{i=1}^N \sigma_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{J}{N}}} \int_{\mathbb{R}} dz e^{-\frac{z^2}{2J/N}} e^{z \sum_{i=1}^N \sigma_i},$$

dove

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{J}{N}}} \int_{\mathbb{R}} dz e^{-\frac{z^2}{2J/N}} e^{tz} = \mathbb{E}_Z[e^{tz}],$$

quindi, scambiando integrale e sommatoria otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Z \left[\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{h \sum_{i=1}^N \sigma_i + z \sum_{i=1}^N \sigma_i} \right] &= \mathbb{E}_Z \left[\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{(h+z) \sum_{i=1}^N \sigma_i} \right] = \\ &= \mathbb{E}_Z \left[\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \prod_{i=1}^N e^{(h+z)\sigma_i} \right] = \mathbb{E}_Z[(2 \cosh(h+z))^N]. \end{aligned}$$

Per quanto mostrato finora, esplicitando il valore atteso con il suo integrale,

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{1}{\sqrt{2 \frac{J}{N} \pi}} \int_{\mathbb{R}} dz e^{-\frac{z^2}{2J/N}} (2 \cosh(h+z))^N = \frac{1}{\sqrt{2 \frac{J}{N} \pi}} \int_{\mathbb{R}} dz e^{-\frac{z^2}{2J}} (2 \cosh(h+z))^N = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \frac{J}{N} \pi}} \int_{\mathbb{R}} dz e^{-\frac{z^2}{2J}} e^{N \log 2 \cosh(h+z)} = \frac{1}{\sqrt{2 \frac{J}{N} \pi}} \int_{\mathbb{R}} dz e^{N[-\frac{z^2}{2J} + \log 2 \cosh(h+z)]}. \end{aligned}$$

Considerando il cambio di variabile $z \rightarrow Jz'$, otteniamo

$$Z_N = \frac{\sqrt{JN}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{N[-\frac{z'^2}{4J} + \log(2 \cosh(h+Jz'))]} dz'. \quad (3.2.8)$$

Notiamo che l'argomento all'esponente della funzione integranda coincide con la formula del principio variazionale 3.1.2. Abbiamo quindi

$$Z_N = \frac{\sqrt{JN}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{N \cdot p_{var}(z'; J, h)} dz'. \quad (3.2.9)$$

Enunciamo il Metodo di Laplace per l'approssimazione degli integrali. Lo dimostriamo in seguito in un caso più generale.

Teorema 3.2.6 (Metodo di Laplace). Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $f(x)$ una funzione di classe C^2 su $[a, b]$ tale che ammetta un unico massimo globale, sia $N \in \mathbb{R}$. Chiamiamo x_0 tale massimo. Supponiamo inoltre che $f''(x_0) < 0$. Allora,

$$\int_a^b e^{Nf(x)} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-Nf''(x_0)}} e^{Nf(x_0)},$$

e in particolare,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b e^{Nf(x)} dx}{e^{Nf(x_0)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{-Nf''(x_0)}}. \quad (3.2.10)$$

Analogamente, approssimiamo anche il numeratore di 3.2.1. Definiamo

$$B_N := e^{-H_N(\sigma)} e^{tm_N(\sigma)} \quad (3.2.11)$$

e ne cerchiamo un'approssimazione. Esattamente con i calcoli fatti per il denominatore, la 3.2.11 diventa:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-H_N(\sigma)} e^{tm_N(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{-H_N(\sigma) + tm_N(\sigma)} = \\ & = \mathbb{E}_Z \left[\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{h \sum_{i=1}^N \sigma_i + \frac{t}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i} \right] = \mathbb{E}_Z \left[\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{(h + \frac{t}{N}) \sum_{i=1}^N \sigma_i} \right] = \\ & \mathbb{E}_Z \left[\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \prod_{i=1}^N e^{(h + \frac{t}{N}) \sigma_i} \right] = \mathbb{E}_Z \left[(2 \cosh(h + \frac{t}{N}))^N \right]. \end{aligned}$$

Esplicitando il valore atteso con il suo integrale, otteniamo:

$$\begin{aligned} B_N &= \frac{1}{\sqrt{2 \frac{J}{N} \pi}} \int_{\mathbb{R}} dz e^{-\frac{z^2}{2J/N}} (2 \cosh(h + \frac{t}{N}))^N = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \frac{J}{N} \pi}} \int_{\mathbb{R}} dz e^{N[-\frac{z^2}{2J} + \log 2 \cosh(h + \frac{t}{N})]}. \end{aligned}$$

Con il cambio variabile $z \rightarrow Jz'$, si ha, analogamente a quanto visto in 3.2.9,

$$B_N = \frac{\sqrt{JN}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{N \cdot p_{var}(z'; J, h + \frac{t}{N})} dz'. \quad (3.2.12)$$

Tornando alla scrittura di 3.2.1, dopo aver trovato un'approssimazione di numeratore e denominatore, e ricordando la definizione di funzione generatrice 1.1.8:

$$\Psi_N(t) = \frac{\frac{\sqrt{JN}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dz' e^{N \cdot p_{var}(z'; J, h + \frac{t}{N})}}{\frac{\sqrt{JN}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dz' e^{N \cdot p_{var}(z'; J, h)}} = \frac{\int_{\mathbb{R}} dz' e^{N \cdot p_{var}(z'; J, h + \frac{t}{N})}}{\int_{\mathbb{R}} dz' e^{N \cdot p_{var}(z'; J, h)}}. \quad (3.2.13)$$

Applichiamo ora il Teorema di Convergenza della funzione generatrice 3.2.1, dobbiamo quindi mostrare $\Psi_N(t)$ in 3.2.13 converge in distribuzione a $\Psi(t)$. Nel nostro caso $\Psi(t)$ è la funzione caratteristica associata a una variabile aleatoria con distribuzione δ_0 . Ne sappiamo calcolare il valore, infatti se $X \sim \delta_0$,

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = 1, \quad \forall t.$$

Calcoliamo il limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N(t)$ e verifichiamo che il suo valore sia effettivamente 1.

Osservazione 3.2.7. Definendo $f_N(x) := -\frac{Jx^2}{2} + \log 2 \cosh(Jx + \frac{t}{N})$ e $f(x) := -\frac{Jx^2}{2} + \log 2 \cosh(Jx)$, osserviamo che la funzione $\log 2 \cosh(x)$ ha tutte le derivate limitate, infatti

$$\frac{\partial \log 2 \cosh(x)}{\partial x} = \tanh(x) \in (-1, 1),$$

$$\frac{\partial^2 \log 2 \cosh(x)}{\partial x^2} = (\operatorname{sech}(x))^2 = 1 - \tanh^2(x) \in (0, 2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \log 2 \cosh(x)}{\partial x^3} &= -2 \tanh(x) (\operatorname{sech}(x))^2 = \\ &= -2 \tanh(x) (1 - \tanh^2(x)) \in (-1, 1), \end{aligned}$$

e così via.

Sviluppiamo ora $f_N(x)$ intorno a $t/N = 0$.

$$f_N(x) = f(x) + \frac{t}{N} \tanh(Jx) + O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

dove

$$O\left(\frac{1}{N^2}\right) = (1 - \tanh^2(Jx + t^*)) \frac{t^2}{N^2} \quad \text{con } t^* \in (0, \frac{t}{N}).$$

Lemma 3.2.8. Sia $f_N(x) = f(x) + \frac{t}{N} \tanh(Jx)$ e sia $\tilde{f}_N(x) = f(x) + \frac{t}{N} \tanh(Jx)$ lo sviluppo di $f_N(x)$ intorno a $t/N = 0$. Vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{Nf_N(x)} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{N\tilde{f}_N(x)} dx.$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$\begin{aligned} & |f_N(x) - \tilde{f}_N(x)| = \\ & = \left| f(x) + \frac{t}{N} \tanh(Jx) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) - f(x) + \frac{t}{N} \tanh(Jx) \right| = \left| O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right|, \end{aligned}$$

allora esiste $C > 0$, $C \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f_N(x) - \tilde{f}_N(x)| \leq \frac{C}{N^2}. \quad (3.2.14)$$

Maggioriamo e minoriamo $\int_{\mathbb{R}} e^{Nf_N(x)} dx$ utilizzando la 3.2.14:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{Nf_N(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{N[f_N(x) + \tilde{f}_N(x) - \tilde{f}_N(x)]} dx.$$

Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} e^{N[f_N(x) + \tilde{f}_N(x) - \tilde{f}_N(x)]} dx \leq e^{N\frac{C}{N^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{N\tilde{f}_N(x)} dx.$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{N[f_N(x) + \tilde{f}_N(x) - \tilde{f}_N(x)]} dx \geq e^{-N\frac{C}{N^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{N\tilde{f}_N(x)} dx.$$

Utilizziamo il teorema dei due carabinieri per concludere. Osservando che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{N\frac{C}{N^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{N\tilde{f}_N(x)} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{N\tilde{f}_N(x)} dx,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-N\frac{C}{N^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{N\tilde{f}_N(x)} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{N\tilde{f}_N(x)} dx,$$

si ha la tesi. □

Tornando a 3.2.13, abbiamo

$$\Psi_N(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{N \cdot p_{var}(z'; J, h + \frac{t}{N})}}{\int_{\mathbb{R}} e^{N \cdot p_{var}(z'; J, h)}}.$$

Definendo

$$f_N(x) := p_{var}\left(x; J, \frac{t}{N}\right),$$

$$f(x) := p_{var}(x; J),$$

diventa

$$\Psi_N(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{Nf_N(x)} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{Nf(x)} dx}.$$

Ne calcoliamo il limite e applichiamo il Lemma appena dimostrato 3.2.8.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{Nf_N(x)} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{Nf(x)} dx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{N[f(x) + \frac{t}{N} \tanh(Jx)]} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{Nf(x)} dx}.$$

Sapendo che $x = 0$ è l'unico massimo globale per $f(x)$ e vale $f''(0) < 0$, utilizziamo ora il metodo di Laplace 3.2.10, da cui

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{Nf(0)} e^{t \tanh(0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-Nf''(0)}}}{e^{Nf(0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-Nf''(0)}}} = 1 \quad (3.2.15)$$

Abbiamo quindi provato che

$$m_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \delta_0.$$

□

In maniera analoga è possibile dimostrare

Teorema 3.2.9. Nel caso in cui $J \in \mathbb{R}$, $h > 0$, vale

$$m_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \delta_{\hat{x}},$$

dove definiamo

$$g_N(x) := p_{\text{var}}(x; J, h + \frac{t}{N}),$$

$$g(x) := p_{\text{var}}(x; J, h),$$

e \hat{x} è l'unico massimo globale per $g(x)$ trovato in 3.1.1.

Dimostrazione. In questo caso dovremo quindi mostrare

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} e^{tm_N} = e^{t\hat{x}}.$$

Con gli stessi calcoli del caso $J < 1$, $h = 0$, vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{Ng(\hat{x})} e^{t \tanh(J\hat{x}+h)} \sqrt{\frac{2\pi}{-Ng''(\hat{x})}}}{e^{Ng(\hat{x})} \sqrt{\frac{2\pi}{-Nf''(\hat{x})}}}. \quad (3.2.16)$$

Essendo \hat{x} soluzione dell'equazione di punto fisso $x = \tanh(Jx+h)$, il fattore $e^{t \tanh(J\hat{x}+h)}$ può essere sostituito con $e^{t\hat{x}}$. Allora la 3.2.16 diventa:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N(t) = e^{t \tanh(J\hat{x}+h)} = e^{t\hat{x}}, \quad (3.2.17)$$

abbiamo quindi dimostrato 3.2.9.

T.C.L.

Ricordiamo:

Definizione 3.2.10 (Convergenza uniforme). Sia X un insieme in \mathbb{R} , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente ad f se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}.$$

Teorema 3.2.11 (Generalizzazione Metodo di Laplace). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avente un unico massimo globale \hat{x} con $f''(\hat{x}) < 0$ e sia $\{g_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , con $g_N^{(k)} \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$ uniformemente in x , per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$. Se $f, g_N \in C^2(\mathbb{R})$ e $\limsup_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{f(x)+g_N(x)} dx < \infty$,

allora

$$\int_{\mathbb{R}} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx \sim e^{N[f(\hat{x})+g_N(\hat{x})+\frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{-2(f''(\hat{x}))}]} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x}))}}$$

Dimostrazione. Sviluppiamo f e g_N intorno a \hat{x} :

$$f(x) = f(\hat{x}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - \hat{x})^2 \quad \xi \in (x, \hat{x}),$$

$$g_N(x) = g_N(\hat{x}) + g'_N(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{g''_N(\tilde{\xi})}{2}(x - \hat{x})^2 \quad \tilde{\xi} \in (x, \hat{x}).$$

Osserviamo che, essendo \hat{x} massimo per f , il suo sviluppo non presenta il termine al primo ordine. Per la convergenza di g_N'' si ha:

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists N_{\varepsilon_1} \text{ t.c. } |g_n''(x)| < \varepsilon_1, \quad \forall n > N_{\varepsilon_1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Per ipotesi $f''(\hat{x}) < 0$, allora per continuità si ha:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon \text{ t.c. } |f''(x) - f''(\hat{x})| < \varepsilon, \quad \forall x \in B(\hat{x}, \delta_\varepsilon).$$

Per ogni $x \in B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)$, definendo $\varepsilon_2 := \varepsilon + \varepsilon_1$

$$f(x) + g_N(x) = \begin{cases} \leq f(\hat{x}) + g_N(\hat{x}) + g'_N(\hat{x})(x - \hat{x}) + (f''(\hat{x}) + \varepsilon_2) \frac{(x - \hat{x})^2}{2} \\ \geq f(\hat{x}) + g_N(\hat{x}) + g'_N(\hat{x})(x - \hat{x}) + (f''(\hat{x}) - \varepsilon_2) \frac{(x - \hat{x})^2}{2} \end{cases}. \quad (3.2.18)$$

Spezziamo l'integrale nel modo seguente:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{N[f(x) + g_N(x)]} dx = \int_{B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N[f(x) + g_N(x)]} dx + \int_{\mathbb{R} \setminus B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N[f(x) + g_N(x)]} dx. \quad (3.2.19)$$

Iniziamo approssimando il primo integrale di 3.2.19, utilizzando 3.2.18.

$$\begin{aligned} \int_{B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N[f(x) + g_N(x)]} dx &\leq \int_{B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N[f(\hat{x}) + g_N(\hat{x}) + g'_N(\hat{x})(x - \hat{x}) + (f''(\hat{x}) + \varepsilon_2) \frac{(x - \hat{x})^2}{2}]} dx = \\ &\leq e^{N[f(\hat{x}) + g_N(\hat{x})]} \int_{\mathbb{R}} e^{N[g'_N(\hat{x})(x - \hat{x}) + (f''(\hat{x}) + \varepsilon_2) \frac{(x - \hat{x})^2}{2}]} dx. \end{aligned}$$

Per risolvere l'integrale utilizziamo la generalizzazione dell'integrale di Gauss 3.2.5 con

$$a := -\frac{N(f''(\hat{x}) + \varepsilon_2)}{2}, \quad b := Ng'_N(\hat{x}).$$

Si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{N[g'_N(\hat{x})(x - \hat{x}) + (f''(\hat{x}) + \varepsilon_2) \frac{(x - \hat{x})^2}{2}]} dx = e^{\frac{N^2(g'_N(\hat{x}))^2}{-2N(f''(\hat{x}) + \varepsilon_2)}} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x}) + \varepsilon_2)}},$$

da cui

$$\int_{B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N[f(x) + g_N(x)]} dx \leq e^{N[f(\hat{x}) + g_N(\hat{x}) + \frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{-2(f''(\hat{x}) + \varepsilon_2)}]} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x}) + \varepsilon_2)}}. \quad (3.2.20)$$

Allo stesso modo, possiamo approssimare l'integrale con la minorazione di 3.2.18, e otteniamo

$$\int_{B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx \geq e^{N[f(\hat{x})+g_N(\hat{x})]} \int_{B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N\left[g'_N(\hat{x})(x-\hat{x})+(f''(\hat{x})-\varepsilon_2)\frac{(x-\hat{x})^2}{2}\right]} \quad (3.2.21)$$

Completando il quadrato all'esponente e con un cambio di variabile, e definendo

$$y_N := \frac{\sqrt{N}g'_N(\hat{x})}{\sqrt{f''(\hat{x}) - \varepsilon_2}},$$

$$r_N := \frac{\sqrt{N}\delta_\varepsilon}{\sqrt{f''(\hat{x}) - \varepsilon_2}},$$

si ottiene

$$\int_{B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N\left[g'_N(\hat{x})(x-\hat{x})+(f''(\hat{x})-\varepsilon_2)\frac{(x-\hat{x})^2}{2}\right]} = e^{\frac{-N(g'_N(\hat{x}))^2}{2(f''(\hat{x})-\varepsilon_2)}} \frac{1}{\sqrt{N(f''(\hat{x}) - \varepsilon_2)}} \int_{B(y_N, r_N)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (3.2.22)$$

Usando il seguente

Lemma 3.2.12 (Stima delle code di una Gaussiana). Sia $u \in \mathbb{R}_+$.

$$\int_u^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2u} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Dimostrazione.

$$\int_u^\infty e^{-z^2} dz \leq \int_u^\infty \frac{z}{u} e^{-z^2} dz = \left[-\frac{1}{2u} e^{-z^2}\right]_u^\infty = \frac{1}{2u} e^{-u^2}$$

□

e il fatto che che per N sufficientemente grande $r_N - y_N > 0$ si può mostrare

$$A_N := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R} \setminus B(y_N, r_N)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0, \quad (3.2.23)$$

e quindi

$$\int_{B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx \geq e^{N[f(\hat{x})+g_N(\hat{x})+\frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{-2(f''(\hat{x})-\varepsilon_2)}]} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x})-\varepsilon_2)}} (1-A_N). \quad (3.2.24)$$

Controlliamo ora il secondo integrale di 3.2.19

$$\int_{\mathbb{R} \setminus B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx.$$

Mostriamo che esistono $\eta > 0$, \hat{N} tali che

$$f(x) + g_N(x) < f(\hat{x}) + g_N(\hat{x}) - \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus B(\hat{x}, \delta_\varepsilon), \quad \forall N > \hat{N}.$$

Poichè \hat{x} è l'unico massimo globale di f esiste $\varepsilon_1 > 0$ sufficientemente piccolo per cui $f(x) < f(\hat{x}) - \varepsilon_1$. Inoltre $g_N(x) \rightarrow 0$ implica che posso scegliere $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ in modo che esiste \hat{N} tale che se $N > \hat{N}$ allora $|g_N(x) - g_N(\hat{x})| \leq \varepsilon_2$. Definendo $\eta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 > 0$ si ottiene che $f(x) + g_N(x) < f(\hat{x}) + g_N(\hat{x}) - \eta$. Per quanto appena mostrato, per ogni N sufficientemente grande si ha :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx &= \int_{\mathbb{R} \setminus B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{(N-1)(f(x)+g_N(x))} e^{f(x)+g_N(x)} dx \leq \\ &\leq e^{(N-1)(f(\hat{x})+g_N(\hat{x})-\eta)} \int_{\mathbb{R}} e^{f(x)+g_N(x)} dx. \end{aligned}$$

Inoltre, per l'ipotesi $\limsup_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{f(x)+g_N(x)} dx < \infty$, sappiamo che esiste $M > 0$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{f(x)+g_N(x)} dx < M.$$

Otteniamo quindi,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus B(\hat{x}, \delta_\varepsilon)} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx \leq M e^{(N-1)(f(\hat{x})+g_N(\hat{x})-\eta)}. \quad (3.2.25)$$

Tornando all'integrale in 3.2.19 e utilizzando 3.2.25, 3.2.24 3.2.21, per sappiamo quindi che per N sufficientemente grande

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx}{e^{N(f(\hat{x})+g_N(\hat{x})+\frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{-2(f''(\hat{x}))})} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x}))}}} &\leq \sqrt{\frac{f''(\hat{x})}{f''(\hat{x}) + \varepsilon_2}} + \\ &+ M \sqrt{\frac{-N f''(\hat{x})}{2\pi}} e^{N[-\eta + \frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{2(f''(\hat{x}))}]}. \end{aligned}$$

Poichè per ipotesi $g'_N(x) \rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$ vale:

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx}{e^{N\left[f(\hat{x})+g_N(\hat{x})+\frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{-2(f''(\hat{x}))}\right]} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x}))}}} \leq \sqrt{\frac{f''(\hat{x})}{f''(\hat{x}) + \varepsilon_2}} \quad (3.2.26)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx}{e^{N\left[f(\hat{x})+g_N(\hat{x})+\frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{-2(f''(\hat{x}))}\right]} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x}))}}} &\geq \sqrt{\frac{f''(\hat{x})}{f''(\hat{x}) - \varepsilon_2}} (1 - A_N) + \\ &- M \sqrt{\frac{-N f''(\hat{x})}{2\pi}} e^{N[-\eta + \frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{2(f''(\hat{x}))}]}, \end{aligned}$$

da cui

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx}{e^{N\left[f(\hat{x})+g_N(\hat{x})+\frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{-2(f''(\hat{x}))}\right]} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x}))}}} \geq \sqrt{\frac{f''(\hat{x})}{f''(\hat{x}) - \varepsilon_2}}. \quad (3.2.27)$$

Per $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, utilizzando il Teorema dei due carabinieri, si ha:

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx}{e^{N\left[f(\hat{x})+g_N(\hat{x})+\frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{-2(f''(\hat{x}))}\right]} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x}))}}} \rightarrow_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{f''(\hat{x})}{f''(\hat{x})}} = 1, \quad (3.2.28)$$

quindi abbiamo provato la tesi. \square

Ricordiamo che (J, h) sono tali che $p_{var}(x)$ ha un unico massimo globale se $(J < 1, h = 0)$, dove tale massimo è $\hat{x} = 0$ oppure $(J \geq 0, h > 0)$, dove tale massimo è \hat{x} .

Teorema 3.2.13. Se $(J < 1, h = 0)$ o $(J \geq 0, h > 0)$, esiste $\chi > 0$ tale che

$$\sqrt{N}(m_N - \hat{x}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \chi).$$

Per provare la tesi di 3.2.13, verifichiamo la convergenza della funzione generatrice. Sappiamo che, per 3.2.1, tale condizione è sufficiente per assicurare la convergenza delle variabili aleatorie.

Verifichiamo quindi

$$\mathbb{E}[e^{\sqrt{N}t(m_N - \hat{x})}] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} e^{\frac{t^2}{2\chi}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo

$$\mathbb{E}[e^{\sqrt{N}t(m_N - \hat{x})}] = e^{-\sqrt{N}t\hat{x}} \mathbb{E}[e^{\sqrt{N}tm_N}]. \quad (3.2.29)$$

Per quanto visto in 3.2.1, vale

$$\mathbb{E}[e^{tm_N}] = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{N \cdot p_{\text{var}}(x; J, h + \frac{t}{N})} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{N \cdot p_{\text{var}}(x; J, h)} dx},$$

da cui

$$\mathbb{E}[e^{\sqrt{N}tm_N}] = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{N \cdot p_{\text{var}}(x; J, h + \frac{t}{\sqrt{N}})} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{N \cdot p_{\text{var}}(x; J, h)} dx}$$

Per approssimare l'integrale a numeratore utilizziamo la generalizzazione del metodo di Laplace 3.2.11. Conosciamo

$$p_{\text{var}}(x; J, h + \frac{t}{\sqrt{N}}) := -\frac{Jx^2}{2} + \log 2 \cosh(Jx + h + \frac{t}{\sqrt{N}}),$$

sviluppiamo tale funzione intorno a $\frac{t}{\sqrt{N}} = 0$:

$$\begin{aligned} p_{\text{var}}(x; J, h + \frac{t}{\sqrt{N}}) &:= -\frac{Jx^2}{2} + \log 2 \cosh(Jx + h) + \frac{t}{\sqrt{N}} \tanh(Jx + h) + \\ &\quad + \frac{t^2}{2N} (1 - \tanh^2(Jx + h)) + O(N^{-\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

Definendo

$$f(x) := p_{\text{var}}(x; J, h)$$

e

$$g_N(x) := \frac{t}{\sqrt{N}} \tanh(Jx + h) + \frac{t^2}{2N} (1 - \tanh^2(Jx + h)) + O(N^{-\frac{3}{2}}),$$

osserviamo che, se $x = \hat{x}$, ovvero $\tanh(J\hat{x} + h) = \hat{x}$, si ha

$$g_N(\hat{x}) := \frac{t}{\sqrt{N}} \hat{x} + \frac{t^2}{2N} (1 - \hat{x}^2) + O(N^{-\frac{3}{2}}).$$

Calcoliamo la derivata prima di $g_N(x)$ per poter applicare il teorema 3.2.11.

$$g'_N(x) = J \frac{t}{\sqrt{N}} (1 - \tanh^2(Jx + h)) + O(N^{-1}),$$

che in \hat{x} risulta

$$g'_N(\hat{x}) = J \frac{t}{\sqrt{N}} (1 - \hat{x}^2) + O(N^{-1}).$$

Possiamo utilizzare Laplace generalizzato 3.2.11 sul numeratore, lo sviluppo di $p_{var}(x; J, h + \frac{t}{\sqrt{N}})$ e Laplace standard 3.2.10 sul denominatore per ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{N[f(x)+g_N(x)]} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{Nf(x)} dx} &\sim \frac{e^{N[f(\hat{x})+g_N(\hat{x})+\frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{-2(f''(\hat{x}))}]} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x}))}}}{e^{N[f(\hat{x})]} \sqrt{\frac{2\pi}{-N(f''(\hat{x}))}}} = \\ &= e^{N[f(\hat{x})-\frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{2(f''(\hat{x}))}]}. \end{aligned}$$

Tornando alla scrittura della funzione generatrice con il valore atteso, 3.2.29

$$\mathbb{E}[e^{\sqrt{N}t(m_N-\hat{x})}] = e^{N[f(\hat{x})-\frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{2(f''(\hat{x}))}]-t\sqrt{N}\hat{x}}. \quad (3.2.30)$$

Consideriamo solo l'esponente

$$N[f(\hat{x}) - \frac{(g'_N(\hat{x}))^2}{2(f''(\hat{x}))}] - t\sqrt{N}\hat{x},$$

utilizzando lo sviluppo di g_N calcolato in \hat{x} , si trova

$$\begin{aligned} N \frac{t}{\sqrt{N}} \hat{x} + N \frac{t^2}{2N} (1 - \hat{x}^2) - t\sqrt{N}\hat{x} - \frac{(Ng'_N(\hat{x}))^2}{2(f''(\hat{x}))} &= \\ &= N \frac{t^2}{2N} (1 - \hat{x}^2) - \frac{(Ng'_N(\hat{x}))^2}{2(f''(\hat{x}))}. \end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare g'_N e f'' nel punto \hat{x} . Sappiamo:

$$f'(x) = p'_{var}(x) = -Jx + J \tanh(Jx + h),$$

$$p''_{var}(x) = -J + J^2(1 - \tanh^2(x)),$$

da cui se $x = \hat{x}$, ovvero $\tanh(J\hat{x} + h) = \hat{x}$, otteniamo

$$p''_{var}(\hat{x}) = J(-1 + J(1 - (\hat{x})^2)). \quad (3.2.31)$$

In definitiva, si trova il limite della 3.2.30:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{\sqrt{N}t(m_N - \hat{x})}] &= e^{\frac{t^2}{2}(1 - (\hat{x})^2) - \frac{t^2 J^2 (1 - (\hat{x}^2))^2}{2J(-1 + J(1 - (\hat{x}^2)))}} = \\ &= e^{\frac{t^2}{2} \left(\frac{(1 - J(1 - \hat{x}^2))(1 - \hat{x}^2) - J(1 - \hat{x}^2)^2}{-1 + J(1 - \hat{x}^2)} \right)} \\ &= e^{\frac{t^2}{2} \left(\frac{1 - \hat{x}^2}{1 - J(1 - \hat{x}^2)} \right)}, \end{aligned}$$

da cui, per 3.2.13, con

$$\chi := \frac{1 - J(1 - \hat{x}^2)}{(1 - \hat{x}^2)}, \quad (3.2.32)$$

si ha la tesi. Abbiamo quindi mostrato 3.2.13

$$\mathbb{E}[e^{\sqrt{N}t(m_N - \hat{x})}] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} e^{\frac{t^2}{2\chi}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Bibliografia

- [1] A.Pascucci, Teoria della Probabilità, Springer, 2020.
- [2] E.Lanconelli, Lezioni di analisi matematica 1, Pitagora, 1994.
- [3] E.Lanconelli, Lezioni di analisi matematica 2, vol.1, Pitagora, 2023.
- [4] N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Lezioni di analisi matematica 2, Zanichelli, 2020.
- [5] A.Bovier, Statistical Mechanics of Disordered Systems, Cambridge, 2006.
- [6] S.Friedli, Y.Velenik, Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction, CUP, 2017
- [7] D.Alberici, P.Contucci, M.Fedele, E.Mingione, Limit theorems for monomer-dimer mean-field models with attractive potential Commun. Math. Phys. 346, 781 – 799 (2016). <https://doi.org/10.1007/s00220-015-2543-1>
- [8] Xi Geng, The Mathematical Theory of Moment Generating Functions, <https://researchers.ms.unimelb.edu.au/~xgge@unimelb/Files/Notes>
- [9] Patrick Billingsley, Convergence of Probability Measures, Wiley-Interscience, 1999
- [10] Michel Talagrand, Spin Glasses: A Challenge for Mathematicians, Springer Berlin, 2003

- [11] Note del corso di Meccanica Statistica, P. Contucci
- [12] R.Ellis, C.Newman, The statistics of Curie-Weiss models. J Stat Phys 19, 149 – 161 (1978). <https://doi.org/10.1007/BF01012508>