

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Energetica

TESI DI LAUREA

in

Tecniche di Modellistica e Simulazione per l'Energetica

**Controllo ottimale mediante regolarizzazione frazionaria e funzione
di lifting per l'equazione di conduzione del calore nei solidi**

Candidato:

MARCO BARBIERI

Relatore:

Prof. Ing. SANDRO MANSERVISI

Correlatori:

Prof. Ing. GIORGIO BORNIA

Prof. Ing. ANTONIO CERVONE

Dott. Ing. GIACOMO BARBI

Dott. Ing. ANDREA CHIERICI

Anno Accademico 2022/2023

III Sessione

Indice

Introduzione	7
1 Introduzione agli elementi finiti	9
1.1 Le equazioni differenziali e il Laplaciano	9
1.2 Dalla forma forte alla forma debole	11
1.3 Il metodo di Galerkin	12
1.4 Il metodo agli elementi finiti	15
1.4.1 Verso il sistema lineare	26
1.4.2 Integrazione numerica, il metodo di Gauss	27
1.4.3 Differenziazione numerica	30
1.4.4 Il sistema algebrico lineare	31
1.4.5 Condizioni al contorno	33
1.5 Problemi multidimensionali	35
1.5.1 Il caso 2D	36
1.5.2 Il caso 3D	41
2 Il modello frazionario	45
2.1 Introduzione allo spazio frazionario di Sobolev	46
2.1.1 Il Laplaciano frazionario	48
2.1.2 Operatori non locali	49
2.2 Soluzione numerica del Laplaciano frazionario di Riesz	51
2.2.1 Il Laplaciano frazionario di Riesz	52

2.2.2	Approssimazione agli elementi finiti del metodo di Riesz	54
3	Il Controllo Ottimale	65
3.1	Formulazione del problema del controllo	67
3.1.1	Il funzionale $G(q)$	70
3.2	Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange	74
3.2.1	Formulazione matematica	74
3.2.2	Il sistema del controllo ottimale	78
3.3	Controllo ottimale con regolarizzazione in $H^1(\Gamma_c)$	82
3.4	Controllo ottimale con regolarizzazione $H^{1/2}(\Gamma_c)$	89
3.5	La funzione di lifting nei problemi di controllo ottimale	92
4	Risultati Numerici	101
4.1	Risultati numerici: dominio bidimensionale	102
4.1.1	Ottimizzazione del gradiente	106
4.1.2	Miglioramento delle prestazioni del controllo	110
4.2	Risultati numerici: dominio tridimensionale	121
4.2.1	Ottimizzazione del gradiente	126
4.2.2	Soluzioni analitiche e numeriche del Laplaciano di Riesz	129
	Conclusioni	133
	Appendice A	137
A.1	Concetti di base: gruppi, campi, spazi vettoriali, funzionali	138
A.1.1	Gruppi e Campi	138
A.1.2	Spazi vettoriali	139
A.1.3	Mappatura lineare	140
A.2	Spazi funzionali	142
A.2.1	Spazi normati e con prodotto scalare	142
A.2.2	Spazio delle funzioni continue: C^k	144
A.2.3	Spazio delle funzioni misurabili: L^p	145

A.2.4 Spazio delle funzioni differenziabili o di Sobolev	145
A.3 I moltiplicatori di Lagrange	147
Lista delle figure	155
Lista delle tabelle	159

Introduzione

La possibilità di modificare alcuni parametri termici di un sistema è sempre stato un obiettivo di elevato interesse e argomento di ricerca nell'ingegneria. Si pensi ad esempio a sistemi come impianti di refrigerazione, o materiali sottoposti a condizioni critiche, in cui il mantenimento dell'ambiente a una stabilita temperatura, o al di sotto di determinati valori critici, è essenziale per il corretto funzionamento dell'impianto. Il controllo può essere attuato sfruttando alcuni parametri manipolabili come la temperatura sul contorno, sorgenti di calore interne o la geometria del dominio stesso. L'intervento sul sistema viene poi attuato a seguito dell'analisi sui costi e benefici che tale esercizio comporta. Storicamente la configurazione ottimale è stata ricavata a seguito di campagne sperimentali, in cui si realizza un modello in scala ridotta del sistema per simulare le possibili configurazioni di ottimo individuate. Tale procedura tuttavia è caratterizzata da tempi e costi estremamente elevati, di conseguenza, altre strade sono state intraprese per rispondere a queste specifiche richieste. I recenti sviluppi nell'ambito della modellistica e della simulazione numerica hanno introdotto nuove strategie per la risoluzione di questi problemi. Mediante la creazione di modelli fisico-matematici, in grado di inglobare tutte le caratteristiche e i comportamenti del sistema studiato, è stato possibile sviluppare codici numerici per simulare i prototipi precedentemente descritti in tempi e costi nettamente ridotti. Tuttavia, entrambi questi approcci hanno in comune la limitatezza di indagare solo un esiguo numero di configurazioni, candidate a essere la migliore ottimizzazione del sistema. Un'ulteriore tecnica di ottimizzazione è fornita dalla teoria del controllo. Essa fornisce un metodo che, basandosi su solide teorie matematiche, permette di ricavare la configurazione ottimale in assoluto e non la migliore tra un ridotto insieme di ipotetiche soluzioni. Il prezzo da pagare per poter sfruttare un procedimento matematico, è dato dai complessi modelli e vincoli teorici che questa

teoria comporta. Infatti, nei problemi da noi studiati risulta che il campo di temperatura da applicare al contorno, per ottenere le prestazioni ottimali, deve appartenere allo spazio frazionario di Sobolev. Questo ambiente risulta estremamente complesso da manipolare e vincolare le funzioni ad appartenere in esso è una sfida tutt'ora aperta nella comunità scientifica.

In questo lavoro di tesi strategie di ottimizzazione delle prestazioni termodinamiche dei sistemi solidi vengono analizzate secondo la teoria del controllo. Nel capitolo 1 viene svolta un'introduzione sul Metodo degli Elementi Finiti (FEM). A partire dalle basi dell'analisi funzionale e dei concetti di forma forte e debole, si forniscono strumenti per la risoluzione numerica delle equazioni alle derivate parziali (PDE). In particolare, attraverso l'utilizzo delle basi più comunemente usate per la discretizzazione dei sistemi e i metodi di derivazione e integrazione numerica, si fornisce il procedimento per risolvere l'equazione del calore in qualsiasi dimensione spaziale. Nel capitolo 2 lo spazio frazionario di Sobolev viene introdotto assieme alle norme e proprietà che lo definiscono. Si passa dunque a introdurre l'operatore Laplaciano e il suo legame con gli operatori non locali. Infine, sono analizzate tecniche analitiche e semi-analitiche per la soluzione del Laplaciano frazionario di Riesz. Il capitolo 3 è dedicato all'esposizione del problema del controllo sul contorno. Il metodo risolutivo mediante i moltiplicatori di Lagrange viene sviluppato al fine di ottenere il sistema del controllo formato dall'equazione di stato, aggiunta e del controllo. Il problema così definito è quindi risolto mediante tre metodi di regolarizzazione della soluzione. Il primo, nonostante la sua semplicità matematica, fornisce soluzioni in uno spazio ristretto rispetto quello richiesto dalla teoria del controllo. Il secondo aumenta il campo di indagine introducendo l'operatore Laplaciano frazionario e le complessità che esso comporta. Infine, tramite l'estensione del controllo col metodo della funzione di lifting si è in grado di sviluppare una strategia che possieda tutti i vantaggi degli approcci precedenti. Nel capitolo 4 sono esposti i risultati numerici forniti dal problema di ottimizzazione studiato per tutti i metodi di regolarizzazione forniti. Infine le formule analitiche esposte nel capitolo 2 vengono applicate al problema del controllo analizzato al fine di stabilirne la validità. Tutti i modelli e le soluzioni esposte sono state sviluppate in collaborazione con la Texas Tech University e i risultati forniti nell'ultimo capitolo sono stati ricavati utilizzando il codice agli elementi finiti FeMTTU.

Capitolo 1

Introduzione agli elementi finiti

1.1 Le equazioni differenziali e il Laplaciano

La maggior parte dei fenomeni fisici per applicazioni ingegneristiche, come ad esempio la trasmissione del calore o il moto dei fluidi, sono governati e descritti da equazioni differenziali. Si definisce equazione differenziale alle derivate parziali (PDEs) un'equazione contenente le derivate della funzione incognita rispetto a un set di variabili indipendenti, come ad esempio le tre coordinate spaziali e il tempo. Indicando con u la funzione incognita, con \mathbf{x} il vettore delle n componenti dello spazio $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e con t il tempo, allora una generica PDE può essere scritta nella seguente forma

$$F(D^k u(\mathbf{x}), D^{k-1} u(\mathbf{x}), \dots, Du(\mathbf{x}), u, \mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.1)$$

Si definisce k l'ordine dell'equazione differenziale, ossia il grado massimo di derivazione rispetto a una delle variabili indipendenti. Siano a_α e f due funzioni note, l'equazione (1.1) viene detta

1. *lineare* se dipende linearmente dall'incognita u e dalle sue derivate

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}, t) D^\alpha u = f(\mathbf{x}, t),$$

2. *semi-lineare* se la linearità è rispettata solamente per le derivate di grado massimo

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}, t) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u(\mathbf{x}), \dots, Du(\mathbf{x}), u, \mathbf{x}, t) = 0,$$

3. *quasi-lineare* se l'unica caratteristica lineare è data dal termine di differenziazione massimo

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(\mathbf{x}), \dots, Du(\mathbf{x}), u, \mathbf{x}, t)D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u(\mathbf{x}), \dots, Du(\mathbf{x}), u, \mathbf{x}, t) = 0,$$

4. *completamente non lineare* se non è presente alcuna caratteristica lineare.

Un caso particolare di PDE si ha quando non compaiono termini indipendenti dalla variabile incognita u : queste equazioni vengono dette *omogenee*. Per comprendere le proprietà del sistema e le caratteristiche che deve avere la soluzione per risolvere una determinata PDE, si fornisce la definizione informale di un problema ben posto.

Definizione 1.1 *Si dice che un dato problema differenziale è ben posto se*

1. *esiste una soluzione,*
2. *la soluzione è unica,*
3. *la soluzione dipende con continuità dai dati del problema.*

Una funzione u è soluzione del problema se, sostituita nell'equazione (1.1), porta ad una relazione di identità. L'unicità della soluzione, invece, è data imponendo ulteriori vincoli che la funzione incognita deve verificare. Queste condizioni sono date dalle condizioni al contorno, o dalle condizioni di limite nel caso di dominio infinito. Le classiche condizioni al contorno utilizzate per trovare le soluzioni delle PDE vengono chiamate: *condizione di Dirichlet*, *condizione di Neuman* e *condizione di Robin*. Queste impongono l'uguaglianza, rispettivamente, tra il valore della funzione incognita, il suo gradiente o una combinazione dei due e una funzione nota, definita in base alla fisica che si vuole rappresentare. Qualora il problema risulti essere non stazionario, anche una condizione al tempo zero (*condizione iniziale*) deve essere verificata. L'ultima condizione, che compare nella definizione 1.1, è particolarmente importante per i problemi di natura fisico-ingegneristica. Essa infatti richiede una condizione di continuità: piccole variazioni dei parametri del problema generano piccole variazioni sulla risposta.

Si definisce (informalmente) soluzione classica (o forte) di un'equazione alle derivate parziali di ordine k una funzione differenziabile fino all'ordine k -esimo, tale per cui tutte le derivate

esistono e sono continue. Indicando con Ω il dominio in cui agisce la PDE, allora per la soluzione u deve valere che $u \in C^k(\Omega)$. Si dice che il problema alle derivate parziali è ben posto classicamente se è ben posto e ha soluzione classica.

1.2 Dalla forma forte alla forma debole

La maggior parte dei fenomeni descritti da una PDE non ha soluzione classica. Solo in alcuni casi, grazie a forti ipotesi semplificative, è possibile ottenere soluzioni analitiche, che tuttavia hanno un carattere più accademico che pratico. Fatta dunque esclusione di questi casi, per la maggior parte delle equazioni differenziali alle derivate parziali non esistono soluzioni classiche. Questo è dovuto al fatto che l'appartenenza delle funzioni allo spazio $C^k(\Omega)$ risulta essere eccessivamente stringente per essere applicato a casi reali. Ad esempio fenomeni come lo scambio termico tra due materiali, o la deformazione di un filo indotta da una forza concentrata, sono caratterizzati da una soluzione continua, la cui derivata prima, tuttavia, è discontinua. Soluzioni di questo tipo, pertanto, non appartengono allo spazio delle PDE che governano il problema. Questo è motivato dal fatto che i fenomeni appena descritti, per essere risolti, necessitano di modelli fisico-matematici richiedenti l'utilizzo di speciali funzioni, come quella di Heaviside o di Dirac, che appartengono a spazi funzionali più grandi rispetto allo spazio $C^k(\Omega)$. Di conseguenza la forma classica della PDE non è sufficiente a ottenere la soluzione che governa questi modelli ed è necessario quindi un rilassamento dei vincoli da essa imposti. Questo ragionamento porta a ricavare una nuova formulazione, ricavata mediante integrazione della PDE originaria, che prende il nome di: *formulazione debole*.

Per comprendere come si ricava la formulazione debole, prendiamo in esame il seguente problema.

Problema 1.1 *Sia dato il dominio $\Omega = [0, 1]$, trovare la funzione $u(x)$ che risolve la seguente equazione differenziale con condizione al contorno di Dirichlet omogenee*

$$\frac{d}{dx} \left[-p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + g(x)u(x) = f(x) \quad , \quad x \in [0, 1] ,$$

$$u(0) = u(1) = 0 ,$$

dove la funzione $p(x)$ è continua e differenziabile, $g(x)$ è positiva e continua e $f(x)$ continua anch'essa.

Moltiplicando l'equazione per una funzione generica, nota come *funzione test*, e integrando sul dominio si ottiene

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left[-p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] \varphi(x) dx + \int_0^1 g(x) u(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx .$$

Risolvendo il primo integrale per parti si ricava

$$\left[-p(x) \frac{du(x)}{dx} \varphi(x) \right]_0^1 + \int_0^1 p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{d\varphi(x)}{dx} dx + \int_0^1 g(x) u(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx . \quad (1.2)$$

Quest'ultimo passaggio viene effettuato mediante il teorema di Gauss-Green per i casi bi/tri-dimensionali. Le funzioni test presentano una natura variazionale; infatti, è stato dimostrato che corrispondono alla variazione delle funzioni incognite. Di conseguenza, quando vengono imposte condizioni di Dirichlet, le variazioni della funzione incognita risultano nulle poiché i suoi valori sono vincolati dalle condizioni al contorno. Nel caso in esame è possibile ottenere le seguenti condizioni al contorno per la funzione test

$$\varphi(x) \in [0, 1] : \varphi(0) = \varphi(1) = 0 .$$

Le funzioni test appartengono quindi allo spazio $C_0^1(0,1)$. Applicando le relazioni appena ricavate alla precedente equazione si ricava la forma debole dell'equazione originaria

$$\int_0^1 p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{d\varphi(x)}{dx} dx + \int_0^1 g(x) u(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx . \quad (1.3)$$

È stato dimostrato che il passaggio dalla forma forte a quella debole, tramite integrazione per parti, tende a eliminare il termine con la derivata seconda. Di conseguenza, le soluzioni della formulazione debole, per essere considerate tali, devono soddisfare requisiti meno restrittivi rispetto alle soluzioni classiche. Infatti, nell'ultima equazione compaiono solamente termini del primo ordine, il che implica la condizione di derivata prima integrabile (spazio di Sobolev).

1.3 Il metodo di Galerkin

Pur consentendo di avvicinarci a soluzioni più in linea con le necessità dell'ingegneria pratica, la formulazione debole risulta ancora insufficiente per un approccio numerico, rendendo necessario

l'impiego di ulteriori strategie di approssimazione. Infatti l'equazione (1.3) vive nello spazio infinito dimensionale che prende il nome di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Pertanto, al fine di poter ottenere una soluzione numerica, è necessario approssimare questi spazi in maniera da limitarne la loro dimensione. Si definisce con S^N lo spazio finito dimensionale, di dimensione N , che approssima nel dominio Ω lo spazio H^1 ; in altri termini: $S^N \subset H^1(\Omega)$. In maniera analoga si introduce la funzione $\tilde{u} \in S^N(\Omega)$, approssimazione di u nello spazio appena descritto. Definendo con u_i ($i = 1, 2, \dots, N$) le componenti della base dello spazio S^N , è possibile scrivere la soluzione approssimata $\tilde{u} \in S^N(\Omega)$ come segue

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j(x). \quad (1.4)$$

Analogamente è possibile approssimare, mediante espansione di una base finito dimensionale, anche la funzione test. Indicando con \widehat{S}^N l'approssimazione di H^1 e con ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) le componenti della sua base, la funzione $\tilde{\varphi}$ è ottenuta nel seguente modo

$$\varphi(x) \approx \tilde{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \phi_j(x). \quad (1.5)$$

Il nostro obiettivo risulta pertanto trovare i giusti valori degli α_i ($i = 1, 2, \dots, N$) tali per cui \tilde{u} sia una corretta approssimazione di u . Sostituendo la nella (1.3) si ricava

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^N \beta_j p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx + \int_0^1 \sum_{j=1}^N \beta_j g(x) u(x) \phi_j(x) dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^N \beta_j f(x) \phi_j(x) dx .$$

Portando tutto a sinistra e raccogliendo a fattori comuni si ottiene

$$\sum_{j=1}^N \beta_j \left(\int_0^1 p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx + \int_0^1 \sum_{j=1}^N g(x) u(x) \phi_j(x) dx - \int_0^1 \sum_{j=1}^N f(x) \phi_j(x) dx \right) = 0 .$$

Essendo la *funzione test* una funzione qualunque, allora l'equazione appena ricavata deve valere per qualunque valore dei coefficienti β_j e per qualunque componente ϕ_i della base \widehat{S}^N

$$\int_0^1 p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx + \int_0^1 g(x) u(x) \phi_j(x) dx = \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx ,$$

$$j = 1, 2, \dots, N .$$

Prima di applicare anche l'espansione (1.4) all'equazione appena ricavata, si ricorda un concetto fondamentale degli spazi vettoriali: data V uno spazio vettoriale di N componenti, allora esso è dotato di numerose basi.

Di conseguenza la scelta delle basi di S^N e \widehat{S}^N è arbitraria e data da tutte le possibili basi di tali spazi. Una scelta conveniente può essere quella di prendere lo stesso spazio sia per le funzioni test che per la funzione incognita. Questo porta ad avere entrambe le funzioni espanse sulla medesima base, ha il beneficio di semplificare i calcoli e può portare a schemi computazionalmente più efficienti. data dalle funzioni u_j . Tale procedimento viene detto *Metodo di Galerkin*.

$$\int_0^1 p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} dx + \int_0^1 \sum_{j=1}^N g(x) u(x) u_j(x) dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^N f(x) u_j(x) dx ,$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Introducendo infine l'espansione (1.4) si ricava:

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^N p(x) \alpha_i \frac{du_i(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} dx + \int_0^1 \sum_{i=1}^N \alpha_i g(x) u_i(x) u_j(x) dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^N f(x) u_j(x) dx , \quad (1.6)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Analizzando quest'ultima espressione si osserva che essa rappresenta rappresenta un sistema algebrico lineare dove le incognite sono i coefficienti α_i dell'espansione della funzione incognita

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i A(u_i, u_j) = \langle f, u_j \rangle \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N .$$

Dove

$$A(u_i, u_j) = \int_0^1 \left(p(x) \frac{du_i(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} + g(x) u_i(x) u_j(x) \right) dx ,$$

mentre il secondo termine è detto prodotto scalare tra la funzione f e u_j

$$\langle f, u_j \rangle = \int_0^1 f(x) u_j(x) dx .$$

1.4 Il metodo agli elementi finiti

Il metodo agli elementi finiti risolve l'equazione differenziale utilizzando il metodo di Galerkin. Lo spazio funzionale in cui si ricerca la soluzione è stabilito analizzando quali caratteristiche deve rispettare per risolvere la forma debole della PDE. Continuando a sviluppare il problema 1.1, i passaggi ulteriori al fine di ottenere le equazioni implementate nel software sono due: discretizzazione del dominio e scelta dello spazio funzionale della soluzione e della sua base.

La discretizzazione del dominio è permette di suddividere lo spazio computazionale in elementi, in maniera tale da poter manipolare separatamente piccole regioni per poi saldare insieme le soluzioni ricavate. Considerando il dominio dato dal problema fornito $\Omega = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$, si propone una definizione di partizione e elementi computazionali.

Definizione 1.2 *Si definisce discretizzazione del dominio Ω in N tratti con $N + 1$ punti (detti nodi), la seguente partizione*

$$\mathcal{P}_{(\Omega, N)} = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1\} . \quad (1.7)$$

Definizione 1.3 *Si definisce elemento computazionale ogni intervallo compreso tra due punti adiacenti della partizione (1.7), ossia*

$$\Omega^e = [x_e, x_{e+1}] .$$

Essendo il dominio computazionale non continuo, la soluzione numerica può essere valutata esattamente solo in alcuni nodi di queste celle. A seconda di come vengono scelti questi punti di valutazione si sviluppano i vari metodi numerici: *elementi finiti*, *volumi finiti*, *differenze finite*. Ad esempio il metodo ai volumi finiti prende questi valori valutandoli nel nodo centrale della cella computazionale, che in questo caso prende il nome di *volume di controllo*. La seguente tesi tratta, invece, il metodo agli *elementi finiti* dove i nodi della funzione incognita sono dati dagli estremi dell'intervallo dell'elemento. Utilizzando le definizioni appena date, gli integrali che compaiono nella (1.6) possono essere sviluppati come sommatoria di N integrali valutati sui singoli elementi

$$\int_0^1 * dx = \int_{\Omega} * dx = \sum_{e=1}^N \left(\int_{\Omega^e} * dx \right) .$$

Per semplificare la trattazione si prendano le funzioni $p(x)$ e $q(x)$ costanti e tali per cui $p(x) = p > 0, q(x) = q \geq 0$ con $x \in \Omega$. L'equazione precedentemente ricavata può essere dunque riscritta nel seguente modo

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^N p \alpha_i \frac{du_i(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} dx + \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^N g \alpha_i u_i(x) u_j(x) dx \\ = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^N f(x) u_j(x) dx . \end{aligned} \quad (1.8)$$

Prima di procedere con un ulteriore sviluppo dell'equazione appena ottenuta, è opportuno esaminare alcune delle opzioni disponibili per le basi da impiegare quando si adotta il metodo di Galerkin. La scelta di tali basi è influenzata dallo spazio funzionale di appartenenza della formulazione debole della PDE. Di seguito vengono analizzate tre basi in grado di approssimare spazi infinito dimensionale come lo spazio di Lebesgue (L^p) e di Sobolev (H^k).

Prima di fare ciò si introduce un concetto fondamentale e ampiamente utilizzato nel metodo agli elementi finiti: *l'elemento canonico*.

Definizione 1.4 *Sia dato un elemento Ω^e della partizione $\mathcal{P}_{(\Omega,N)}$, si definisce elemento canonico l'insieme Ω_ξ generato dalla seguente mappatura*

$$\xi = -1 + 2 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} , \quad (1.9)$$

ovvero: $\Omega_\xi = \{\xi \in \mathbb{R} : 1 \leq \xi \leq 1\}$.

Essendo la mappatura appena descritta invertibile, è sempre possibile tornare all'elemento locale grazie alla seguente formula

$$x = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \xi + \frac{x_{i+1} + x_i}{2} . \quad (1.10)$$

Funzioni costanti a tratti

Mettiamoci nel caso in cui la formulazione forte richiede funzioni che siano almeno integrabili, ossia appartenenti allo spazio L^2 . Per quanto discusso prima la nostra soluzione numerica appartiene a un sottospazio di L^2 , finito dimensionale e che indichiamo come $S_h^0(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

La base più semplice di tale spazio è quella costituita da funzioni costanti a tratti. Esse, infatti, pur non essendo continue risultano misurabili, pertanto appartengono ad L^2 . Si definisce ϕ_i^0 l' i -esima funzione della base di S_h^0 , definita nel seguente modo

$$\phi_i^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < x_i, \\ 1 & \text{per } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{per } x > x_{i+1}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Quindi lo spazio finito dimensionale può essere definito nel medesimo modo

$$S_h^0 = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \phi_i^0(x), \text{ ove } \alpha_i \in R \right\}.$$

Mandando al limite tale successione, ovvero per N tendente ad infinito, si ha che $\tilde{u}(x)$ e S_h^0 coincidono con $u(x)$ e L^2 .

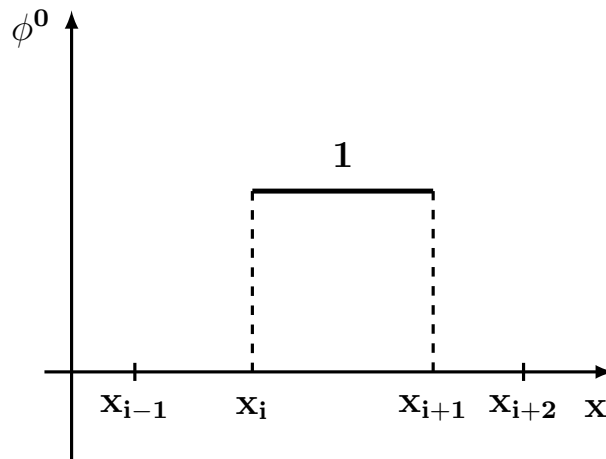


Figura 1.1. Andamento della funzione $\phi_i^0(x)$ della base dello spazio S_h^0 .

Si osserva inoltre che poiché la base è formata da funzioni costanti a tratti, i coefficienti dell'espansione sono esattamente i valori assunti dalla funzione in particolari punti. Si definisce *approssimazione da sinistra* quando ogni coefficiente α_i della serie viene valutato con il valore della funzione nell'estremo sinistro dell'elemento Ω_i , ossia: $\alpha_i = u(x_i)$. Contrariamente, se il valore della funzione viene fatto coincidere con l'estremo destro si ottiene l' *approssimazione da destra*: $\alpha_i = u(x_{i+1})$. Infine se viene preso il valore medio della funzione nell'intervallo, $\alpha_i = \frac{u(x_{i+1})+u(x_i)}{2}$, si sta utilizzando la *rappresentazione centrata*.

Si può notare che una volta definita la partizione $\mathcal{P}_{(\Omega,N)}$, il numero di componenti della base dello spazio S_h^0 viene determinato automaticamente. Il numero di funzioni linearmente indipendenti, utilizzate per espandere la funzione incognita, è uguale al numero di intervalli in cui il dominio viene concretizzato. Dalla definizione (1.11) si evince che ogni funzione della base S_h^0 agisce solo su un elemento della partizione $\mathcal{P}_{(\Omega,N)}$, mentre esternamente è nulla (figura 1.1). Eseguendo una restrizione della base, appena definita, su ogni elemento Ω^e ; si ricavano le ben note *funzioni di forma* $N_1^{0,e}(x)$. È possibile definire queste componenti nel dominio canonico utilizzando la mappatura (1.9). Grazie a questo passaggio si è in grado di svincolarci dal singolo elemento Ω^e e dare una definizione generale di queste nuove funzioni

$$N_1^0(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{per } \xi \leq -1, \\ 1 & \text{per } -1 < \xi < 1, \\ 0 & \text{per } \xi \geq 1. \end{cases}$$

In conclusione quando si utilizza un'approssimazione nello spazio S_h^0 mediante una base di funzioni costanti a tratti, allora la relazione (1.4) può essere riscritta come

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \phi_i^0(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i N_1^{0,i}(x). \quad (1.12)$$

Analizzando in dettaglio un elemento locale Ω^e , si può scrivere la restrizione dell'approssimazione della funzione incognita su tale regione come

$$\tilde{u}^e(x) = \alpha^e N_1^{0,e}(x).$$

Approssimazione con polinomi di Lagrange lineari

Nel proseguo, viene derivata una base per l'approssimazione dello spazio N -dimensionale, ottenuto come approssimazione dello spazio di Sobolev H^1 . Viene fornita la definizione delle curve spline e delle loro proprietà, così come per le funzioni di Lagrange. Inoltre, si dimostra l'appartenenza dei polinomi di Lagrange alla classe delle curve spline, e sfruttando le caratteristiche di questa famiglia, si dimostra che tali funzioni possono effettivamente costituire una base per il sottospazio desiderato.

Definizione 1.5 Sia data la partizione (1.7), allora si definisce funzione spline una funzione $s(x)$ aventi le seguenti caratteristiche

1. $s(x)$ è un polinomio al più di ordine m su ogni elemento Ω^e della partizione $\mathcal{P}_{(\Omega, N)}$;
2. su ogni nodo interno valgono le seguenti condizioni di saldatura

$$s_{j-1}^{(k)}(x_j) = s_j^{(k)}(x_j) \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{e } k = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Dove $s_j(x)$ rappresenta la restrizione di $s(x)$ sull'intervallo Ω^e , ossia $s_j(x) \equiv s(x)$ per $x \in \Omega^e$. Mentre con la simbologia $s(x)^{(k)}$ si intende la derivata k -esima della funzione spline.

Dalla prima condizione della definizione 1.5 si osserva che $s(x) \in C^\infty(\Omega^e)$, mentre dalle condizioni di continuità si ottiene $s(x) \in C^{m-1}(\Omega)$.

Definizione 1.6 I polinomi di Lagrange sono funzioni interpolatrici, l' i -esimo polinomio di grado m si sviluppa nel seguente modo

$$l_i^m(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_N)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{j-1})(x_i-x_{j+1})\cdots(x_i-x_N)} = \sum_{j=0, j \neq i}^m \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

dove $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$.

I polinomi di Lagrange sono linearmente indipendenti l'uno dall'altro.

Sia $f(x)$ la funzione che si vuole approssimare e f_i i punti di interpolazione al nodo i -esimo della partizione, allora la funzione spline $s(x)$ che interpola i punti dati $s(x_i) = f_i = f(x_i)$ è data dalla composizione lineare di polinomi di Lagrange.

Infatti per ogni intervallo $\Omega^i = [x_i, x_{i+1}]$, la funzione spline del primo ordine $s_i(x)$ è data dal generico polinomio: $s_i(x) = a_i + b_i x$. Imponendo il passaggio per i punti di interpolazione

$$\begin{cases} s_i(x_i) = f_i \\ s_i(x_{i+1}) = f_{i+1} \end{cases} \implies \begin{cases} a_i + b_i x_i = f_i \\ a_i + b_i x_{i+1} = f_{i+1} \end{cases} \implies \begin{cases} a_i = \frac{x_{i+1} f_i - x_i f_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \\ b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \end{cases}.$$

si ricava la restrizione $s_i(x)$ all'intervallo i -esimo

$$s_i(x) = \frac{x_{i+1} f_i - x_i f_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} x = f_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Da quest'ultima relazione si evince che la curva spline interpolante i punti (x_i, f_i) e (x_{i+1}, f_{i+1}) è data dalla combinazione lineare di due polinomi di Lagrange del primo ordine $l_i^1(x)$ e $l_{i+1}^1(x)$

$$s_i(x) = f_i l_i^1(x) + f_{i+1} l_{i+1}^1(x). \quad (1.13)$$

Possiamo anche dire che i polinomi di Lagrange del primo ordine sono una base dello spazio N -dimensionale X_h^1 , approssimazione dello spazio di Sobolev H^1 . Infatti essendo lo spazio X_h^1 generato dallo spazio di Sobolev, allora deve valere che $X_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Di conseguenza le funzioni f_h per appartenere a X_h^1 devono verificare tutte le richieste imposte dallo spazio H^1 . Avendo dimostrato che i polinomi di Lagrange agiscono come funzioni spline nel problema dell'interpolazione dei punti, essi soddisfano le proprietà 1 e 2 della definizione 1.5. Di conseguenza, sono indubbiamente funzioni misurabili poiché sono continue sull'intero intervallo. Inoltre, la loro derivata risulta essere costante a tratti sul Ω , conferendo anche a questa derivata la proprietà di misurabilità. Pertanto, tali funzioni sono parte dello spazio H^1 . Poiché sono anche linearmente indipendenti, secondo quanto definito in 1.6, esse costituiscono una base generatrice per lo spazio di Sobolev preso in esame.

Questo ragionamento viene sfruttato nel caso in cui la formulazione debole necessita di funzioni aventi derivata prima misurabile (spazio di Sobolev). Di conseguenza la soluzione numerica $\tilde{u}(x)$ deve rispettare la seguente relazione: $\tilde{u} \in X_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. La base di $X_h^1(\Omega)$ viene ricavata sviluppando il problema dell'interpolazione espresso, facendo riferimento all'equazione (1.13) vale la seguente espressione

$$s(x) = \sum_{i=0}^N s(x)_i = \sum_{i=0}^N (f_i l_i^1(x) + f_{i+1} l_{i+1}^1(x)) = \sum_{i=0}^N \left(f_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right).$$

Isolando i contributi dei termini per $i = j - 1$ e $i = j$ si ottiene

$$s(x) = \dots + \left(f_{j-1} \frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j} + f_j \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right) + \left(f_j \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + f_{j+1} \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right) + \dots$$

Raggruppando a fattori comuni si ricava

$$s(x) = \sum_{i=0}^N f_i \phi_i^1(x).$$

Le funzioni $\phi_i^1(x)$ vengono dette *B-spline lineari* o *funzioni a cappello* e definiscono la base cercata. Esse sono sviluppate nel seguente modo

$$\phi_0^1(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_0-x_1} & \text{per } x_0 \leq x < x_1 \\ 0 & \text{per } x \geq x_1 \end{cases},$$

$$\phi_i^1(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{per } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{per } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{per } x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (1.14)$$

$$\phi_N^1(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq x_{N-1} \\ \frac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}} & \text{per } x_{N-1} < x \leq x_N \end{cases}.$$

Indicando con $u(x)$ la funzione incognita, allora $\tilde{u}(x)$ è la sua approssimazione nello spazio finito dimensionale X_h^1 se

$$X_h^1 = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \phi_i^0(x), \text{ ove } \alpha_i \in R \right\}. \quad (1.15)$$

Anche in questo caso, si osserva che mandando al limite la successione, ovvero per N tendente ad infinito, si ha che $\tilde{u}(x)$ e X_h^1 coincidono con $u(x)$ e $H^{1,2}$.

Infine osserviamo che, una volta stabilito il numero di elementi della partizione $\mathcal{P}_{(\Omega,N)}$, automaticamente viene anche stabilito il numero delle basi dello spazio X_h^1 , pari al numero di nodi della discretizzazione. Inoltre, poiché la base è stata sviluppata da un problema di interpolazione, i coefficienti dell'espansione della funzione $\tilde{u}(x)$ non sono altro che i valori della funzione nel punto: $\alpha_i = u(x_i)$. Dalle definizioni (1.14) emerge chiaramente che ogni funzione $\phi_i^1(x)$ appartenente alla base dello spazio X_h^1 agisce sui due elementi adiacenti ai nodi x_i , cioè l'elemento Ω^{i-1} e Ω^i . Al di fuori di tale intervallo, la stessa funzione si annulla (figura 1.2). Come svolto nel caso delle funzioni costanti a tratti, possiamo generare le *funzioni di forma* eseguendo una restrizione della base su ogni elemento Ω^e . Tuttavia, a differenza del caso precedente, ora abbiamo due funzioni di forma per ogni elemento Ω^e . La prima è data dalla

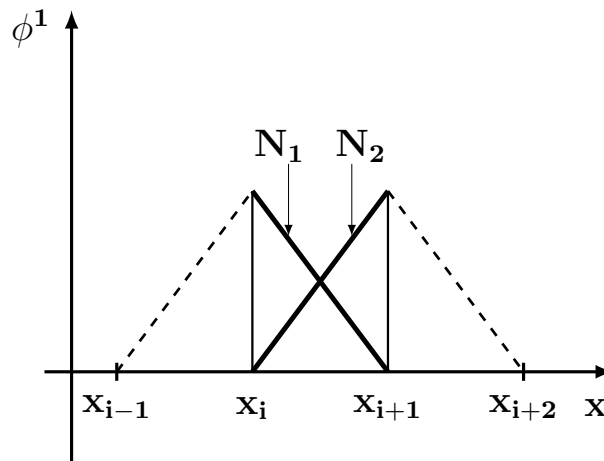


Figura 1.2. Andamento della funzione della base dello spazio X_h^1 .

restrizione della funzione $\phi_i(x)$, mentre la seconda dalla restrizione di $\phi_{i+1}(x)$

$$\begin{aligned} N_1^{1,e}(x) &= \phi_i(x) \quad \text{con } x \in \Omega_i, \\ N_2^{1,e}(x) &= \phi_{i+1}(x) \quad \text{con } x \in \Omega_i. \end{aligned}$$

È possibile definire queste componenti nel dominio canonico utilizzando la mappatura (1.9). Grazie a questo passaggio possiamo svincolarci dal singolo elemento Ω^e e dare una definizione generale di queste nuove funzioni

$$N_1^{1,e}(\xi) = N_1^1(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{per } \xi \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1 - \xi) & \text{per } -1 < \xi < 1 \\ 0 & \text{per } \xi \geq 1 \end{cases},$$

$$N_2^{1,e}(\xi) = N_2^1(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{per } \xi \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi) & \text{per } -1 < \xi < 1 \\ 0 & \text{per } \xi \geq 1 \end{cases}.$$

In conclusione quando si utilizza un'approssimazione nello spazio X_h^1 mediante una base di funzioni lineari a tratti, la relazione (1.4) può essere riscritta come

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{e=0}^{N-1} \alpha_e \phi_e^0(x) = \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{nf} \alpha_i^e N_i^{1,e}(x). \quad (1.16)$$

dove α_i^e indica il valore assunto dalla funzione nel punto x_i^e . Inoltre, $\Omega^e = [x_e, x_{e+1}] = [x_1^e, x_2^e]$, mentre nf indica il numero di funzioni di forma per ogni intervallo Ω_e , in questo caso pari a 2.

Analizzando in dettaglio un elemento locale Ω^e , la restrizione dell'approssimazione della funzione incognita su tale regione si valuta nel seguente modo

$$\tilde{u}^e(x) = u(x_1^e) N_1^{1,e} + u(x_2^e) N_2^{1,e} = \sum_{i=1}^{nf} \alpha_i^e N_i^{1,e}.$$

Approssimazioni con polinomi di Lagrange quadratici

A partire dai polinomi di Lagrange introdotti nella precedente sezione, l'obiettivo è sviluppare una base aggiuntiva che consenta di generare un'approssimazione della soluzione capace di ridurre l'errore di interpolazione. Ciascun polinomio j -esimo assume valore unitario nel nodo x_j e risulta non nullo negli elementi che contengono tale nodo. Un ulteriore vantaggio nell'utilizzo dei polinomi di Lagrange è che tali proprietà rimangono valide anche all'aumentare del grado del polinomio. L'aumento del grado è ottenuto mediante l'aggiunta di un nodo aggiuntivo al centro di ogni elemento. Pertanto, l'elemento i -esimo, indicato come $\Omega^i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$, presenta come suo nodo centrale il punto $x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}$.

Possiamo dunque definire una funzione definita su due elementi adiacenti della partizione, tale per cui assuma valore unitario nel nodo in comune e si azzeri nei nodi centrali e sugli estremi di questi elementi. Si ottiene in questo modo un polinomio di Lagrange del secondo ordine definito nel seguente modo

$$\phi_i^2(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq x_{i-2} \\ \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-2})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-2})} & \text{per } x_{i-2} < x \leq x_i \\ \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})} & \text{per } x_i \leq x < x_{i+2} \\ 0 & \text{per } x \geq x_{i+2} \end{cases}. \quad (1.17)$$

Si può definire un'ulteriore funzione base, definita su un elemento, più precisamente una parabola con convettività verso il basso, la quale abbia valore unitario nel nodo centrale e zero agli

estremi

$$\phi_i^2(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq x_{i-2} \\ \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} & \text{per } x_{i-1} < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{per } x \geq x_{i+1} \end{cases} . \quad (1.18)$$

Mettendo a confronto tali relazioni con la definizione 1.6, diventa evidente che queste funzioni sono equivalenti ai polinomi di Lagrange di secondo ordine. Inoltre dalle proprietà 1 e 2 della definizione 1.5 vale che: $\phi_i^2 \in C^2(\Omega^e)$ e $\phi_i^2 \in C^1(\Omega)$. Sono dunque funzioni misurabili fino alla derivata seconda, di conseguenza appartengono allo spazio di Sobolev $H^{1,2}$. Risulta dunque possibile creare uno spazio finito dimensionale, che approssimi lo spazio $H^{1,2}$, mediante l'utilizzo di queste funzioni, indichiamo questo sottospazio X_h^2 .

Indicando con $u(x)$ la funzione incognita, allora $\tilde{u}(x)$ è la sua approssimazione nello spazio finito dimensionale X_h^1 se

$$X_h^2 = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \phi_i^0(x), \text{ ove } \alpha_i \in R \right\} .$$

Anche in questo caso, si osserva che mandando al limite la successione, ovvero per N tendente ad infinito, si ha che $\tilde{u}(x)$ e X_h^2 coincidono con $u(x)$ e H^1 . Inoltre, poiché la base è sviluppata a partire da polinomi di Lagrange, i coefficienti α_i dell'espansione della funzione $\tilde{u}(x)$ sono i valori della funzione nel punto: $\alpha_i = u(x_i)$.

Si osserva che, una volta stabilito il numero di elementi della partizione $\mathcal{P}_{(\Omega,N)}$, automaticamente viene anche stabilito il numero delle basi dello spazio X_h^2 . Dalle definizioni (1.17) e (1.18) è evidente che su ogni elemento $\Omega^e = [x_{e-1}, x_{e+1}]$ agiscono ben tre funzioni della base di X_h^2 .

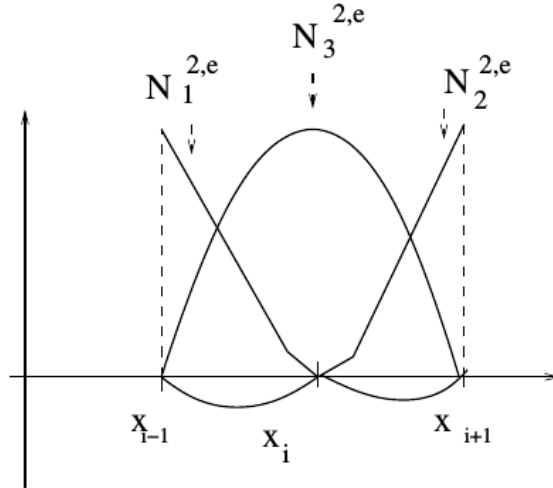


Figura 1.3. Funzioni di forma della base dello spazio X_h^2 .

Eseguendo dunque la restrizione della base su tale elemento si ricavano le *funzioni di forma* $N_j^{2,e}(x)$. Essendo l'elemento caratterizzato dai nodi x_1^e, x_3^e, x_2^e , dove x_3^e è il nodo centrale, allora risultano tre le funzioni di forma per ogni elemento Ω^e (figura 1.3). Eseguendo lo stesso procedimento visto nel precedente paragrafo, mediante la mappatura (1.9) descriviamo tali funzioni di forma nell'*elemento canonico*.

$$N_1^{2,e}(\xi) = N_1^2(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{per } \xi \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1 - \xi)\xi & \text{per } -1 < \xi < 1 \\ 0 & \text{per } \xi \geq 1 \end{cases},$$

$$N_2^{2,e}(\xi) = N_2^2(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{per } \xi \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi & \text{per } -1 < \xi < 1 \\ 0 & \text{per } \xi \geq 1 \end{cases},$$

$$N_3^{2,e}(\xi) = N_3^2(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{per } \xi \leq -1 \\ (1 - \xi)(1 + \xi) & \text{per } -1 < \xi < 1 \\ 0 & \text{per } \xi \geq 1 \end{cases}.$$

In conclusione quando si utilizza un'approssimazione nello spazio X_h^2 mediante una base di funzioni quadratiche, allora la relazione (1.4) può essere riscritta come

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{e=0}^{N-1} \alpha_e \phi_e^0(x) = \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{nf} \alpha_i^e N_i^{1,e}(x). \quad (1.19)$$

dove α_i^e indica il valore assunto dalla funzione nel punto x_i^e , che può essere o un estremo dell'elemento $\Omega^e = [x_e, x_{e+1}] = [x_1^e, x_2^e]$ o il nodo centrale associato ad esso. Con il termine nf infine si indica il numero di funzioni di forma per ogni intervallo Ω_e , in questo caso pari a 3.

Analizzando in dettaglio un elemento locale Ω^e , la restrizione dell'approssimazione della funzione incognita su tale regione si valuta nel seguente modo

$$\tilde{u}^e(x) = u(x_1^e) N_1^{2,e} + u(x_2^e) N_2^{2,e} + u(x_3^e) N_3^{2,e} = \sum_{i=1}^{nf} u_i^e N_i^{2,e}.$$

1.4.1 Verso il sistema lineare

Una volta definiti i possibili spazi finito dimensionali in cui è possibile ricercare la soluzione numerica della formulazione debole; si continua a sviluppare il problema 1.1. L'ultimo passaggio sviluppato è stato ricavare l'equazione (1.8), di seguito riportata

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^N p \alpha_i \frac{du_i(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} dx + \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^N g \alpha_i u_i(x) u_j(x) dx \\ = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^N f(x) u_j(x) dx. \end{aligned}$$

A questo punto, a seconda che la soluzione appartenga allo spazio S_h^0 , X_h^1 o X_h^2 la funzione u viene descritta come espansione delle basi secondo le relazioni (1.12), (1.16) o (1.19). Mantenendo il più generale possibile la trattazione, si indica con nf il numero di funzioni di forma che insistono su un elemento canonico. Applicando la rappresentazione della soluzione nello spazio scelto si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{nf} u_j^e \int_{\Omega_e} p \frac{dN_j^{k,e}(x)}{dx} \frac{d\phi_i^k(x)}{dx} dx + \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{nf} u_j^e \int_{\Omega_e} q N_j^{k,e}(x) \phi_i^k(x) dx = \\ \sum_{e=0}^{N-1} \int_{\Omega_e} f(x) \phi_i^k(x) dx \quad , \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Si osserva che è stata attuata una diversa rappresentazione della base utilizzata per espandere le funzioni test o la funzione incognita. In entrambi i casi la base è la stessa (*metodo di Galerkin*), tuttavia nel primo caso si è deciso di considerare ogni singola funzione ϕ_i^k ; con $k = 0, 1, 2$ a secondo dello spazio utilizzato. Mentre si è utilizzata la rappresentazione mediante le funzioni di forma N_i^k per l'espansione dell'incognita.

Essendo tale problema valido per ogni funzione della base precedentemente descritta, ed essendo i coefficienti α_i le $N + 1$ incognite del problema, pari ai valori della funzione nel punto ($\alpha_i = f(x_i)$); allora è possibile creare un sistema di $N + 1$ incognite in $N + 1$ equazioni ricavate risolvendo l'equazione (1.20) per ogni funzione ϕ_i^k della base di X_h^k . Essendo le funzioni di una base di uno spazio vettoriale per definizione linearmente indipendenti, allora il sistema così descritto risulta essere non singolare, pertanto ammette ammette soluzione.

Nel seguito sono esposte ulteriori tecniche numeriche per manipolare l'equazione al fine di ottenere una rappresentazione ancora più schematica del problema.

1.4.2 Integrazione numerica, il metodo di Gauss

L'equazione (1.20) è un sistema algebrico dove le incognite compaiono come coefficienti di operatori integrali. Per ricavare una soluzione numerica è dunque necessario studiare delle strategie per risolvere tali operatori. In questo contesto, il *metodo di Gauss* emerge come un approccio estremamente efficace per valutare numericamente questi integrali. Questo metodo risulta particolarmente efficiente quando l'integrando è un polinomio di qualsiasi ordine, come nel caso delle funzioni test precedentemente studiate. In questi casi l'integrazione numerica coincide con quella analitica, pertanto l'errore numerico nel calcolare la soluzione risulta nullo.

Per mostrare i passaggi del metodo di gauss si prende in esame il seguente esempio

$$\int_{\Omega_e} f(x) dx ,$$

in cui si è utilizzata la nomenclatura per l'elemento della partizione $\Omega^e = [x_e, x_{e+1}] = [x_1^e, x_2^e]$. Per applicare il metodo è necessario cambiare il sistema di riferimento e passare al dominio canonico (definizione 1.4). Utilizzando la mappatura (1.9) si esegue la trasformazione dal

dominio Ω^e a

$$\Omega_\xi = \{\xi \in R : -1 \leq \xi \leq 1\} .$$

Si osserva che tale trasformazione è la medesima per ogni intervallo e -esimo e la mappatura, indipendentemente dall'elemento di partenza, porta sempre al stesso elemento canonico di arrivo.

Pertanto il nostro integrale sul nuovo dominio di integrazione risulta essere

$$\int_{\Omega_e} f(x) dx = \int_{\Omega_\xi} f(\xi)J(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 f(\xi)J(\xi) d\xi .$$

Il termine J si chiama *Laplaciano*, esso rappresenta il rapporto tra il volume infinitesimo dello spazio di partenza dV e quello di arrivo dV' . In uno spazio trii-dimensionale il Laplaciano risulta essere

$$J = \frac{V}{V'} = \frac{dx dy dz}{d\xi d\eta d\mu} .$$

La sua definizione più formale è la seguente

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{pmatrix} . \quad (1.21)$$

Nel caso più semplice in cui $\Omega \in R$ il calcolo del Laplaciano si limita al calcolo della sola derivata: $J = \frac{dx}{d\xi}$. Utilizzando la mappatura inversa (1.10) si ricava

$$J = \frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \xi + \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \right) = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} . \quad (1.22)$$

Si è dunque ricavato che nel caso monodimensionale il Laplaciano è pari a metà dell'elemento considerato. Grazie a questo esempio possiamo dunque trarre considerazioni estendibili anche ai casi bi e trii-dimensionali. Il Laplaciano infatti dipende dal dominio di partenza, in particolare è influenzato sia dalla dimensione dello spazio, che dal modo in cui viene effettuata la partizione.

Una volta effettuato il cambio del dominio di integrazione, il metodo valuta l'integrale mediante una sommatoria in cui compaiono i coefficienti ω_g (*pesi di Gaus*) e il valore che la funzione integranda assume in particolari punti del dominio Ω_ξ (*nodii di Gaus*). L'integrale viene così valutato attraverso una sommatoria di ng fattori

$$\int_{-1}^1 f(\xi)J(\xi) d\xi \approx \sum_{g=1}^{ng} \omega_g f(\xi_g) .$$

ng	ξ_g	ω_g
1	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
2	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
	0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
4	0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
	0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
5	0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
	0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
	0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
6	0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691
	0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
	0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170

Tabella 1.1. Tabella dei punti e dei nodi di Gauss fino al sesto ordine.

Come accennato all'inizio, questo procedimento approssima in maniera esatta polinomi di ordine al più $2ng - 1$. I punti di Gauss sono presi in maniera tale da essere gli zeri del polinomio di Legendre $P_n(\xi)$, con $\xi \in \Omega_\xi = [-1, 1]$, mentre il peso relativo a tale nodo è ottenuto risolvendo la seguente equazione

$$\omega_g = \frac{2}{(1 - \xi_g^2) [P'_n(\xi_g)]^2}, \quad \text{con } \xi_g : P_n(\xi_g) = 0.$$

I nodi e i punti di gauss sono tabulati per gli spazi mono,bi e trii-dimensionali. Nel caso di dominio monodimensionale, la tabulazione dei nodi e pesi di quadratura risulta essere fornita dalla tabella 1.1. Analizzando questi dati si possono trarre ulteriori caratteristiche del metodo. In primo luogo è evidente che i nodi ξ_g sono sempre interni al dominio $\xi_g \in (-1, 1)$; di conseguenza la funzione integranda non viene mai valutata agli estremi del dominio canonico. Un ulteriore

comportamento molto utile, applicato anche nel seguito di questa tesi, è la caratteristica che i nodi di gauss di due quadrature differenti non sono mai coincidenti.

1.4.3 Differenziazione numerica

Di seguito si studia il metodo per risolvere numericamente il problema del calcolo delle derivate presenti nella (1.20). Prendiamo in esame la seguente espressione

$$\int_{\Omega} \frac{df(x)}{dx} dx .$$

Utilizzando la relazione (1.4), si approssima la funzione mediante l'utilizzo della base dello spazio funzionale scelto

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{e=0}^N \sum_{i=1}^{nf} f_i^e N_i^{k,e}(x) .$$

Sostituendo e considerando per comodità solo il contributo locale dell'integrale, dato dall'elemento Ω_e , si ricava

$$\int_{\Omega_e} \frac{d f^e(x)}{dx} dx \approx \sum_{i=1}^{nf} f_i^e \int_{\Omega_e} \frac{dN_i^{k,e}(x)}{dx} dx .$$

Utilizzando il cambio di coordinate (1.10) e ricordando la definizione (1.22) del Laplaciano, si ottiene

$$\frac{dN(x(\xi))}{dx} = \frac{dN(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{J(\xi)} \frac{dN(\xi)}{d\xi} .$$

Sostituendo nell'integrale ed eseguendo il cambio del dominio di integrazione si ricava

$$\sum_{i=1}^{nf} f_i^e \int_{\Omega_\xi} \frac{1}{J(\xi)} \frac{dN_i^k(\xi)}{d\xi} J(\xi) d\xi .$$

Infine, semplificando e utilizzando il metodo di gauss si ottiene

$$\sum_{i=1}^{nf} f_i^e \int_{\Omega_\xi} \frac{dN_i^k(\xi)}{d\xi} d\xi = \sum_{i=1}^{nf} \sum_{g=0}^{ng} f_i^e \omega_g \left. \frac{dN_i^k(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi_g} .$$

Da notare che in quest'ultima espressione il termine f_i^e rappresenta il valore della funzione incognita nei nodi dell'elemento locale Ω_e , dunque rappresenta una componente della soluzione ricercata. Differente è invece l'argomento $\left. \frac{dN_i^k(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi_g}$, il quale valuta la derivata della funzione di forma N_i^k nel nodo di Gauss ξ_g dell'elemento canonico Ω_ξ .

1.4.4 Il sistema algebrico lineare

Una volta fornite le nozioni per eseguire integrali e derivate in maniera numerica, è possibile sviluppare ulteriormente l'equazione (1.20)

$$\sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{nf} u_j^e \int_{\Omega_e} p \frac{dN_j^{k,e}(x)}{dx} \frac{d\phi_i^k(x)}{dx} dx + \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{nf} u_j^e \int_{\Omega_e} q N_j^{k,e}(x) \phi_i^k(x) dx = \sum_{e=0}^{N-1} \int_{\Omega_e} f(x) \phi_i^k(x) dx \quad , \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Passando al dominio canonico si eseguono le derivate delle funzioni test e di forma.

$$\sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{nf} u_j^e \int_{\Omega_e} p \frac{1}{J(\xi)} \frac{dN_j^k(\xi)}{d\xi} \frac{1}{J(\xi)} \frac{d\phi_i^k(\xi)}{d\xi} J(\xi) d\xi + \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{nf} u_j^e \int_{\Omega_e} q N_j^k(\xi) \phi_i^k(\xi) J(\xi) d\xi = \sum_{e=0}^{N-1} \int_{\Omega_e} f(\xi) \phi_i^k(\xi) J(\xi) d\xi \quad , \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Tramite la quadratura gaussiana è possibile trasformare gli integrali in sommatorie

$$\sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{nf} \sum_{g=1}^{ng} u_j^e \omega_g \frac{p}{J(\xi_g)} \frac{dN_j^k}{d\xi} \bigg|_{\xi_g} \frac{d\phi_i^k}{d\xi} \bigg|_{\xi_g} + \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{nf} \sum_{g=1}^{ng} u_j^e \omega_g q N_j^k(\xi_g) \phi_i^k(\xi_g) J(\xi_g) = \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{g=1}^{ng} \omega_g f(\xi_g) \phi_i^k(\xi_g) J(\xi_g) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Come già detto, questa equazione rappresenta un sistema algebrico lineare. Infatti tale relazione deve valere per tutte le $N+1$ funzioni test, base dello spazio finito dimensionale in cui si ricerca la soluzione. Inoltre, avendo applicato il metodo di Galerkin, è evidente che le funzioni di forma delle funzioni test coincidono con le funzioni di forma utilizzate per espandere la funzione incognita. Questo passaggio è evidenziato nel seguito in cui si isola il contributo locale di ogni elemento “e” della partizione.

$$\sum_{j=1}^{nf} \sum_{i=1}^{nf} \sum_{g=1}^{ng} u_j^e \omega_g \frac{p}{J(\xi_g)} \frac{dN_j^k}{d\xi} \bigg|_{\xi_g} \frac{dN_i^k}{d\xi} \bigg|_{\xi_g} + \sum_{j=1}^{nf} \sum_{i=1}^{nf} \sum_{g=1}^{ng} u_j^e \omega_g q N_j^k(\xi_g) N_i^k(\xi_g) J(\xi_g) = \sum_{i=1}^{nf} \sum_{g=1}^{ng} \omega_g f(\xi_g) N_i^k(\xi_g) J(\xi_g) .$$

L'indice "i" fa riferimento alle funzioni di forma originate dalle funzione test, mentre l'indice "j" fa riferimento a quelle utilizzate per sviluppare la soluzione. Raggruppando i termini in comune si ottiene

$$\sum_{j=1}^{nf} \sum_{i=1}^{nf} \sum_{g=1}^{ng} u_j^e \omega_g \left(\frac{p}{J(\xi_g)} \frac{dN_j^k}{d\xi} \Big|_{\xi_g} \frac{dN_i^k}{d\xi} \Big|_{\xi_g} + q N_j^k(\xi_g) N_i^k(\xi_g) J(\xi_g) \right) = \sum_{i=1}^{nf} \sum_{g=1}^{ng} \omega_g f(\xi_g) N_i^k(\xi_g) J(\xi_g) .$$

Utilizzando una scrittura matriciale per compattare il sistema, si ottiene

$$\left(\sum_{g=1}^{ng} \omega_g \mathbf{A}_g^e \right) \mathbf{u}^e = \sum_{g=1}^{ng} \omega_g \mathbf{f}_g^e .$$

Il termine \mathbf{u}^e rappresenta il *vettore delle incognite*, ossia i valori della funzione nei nodi dell'elemento Ω_e . La matrice \mathbf{A}^e è detta *matrice di interpolazione*, mentre il vettore \mathbf{f}^e è detto *termine forzante*.

Fino ad ora abbiamo seguito una trattazione del tutto generale, valida per qualsiasi sottospazio in cui si voglia calcolare la soluzione ($X_h^k \subset H^{1,2}$). Tuttavia, per mostrare come svolgere i passaggi seguente si decide di prendere, a scopo di esempio, una soluzione appartenente allo spazio X_h^1 . Così facendo il vettore incognita si può scrivere nel seguente modo

$$\mathbf{u}^e = \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} .$$

Le componenti della matrice di interazione sono calcolate come segue

$$\mathbf{A}^e = \sum_{g=1}^{ng} \omega_g \mathbf{A}_g^e = \sum_{g=1}^{ng} \omega_g \begin{bmatrix} \frac{p}{J} \frac{dN_1^k}{d\xi} \frac{dN_1^k}{d\xi} + q N_1^k N_1^k J & \frac{p}{J} \frac{dN_2^k}{d\xi} \frac{dN_1^k}{d\xi} + q N_2^k N_1^k J \\ \frac{p}{J} \frac{dN_1^k}{d\xi} \frac{dN_2^k}{d\xi} + q N_1^k N_2^k J & \frac{p}{J} \frac{dN_2^k}{d\xi} \frac{dN_2^k}{d\xi} + q N_2^k N_2^k J \end{bmatrix} ,$$

infine il vettore forzante assume forma

$$\mathbf{f}^e = \sum_{g=1}^{ng} \omega_g \mathbf{f}_g^e = \sum_{g=1}^{ng} \omega_g \begin{bmatrix} f(\xi_g) N_1^k(\xi_g) J(\xi_g) \\ f(\xi_g) N_2^k(\xi_g) J(\xi_g) \end{bmatrix} .$$

La forma locale del sistema lineare è stata dunque ricavata, la sua forma risolta essere

$$\mathbf{A}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e .$$

Infine sviluppando le seguenti sommatorie sull'indice dell'elemento

$$\mathbf{A} = \sum_{e=0}^N \mathbf{A}^e, \quad \mathbf{u} = \sum_{e=0}^N \mathbf{u}^e, \quad \mathbf{f} = \sum_{e=0}^N \mathbf{f}^e,$$

si ricava il sistema globale

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

1.4.5 Condizioni al contorno

Fin ora ci siamo limitati a risolvere il problema senza curarci degli elementi di bordo. Per comprendere come queste zone influenzino il comportamento della risposta, occorre introdurre il concetto di condizioni al contorno.

Si definiscono condizione al contorno i vincoli che la soluzione di una generica PDE deve rispettare nei punti di confine $\Gamma = \partial\Omega$ del dominio Ω . Sia $u(x)$ la soluzione ricercata, $y(x)$ una funzione nota e a, b due coefficienti costanti ($a, b \in \mathbb{R}$), allora le condizioni al contorno si suddividono in tre categorie.

1. *Condizioni al contorno di Dirichlet (o condizioni essenziali). Impone un preciso valore alla funzione incognita,*

$$u(x) = y(x), \quad \text{se } x \in \Gamma.$$

Quando si applica questa condizione nel metodo agli Elementi Finiti, questo comporta anche l'annullamento della funzione test

$$\phi(x) = 0, \quad \text{se } x \in \Gamma.$$

2. *Condizione al contorno di Neuman (o naturali). Impone un preciso valore alla derivata della funzione incognita,*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = y(x), \quad \text{se } x \in \Gamma.$$

In questo caso la funzione test (o meglio la variazione della funzione incognita) è libera di assumere qualsiasi valore.

3. *Condizione al contorno di Robin.* Impone un valore alla combinazione lineare della variabile incognita e della sua derivata

$$au(x) + b \frac{\partial u}{\partial n}(x) = y(x), \quad \text{se } x \in \Gamma .$$

Per vedere come impostare le condizioni al contorno al problema in analisi, si torni a considerare l'equazione debole data dall'equazione (1.2) e riportata di seguito

$$\left[-p(x) \frac{du(x)}{dx} \varphi(x) \right]_0^1 + \int_0^1 p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{d\varphi(x)}{dx} dx + \int_0^1 g(x)u(x)\varphi(x) dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) dx .$$

Ipotizzando di avere una condizione di Dirichlet nel nodo di bordo $x = 0$ e una di Neuman a $x = 1$, si sviluppa il primo termine nel seguente modo

$$\left[-p(x) \frac{du(x)}{dx} \varphi(x) \right]_0^1 = - \left(p(1) \frac{du(1)}{dx} \varphi(1) - p(0) \frac{du(0)}{dx} \varphi(0) \right) .$$

Per quanto detto sopra la variazione in $x = 0$ si annulla, pertanto il secondo termine a secondo membro scompare. Nel termine che sopravvive, l'unica funzione test che non si annulla in $x = 1$ è $N_2^{k,N}$. Questa funzione nel nodo di contorno $x = 1$ assume valore unitario, di conseguenza si ricava che

$$\left[-p(x) \frac{du(x)}{dx} \varphi(x) \right]_0^1 = -p(1) \frac{du(1)}{dx} N_2^{k,N}(1) = -p(1) \frac{du(1)}{dx} .$$

Valutando la condizione naturale come indicato dalla sua definizione, si ricava

$$\left[-p(x) \frac{du(x)}{dx} \varphi(x) \right]_0^1 = -p(1) \frac{du(1)}{dx} = -p(1)y(1) .$$

Si osserva che nessun termine della precedente equazione viene moltiplicato per una componente della variabile incognita, pertanto può essere portato al secondo membro dell'equazione, sommandosi al termine forzante

$$\int_0^1 p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{d\varphi(x)}{dx} dx + \int_0^1 g(x)u(x)\varphi(x) dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) dx + p(1)y(1) .$$

La condizione di Dirichlet viene imposta manipolando direttamente la matrice di interazione. Si procede dunque con l'azzerare tutti i termini della riga corrispondente alla componente dell'incognita agente sul bordo $x = 0$, eccetto per la posizione corrispondente a tale nodo che viene lasciata a valore unitario.

1.5 Problemi multidimensionali

Dopo aver inquadrato i principi essenziali del metodo agli elementi finiti, si allarga la trattazione anche al caso di domini multidimensionali (2D e 3D). Per fare ciò occorre ampliare la definizione di partizione, introducendo il concetto di *mesh* o *griglia computazionale*. Consideriamo un dominio convesso bidimensionale Ω avente frontiera $\partial\Omega = \Gamma$. E' possibile generare una partizione di tale dominio in N sotto domini Ω_e tali per cui

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N-1} \Omega_e, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j. \quad (1.23)$$

Viene definita mesh l'insieme delle linee che delimitano le regioni Ω_e . Prendendo come esempio

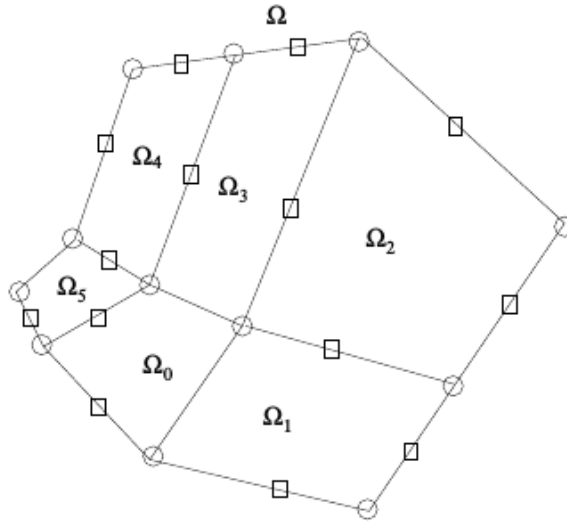


Figura 1.4. Dominio bidimensionale Ω e sua suddivisione in elementi Ω_e .

la figura 1.4, i punti che delineano i confini delle regioni della partizione sono denominati *nodi*. Su di essi sono valutate le componenti della soluzione ottenuta attraverso la risoluzione del problema lineare. Dopo aver determinato questi valori, la soluzione viene calcolata su tutte le regioni del dominio tramite l'uso di tecniche di interpolazione.

Un elemento fondamentale è generare uno strumento in grado di passare dalla numerazione locale dei nodi a quella globale, e viceversa. Sia data $\{P_i^e\}_{i=1}^{n_e}$ la numerazione locale degli n_e nodi dell'elemento Ω_e , allora è possibile ricavare la corrispondente numerazione globale mediante la

funzione \mathcal{P} : $\{P_n\} = \mathcal{P}(P_i^e)$. Dove $\{P_n\}_{n=1}^{N_p}$ rappresenta gli N_p nodi globali del dominio Ω , aventi coordinate $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{N_p}$. Questa funzione definisce una mappatura che correla ogni nodo globale alla corrispondente posizione globale nel dominio, essa viene comunemente nominata *mappatura locale/globale*.

Riscriviamo dunque la PDE del problema esempio 1.1 nel caso di dominio multidimensionale

$$\nabla \cdot [-p(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})] + g(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega .$$

Moltiplicando per la generica funzione test ϕ e integrando sul dominio si ricava

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [-p(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})] \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} .$$

La formulazione debole è dunque ottenuta risolvendo il primo termine mediante il teorema di Gauss-Green

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [-p(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p(\mathbf{x})\nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\ + \int_{\Omega} g(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} . \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ipotizzando di imporre le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = C_1 \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 , \\ \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = C_2 \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 , \end{aligned}$$

con $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ e $C_1, C_2 \in R$. Imponendo l'annullamento delle funzioni test dove sono imposte le condizioni di Dirichlet (Γ_1), il contributo dell'integrale sul contorno risulta

$$\int_{\Gamma} [-p(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_2} -p(\mathbf{x}) C_2 \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} .$$

Questo si traduce nella risoluzione di un integrale di linea nel caso di dominio bidimensionale, di superficie per sistemi tridimensionali.

1.5.1 Il caso 2D

Un generico dominio bidimensionale convesso viene discretizzato secondo la definizione 1.23 in una mesh di elementi quadratici o triangolari. Nel seguito i dettagli fondamentali di queste tipologie sono analizzati.

Elementi quadratici: *QUAD4* e *QUAD9*

Nel caso di utilizzo di una mesh quadratica il dominio canonico è l'elemento con centro nell'origine e vertici $(-1,-1), (1,-1), (1,1)$ e $(-1,1)$, come mostrato in 1.5. In analogia con quanto visto

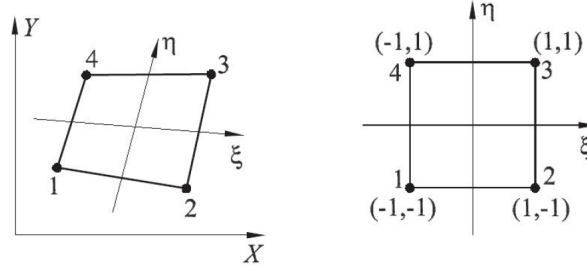


Figura 1.5. Dominio bidimensionale Ω e sua suddivisione in elementi Ω_e .

nel caso monodimensionale, la mappatura per passare dalle coordinate locali (x_i^e, y_i^e) a quelle canoniche (ξ_i, η_i) è data da

$$\begin{aligned}\xi &= -1 + 2 \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}, & -1 \leq \xi \leq 1, \\ \eta &= -1 + 2 \frac{y-y_i}{y_{i+1}-y_i}, & -1 \leq \eta \leq 1.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Nel caso in cui si rappresenta la soluzione nello spazio X_h^1 , le funzioni di forma sono date da polinomi lineari. Il numero di nodi per ogni elemento locale è $N_p = 4$ e il mesh generato viene nominato '*QUAD4*'. Le funzioni di forma possono essere facilmente generate a partire da quelle monodimensionali mediante un'operazione di composizione,

$$QUAD4 = EDGE2 * EDGE2.$$

A partire dalle funzioni di forma N_k^1 , descritte nel caso monodimensionale, si generano le nuove funzioni come segue

$$\begin{aligned}N_1^1(\xi, \eta) &= N_1^1(\xi)N_1^1(\eta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2}, \\ N_2^1(\xi, \eta) &= N_2^1(\xi)N_1^1(\eta) = \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2}, \\ N_3^1(\xi, \eta) &= N_2^1(\xi)N_2^1(\eta) = \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2}, \\ N_4^1(\xi, \eta) &= N_1^1(\xi)N_2^1(\eta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2}.\end{aligned}$$

Quando la soluzione necessita di un grado di approssimazione maggiore, si utilizza lo spazio X_h^2 . Questo è ottenuto aggiungendo ulteriori nodi nei punti mediani di ogni lato e nell'origine

dell'elemento canonico . La mesh così ottenuta prende il nome di 'QUAD9' in quanto la funzione viene valutata in $N_p = 9$ nodi. Anche in questo caso le funzioni di forma sono ricavate tramite prodotto tensoriale del precedente mesh monodimensionale,

$$QUAD9 = EDGE3 * EDGE3 .$$

Si ricavano le seguenti funzioni di forma

$$\begin{aligned} N_1^2(\xi, \eta) &= N_1^2(\xi)N_1^2(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)\xi\frac{1}{2}(1 - \eta)\eta , \\ N_2^2(\xi, \eta) &= N_2^2(\xi)N_1^2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi\frac{1}{2}(1 - \eta)\eta , \\ N_3^2(\xi, \eta) &= N_2^2(\xi)N_2^2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi\frac{1}{2}(1 + \eta)\eta , \\ N_4^2(\xi, \eta) &= N_1^2(\xi)N_2^2(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)\xi\frac{1}{2}(1 + \eta)\eta , \\ N_5^2(\xi, \eta) &= N_3^2(\xi)N_1^2(\eta) = (1 - \xi)(1 + \xi)\frac{1}{2}(1 - \eta)\eta , \\ N_6^2(\xi, \eta) &= N_2^2(\xi)N_3^2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi(1 - \eta)(1 + \eta) , \\ N_7^2(\xi, \eta) &= N_3^2(\xi)N_2^2(\eta) = (1 - \xi)(1 + \xi)\frac{1}{2}(1 + \eta)\eta , \\ N_8^2(\xi, \eta) &= N_1^2(\xi)N_3^2(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)\xi(1 - \eta)(1 + \eta) , \\ N_9^2(\xi, \eta) &= N_3^2(\xi)N_3^2(\eta) = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta) . \end{aligned}$$

A questo punto si ricava l'inverso delle relazioni (1.25) per ottenere la mappatura per passare dall'elemento canonico $\Omega_{\xi, \eta}$ a quello locale Ω^e . Essendo questa una relazione lineare, è possibile descrivere questa funzione mediante l'utilizzo dei polinomi lineari sopra descritti. Definendo con \mathbf{x}_j^e le coordinate dei vertici dell'elemento locale, vale che

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi, \eta) = \sum_j^{nf=4} \mathbf{x}_{j=1}^e N_j^1(\xi, \eta) .$$

Una volta scelto lo spazio in cui rappresentare la soluzione, si esegue l'integrazione della formulazione debole (1.24). I passaggi che portano all'ottenimento del sistema lineare non vengono esposti in quanto analoghi al caso monodimensionale. Sono invece analizzate le strategie con cui applicare il metodo di Gauss e la gestione degli operatori differenziali. Un generico integrale nel dominio locale viene calcolato sul dominio canonico come segue

$$\int_{\Omega^e} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega^e} f(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta .$$

Dalla definizione (1.21) si ricava l'espressione Laplaciano bidimensionale

$$J = J(\xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}.$$

Gli operatori differenziali sono risolti nel seguente modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}^e)}{\partial x} &= \sum_j^{nf} f(\mathbf{x}_j^e) \left(\frac{N_j^1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{N_j^1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^e)}{\partial y} &= \sum_j^{nf} f(\mathbf{x}_j^e) \left(\frac{N_j^1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{N_j^1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

dove le derivate delle funzioni di forma sono ricavate dalle componenti della matrice Jacobiana inversa avente espressione

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Gli integrali, infine, sono approssimati a delle sommatorie utilizzando il metodo di Gauss. Anche in questo caso i nodi ξ_g sono sempre interni al dominio $\xi_g \eta \in (-1, 1)$, di conseguenza

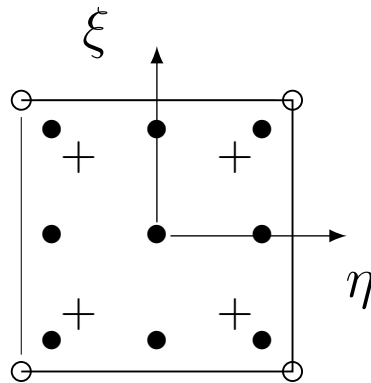


Figura 1.6. Nodi di gauss di due diverse quadrature indicate con " + " e " • ".

la funzione integranda non viene mai valutata agli estremi del dominio canonico. Un'ulteriore proprietà, applicata anche nel seguito di questa tesi, è la caratteristica di non avere mai nodi in comune tra due diverse quadrature, come evidenziato in figura (1.6).

Elementi triangolari: 'TRI3'

Si analizza ora il procedimento per la risoluzione di problemi discretizzati utilizzando mesh triangolari. In questi casi in ogni elemento la soluzione è valutata su tre nodi, per questo

motivo queste mesh sono indicate col termine *TRIS*. L'elemento canonico è rappresentato in figura 1.7, esso è formato dai vertici P1,P2 e P3, rispettivamente di coordinate (0,0),(1,0) e (0,1). In questa risoluzione le coordinate canoniche non sono generate da una mappatura lineare come la (1.25), ma introducendo un particolare sistema detto *coordinate triangolari*. Il nuovo riferimento è indicato con le variabili canoniche ξ_1, ξ_2 e ξ_3 . Esse sono definite nel seguente modo.

Sia dato un triangolo di vertici P1,P2 e P3, come sopra descritto e un punto P interno ad esso, si definisce sistema di coordinate triangolari le tre coordinate (ξ_1, ξ_2, ξ_3) così ricavate

$$\xi_k = \frac{A_k}{A}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.26)$$

Dove A indica l'area del triangolo, mentre A_k l'area del sotto rettangolo di vertici $\{P_i; G; P_j\}$, con $i, j \neq k$.

In un sistema di coordinate triangolari vale che

1. $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ sempre,
2. $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \frac{1}{3}$ nel baricentro.

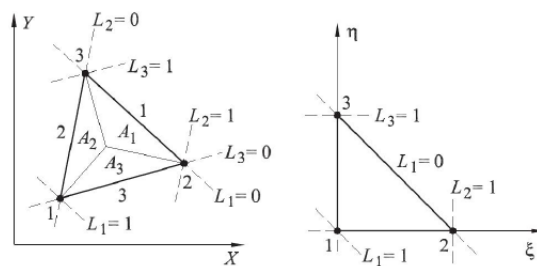


Figura 1.7. Dominio bidimensionale Ω e sua suddivisione in elementi Ω_e .

Queste nozioni forniscono anche le regole per creare la mappatura per passare dalle coordinate (x, y, z) , dell'elemento locale, alle coordinate (ξ_1, ξ_2, ξ_3) dell'elemento canonico. Si osserva come le tre coordinate triangolari non sono linearmente indipendenti, utilizzando la prima relazione si ricava che $\xi_1 = 1 - \xi_2 - \xi_3$.

Come svolto precedentemente, le funzioni test sono generate in maniera tale da essere unitarie nel vertice in cui sono definite e nulle in tutti gli altri. La loro espressione è di seguito esposta

$$\begin{aligned} N_1^1(\xi_2, \xi_3) &= 1 - \xi_2 - \xi_3, \\ N_2^1(\xi_2, \xi_3) &= \xi_2, \\ N_3^1(\xi_2, \xi_3) &= \xi_3. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Utilizzando queste funzioni come basi dello spazio, si ricava una mappatura inversa per descrivere le coordinate locali in funzione di quelle canoniche

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi_2, \xi_3) = \sum_j^{nf=3} \mathbf{x}_j^e N_j^1(\xi_2, \xi_3). \tag{1.28}$$

In maniera analoga si definisce il Laplaciano

$$J = J(\xi_2, \xi_3) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}.$$

Grazie a quest'ultimo è possibile effettuare il cambio di dominio di integrazione nella valutazione degli integrali e il calcolo delle derivate grazie alle componenti della sua matrice inversa J^{-1} . I passaggi appena accennati e quelli successivi per l'ottenimento del sistema lineare sono del tutto analoghi a quanto svolto nei casi precedenti. L'unica differenza di cui si accenna soltanto è nella quadratura gaussiana, infatti i nodi di quadratura in un dominio triangolare sono diversi rispetto quelli utilizzati per gli elementi quadrangolari.

1.5.2 Il caso 3D

Nel caso di domini tridimensionali numerose sono le geometrie utilizzate per discretizzare il dominio, tetraedri e esaedri sono fra le più comuni ed utilizzate. In questo lavoro si accenna soltanto allo sviluppo di mesh formate da esaedri ed al modo in cui generare le funzioni di forma nel dominio canonico. Il procedimento è analogo al caso bidimensionale, per tale motivo solo le nozioni estremamente significative vengono esposte.

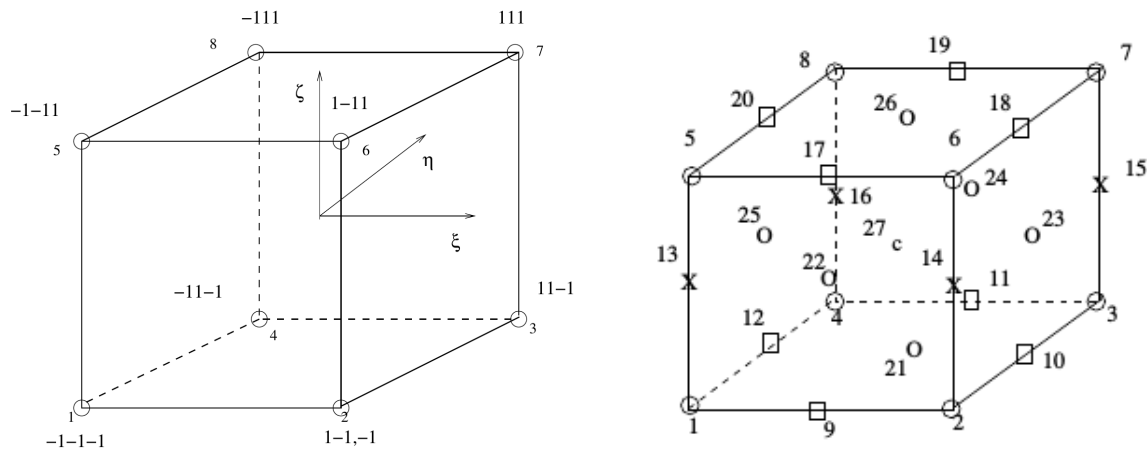


Figura 1.8. Rappresentazione di un HEX8 a sinistre e di un HEX27 a destra.

Elementi quadratici: *HEX8* e *HEX27*

Consideriamo di voler rappresentare la soluzione nello spazio X_h^1 . In questo approccio l'elemento canonico è dato da un cubo i cui vertici sono i nodi in cui la funzione viene valutata risolvendo il sistema lineare. Per tale motivo questo elemento viene nominato *HEX8*. Tuttavia è possibile aumentare il grado di approssimazione aggiungendo nodi nei i punti medi di ogni spigolo e faccia, compreso il nodo centrale. Questo nuovo elemento è nominato *HEX27* e viene utilizzato per la rappresentazione delle funzioni nello spazio X_h^2 . Un confronto di questi due elementi è dato dalla figura 1.8.

La generazione delle funzioni di forma è ottenuta mediante composizione delle analoghe funzioni nel dominio monodimensionale

$$HEX8 = EGE2 * EGE2 * EGE2 ,$$

$$HEX27 = EGE3 * EGE3 * EGE3 .$$

In analogia, le funzioni di forma sono ricavate dalla seguente espressione

$$N_j^{p,e}(\xi, \eta, \zeta) = N_l^p(\xi)N_m^p(\eta)N_n^p(\zeta) .$$

Dove l'indice p indica il grado della rappresentazione, lineare o quadratica, mentre i termini i, l, m, n numerano le corrispettive funzioni di forma. A questo punto è possibile interpolare

una generica funzione f a partire dai valori che assume nei nodi dell'elemento

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^{nf} f(\mathbf{x}_j) N_j^p(\xi, \eta, \zeta).$$

Seguendo lo stesso procedimento del caso 2D, si definisce la mappatura per passare dal sistema di coordinate canonico a quello globale

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^{nf} \mathbf{x}_{j=1}^e N_j^1(\xi, \eta, \zeta).$$

Infine la definizione della matrice Jacobiana è data dalla (1.21). Grazie ad essa si è in grado di passare dal dominio locale a quello canonico all'interno degli integrali e, grazie alle componenti della sua inversa, anche valutare le derivate delle funzioni. Una volta eseguiti questi passaggi la risoluzione degli integrali e l'ottenimento del sistema lineare si ricava applicando il metodo di Gauss.

Capitolo 2

Il modello frazionario

In questo capitolo viene introdotto lo spazio frazionario di Sobolev e l'operatore Laplaciano frazionario. La motivazione che ci spinge ad affrontare tali argomenti non sono solo giustificate dalla necessità di fornire le basi matematiche per lo sviluppo del successivo capitolo, ma anche dal fatto che rappresentano tematiche di ricerca estremamente avanzate e con un vasto campo di applicazioni. Infatti, nell'ultimo decennio, gli scienziati hanno indagato i vantaggi forniti dal calcolo frazionario per sviluppare modelli matematici sempre più sofisticati e adeguati. In particolare, il Laplaciano frazionario è stato utilizzato al posto del convenzionale Laplaciano in molte applicazioni, come ad esempio nei sistemi diffusivi, nei sistemi quasi geoscopici, nei mezzi porosi, nel flusso attraverso ostacoli e in molti altri. Nel seguito vengono esposti solo gli strumenti necessari alla risoluzione del problema del controllo, tuttavia, ulteriori informazioni e riferimenti bibliografici possono essere trovati nell'articolo di revisione in merito alle strategie di modellazione del Laplaciano frazionario [1].

Questo capitolo è dunque dedicato all'introduzione del modello matematico di operatore Laplaciano frazionario utilizzato nell'ambito dell'ottimizzazione ottimale. La sua definizione e le analogie con gli operatori non locali sono quindi sviluppate, al fine di ricavare le soluzioni analitiche e semi analitiche utilizzate poi nel successivo capitolo. Prima di introdurre questo operatore viene effettuata una breve presentazione dello spazio frazionario di Sobolev e di alcune sue proprietà essenziali. Per i lettori interessati si consiglia di consultare il recente lavoro di G. Leoni [2].

2.1 Introduzione allo spazio frazionario di Sobolev

Come appena accennato, i concetti dello spazio frazionario di Sobolev sono esposti di seguito. La trattazione mira a fornire le basi teoriche per l'applicazione analizzata successivamente, pertanto vengono presentati solo i concetti strettamente significativi per questo lavoro. Per cominciare, si fornisce la definizione di spazio frazionario e della sua norma.

Definizione 2.1 *Sia Ω un insieme aperto e contenuto in \mathbb{R}^n , lo spazio frazionario di Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ si definisce nel seguente modo*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\}, \quad (2.1)$$

per ogni $p \in [1, +\infty)$ e per ogni esponente frazionario $s \in (0, 1)$.

Definizione 2.2 *La norma dello spazio $W^{s,p}(\Omega)$ è definita come*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+sp}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.2)$$

Possiamo, inoltre, definire la Gagliardo semi-norma come

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+sp}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.3)$$

Questo spazio normato ha valore solamente se $s < 1$. Nel caso in cui l'esponente assuma valori frazionari al di sopra dell'unità esso deve essere definito come segue

Definizione 2.3 *Sia Ω un insieme aperto contenuto su \mathbb{R}^n , sia $m \geq 0$ un numero intero, s e p due numeri reali con $1 \leq p < \infty$ e $s = m + \sigma$, dove $\sigma \in \mathbb{R}$ e $0 < \sigma < 1$. Si definisce lo spazio frazionario di Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ nel seguente modo*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega) \wedge D^{\alpha}u \in W^{\sigma,p}(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| = m \right\}.$$

Per questa estensione degli spazi frazionari si può utilizzare la norma fornita da Girault Raviart [3] definita come

Definizione 2.4 (Norma frazionaria di Girault Raviart)

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^{\alpha}u(\mathbf{x}) - \partial^{\alpha}u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+sp}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

dove lo spazio delle distribuzioni u , definite su Ω , è tale per cui

$$u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Si osserva che la norma appena definita coincide con la (2.2) quando $m = 0$ e $s = 1/2$. In generale, si può osservare che essa è composta da due componenti. Il primo è dato dalla norma dello spazio intero, mentre il secondo è una forma frazionaria di derivata, individuata dalla Gagliardo semi-norma.

In letteratura è possibile trovare diverse relazioni per descrivere il comportamento di quest'ultimo termine per $s \rightarrow 0$ e $s \rightarrow 1$ [4]. Per $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vale che

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s) \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+sp}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} = C' \int_{\Omega} |\nabla u|^p d\mathbf{x}, \quad (2.4)$$

per una qualsiasi costante C' positiva e dipendente solo da n e p . Allo stesso modo, estendendo lo spazio funzionale di u a $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, si può dimostrare che

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+sp}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} = C'' \int_{\Omega} |u|^p d\mathbf{x}, \quad (2.5)$$

per una qualsiasi costante C'' positiva e dipendente solo da n e p . Per $p = 2$, si osserva che il limite (2.4) tende alla norma di $H^1(\Omega)$ moltiplicata per la costante C' e il limite (2.5) tende alla norma in $L^2(\mathbb{R}^n)$ moltiplicata per la costante C'' . Un importante teorema, essenziale per la comprensione della relazione tra lo spazio intero di Sobolev, lo spazio frazionario e lo spazio delle funzioni misurabili è il seguente.

Sia $0 < s \leq s_1 < 1$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile, allora vale che

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s_1,p}(\Omega)},$$

per alcune costanti positive $C = C(n, s, p) \geq 1$. In particolare,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset W^{s_1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Visto che nel seguito sono considerati solo casi in cui $p = 2$, utilizziamo la seguente notazione $W^{s,p}(\Omega) = W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$ per indicare lo spazio di Hilbert di nostro interesse. Sfruttando tale convenzione e considerando i risultati di quest'ultimo teorema e la relazione tra gli spazi di Sobolev e di Lebesgue (appendice A.2), vale che

$$H^1(\Omega) \subset H^{1/2}(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega). \quad (2.6)$$

Questa relazione è fondamentale per lo sviluppo dei prossimi capitoli, in quanto stabilisce la relazione tra lo spazio frazionario e quello intero di Sobolev. Grazie a queste informazioni siamo quindi in grado di individuare correttamente lo spazio di appartenenza della soluzione e capire le proprietà di cui deve essere fornita.

2.1.1 Il Laplaciano frazionario

Come precedentemente affermato si analizzano solo casi in cui $p = 2$. Come dimostrato in [5] risulta che $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, per quanto riguarda l'esponente frazionario, solo il caso $s = 1/2$ viene qui considerato, ovvero

$$H^{1/2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\}. \quad (2.7)$$

Questo spazio risulta essere uno spazio di Hilbert, di conseguenza è possibile descrivere le funzioni in esso definite utilizzando le componenti della sua base. Indicando come funzioni test questi elementi, è evidente il suo utilizzo per la risoluzione di PDE mediante il metodo FEM.

Inoltre tali spazi si dimostrano essere strettamente legati all'operatore Laplaciano frazionario, $(-\Delta)^s$, definito come

$$(-\Delta)^s u(\mathbf{x}) = c_{n,s} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y}, \quad 0 < s < 1, \quad (2.8)$$

dove *P.V.* sta a indicare "in the principle value sense" (inteso al valore principale) [4]. La costante $c_{n,s}$ dipende da s e dalla dimensione del problema n . Il suo valore è così valutato

$$c_{n,s} = s 2^{2s} \frac{\Gamma(\frac{n+2s}{2})}{\pi^{n/2} \Gamma(1-s)}, \quad (2.9)$$

dove $\Gamma(*)$ è la nota funzione Gamma: $\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt$.

Nel lavoro di Di Nezza [4], è stata dimostrata una proprietà che risulta essere fondamentale per la trattazione del problema del controllo analizzato in questa tesi. Il risultato è riassunto dal seguente teorema.

Sia $s \in (0, 1)$ e sia $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, allora vale la seguente relazione

$$[u]_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^2 = 2 c_{n,s}^{-1} \|(-\Delta^s)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad (2.10)$$

dove $c_{n,s}$ è definito dalla (2.9).

Questo fornisce una relazione lineare tra l'operatore Laplaciano frazionario e la Gagliardo semi-norma valutata sull'intero spazio vettoriale \mathbb{R}^n .

Analizzando nel dettaglio la definizione dell'operatore frazionario $(-\Delta)^s$ si osserva che nella (2.8) l'integrale nella variabile \mathbf{y} è esteso a tutto lo spazio \mathbb{R}^n . Questo implica che la valutazione nel punto \mathbf{x} risulta essere influenzata dai valori che la funzione assume in tutti i punti del dominio. Questa caratteristica è tipica degli *operatori non locali*, analizzati nel seguito. Prima di analizzare questo passaggio, è utile fornire alcune nozioni sulle *mappature a due variabili*.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un generico dominio. Si definisce mappatura a due variabili, la funzione avente il seguente comportamento: $\Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m,k}$, o \mathbb{R}^m , o \mathbb{R} .

A seconda del dominio di arrivo si avrà una funzione tensoriale $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ con $\Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m,k}$, una funzione vettoriale $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ con \mathbb{R}^m , e una funzione scalare $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ con \mathbb{R} .

Data ψ una generica mappatura, si definisce non negativa se

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Una mappatura a due variabili viene detta

- *simmetrica se $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega$;*
- *antisimmetrica se $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega$*

2.1.2 Operatori non locali

Recentemente i modelli non-locali stanno riscontrando sempre più successo per la modellazione di numerosi fenomeni, pertanto il loro impiego nella simulazione numerica è in continuo

aumento. Alcuni campi in cui sono utilizzati sono, ad esempio, la meccanica strutturale, lo studio di flussi bifase, la turbolenza e molti altri. In [4, 6] si possono trovare ulteriori casi e citazioni bibliografiche inerenti a svariate applicazioni dei modelli non locali. In particolare, questi risultano particolarmente utili quando la classica diffusione “locale” non è sufficiente a rappresentare la fisica del problema.

Se nei modelli convenzionali delle equazioni differenziali l’interazione tra due elementi è possibile esclusivamente solo tra zone a contatto tra loro, al contrario, nei modelli non locali un elemento può essere influenzato da tutti gli altri mediante interazioni a distanza. Un operatore “non locale” viene definito come segue.

Dato $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato si definisce l’operatore non locale \mathfrak{L} , agente su $u(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, come

$$\mathfrak{L}u(\mathbf{x}) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}))\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (2.11)$$

dove il kernel $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una mappatura simmetrica e non negativa.

Si espone dunque il problema della diffusione non locale.

Problema 2.1 Sia dato l’operatore non locale $\mathfrak{L}u(\mathbf{x})$, definito dalla (2.11), agente sul dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Il problema della diffusione non locale, con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee è così definito

$$\begin{cases} -\mathfrak{L}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{su } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \text{su } \Omega_l. \end{cases} \quad (2.12)$$

Si osserva che le condizioni al contorno sono fissate su una regione di volume Ω_l , la quale è sconnessa da Ω . Nel campo dell’analisi numerica Ω_l è generalmente un dominio finito che circonda Ω . Di solito questa regione viene presa come una sfera di raggio δ , come volto in [6]. In questi casi il dominio $\Omega_l = \Omega_{I_\delta}$ è definito come

$$\Omega_{I_\delta} = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ tale che } \mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}) \text{ per alcune } \mathbf{x} \in \Omega \}, \quad (2.13)$$

dove con $B_\delta(\mathbf{x})$ si è indicata la sfera di raggio δ centrata in \mathbf{x} .

Il Laplaciano frazionario come caso di un operatore non locale

Dopo aver introdotto il Laplaciano frazionario e l'operatore non locale, analizziamo il legame tra i due. Mettendo in relazione le equazioni (2.8) e (2.11) e definendo il Kernel come

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{c_{n,s}}{2|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2s}} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

allora è evidente come il Laplaciano frazionario assuma la forma di un operatore non locale.

La mappatura descritta nella (2.14) è sicuramente definita non negativa, per la proprietà del valore assoluto che compare al denominatore, inoltre, risulta essere simmetrica. Per queste ragioni si può scrivere che

$$-\mathfrak{L}u(\mathbf{x}) = (-\Delta)^s, \quad 0 < s < 1.$$

Considerando il problema della diffusione non locale, prendendo \mathfrak{L} nella forma introdotta dalla (2.11), il kernel dato dalla (2.14) e la funzione $f \in L^2(\Omega)$, allora la formulazione debole dell'equazione (2.12) può essere scritta come

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} (\nu(\mathbf{y}) - \nu(\mathbf{x})) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \nu \, d\mathbf{x}, \quad \forall \nu \in H_{\Omega}^s(\mathbb{R}^n). \quad (2.15)$$

I modelli non locali sono più generali rispetto a quelli frazionari o locali. Infatti è possibile stabilire una relazione tra i modelli non locali con le sue controparti di modelli locali e frazionari. In particolare, si osserva che le equazioni differenziali alle derivate parziali (PDEs), come descritte dalle (2.12)-(2.13), possono essere viste come il limite locale ($\delta \rightarrow 0$), mentre le equazioni differenziali frazionarie sono il limite globale ($\delta \rightarrow \infty$) dei modelli non locali [7].

La restrizione del modello non locale al dominio Ω in esame, è ottenuto imponendo le seguenti condizioni

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \nu(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \quad (2.16)$$

2.2 Soluzione numerica del Laplaciano frazionario di Riesz

Come analizzato precedentemente, gli operatori frazionari agenti su un dominio limitato possono essere visti come operatori di diffusione non locale [6]. Per questa ragione l'implementazione

numerica di questi operatori non è del tutto chiara e l'interesse della comunità scientifica in questo campo di ricerca sta crescendo sempre più. Focalizzando la nostra attenzione sull'operatore Laplaciano frazionario, in letteratura si possono trovare diversi modelli numerici proposti [1].

Un approccio molto utilizzato si basa sulla rappresentazione secondo Dunford-Taylor, approccio anche detto metodo spettrale. Questo, infatti, consiste nel formulare un problema differenziale agli autovalori. Il procedimento porta alla valutazione del calcolo dell'inverso del Laplaciano grazie all'utilizzo della formula di Balakrishnan e una quadratura con la funzione sinc (funzione seno cardinale). Nonostante questa tecnica non permetta di calcolare direttamente l'operatore, risulta molto vantaggiosa dal punto di vista implementativo.

Un'ulteriore tecnica, sempre basata sulla rappresentazione di Dunford-Taylor, è detta metodo integrale del Laplaciano frazionario, essa si basa sull'uso delle trasformate di Fourier. In maniera simile al metodo spettrale, anch'essa utilizza una quadratura mediante la funzione seno cardinale, ma permette di calcolare direttamente il Laplaciano frazionario, senza dover passare prima dal suo inverso. Questi metodi, ampiamente sviluppati da Bonito e altri, non sono trattati in questo lavoro di tesi, pertanto, ai lettori interessati, si suggerisce di consultare i seguenti articoli [8, 9, 10].

Il metodo utilizzato in questo lavoro consiste, invece, nell'approssimare numericamente il Laplaciano frazionario a partire dalla sua formulazione debole (2.15). Questo metodo è detto integrazione del Laplaciano frazionario di Riesz e consiste nel modellare il Laplaciano frazionario come un operatore non locale.

2.2.1 Il Laplaciano frazionario di Riesz

Il Laplaciano frazionario di Riesz si basa sullo sviluppo della formulazione debole (2.15) in cui la restrizione delle funzioni al dominio Ω è ottenuta applicando la relazione (2.16). Si procede dunque a valutare l'integrale definito su \mathbb{R}^n nel seguente modo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (*) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} (*) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} (*) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x} + \\ &+ \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} (*) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} (*) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

La condizione imposta dalla (2.16) implica che

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} (\nu(\mathbf{y}) - \nu(\mathbf{x})) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = 0 .$$

Per semplificare la notazione si dichiara il kernel $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\nu(\mathbf{y}) - \nu(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}}$. Possiamo ora scrivere la seguente relazione

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\nu(\mathbf{y}) - \nu(\mathbf{x})) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \\ & = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\nu(\mathbf{y}) - \nu(\mathbf{x})) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \nu(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y} d\mathbf{x} . \end{aligned}$$

Il Laplaciano frazionario per il dominio limitato Ω assume la forma

$$\begin{aligned} & \frac{c_{n,s}}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} (\nu(\mathbf{y}) - \nu(\mathbf{x})) d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \\ & + c_{n,s} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \nu(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \nu d\mathbf{x} , \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\forall v \in H_{\Omega}^s(\mathbb{R}^n).$$

Il sistema può essere più semplicemente rappresentato mediante l'utilizzo della funzione

$$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{c_{n,s}}{2} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} (\nu(\mathbf{y}) - \nu(\mathbf{x})) .$$

Considerando il problema (2.12), la funzione $u(\mathbf{x})$ appartiene allo spazio $H^{1/2}(\Omega)$, mentre la f si ipotizza appartenere allo spazio $L^2(\Omega)$. Si possono definire i seguenti spazi per le funzioni test

$$\begin{aligned} \mathbf{V} & = \{v \in L^2(\Omega \cup \Gamma) : \|v\| < \infty \text{ e } v|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = 0\} , \\ \mathbf{V}_0 & = \{v \in \mathbf{V} : v|_{\Gamma} = 0\} . \end{aligned}$$

È ora possibile scrivere la formulazione debole (2.15) in maniera compatta

$$\mathcal{A}(u, \nu) = \mathcal{F}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbf{V}_0, \quad (2.18)$$

soggetto a $u = 0$ su Γ . Gli operatori $\mathcal{A}(u, \nu)$ e $\mathcal{F}(\nu)$ sono definiti come segue

$$\mathcal{A}(u, \nu) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} ,$$

$$\mathcal{F}(\nu) = \int_{\Omega} f\nu \, d\mathbf{x}.$$

Utilizzando il risultato dato dalla (2.17) è possibile dividere il Laplaciano frazionario in due integrali

$$\mathcal{A}(u, \nu) = \mathcal{B}(u, \nu) + \mathcal{C}(u, \nu) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} + 2 \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}d\mathbf{y}. \quad (2.19)$$

Nel seguito viene indicato con $\mathcal{B}(u, \nu)$ l'integrale limitato nel dominio (“*bounded integral*”), in quanto definito solo sul dominio $\Omega \times \Omega$, mentre $\mathcal{C}(u, \nu)$ viene etichettato integrale misto (“*mixed integral*”), perché agente su $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Di seguito sono proposti dei metodi per modellare questi operatori.

2.2.2 Approssimazione agli elementi finiti del metodo di Riesz

In questa sezione è esposta l'approssimazione del Laplaciano frazionario di Riesz, con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee, mediante il metodo agli elementi finiti.

Introduciamo dunque la discretizzazione FEM del dominio Ω in N_{el} elementi finiti, $\{\Omega^e\}_{e=1}^{N_{el}}$. Come visto nel capitolo 1, tale mesh risulta composta da triangoli o quadrilateri, se il dominio è bidimensionale, da tetraedri o esaedri nel caso tridimensionale. Sia inoltre \mathbf{V}_0^h lo spazio finito dimensionale, sottospazio di \mathbf{V}_0 . Indicando con N_{dof} la sua dimensione e con $\{\nu_i\}_{i=1}^{N_{dof}}$ una delle sue basi. Allora è possibile scrivere la soluzione u_h dell'equazione (2.18) come $u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{dof}} U_i \nu_i(\mathbf{x})$. Utilizzando la relazione $v \in \{\nu_i\}_{i=1}^{N_{dof}}$ e considerando la formula (2.19) per l'integrale del Laplaciano di Riesz, è possibile ridurre l'equazione (2.18) al seguente sistema algebrico

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (2.20)$$

Il vettore $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N_{dof}}$ ha per componenti i valori della funzione incognita u_h nei nodi della mesh.

Modellazione numerica dell'integrale limitato al dominio

In questa sezione è analizzata la strategia numerica per la valutazione della matrice \mathbf{B} nella (2.20), ossia la soluzione del primo integrale dell'equazione (2.17). La sua discretizzazione è

data da

$$\begin{aligned} & \frac{c_{n,s}}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} (\nu(\mathbf{y}) - \nu(\mathbf{x})) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x} \simeq \\ & \simeq \frac{c_{n,s}}{2} \sum_{el_x=1}^{N_{el}} \sum_{x_g=0}^{n_g(el_x)} J_{x_g} w_{x_g} \left(\sum_{el_y=1}^{N_{el}} \sum_{y_g=0}^{n_g(el_y)} J_{y_g} w_{y_g} \frac{u(\mathbf{y}_g) - u(\mathbf{x}_g)}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}_g|^{n+2s}} (\nu(\mathbf{y}_g) - \nu(\mathbf{x}_g)) \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sia definita la funzione

$$\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{c_{n,s}}{2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}}.$$

Approssimando la soluzione mediante combinazione lineare delle funzioni della base \mathbf{V}_0 , ovvero $u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{dof}} U_i \nu_i(\mathbf{x})$, gli elementi della matrice B assumono la seguente forma

$$B_{ij} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} (\nu_i(\mathbf{y}) - \nu_i(\mathbf{x})) (\nu_j(\mathbf{y}) - \nu_j(\mathbf{x})) \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x}.$$

Essendo il metodo di Riesz caratterizzato da un approccio non locale del Laplaciano frazionario, il sistema numerico che si deve risolvere è caratterizzato da una matrice A che risulta essere densa. Di conseguenza, la risoluzione di questi operatori risulta essere una sfida dal punto di vista numerico, in quanto richiedono una potenza di calcolo molto elevata. La densità della matrice necessita la memorizzazione di un elevato insieme di dati e il conseguente aumento del tempo di calcolo e dei costi computazionali.

Al fine di mostrare le equazioni implementate nel codice, è utile risolvere il prodotto all'interno dell'integrale appena ricavato. La matrice B_{ij} può essere scomposta in quattro termini nel seguente modo

$$B_{ij} = B_{ij}^{11} + B_{ij}^{12} + B_{ij}^{21} + B_{ij}^{22},$$

dove

$$\begin{aligned} B_{ij}^{11} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nu_i(\mathbf{y}) \nu_j(\mathbf{y}) \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x}, \\ B_{ij}^{12} &= - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nu_i(\mathbf{y}) \nu_j(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x}, \\ B_{ij}^{21} &= - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nu_i(\mathbf{x}) \nu_j(\mathbf{y}) \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x}, \\ B_{ij}^{22} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nu_i(\mathbf{x}) \nu_j(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Come dimostrato in [11], essendo il kernel $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ una funzione simmetrica su \mathbf{x} e \mathbf{y} , è possibile semplificare l'implementazione numerica di B_{ij} come segue

$$B_{ij} = 2B_{ij}^{11} + 2B_{ij}^{12} = 2B_{ij}^{21} + 2B_{ij}^{22} .$$

L'implementazione di questo metodo, mediante solutore agli elementi finiti, è piuttosto ardua. Oltre a dover manipolare matrici dense, dalla formula del kernel $\eta(\mathbf{x}_g, \mathbf{y}_g)$ si osserva che è presente una singolarità quando $el_x = el_y$. Per evitare ciò vengono utilizzate due tipi di quadratura differenti per la discretizzazioni delle variabili \mathbf{x} e \mathbf{y} . Infatti, come noto dal capitolo 1.5 e come evidenziato dalla figura 1.6, i punti di gauss di due differenti quadrature non sono mai coincidenti. L'algoritmo 1 mostra l'implementazione dell'assemblaggio della matrice B_{ij} nel caso in cui $el_y = el_x$. Si osserva l'utilizzo di due differenti regole di quadratura, $Q_1 = (x_{q_1}, w_{q_1})_{q_1}$ e $Q_2 = (x_{q_2}, w_{q_2})_{q_2}$, per arginare il problema della singolarità nella regione definita da $\Omega \cup \Gamma$.

Infine, si accenna a un metodo ancora più efficace per la soluzione del problema della singolarità del denominatore nel kernel $\eta(\mathbf{x}_g, \mathbf{y}_g)$. Questo metodo viene utilizzato ogni volta che $el_y = el_x$ e il nodo di quadratura, in cui si sta valutando l'integrale, è lo stesso sia per la variabile \mathbf{x} che per la \mathbf{y} . Questa strategia consiste in una tecnica adattiva per modificare il mesh del sistema, in maniera da evitare la singolarità e mantenere, al tempo stesso, una buona approssimazione dell'integrale. Per la quadratura sulla cella el_x , essa prevede di prendere quella prevista dalla normale routine di integrazione di gauss, mentre per la cella el_y si genera un mesh centrato sul nodo di gauss \mathbf{x}_g . La generazione di tale griglia è mostrata in figura 2.1 e consiste nel dividere il dominio el_y in 2^n sotto celle che tra di loro condividono il punto di gauss \mathbf{x}_g . Queste sono generate dividendo il dominio in quattro zone attorno al punto in esame e ulteriormente suddivise usando i punti medi dei loro lati. Si ripete tale procedimento fino a ottenere un numero sufficiente di raffinamenti per garantire la corretta valutazione dell'integrale. Il passaggio successivo prevede di prendere i punti \mathbf{y}_g come i nodi di gauss di queste ultime sotto celle. Seguendo questo procedimento, indicando con $N_{RefCells}$ il numero di celle, generate da N_{split} suddivisioni, la sommatoria $\sum_{y_g=0}^{n_g(el_y)}$ può essere riscritta come

$$\sum_{y_g=0}^{n_g(el_y)} (*) = \sum_{n=0}^{N_{RefCells}(N_{split})} \sum_{y_g=0}^{n_g(el_y(n))} (*) . \quad (2.22)$$

Algoritmo 1 Assemblaggio della matrice locale per il Laplaciano frazionario di Riesz.

1) Doppio ciclo sugli elementi

for $el_y = 1, N_{el}$ **do**

for $el_x = 1, N_{el}$ **do**

2) Doppio ciclo sulle funzioni test.

for $i = 0, nDof1$ **do**

for $j = 0, nDof2$ **do**

3) Doppio ciclo sulle due diverse regole di quadratura. Sia preso per l'integrale su \mathbf{y} textla quadratura Q_1 , mentre per l'integrale su \mathbf{x} la quadratura Q_2

for $q_1 = 1, N_{q_1}$ **do**

for $q_2 = 1, N_{q_2}$ **do**

4) Assemblaggio della matrice locale, divisa in quattro componenti

$$A_{ij}^{11} += \frac{C_{ns} \nu_i(x_{g_1}) \nu_j(x_{g_1}) w_{x_{g_1}} w_{x_{g_2}} J_{x_{g_1}} J_{x_{g_2}}}{|\mathbf{x}_{g_1} - \mathbf{x}_{g_2}|^{n+2s}}$$

$$A_{ij}^{12} += \frac{C_{ns} (-\nu_i(x_{g_1}) \nu_j(x_{g_2}) w_{x_{g_1}} w_{x_{g_2}} J_{x_{g_1}} J_{x_{g_2}})}{|\mathbf{x}_{g_1} - \mathbf{x}_{g_2}|^{n+2s}}$$

end for

end for

end for

end for

end for

end for

Per quanto affermato nel capitolo 1.5, i punti di una quadratura gaussiana sono sempre interni alla cella considerata, pertanto non sono mai coincidenti con i nodi dell'elemento in esame. Si conclude dunque che, essendo i nodi \mathbf{y}_g appartenenti a celle avente come vertice comune il punto \mathbf{x}_g , questi nodi non saranno mai coincidenti e la singolarità viene così evitata. Inoltre, è importante notare che, grazie a questa tecnica viene effettuato un raffinamento del mesh attorno al nodo di Gauss considerato. Questo conduce a una migliore accuratezza del risultato numerico quando il kernel viene valutato attorno ai suoi punti critici. In questa tesi ci limiteremo a

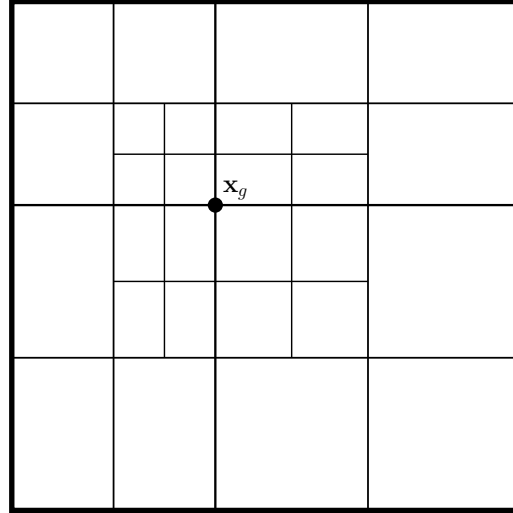


Figura 2.1. Raffinamento della cella per il punto di quadratura \mathbf{x}_g .

sviluppare solo la prima delle strategie fornite per la valutazione di questa singolarità. Tuttavia, uno sviluppo di quest'ultima applicazione è proposto in [12].

Modellazione numerica dell'integrale misto

In letteratura, molti lavori che trattano la modellazione dell'integrale misto su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ nella (2.17) si basano sull'estensione del dominio limitato Ω con un dominio Ω_l ausiliario. In queste applicazioni, di solito, il comportamento del Laplaciano frazionario è calcolato all'interno di una sfera $B_\lambda(\mathbf{x})$ di raggio λ centrata nel punto \mathbf{x} [6]. In questi casi Ω_l viene definito come $\bigcup_i B_\lambda(\mathbf{x}_i)$, $\forall \mathbf{x}_i \in \Omega$. Quindi l'integrale su Ω risulta essere definito su $\Omega \cup \Omega_l$, e l'integrale su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è definito su $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap B_\lambda(\mathbf{x}_i)$.

In questo lavoro, viene analizzato un differente approccio. In questo capitolo sono introdotti metodi numerici e semi-analitici per il calcolo dell'integrale misto del Laplaciano frazionario di Riesz, ossia la valutazione delle componenti C_{ij} della matrice di rigidità C dell'equazione (2.20). Viene quindi analizzata la soluzione numerica della seguente espressione

$$\mathcal{C}(u, v) = c_{n,s} \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y}d\mathbf{x}.$$

Si ricorda che in questa tesi sono considerati solo i casi con $n = 2$ e $n = 1$. Sviluppando l'integrazione di Gauss sull'integrale esterno, si ricava la formula dell'integrale su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, anche

indicato con il termine “*unbounded integral*”

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.23)$$

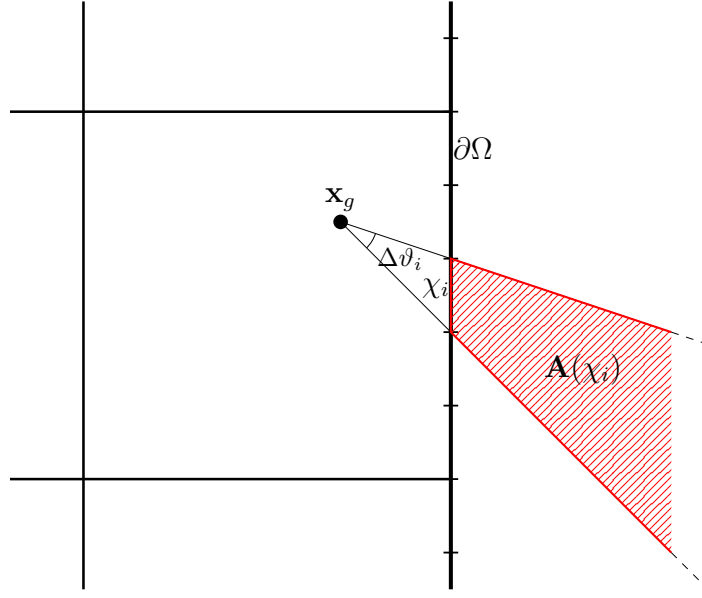


Figura 2.2. Area di integrazione per ogni suddivisione della regione $\partial\Omega$.

Per ogni nodo di Gauss, \mathbf{x}_g , viene implementato un ciclo sull'intero contorno del dominio del problema ($\partial\Omega$). In particolare, come mostrato in figura 2.2, ogni elemento del confine è suddiviso in un numero N_{split} di suddivisioni definito dall'utente. Questo porta a partizionare la frontiera in χ_i regioni, con $i = 1, 2, \dots, N_{split}$. Ovviamente un elevato numero di suddivisioni porta a una migliore approssimazione numerica, a scapito però dell'aumento del costo computazionale. Si indica poi con $A(\chi_i)$ l'area esterna al dominio Ω , racchiusa dalle rette aventi in comune il nodo \mathbf{x}_g e passanti per uno degli estremi della regione χ_i . Il dominio di integrazione, a questo punto, è dato da $\{\mathbb{R}^n \setminus \Omega\} = \bigcup_i A(\chi_i)$. Per tali ragioni si ricava

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N_{split}} \int_{A(\chi_i)} \frac{1}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y}. \quad (2.24)$$

Sia $\tilde{\mathbf{y}}_i$ il nodo centrale della regione ξ_i , allora l'integrale appena ricavato viene approssimato lungo i punti appartenenti alla retta \mathcal{I} , data dalla congiunzione del nodo di Gauss \mathbf{x}_g e del

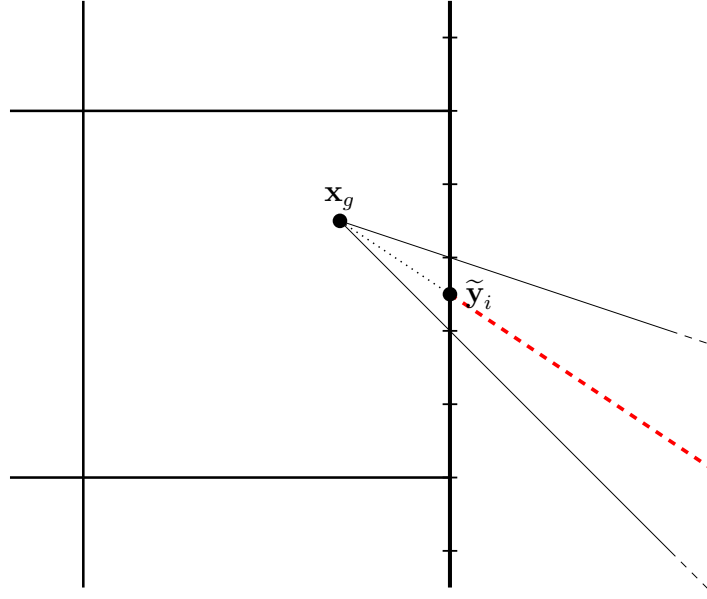


Figura 2.3. Strategia numerica per l'integrale misto di un elemento della suddivisione di $\partial\Omega$.

punto $\tilde{\mathbf{y}}_i$, come rappresentato in figura 2.3. Considerando il parametro t come la distanza tra i nodi \mathbf{x}_g e $\mathbf{y} \in \mathcal{I}$, ossia $t = |\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|$. Approssimando poi l'area infinitesima $d\mathbf{y}$ con $\Delta\vartheta t dt$, l'integrale può essere valutato con la seguente formula

$$\int_{A(\xi_i)} \frac{1}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y} \simeq \Delta\vartheta_i \int_{|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|}^{+\infty} \frac{1}{t^{n+2s}} t dt,$$

la quale implica che

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta_i \int_{|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|}^{+\infty} \frac{1}{t^{n+2s-1}} dt &= \Delta\vartheta_i \left[\frac{1}{-(n+2s-2)t^{n+2s-2}} \right]_{|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|}^{+\infty} \\ &= \frac{\Delta\vartheta_i}{(n+2s-2)|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|^{n+2s-2}}. \end{aligned}$$

Pertanto, l'integrale misto dell'equazione (2.17) diventa

$$\begin{aligned} c_{n,s} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \nu(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y} d\mathbf{x} &\simeq \\ &\simeq \sum_{el_x=1}^{N_{el}} \sum_{x_g=0}^{n_g(el_x)} J_{x_g} w_{x_g} u(\mathbf{x}_g) \nu(\mathbf{x}_g) \sum_{i=1}^{N_{split}} \frac{\Delta\vartheta_i}{(n+2s-2)|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|^{n+2s-2}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Un caso particolare di questo problema si ha quando $n = 1$, dove il dominio di integrazione diventa lo spazio reale \mathbb{R} . Per queste applicazioni è stata trovata una formula analitica per la

valutazione dell'integrale misto. Dato il dominio $\Omega = [a, b]$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > a$, allora, per qualunque x_g appartenente all'interno dell'intervallo $]a, b[$ vale che

$$\int_a^b \frac{1}{|x_g - y|^{n+2s}} dy = \frac{1}{n + 2s - 1} \left(\frac{1}{(x_g - a)^{n+2s-1}} + \frac{1}{(b - x_g)^{n+2s-1}} \right). \quad (2.26)$$

In [13] è stato dimostrato che questa soluzione risulta essere una buona metodologia per la valutazione dell'integrale misto nei problemi di controllo che sono analizzati nel seguito.

Formula analitica in domini bidimensionali

Di seguito si propone un'ulteriore formula analitica dell'integrale nella (2.17) per il caso in cui $n = 2$. Questa soluzione permette di calcolare l'integrale in maniera analitica anche nei casi in cui il Laplaciano deve essere valutato su domini bidimensionali. In letteratura, come precedente accennato, sono presenti solo soluzioni numeriche per questa valutazione, pertanto il procedimento esposto di seguito rappresenta una novità nello stato dell'arte.

Si consideri il dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ di forma poligonale, tale per cui ogni elemento i -esimo del contorno può essere descritto attraverso l'equazione di una retta nello spazio \mathbb{R}^2 . Indicando con Γ il contorno di Ω e con Γ_i i lati che delimitano tale regione, vale che $\cup_i \Gamma_i = \Gamma$. Considerando il contributo dato da un generico elemento di bordo Γ_i , si osserva che il denominatore nell'espressione dell'integrale, ovvero $|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|$, appartiene all'insieme non limitato superiormente $[\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i, \infty[$, dove $\tilde{\mathbf{y}}_i$ è un generico punto appartenente al segmento di contorno Γ_i . Al fine di valutare l'integrale, si esegue un cambio di coordinate da quelle cartesiane a quelle polari

$$\begin{cases} |\mathbf{x}_g - \mathbf{y}| = t \\ d\mathbf{y} = t dt d\theta \end{cases}$$

Posto $R_i = |\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|$, allora vale la relazione $|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}| \in [R_i, \infty[$ e i nuovi estremi di integrazione sono dati da

$$\begin{cases} t \in [R_i, \infty[\\ \theta \in [\theta_{1,i}; \theta_{2,i}] \end{cases}$$

Sia $a_i x + b_i y + c_i = 0$ la retta che descrive il bordo Γ_i . Ignorando per il momento l'indice i e utilizzando le coordinate polari R_i e θ_i si ottiene la relazione

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

e la retta considerata può essere dunque riscritta nel seguente modo

$$aR \cos \theta + bR \sin \theta + c = 0,$$

da cui si ricava l'estremo inferiore dell'integrazione sulla variabile t

$$R = \frac{-c}{a \cos \theta + b \sin \theta}. \quad (2.27)$$

Si può valutare l'integrale misto nel seguente modo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+sp}} d\mathbf{y} &= \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \int_R^{\infty} \frac{1}{t^{n+sp}} t dt d\theta \\ &= \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \int_R^{\infty} t^{1-n-sp} dt d\theta, \end{aligned}$$

da cui, risolvendo il primo integrale e ponendo $n = 2$, si ricava

$$\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \left[\frac{t^{2-n-sp}}{-sp} \right]_R^{\infty} d\theta = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \left[\frac{t^{-sp}}{-sp} \right]_R^{\infty} d\theta. \quad (2.28)$$

Essendo $s \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Q}_+$, allora $sp > 0$. Di conseguenza il termine per $t \rightarrow \infty$ si annulla e rimane soltanto quello per $t = R$. Sostituendo inoltre il valore ottenuto nella (2.27) l'integrale (2.28) diventa

$$\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{R^{-sp}}{sp} d\theta = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{\left(\frac{-c}{a \cos \theta + b \sin \theta} \right)^{-sp}}{sp} d\theta = \frac{(-c)^{-sp}}{sp} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \left(\frac{1}{a \cos \theta + b \sin \theta} \right)^{-sp} d\theta.$$

Definendo poi la variabile

$$d_{c,sp} = \frac{1}{sp * (-c)^{sp}},$$

si ricava

$$d_{c,sp} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} (a \cos \theta + b \sin \theta)^{sp} d\theta.$$

Questo integrale, in generale, ha soluzione ricorsiva. Tuttavia nel caso analizzato, dove $s = 1/2$ e $p = 2$, la soluzione diventa

$$\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} (a \cos \theta + b \sin \theta) d\theta = a[\sin \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} - b[\cos \theta]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Eseguendo il procedimento per tutti gli N_Γ elementi di contorno Γ_i e sommando i contributi così ottenuti, si ricava che

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+sp}} d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N_\Gamma} d_{c,sp,i} [a_i(\sin \theta_{2,i} - \sin \theta_{1,i}) - b_i(\cos \theta_{2,i} - \cos \theta_{1,i})] \quad (2.29)$$

Infine, l'integrale misto dell'equazione (2.17) diventa

$$\begin{aligned} c_{n,s} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \nu(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y} d\mathbf{x} &\simeq \\ &\simeq \sum_{el_x=1}^{N_{el}} \sum_{x_g=0}^{n_g(el_x)} J_{x_g} w_{x_g} u(\mathbf{x}_g) \nu(\mathbf{x}_g) \sum_{i=1}^{N_\Gamma} d_{c,sp,i} [a_i(\sin \theta_{2,i} - \sin \theta_{1,i}) - b_i(\cos \theta_{2,i} - \cos \theta_{1,i})]. \end{aligned}$$

Riassumendo, la risoluzione del Laplaciano frazionario di Reitz può esse calcolata secondo la seguente formula

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N_\Gamma} g_i(\mathbf{x}_g),$$

dove la funzione g_i rappresenta il contributo della porzione di bordo Γ_i , valutato con una delle tre metodologie sopra proposte. Pertanto sostituendo nella (2.21) una delle tre espressioni (2.25), (2.26) o (2.29), si ottiene la modellizzazione del Laplaciano frazionario agli elementi finiti

$$\begin{aligned} &\sum_{el_x=1}^{N_{el}} \sum_{x_g=0}^{n_g(el_x)} J_{x_g} w_{x_g} \left(\sum_{el_y=1}^{N_{el}} \sum_{y_g=0}^{n_g(el_y)} J_{y_g} w_{y_g} \frac{u(\mathbf{y}_g) - u(\mathbf{x}_g)}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}_g|^{n+2s}} (\nu(\mathbf{y}_g) - \nu(\mathbf{x}_g)) \right) \\ &+ \sum_{el_x=1}^{N_{el}} \sum_{x_g=0}^{n_g(el_x)} J_{x_g} w_{x_g} u(\mathbf{x}_g) \nu(\mathbf{x}_g) \sum_{i=1}^{N_\Gamma} g_i(\mathbf{x}_g) = \quad (2.30) \\ &= \sum_{el_x=1}^{N_{el}} \sum_{x_g=0}^{n_g(el_x)} J_{x_g} w_{x_g} f(\mathbf{x}_g) \nu(\mathbf{x}_g). \end{aligned}$$

Le tre strategie di calcolo proposte in questo capitolo sono, infine, di seguito riassunte.

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+sp}} d\mathbf{y} = \begin{cases} \mathcal{A} & \text{se } 1 \leq n \leq 2, \\ \mathcal{B} & \text{se } n = 1, \\ \mathcal{C} & \text{se } n = 2, \end{cases}$$

dove i parametri sono pari a

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{i=1}^{N_{split}} \frac{\Delta\vartheta_i}{(n+2s-2)|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|^{n+2s-2}}, \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{n+2s-1} \left(\frac{1}{(x_g - a)^{n+2s-1}} + \frac{1}{(b - x_g)^{n+2s-1}} \right), \\ \mathcal{C} &= \sum_i d_{c,sp,i} [a_i(\sin \theta_{2,i} - \sin \theta_{1,i}) - b_i(\cos \theta_{2,i} - \cos \theta_{1,i})]. \end{aligned}$$

Capitolo 3

Il Controllo Ottimale

L'interesse verso la teoria matematica alla base del problema del controllo sta vedendo, negli ultimi anni, un forte aumento in importanti ambiti della matematica applicata e dell'ingegneria. Infatti, in molte applicazioni pratiche è sempre più richiesta la ricerca di prestazioni ottimali in modo da massimizzare l'efficienza del sistema. La climatizzazione di un edificio, lo studio del profilo alare di una autovettura o di una turbina, il moto di un flusso all'interno di un canale sono alcuni esempi di queste applicazioni. Con lo sviluppo delle più recenti tecnologie e le continue richieste di minimizzazione dell'energia è sempre più richiesta l'ottimizzazione del sistema, in maniera tale da garantire le migliori prestazioni in termini di efficienza e spesa energetica.

Questa pratica cerca dunque di manipolare alcune zone, o parametri del sistema in maniera tale da generare le volute risposte per soddisfare determinate richieste. Un esempio di problema di controllo può essere quello di manipolare l'ambiente per ottenere un voluto profilo di temperatura, o di flusso termico, all'interno di una determinata regione dello spazio. Storicamente si è risposto a queste richieste trovando la soluzione mediante metodi *try and fail*, o attraverso la semplice modellazione delle equazioni differenziali che governano la fisica in esame. La teoria del controllo invece, fornisce un metodo che si appoggia su ampie basi matematiche. Questo procedimento assicura di trovare la configurazione che risulta essere matematicamente ottimizzata.

Viste le numerose applicazioni in cui il problema del controllo può essere attuato, è utile

classificare alcune famiglie di questi problemi. In primo luogo si possono trattare casi stazionari dove le variabili del sistema non dipendono dal tempo, oppure casi non stazionari nei quali si studia il sistema nella sua evoluzione temporale. Nel primo caso la soluzione ottimale viene calcolata solo una volta, mentre nel secondo il procedimento deve essere svolto per ogni istante temporale, valutando così l'evoluzione nel tempo del controllo. Un'altra classificazione è data dal tipo di equazione differenziale con la quale si modella la fisica del problema. È dunque possibile avere problemi basati su equazioni alle derivate totali (ODE) o alle derivate parziali (PDE). I primi trovano impiego nell'ambito della robotica, del controllo delle reazioni chimiche e degli impianti di energia. Ricadono nella seconda tipologia di controllo, invece, tutti quei fenomeni in cui la derivata ordinaria non è sufficiente, come i problemi di scambio termico, di diffusione, di fluidodinamica, di cambiamento di fase e molti altri ancora. Quest'ultima famiglia è ulteriormente suddivisibile in base al tipo di PDE in esame: ellittica, parabolica, iperbolica, lineare o non lineare. Ognuna di queste famiglie si divide ulteriormente a seconda delle condizioni al contorno imposte: Neuman, Dirichlet, Robin. Nel seguito della trattazione vengono analizzati problemi del controllo stazionari, in cui l'equazione differenziale è una PDE ellittica con condizioni al contorno di Dirichlet. Ulteriori casi di analisi, come lo studio di equazioni paraboliche lineari e non, possono essere approfonditi nel lavoro di Tröltzsch [14].

Questi problemi si suddividono poi in base al modo in cui il controllo viene attuato. Si parla, pertanto, di controllo distribuito, di contorno o di forma. Il primo permette di modificare il comportamento di determinati parametri all'interno del dominio al fine di modificare lo stato generale del sistema. Questa procedura, nonostante risulti molto facile da simulare numericamente, non è molto utilizzata nella pratica, in quanto non sempre è possibile accedere all'interno del sistema per effettuare le dovute modifiche. Al contrario la strategia opposta prevede di agire direttamente sulla parte più esterna del dominio, pertanto questa modalità risulta essere la più sfruttata nelle applicazioni pratiche. Tuttavia, questi vantaggi non si trasmettono alla sua modellazione matematica e alla conseguente implementazione numerica. Infatti, in queste applicazioni compaiono gli operatori frazionari discussi nel capitolo precedente. L'ultimo caso, il controllo di forma, agisce sulle caratteristiche geometriche del volume. Questo tipo di controllo è tipico delle applicazioni aerodinamiche e fluido-strutturali (FSI), pertanto

rappresenta un ambito di ricerca in forte crescita e sviluppo.

La seguente tesi tratta del problema del controllo in cui il sistema viene ottimizzato mediante manipolazioni delle variabili sulla superficie di contorno del dominio (*Boundary Optimal Control*). Nel seguente capitolo viene esposta la formulazione del problema di ottimo mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il problema viene poi analizzato seguendo tre strategie risolutive, classificate in base alla regolarizzazione effettuata sulla variabile di controllo. Queste strategie sono la regolarizzazione intera, la regolarizzazione frazionaria e la regolarizzazione tramite funzione di lifting.

3.1 Formulazione del problema del controllo

In questa sezione vengono analizzate la struttura matematica e le componenti che portano alla formulazione del problema del controllo. Come visto nel capitolo 1, la modellazione dei fenomeni fisico-ingegneristici viene effettuata attraverso equazioni differenziali. Per ammettere un'unica soluzione, queste devono essere affiancate da precise condizioni al contorno. Indichiamo come *equazioni di stato* o *equazioni del vincolo* la PDE e le sue condizioni, mentre la funzione “ u ” che le risolve, ovvero il comportamento fisico del sistema, è nominata *variabile di stato*. Classicamente lo stato del sistema si ottiene risolvendo il seguente problema differenziale.

Problema 3.1 Sia $\mathcal{F}(u)$ una generica PDE descritta dalla (1.1), definita su un dominio Ω e avente K elementi di bordo Γ_k . Siano, inoltre, date K funzioni $f_k(x)$, allora il problema differenziale ricerca la funzione u che risolve il seguente sistema

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u) = 0 & \text{su } \Omega, \\ a_k u(\mathbf{x}) + b_k \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) & \text{su } \Gamma_k, \\ k = 1, 2, \dots, K, \end{cases}$$

dove i coefficienti a_k e b_k sono generici per rappresentare qualsiasi condizione al contorno.

A differenza di questi problemi, dove le condizioni al contorno sono funzioni note a priori, nel caso del problema del controllo una (o più) di queste è rappresentata dalla variabile incognita

“ q ”, detta *variabile di controllo*. Quest’ultima descrive la soluzione del problema, ossia l’azione da attuare sulla *regione di controllo* “ Γ_c ” al fine di ottenere il comportamento del sistema desiderato. Pertanto una nuova tipologia di condizione al contorno viene introdotta, mediante l’utilizzo dell’operatore *traccia di funzione*, la cui definizione è dato dal seguente *teorema della traccia*.

Sia data una funzione $u(\mathbf{x})$ appartenente allo spazio di Sobolev, con grado di differenziabilità m , sul dominio Ω . Si definisce *traccia di funzione* l’operatore che, applicato a $u(\mathbf{x})$, restituisce la funzione $q(\mathbf{x})$ data dai valori della funzione di partenza sul contorno $\Gamma = \partial\Omega$. Indicando con γ_0 tale operatore, il suo comportamento è così descritto

$$\begin{aligned}\gamma_0 : H^m(\Omega) &\rightarrow H^{m-1/2}(\Gamma), \\ \Rightarrow q(\mathbf{x}) &= \gamma_0 u(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Questa condizione, applicata sul bordo di controllo, indica che la funzione u , su questa regione, deve assumere valori pari a quelli della variabile di controllo q . In altre parole, su Γ_c l’andamento dello stato viene modificato dalla variabile di controllo al fine di effettuare l’ottimizzazione voluta. Questo operatore, inoltre, risulta essere iniettivo per quanto dimostrato in [3].

Il comportamento richiesto dallo stato è definito *target* (o *obiettivo*) ed è rappresentato matematicamente da un set di valori “ u_d ”. La regione “ Ω_d ” in cui si vuole applicare il controllo è detta *regione del target*, la quale può coprire l’intero dominio o parte di esso. Fino ad ora ci siamo limitati a introdurre i vincoli del sistema, tuttavia è necessario un ulteriore elemento che metta in relazione lo stato con il target e la variabile di controllo. Questo componente è dato da un funzionale “ $\mathcal{T}(u, q)$ ”, detto *costo funzionale*, funzione della variabile di stato e del controllo. Inoltre, esso è composto da due fattori. Il primo, detto *funzionale obiettivo*, assume una forma quadratica in cui è espressa la norma L^2 della differenza tra lo stato u e il target u_d , pertanto viene valutato sulla regione del target Ω_d . Questo componente valuta così l’errore di ottimizzazione, cioè quanto lo stato ottenuto si discosta dal comportamento desiderato. Il secondo termine “ $G(q)$ ” viene definito *fattore di regolarizzazione*. Esso viene introdotto per conferire determinate proprietà matematiche alla soluzione. Agendo sulla variabile di controllo q , influenza anche il comportamento dello stato, di conseguenza è un termine estremamente rilevante per la gestione di questi problemi e un’analisi più dettagliata è esposta nel seguito.

Il costo funzionale risulta, dunque, essere una grandezza dell'accuratezza del controllo, tiene conto sia dello scostamento dall'obiettivo, che della regolarità della variabile di controllo. Per ottenere uno stato conforme con la richiesta, occorre individuare la variabile q tale da generare uno stato u in grado di minimizzare il costo funzionale. Questa operazione è effettuata applicando il concetto di derivata e di punto di minimo al funzionale appena descritto. Il problema del controllo può essere dunque formulato come segue:

Problema 3.2 *Trovare la coppia di funzioni $(u, q) \times (H^m(\Omega), Q(\Gamma_c))$ che minimizzano il seguente funzionale*

$$\mathcal{T}(u, q) = \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{\Omega_d}^2 + \frac{\alpha}{2} G(q)^2, \quad (3.1)$$

rispettando i seguenti vincoli

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= 0 & \text{su } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= q(\mathbf{x}) & \text{su } \Gamma_c, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 & \text{su } \Gamma \setminus \Gamma_c. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nel problema proposto si è indicato con $H^m(\Omega)$ lo spazio di Sobolev in cui risiede lo stato del sistema, mentre con Q quello della variabile di controllo. Essendo quest'ultima generata da una restrizione (o traccia) della funzione u sul contorno di controllo Γ_c , dalla definizione della traccia di una funzione si ricava il *teorema del bilancio della regolarità*. Quest'ultimo risulta essere un principio cardine della teoria del controllo e il suo enunciato è esposto di seguito.

Si dice che il problema di controllo ottimale è bilanciato in termini di regolarità delle funzioni se: lo spazio della funzione ottimale appartiene allo spazio di Sobolev $H^m(\Omega)$, con grado di differenziabilità "m", mentre la variabile di controllo risiede nello spazio di Sobolev $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, con grado di differenziabilità "m - 1/2".

Questo teorema individua lo spazio di appartenenza del controllo a partire da quello della variabile stato. Essendo quest'ultima vincolata ad appartenere allo spazio funzionale della PDE che lo governa, si può concludere che a seconda della fisica in esame, la soluzione q è obbligata a risiedere entro un preciso spazio funzionale individuato dal teorema della traccia [15]. Per molte delle applicazioni ingegneristiche questo risulta essere lo spazio frazionario di Sobolev $H^{1/2}$ (capitolo 2).

3.1.1 Il funzionale $G(q)$

Lo spazio della soluzione del problema del controllo è stato individuato dal teorema del bilancio della regolarità. Vincolare una funzione ad appartenere a un preciso spazio funzionale implica imporre dei vincoli in termini di misurabilità e differenziabilità. Queste caratteristiche sono dettate dalla norma che definisce lo spazio vettoriale stesso. Argomento di questa sezione è capire le strategie attraverso le quali si può vincolare la variabile di controllo ad appartenere allo spazio delle soluzioni precedentemente individuato.

Ricordando la formulazione del problema 3.2, si osserva che l'incognita q appare nella condizione al contorno del problema differenziale. Essendo una condizione al contorno, essa viene applicata alla variabile di stato u senza imporre alcuna restrizione sulla variabile di controllo. Di conseguenza, questa funzione può essere scelta liberamente e può appartenere a qualsiasi spazio funzionale, anche diverso da quello richiesto dal teorema della traccia. In altri termini, i soli vincoli del problema, agendo solo sulla variabile di stato, non impongono limitazioni sulla scelta della variabile di controllo. Per introdurre le restrizioni necessarie a vincolare la soluzione allo spazio funzionale appropriato, è stato necessario aggiungere un ulteriore termine nel costo funzionale. Questo componente è stato indicato con $G(q)$ e nominato *fattore di regolarizzazione*.

Possiamo vedere questo fattore come un "modellatore" della variabile di controllo, responsabile della sua forma e regolarità. Di conseguenza la scelta di questo componente vincola la soluzione ad appartenere in un preciso spazio funzionale. Si può dunque enunciare il *teorema della regolarizzazione*.

Sia dato il problema del controllo 3.2 e due fattori di regolarizzazione $G_1(q)$ e $G_2(q)$ allora vale che:

- *regolarizzazioni in diversi spazi vettoriali portano a soluzioni diverse,*
- *regolarizzazioni diverse, ma nello stesso spazio vettoriale, generano soluzioni comuni.*

In questa tesi tre tipologie di regolarizzazione sono analizzate. I casi analizzati sono solo quelli in cui la variabile di stato appartiene allo spazio di Sobolev H^1 . Questa semplificazione è giustificata dal fatto che, in seguito, sono esaminati problemi governati dall'operatore Laplaciano, il quale genera soluzioni all'interno di questo spazio vettoriale.

Il primo metodo consiste nel prendere la restrizione q appartenente allo stesso spazio H^1 della funzione u . Una scelta immediata del funzionale G è data dalla norma di tale spazio, definita come segue

$$G(q) = \|q\|_{H^1(\Gamma_c)} = \left[\int_{\Gamma_c} (|q(\mathbf{x})|^2 + |\nabla q(\mathbf{x})|^2) d\mathbf{x} \right]^{1/2}.$$

Come si osserva, tale soluzione non rispetta la proprietà del bilancio della regolarità delle funzioni. Infatti, la funzione così ricercata appartiene allo spazio H^1 più piccolo dello spazio $H^{1/2}$, come evidenziato dalla relazione (2.6). Di conseguenza, trascurando un vasto numero di soluzioni, l'ottimizzazione del problema risulta essere più approssimata e il valore del costo funzionale più elevato. Ovviamente, eseguendo una regolarizzazione anche sul gradiente, la soluzione così ottenuta risulta più regolare e meno oscillatoria rispetto a quelle appartenenti allo spazio frazionario $H^{1/2}$.

Il secondo metodo consiste nel prendere direttamente la soluzione nello spazio dettato dal teorema della traccia. Dunque, nel caso di soluzione in H^1 , la restrizione (variabile di controllo) appartiene allo spazio $H^{1/2}$. Il fattore di regolarizzazione, in maniera analoga alla precedente, viene preso pari alla norma che definisce il suddetto spazio frazionario. La norma frazionaria è ricavata dall'equazione (2.2) ponendo $s = 1/2$, come segue

$$G(q) = \|q\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+\frac{1}{2} \cdot 2}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Due aspetti di questo approccio vanno sottolineati. Il primo, punto di forza del metodo, è che rispetta i requisiti del bilancio della regolarità. Di conseguenza questa soluzione, nonostante presenti profili più irregolari rispetto alla precedente, ottimizza meglio il sistema, riducendo notevolmente il valore del costo funzionale. Il secondo, invece, è un aspetto limitante del metodo. Infatti, nel cercare di minimizzare il funzionale $\mathcal{T}(u(\mathbf{x}))$ si esegue la differenziazione della norma frazionaria di q . Questo implica dover maneggiare l'operatore Laplaciano frazionario, il quale comporta notevoli difficoltà sia dal punto di vista matematico che implementativo.

L'ultimo metodo consiste nell'ipotizzare una soluzione del tipo: $u = \tilde{u} + \tilde{q}$. La funzione \tilde{q} si chiama *funzione di lifting* ed è definita in maniera tale che la sua restrizione, sul contorno

Γ_c , viene a coincidere con la variabile di controllo. La formulazione di questo metodo è ampiamente discusso nel seguito. Per il momento basti sapere che la soluzione così trovata, essendo ricavata tramite restrizione della funzione di lifting, appartiene allo spazio desiderato $H^{\frac{1}{2}}$. Il funzionale inoltre è definito in maniera tale da evitare di ricadere nella precedente, ed esosa, norma frazionaria. Esso viene infatti valutato attraverso la norma intera dello spazio H^1 su un dominio, $\Omega_c \subset \Omega$, detto *dominio di lifting*. Il funzionale $G(q)$ assume forma

$$G(q) = \|q\|_{H^1(\Omega_c)} = \left[\int_{\Omega_c} (|q(\mathbf{x})|^2 + |\nabla q(\mathbf{x})|^2) d\mathbf{x} \right]^{1/2}.$$

Poiché questa regolarizzazione conduce a una soluzione appartenente allo stesso spazio funzionale di quella ottenuta attraverso la regolarizzazione frazionaria, i due metodi devono generare soluzioni coincidenti. Di conseguenza, anche in quest'ultimo caso, il costo funzionale viene minimizzato a scapito della regolarità della funzione.

Possiamo concludere che il termine di regolarizzazione, in ognuna delle formule analizzate, è sempre scomponibile in due fattori: il primo dato dalla norma L^2 , il secondo, invece, legato alla misurabilità della derivata. Se il primo fattore è riconducibile alle proprietà di continuità della soluzione, il secondo riguarda le sue caratteristiche di differenziabilità. A seconda dell'applicazione fisico-ingegneristica è possibile avere richieste differenti sulla variabile di controllo in termini di queste proprietà matematiche. Infatti, nelle applicazioni reali è difficile generare profili di variabili fortemente irregolari, pertanto agendo su questi componenti si è in grado di addolcire il profilo della soluzione di ottimo. Ad esempio, considerando l'ultima espressione per il fattore di regolarizzazione, il funzionale dato dalla (3.1) assume la seguente forma

$$\mathcal{T}(u, q) = \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{\Omega_d}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega_c} |q(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega_c} |\nabla q(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Si osserva che, al tendere di α a zero, il primo termine del fattore di regolarizzazione viene trascurato. Questo implica che la soluzione ottenuta risulta essere molto irregolare, in quanto viene meno il fattore che ne regola la continuità. Lo stesso discorso vale per il coefficiente β , il quale agisce sulla derivata prima della soluzione. Si può dunque concludere che, aumentando il valore di questi parametri si ottengono andamenti della soluzione sempre più regolari, sia in termini di continuità che di differenziabilità. Di conseguenza la soluzione ricavata risulta essere

più attuabile all'atto pratico. Tuttavia, così facendo il controllo dedica maggiore rilevanza al termine di regolarizzazione piuttosto che alla minimizzazione del funzionale obiettivo. Infatti, osservando l'espressione generica del funzionale (3.1), si può considerare il coefficiente davanti al fattore di regolarizzazione come il peso che questo operatore ha rispetto alla minimizzazione dell'errore del controllo. Riassumendo, alti coefficienti portano a soluzioni più realizzabili e meno performanti, mentre bassi valori portano a minimizzazioni più irregolari e con bassi valori del funzionale di costo.

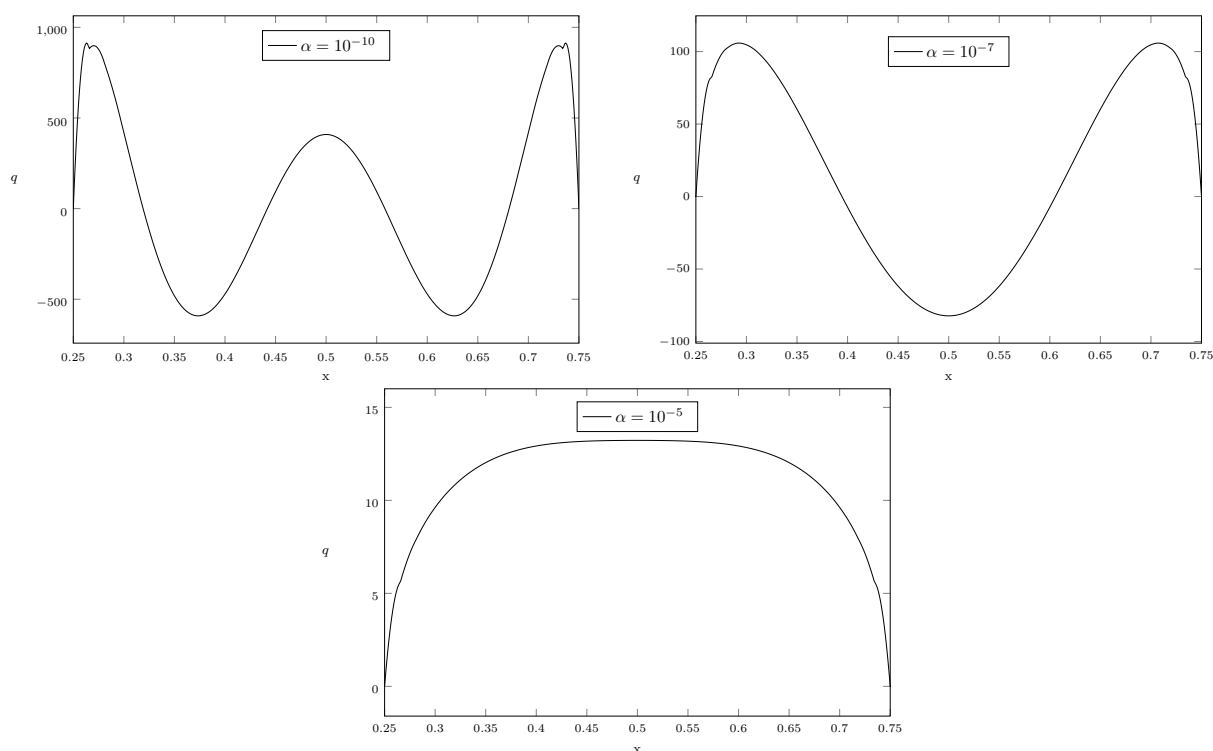


Figura 3.1. Variazione degli andamenti della funzione al variare del coefficiente moltiplicativo α del fattore di regolarizzazione.

In figura 3.1 si mostra l'influenza del coefficiente α sulla forma della soluzione di un problema del controllo. In questo caso è stato considerato lo stesso valore sia per il parametro α che β . Si osserva come la funzioni diventi sempre più regolare con l'aumentare di tale parametro.

3.2 Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Il problema del controllo ottimale è un argomento molto studiato in letteratura e rappresenta un campo di ricerca in continua evoluzione. Per questo motivo numerosi lavori sono stati svolti per ricavare strategie e algoritmi risolutivi per la soluzione di questi problemi. Ad esempio, il metodo del feedback lineare [16] viene utilizzato per l'analisi di sistemi complessi come l'aerodinamica delle turbine, la fluidodinamica di valvole o strozzature, lo studio dei flussi di energie negli impianti e in varie applicazioni elettroniche.

Un altro metodo, ampiamente utilizzato in quanto applicabile a numerosi problemi ingegneristici, è il metodo della *variabile aggiunta*. Esso permette di ricavare la minimizzazione del funzionale, espresso dalla (3.1), utilizzando i *moltiplicatori di Lagrange*, o *variabili aggiunte*. Data la sua vasta utilità, numerosi sforzi sono stati fatti per sviluppare algoritmi risolutivi basati su questo principio [17]. La maggior parte di essi sono processi iterativi, in cui a ogni ciclo la soluzione viene calcolata utilizzando le informazioni dello step precedente. Il procedimento viene poi ripetuto finché la distanza tra due soluzioni successive non scende al di sotto di una tolleranza prestabilita. In questa tesi, invece, viene proposto un algoritmo diretto per la soluzione del controllo ottimale. L'obiettivo è quello di trasformare il problema 3.2 in un sistema lineare, sempre mediante l'utilizzo dei moltiplicatori di Lagrange. La soluzione viene quindi ricavata dalla "semplice" inversione della matrice associata a tale sistema.

Il seguente paragrafo espone la formulazione matematica del metodo grazie alla quale si ricava il sistema del controllo le cui equazioni vengono implementate nei codici numerici, come quello utilizzato in questo lavoro di tesi.

3.2.1 Formulazione matematica

Per la prova dell'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange si riscrive il problema sopra citato, esprimendo l'equazione del vincolo nella sua *formulazione debole*.

Problema 3.3 *Trovare la coppia delle variabili di controllo $(u, q) \in H^1(\Omega) \times Q$ tali per cui*

minimizzino il funzionale

$$\mathcal{T}(u, q) = \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{L^2(\Omega_d)}^2 + \frac{\alpha}{2} G(q)^2, \quad (3.3)$$

sottoposto al seguente forzante

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v)_\Omega &= 0 & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(\mathbf{x}) &= q(\mathbf{x}) & \text{su } \Gamma_c, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 & \text{su } \Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_c. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Il costo funzionale dipende dalla distanza in norma tra la soluzione u e il valore obiettivo u_d , oltre che dal parametro di regolarizzazione $G(q)$. Al fine di mostrare la formulazione del metodo della variabile aggiunta, si semplifica quest'ultimo fattore con la sola norma L^2 , ossia $G(q) = \int_{\Gamma_c} q^2 dx$. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange permette dunque di minimizzare il funzionale garantendo il rispetto dei vincoli dati dal sistema (3.4). Le variabili del controllo in grado di soddisfare questi requisiti e di risolvere il problema fornito generano l'insieme delle coppie ammissibili, la cui definizione è la seguente

$$A_{ad} = \{u \in H^1, q \in Q \text{ tali per cui } \mathcal{T}(u, q) < \infty \text{ e } (u, q) \text{ soddisfano la (3.4)}\}.$$

La soluzione ricercata coincide dunque con la coppia (u, q) a cui corrisponde un minimo per il funzionale \mathcal{T} . La definizione di minimo di un funzionale è la seguente.

Definizione 3.1 *Si definisce minimo locale del funzionale $\mathcal{T}(u, q)$, le coppie $(\tilde{u}, \tilde{q}) \in A_{ad}$ tali per cui, per qualunque $\epsilon > 0$, si ha*

$$\mathcal{T}(\tilde{u}, \tilde{q}) \leq \mathcal{T}(u, q) \quad \forall (u, q) \in H^1(\Omega) \times Q \quad \text{e} \quad \|\tilde{u} - u\| < \epsilon.$$

Prima di applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si riscrive l'equazione del forzante e del funzionale mediante due mappature con lo scopo di studiare le loro proprietà in termini di differenziabilità. Procediamo, dunque, a definire i seguenti spazi vettoriali

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= U \times Q = H^1(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma_c), \\ \mathbf{B}_2 &= H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma_c) \times H^{-1/2}(\Gamma_D), \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_3 = H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma_c) \times H^{-1/2}(\Gamma_D) .$$

L'insieme \mathbf{B}_1 è dato dalle coppie delle incognite del problema, $\hat{q} = (u, q)$ mentre \mathbf{B}_2 e \mathbf{B}_3 sono due suoi spazi duali. Con questa notazione è possibile utilizzare il forzante del problema per generare la mappatura $M: \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_3$. Quest'ultima viene definita come $M(u, q) = (l_1, l_2)$ se e solo se

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = (l_1, v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) , \quad (3.5)$$

$$\int_{\Gamma_D} u \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_D} l_2 \phi \, d\mathbf{x} \quad \forall \phi \in H^{1/2}(\Gamma_D) .$$

Essendo generato a partire dai vincoli del sistema (3.4), M viene anche nominato *operatore forzante*. Come spiegato nel precedente paragrafo, questi vincoli sono dati dalla PDE che modella la fisica e dalle sue condizioni al contorno. Per questi motivi sul bordo del controllo Γ_c non viene fissato nessun valore, in maniera tale da lasciare la variabile di controllo libera di assumere la configurazione necessaria per minimizzare il costo funzionale.

Sia data la coppia $(u_1, q_1) \in A_{ad}$, si può definire la seconda mappatura utilizzando le equazioni (3.3) e (3.4). Sia $\mathcal{Q}: \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbf{B}_3$ tale mappatura, per $a \in \mathbb{R}$ si definisce $\mathcal{Q}(u, q) = (a, l_1, l_2)$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}(u, q) - \mathcal{T}(u_1, q_1) \\ M(u, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ (l_1, l_2) \end{pmatrix} . \quad (3.6)$$

Prima di studiare la differenziabilità di queste mappature, si ricorda la definizione di differenziabilità in senso stretto.

Siano X e Y due spazi di Banach, allora la mappatura $\varphi: X \rightarrow Y$ è strettamente differenziabile in $x \in X$ se esiste una mappatura D lineare e limitata, tale per cui per ogni $\epsilon > 0$ esiste una $\delta > 0$ tale per cui qualunque $\|x - x_1\|_X < \delta$ e $\|x - x_2\|_X < \delta$ per $x_1, x_2 \in X$, allora vale

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - D(x_1 - x_2)\|_Y \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|_X .$$

La derivata stretta D nel punto $x \in X$, se esiste, è di solito indicata con $D := \varphi'$. Nel seguito, per valutare il valore della mappatura φ' sull'elemento $\delta x \in X$, si utilizza la notazione: $\varphi'(x) \cdot \delta x$. Nel nostro caso, gli insiemi X e Y sono identificati da \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 .

Sia $M: \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_3$ la mappatura non lineare definita dalla (3.5). Consideriamo l'operatore

lineare $M': \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$, si dice che la mappatura M è strettamente differenziabile nel punto $(u, q) \in \mathbf{B}_1$ e la sua derivata stretta è data da $M'(u, q) \cdot (\delta u, \delta q) = (\bar{l}_1, \bar{l}_2)$ se e solo se

$$(\nabla \delta u, \nabla v)_\Omega = (\bar{l}_1, v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) , \quad (3.7)$$

$$\int_{\Gamma_D} \delta u \phi \, dx = \int_{\Gamma_D} \bar{l}_2 \phi \, dx \quad \forall \phi \in H^{1/2}(\Gamma_D) ,$$

dove $(\delta u, \delta q) \in \mathbf{B}_1$ e $(\bar{l}_1, \bar{l}_2) \in \mathbf{B}_2$. Considerando l'operatore \mathcal{T} definito dalla (3.3) con il termine di regolarizzazione $G(q)$ descritto sopra, allora l'espressione del funzionale diventa la seguente

$$\mathcal{T}(u, q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} (u - u_d)^2 \, dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_c} q^2 \, dx ,$$

la cui derivata assume la forma

$$\mathcal{T}'(u, q) = \int_{\Omega_d} (u - u_d) \delta u \, dx + \alpha \int_{\Gamma_c} q \delta q \, dx .$$

Sia data la coppia $(u_1, q_1) \in U \times Q$ e la mappatura $\mathcal{Q}: \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbf{B}_3$ definita dalla (3.6). La derivata stretta di \mathcal{Q} nel punto (u, q) è data da \mathcal{Q}' , dove $\mathcal{Q}'(u, q) = (\bar{a}, \bar{l}_1, \bar{l}_2)$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}'(u, q) \cdot (\delta u, \delta q) \\ M'(u, q) \cdot (\delta u, \delta q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta a \\ (\bar{l}_1, \bar{l}_2) \end{pmatrix} . \quad (3.8)$$

All'insieme \mathbf{B}_1 si applica il seguente postulato.

Sia $(u, q) \in \mathbf{B}_1$ una soluzione del problema del controllo ottimale, allora vale che

1. l'operatore $M'(u, q)$ ha rango chiuso in \mathbf{B}_2 ,
2. l'operatore $\mathcal{Q}'(u, q)$ ha rango chiuso in $\mathbb{R} \times \mathbf{B}_3$,
3. l'operatore $\mathcal{Q}'(u, q)$ non è suriettivo in $\mathbb{R} \times \mathbf{B}_3$,

Si fornisce di seguito il teorema della condizione necessaria di primo ordine.

Siano (u, q) due soluzioni del problema 3.3, allora esistono tre moltiplicatori di Lagrange (Λ, u_a, q_a) , diversi da zero, che soddisfano l'equazione

$$\Lambda \mathcal{T}'(u, q) \cdot (\delta u, \delta q) + \langle (u_a, q_a), M'(u, q) \cdot (\delta u, \delta q) \rangle = 0 , \quad \forall (\delta u, \delta q) \in \mathbb{R} \times \mathbf{B}_2^* , \quad (3.9)$$

dove si è indicato con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto duale dello spazio \mathbf{B}_2 con il suo duale \mathbf{B}_2^* .

3.2.2 Il sistema del controllo ottimale

In questa sezione si ricava il sistema del controllo ottimale che si origina dallo sviluppo del problema 3.3. Le condizioni che le variabili (u, q) devono rispettare per essere soluzione sono date dal teorema seguente:

siano $(u, q) \in \mathbf{B}_1$ due soluzioni del sistema del controllo ottimale, allora la variabile di controllo q deve essere soluzione della seguente equazione

$$q = -\frac{\nabla q_a \cdot \mathbf{n}}{\alpha}, \quad \text{su } \Gamma_c, \quad (3.10)$$

mentre la variabile u_a risolve

$$\int_{\Omega_d} (u - u_d) v_a \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_D} \nabla u_a \cdot \mathbf{n} v_a \, d\mathbf{x} + (\nabla u_a, \nabla v_a)_\Omega = 0, \quad (3.11)$$

con la seguente equazione al contorno

$$\int_{\Gamma_D} u_a v_a \, d\mathbf{x} = 0.$$

Infatti, essendo la terna (Λ, u_a, q_a) presa a piacere, è lecito porre $\Lambda = 1$. Utilizzando le formule (3.8), (3.7) della derivata del funzionale \mathcal{L} e del differenziale M' , la (3.9) può essere riscritta come

$$\left(\int_{\Omega_d} (u - u_d) \delta u \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Gamma_c} q \delta q \, d\mathbf{x} \right) + (\nabla \delta u, \nabla u_a)_\Omega + \int_{\Gamma_D} q_a \delta u \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.12)$$

Utilizzando il teorema di Gauss-Green si sviluppa il seguente termine

$$(\nabla \delta u, \nabla u_a)_\Omega = \int_{\Gamma} \nabla(u_a) \cdot \mathbf{n} \delta u \, d\mathbf{x} - (\Delta u_a, \delta u)_\Omega.$$

Imponendo il vincolo dato dalle condizioni al contorno del problema (3.4) si ottiene

$$\int_{\Gamma} \nabla(u_a) \cdot \mathbf{n} \delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_c} \nabla(u_a) \cdot \mathbf{n} \delta u \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_D} \nabla(u_a) \cdot \mathbf{n} \delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_c} \nabla(q_a) \cdot \mathbf{n} \delta q \, d\mathbf{x}.$$

Unendo queste relazioni, l'equazione (3.12) diventa

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_d} (u - u_d) \delta u \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Gamma_c} q \delta q \, d\mathbf{x} \right) + \\ & \int_{\Gamma_c} \nabla(q_a) \cdot \mathbf{n} \delta q \, d\mathbf{x} - (\Delta u_a, \delta u)_\Omega + \int_{\Gamma_D} q_a \delta u \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A questo punto, ponendo $\delta u = 0$ si ottiene

$$\alpha \int_{\Gamma_c} q \delta q \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_c} \nabla(q_a) \cdot \mathbf{n} \delta q \, d\mathbf{x} = 0 ,$$

e, raccogliendo a fattore comune, l'equazione diventa

$$\int_{\Gamma_c} (\alpha q + \nabla q_a \cdot \mathbf{n}) \delta q \, d\mathbf{x} = 0 .$$

Poiché quest'ultima è valida per ogni δq , l'annullamento dell'integrale lo si ottiene quando il suo argomento si annulla, ovvero

$$\alpha q + \nabla q_a \cdot \mathbf{n} = 0 , \quad \text{su } \Gamma_c .$$

Si dimostra così che il sistema risolve l'equazione (3.10). Considerando, infine, $\delta q = 0$ nell'equazione (3.13) e le condizioni al contorno del sistema (3.4), si ricava la seguente relazione

$$\int_{\Omega_d} (u - u_d) \delta u \, d\mathbf{x} - (\Delta u_a, \delta u)_\Omega = 0 .$$

Dato che la scelta di δu risulta arbitraria, possiamo sostituirla con la funzione test v_a . Se poi si integra per parti, si ottiene l'equazione (3.12) e il teorema risulta dimostrato.

Le variabili u_a e q_a vengono anche chiamate *variabili aggiunte*. Un'importante caratteristica di questo metodo è ottenuta osservando le condizioni al contorno imposte su queste variabili. Si nota, infatti, che le condizioni sulle variabili aggiunte sono dello stesso tipo di quelle imposte sulla variabile di stato u . Pertanto, quando le condizioni al contorno di Dirichlet sono imposte sullo stato del sistema, le condizioni di Dirichlet omogenee devono essere imposte sulle variabili aggiunte.

Possiamo ora definire il sistema del controllo come composto da tre equazioni: *equazione di stato* (o del vincolo), *equazione dell'aggiunta* e *condizione di ottimalità* (o *equazione del controllo*). La prima è data dall'equazione di stato assieme alle condizioni al contorno, ossia il sistema (3.4), la seconda è data dalla (3.11), infine l'equazione del controllo corrisponde alla (3.10).

Come precedentemente affermato, lo scopo è quello di ottenere un algoritmo diretto per la risoluzione del problema 3.3. Pertanto è utile scrivere la forma del funzionale (3.3) nel seguente

modo

$$\mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{L^2(\Omega_d)}^2 + \frac{\alpha}{2} G(q)^2 - \int_{\Omega} \lambda_1(\nabla(u)) d\Omega - \int_{\Gamma} \lambda_2(u - q) d\Gamma. \quad (3.14)$$

Teorema 3.1 *Siano (u, q) due soluzioni del problema 3.3, allora le equazioni (3.9) e (3.14) portano allo stesso sistema di equazione pertanto sono equivalenti*

La dimostrazione è riportata più nel dettaglio nei successivi paragrafi, tuttavia è intuitivo capirne la validità ponendo: $u_a = q_a = \lambda_1$ e $\lambda_2 = -\nabla u_a \cdot \mathbf{n} = -\nabla q_a \cdot \mathbf{n} = -\nabla \lambda_1 \cdot \mathbf{n}$.

Le tre equazioni del sistema del controllo si ricavano, dunque, differenziando tale funzionale rispetto la variabile di stato u , la variabile di controllo q e il moltiplicatore lagrangiano λ , come riassunto in tabella 3.1.

$\mathcal{T}(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \ \mathbf{u} - \mathbf{u}_d\ _{L^2(\Omega_d)}^2 + \frac{\alpha}{2} \mathbf{G}(\mathbf{q})^2 - \lambda \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{q})$	
$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u} = 0$	equazione aggiunta
$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q} = 0$	equazione del controllo
$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \lambda_1} = 0$	equazione di stato

Tabella 3.1. Dal funzionale di costo alle equazioni del sistema del controllo

Limiti della condizione necessaria di primo ordine

Poiché la variabile di controllo è ricavata imponendo l'annullamento della derivata prima, il metodo non garantisce l'individuazione di un minimo assoluto del funzionale. Infatti il teorema della condizione necessaria di primo ordine fornisce solo una condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange. Per avere la certezza della minimizzazione, sarebbe opportuno definire un ulteriore teorema ("condizione necessaria e sufficiente di secondo ordine") in cui si stabiliscono i requisiti che la derivata seconda, del funzionale di

costo, deve soddisfare per garantire l'esistenza di un minimo assoluto. Dato che questa operazione può risultare complessa, soprattutto quando si tratta di operatori frazionari, questa tesi si limita a sviluppare una soluzione che soddisfi le richieste del primo teorema, senza affrontare la formulazione della condizione necessaria e sufficiente che rimane oggetto di possibili ricerche future.

Di conseguenza, la soluzione ottenuta mediante il metodo proposto è un generico punto stazionario e non necessariamente il minimo assoluto. Questo, tuttavia, non limita l'applicazione proposta poiché essere in grado di individuare un punto di lavoro più performante, senza essere necessariamente il più ottimale, è quanto richiesto dalla pratica industriale. Infatti, la soluzione che individua il minimo assoluto non è detto che sia attuabile in un contesto ingegneristico. Essa può essere limitata da fattori quali il costo, le eccessive modifiche da applicare all'impianto, i limiti fisici o tecnologici. Pertanto, il miglioramento delle performance, senza stravolgere eccessivamente il sistema è quello che viene richiesto nella pratica, nella maggior parte dei casi. Si può dunque comprendere come il metodo risolutivo proposto in questa tesi, possa essere visto come uno strumento vantaggioso nella soluzione di problemi di ottimizzazione reali. Infatti l'utilizzo di un metodo numerico, in grado di fornire il sistema ottimizzato mediante utilizzo del calcolatore, può dimostrarsi la strada più rapida ed economica rispetto alle costose campagne di sperimentazione normalmente seguite per rispondere a tali esigenze.

L'espressione (3.14) del funzionale $\mathcal{T}(u, q)$ è utilizzata nel seguito. I successivi capitoli trattano il problema del controllo di ottimo mediante i tre funzionali $G(q)$ introdotti nella sezione precedente. Viene inizialmente affrontato il caso dell'approccio di boundary con regolarizzazione data dalla norma $H^1(\Gamma_c)$, per poi passare ai due metodi per attuare la corretta normalizzazione nello spazio frazionario $H^{1/2}(\Gamma_c)$. Per tutti questi casi viene mostrato come trattare il problema di controllo ottimale a partire dalla più generica equazione del calore, dopodiché il sistema viene semplificato al solo operatore Laplaciano.

3.3 Controllo ottimale con regolarizzazione in $H^1(\Gamma_c)$

In questa sezione, e nelle successive, viene esposto il procedimento per ottenere il sistema del controllo. Al fine di dimostrare i possibili sviluppi pratici di questo metodo, la trattazione viene sviluppata immaginando un frequente problema ingegneristico. Si prenda ad esempio una stanza in cui si vuole regolare il profilo di temperatura o il flusso termico in una determinata regione, agendo su una zona di contorno dello spazio. Questo obiettivo viene perseguito mediante l'introduzione delle componenti del controllo descritte nel capitolo precedente. Pertanto si definisce il funzionale di costo e la soluzione ricercata è quella che ne minimizza il suo valore. Il vincolo del sistema è invece dato dalla ben nota equazione del calore

$$\mathcal{F}(u) = -\frac{1}{P_e} \Delta(u) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(u) - f_T = 0, \quad (3.15)$$

dove u è il campo di temperatura che risolve la PDE, mentre il termine di avvezione \mathbf{v} si ipotizza essere noto dalla risoluzione del sistema di Navier-Stokes. Inoltre, la funzione f_T rappresenta la sorgente di calore dovuta a dissipazioni viscosive o altri fenomeni fisici, in generale dipendente al più dallo spazio. Infine, i numeri adimensionali di Péclet, Reynolds e Prandtl assumono la forma

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k}, \quad Pe = Re Pr.$$

Le condizioni al contorno vengono prese in maniera analoga al problema 3.2, ossia condizioni di Dirichlet omogenee su $\Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_c$, mentre sul restante bordo il valore è libero di assumere la configurazione data dalla variabile incognita. Come già ampiamente discusso, l'ultima condizione definisce la variabile di controllo q come quel campo di temperatura da impostare per ottenere il comportamento ottimizzato. Il sistema appena descritto è comune a tutte le tre tipologie di seguito analizzate. Inoltre, una volta dimostrato il procedimento che porta all'ottenimento delle equazioni implementate nell'algoritmo, il sistema viene poi semplificato per ottenere un forzante data dal solo operatore Laplaciano. Analizzando l'equazione (3.15) si osserva che, a causa della presenza del Laplaciano, la sua formulazione debole necessita di requisiti sulla derivata prima delle funzioni. La variabile di stato dovrà dunque appartenere allo spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$, di conseguenza il controllo dovrà appartenere allo spazio $H^{1/2}(\Gamma_c)$

(teorema della traccia). Come noto dal capitolo 2, regolarizzare una funzione in questi spazi non è immediato. Per esporre al meglio il procedimento risolutivo, si sceglie dunque di analizzare per primo il caso più semplice di tutti, quello in cui la restrizione viene regolarizzata nello stesso spazio funzionale della funzione di stato. Si procede quindi a esporre due problemi di controllo, uno in cui si ottimizza il campo di temperatura, l'altro in cui si manipola il gradiente. In entrambi i casi il fattore di regolarizzazione è dato dalla norma dello spazio di Sobolev $H^1(\Gamma_c)$

$$G(q)^2 = \|q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}^2 = \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_c} |q(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma_c} |\nabla q(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Controllo ottimale sul campo di temperatura

Si consideri il problema di ottimizzazione del campo di temperatura. Sia u_d la temperatura richiesta nel dominio Ω_d , il problema di ottimo può essere posto nel seguente modo:

Problema 3.4 *Trovare le coppie di funzioni $(u, q) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_c)$ tali per cui minimizzino il seguente funzionale*

$$\mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} |u - u_d|^2 d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_c} |q|^2 d\Omega + \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma_c} |\nabla q|^2 d\Omega,$$

e soddisfino il seguente sistema

$$\begin{aligned} -\frac{1}{P_e} \Delta(u) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(u) - f_T &= 0 & \text{su } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= q(\mathbf{x}) & \text{su } \Gamma_c, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 & \text{su } \Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_c. \end{aligned}$$

Introducendo i moltiplicatori di Lagrange λ_1 e λ_2 , definiti rispettivamente su Ω e Γ_c , è possibile legare i vincoli del problema al funzionale di costo nel seguente modo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} |u - u_d|^2 d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_c} |q|^2 d\Omega + \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma_c} |\nabla q|^2 d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} \lambda_1 (-\mathcal{F}(u)) d\Omega - \int_{\Gamma_c} \lambda_2 (u - q) dS. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Posto $\lambda_1 = \lambda$ e $\lambda_2 = -\gamma_1(\lambda)$ ove γ_1 è dato dall'operatore derivata, definito come segue:

Definizione 3.2 Sia dato lo spazio di Sobolev $H^m(\Omega)$. Si definisce γ_1 l'operatore che restituisce la derivata di una generica funzione f , contenuta in $H^m(\Omega)$, nella direzione \mathbf{n} normale a una superficie $\Gamma \subset \partial\Omega$, come

$$\gamma_1 : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \mid \gamma_1(f) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}.$$

Risolvere il problema del controllo vuol dire trovare le funzioni u, q e i moltiplicatori λ_1, λ_2 tali per cui il funzionale $\mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2)$ viene minimizzato. Dall'analisi matematica è noto che il minimo di una funzione deve necessariamente corrispondere a uno dei suoi punti stazionari, si procede dunque a calcolare gli zeri della derivata del funzionale (3.16). Nel procedere con l'operazione di derivazione occorre fare molta attenzione alle variabili rispetto cui si esegue tale operazione. Infatti, il funzionale è funzione della variabile di stato, di quella di controllo e dei moltiplicatori di Lagrange. Di conseguenza l'operatore derivata è del tutto indifferente verso la variabile spaziale \mathbf{x} . Ad esempio, durante la differenziazione del quadrato del gradiente, il termine che va considerato è solo l'argomento del gradiente, la regola della catena non è dunque applicabile. La derivata viene dunque svolta sulla variabile di controllo e non rispetto allo spazio, come mostrato di seguito

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}}(|\nabla \tilde{q}(\mathbf{x})|^2) = 2 \nabla \tilde{q} \nabla \delta \tilde{q}.$$

Per agevolare la trattazione, d'ora in poi il prodotto scalare tra due funzioni verrà scritto usando la seguente notazione

$$(u, g)_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} u(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Il differenziale del funzionale (3.16) assume dunque la seguente forma

$$\begin{aligned} d\mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) &= (u - u_d, \delta u)_{\Omega_d} + \alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(\nabla q, \delta q)_{\Gamma_c} - \\ &- (\lambda, -\mathcal{F}(\delta u))_{\Omega} - (\delta \lambda, -\mathcal{F}(u))_{\Omega} + \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}}, \delta u \right) \right)_{\Gamma_c} + \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}}, -\delta q \right) \right)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \delta \lambda}{\partial \mathbf{n}}, u - q \right)_{\Gamma_c}. \end{aligned}$$

Essendo valida la condizione $u = q$ su Γ_c , allora l'ultimo termine si annulla e si ottiene

$$\begin{aligned} d\mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) &= (u - u_d, \delta u)_{\Omega_d} + \alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(\nabla q, \delta q)_{\Gamma_c} - \\ &- (\lambda, -\mathcal{F}(\delta u))_{\Omega} - (\delta \lambda, -\mathcal{F}(u))_{\Omega} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}}, \delta u \right)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}}, -\delta q \right)_{\Gamma_c}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Riscriviamo ora i termini definiti su Ω , interpretando l'operatore Laplaciano come divergenza di un gradiente. Nel fare ciò il termine di sorgente f_T viene ipotizzato funzione dipendente al più spazio. Per tali ragioni nel momento in cui si esegue la derivata rispetto la variabile di stato, o quella di controllo o i moltiplicatori lagrangiani, questo termine si annulla. L'operatore Laplaciano viene quindi sviluppato come segue

$$\begin{aligned} & (\lambda, \mathcal{F}(\delta u))_\Omega + (\delta \lambda, \mathcal{F}(u))_\Omega = \\ & = \left(\lambda, \nabla \cdot \frac{1}{Pe} \nabla(\delta u) \right)_\Omega - (\lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\delta u))_\Omega + (\lambda, f)_\Omega + \\ & + \left(\delta \lambda, \nabla \cdot \frac{1}{Pe} \nabla(u) \right)_\Omega - (\delta \lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(u))_\Omega + (\delta \lambda, f)_\Omega . \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Gauss-Green e le condizioni al contorno per il moltiplicatore di Lagrange ($\lambda = 0$ su Γ) si dimostra che

$$\begin{aligned} & (\lambda, \nabla \cdot \frac{1}{Pe} \nabla(\delta \tilde{u}))_\Omega = \int_\Omega \lambda \nabla \cdot \frac{1}{Pe} \nabla(\delta \tilde{u}) \, d\mathbf{x} = \\ & \int_\Gamma \frac{1}{Pe} \lambda \nabla(\delta \tilde{u}) \mathbf{n} \, d\mathbf{x} - \int_\Omega \frac{1}{Pe} \nabla \lambda \cdot \nabla(\delta \tilde{u}) \, d\mathbf{x} = \\ & - \int_\Omega \frac{1}{Pe} \nabla \lambda \cdot \nabla(\delta \tilde{u}) \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{Pe} (\nabla \lambda, \nabla(\delta \tilde{u}))_\Omega , \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} & (\lambda, \mathcal{F}(\delta u))_\Omega + (\delta \lambda, \mathcal{F}(u))_\Omega = \\ & - \frac{1}{Pe} (\nabla \lambda, \nabla(\delta u))_\Omega - (\lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\delta u))_\Omega + (\lambda, f)_\Omega \\ & - \frac{1}{Pe} (\nabla \delta \lambda, \nabla(u))_\Omega - (\delta \lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(u))_\Omega + (\delta \lambda, f)_\Omega . \end{aligned}$$

Sostituendo nella (3.17) e imponendo la condizione di minimo $d\mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) = 0$, si ottiene la seguente equazione

$$\begin{aligned} d\mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) & = (u - u_d, \delta u)_{\Omega_d} + \alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(\nabla q, \delta q)_{\Gamma_c} \\ & - \frac{1}{Pe} (\nabla \lambda, \nabla(\delta u))_\Omega - (\lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\delta u))_\Omega + (\lambda, f)_\Omega \\ & - \frac{1}{Pe} (\nabla \delta \lambda, \nabla(u))_\Omega - (\delta \lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(u))_\Omega + (\delta \lambda, f)_\Omega \\ & + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}}, \delta u \right)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}}, -\delta q \right)_{\Gamma_c} = 0 , \quad \forall \delta u, \delta q, \delta \lambda . \end{aligned}$$

Questa relazione deve essere verificata per qualsiasi variazione δu , δq , $\delta \lambda$ e di conseguenza ponendo $\delta q = \delta \lambda = 0$, si ottiene un'equazione nella sola variabile δu

$$(u - u_d, \delta u)_{\Omega_d} + -\frac{1}{Pe}(\nabla \lambda, \nabla(\delta u))_{\Omega} - (\lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\delta u))_{\Omega} + (\lambda, f)_{\Omega} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, \delta u \right)_{\Gamma_c} = 0 .$$

L'equazione appena descritta coincide con la derivata parziale del funzionale fatta rispetto alla variabile δu . Per quanto esposto nel paragrafo precedente e nella tabella 3.1, tale formula viene chiamata *equazione dell'aggiunta*. Eseguendo lo stesso procedimento anche per le altre variabili si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(\nabla q, \delta q)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, -\delta q \right)_{\Gamma_c} &= 0 , \\ -\frac{1}{Pe}(\nabla \delta \lambda, \nabla(u))_{\Omega} - (\delta \lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(u))_{\Omega} + (\delta \lambda, f)_{\Omega} &= 0 , \end{aligned}$$

che corrispondo, reciprocamente, all'*equazione del controllo* e all'*equazione di stato*. Il sistema del controllo è dunque noto. Ipotizzando, per semplicità di trattazione, di trascurare la componente di avvezione, ossia il moto del fluido sia nullo ($\mathbf{v} = \emptyset$), e la sorgente di calore f , si ottiene

$$\begin{cases} (u - u_d, \delta u)_{\Omega_d} - \frac{1}{Pe}(\nabla \lambda, \nabla(\delta u))_{\Omega} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, \delta u \right)_{\Gamma_c} = 0 \\ \alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(\nabla q, \delta q)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, -\delta q \right)_{\Gamma_c} = 0 \\ -\frac{1}{Pe}(\nabla \delta \lambda, \nabla(u))_{\Omega} = 0 \\ u = h_d \text{ su } \Gamma \setminus \Gamma_c, u = q \text{ su } \Gamma_c, \lambda = 0 \text{ su } \Gamma . \end{cases} \quad (3.18)$$

Eseguiamo ora un confronto con queste equazioni e quelle trovate nel paragrafo 3.2. Sicuramente differiscono per il termine in β nel fattore di normalizzazione $G(q)$. Tuttavia questo termine non influenza la dimostrazione dell'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange, o meglio, non influenza le caratteristiche degli operatori M e Q definiti dalla (3.5) e dalla (3.6). Ponendo $u_a = q_a = -\lambda$ si ricava l'equivalenza, a meno del termine in β , delle equazioni (3.11) e (3.10) con le prime del sistema (3.18). L'espressione dei vincoli, a meno del numero di Péclet, sono anch'esse equivalenti. Pertanto le due trattazioni sono coincidenti. Si può dunque concludere che, anche per il problema descritto dal sistema (3.18), vale il teorema della condizione necessaria di primo ordine, dunque l'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange è verificata.

Controllo ottimale del flusso termico

Fino a ora si è analizzato il problema ove la richiesta dell'ottimizzazione riguarda l'ottenimento di un determinato campo di temperatura, in una determinata regione del sistema. Se consideriamo ancora il problema governato dall'equazione del calore, un altro obiettivo può essere quello di controllare il flusso termico in una determinata zona dello spazio. Quest'ultimo è governato dalla nota legge di Fourier, $q(\mathbf{x}) = -k\nabla T(\mathbf{x})$. Si osserva dunque che il flusso di calore è proporzionale, tramite il coefficiente di conducibilità termica k , al gradiente della variabile di stato. Di conseguenza è possibile definire un funzionale obiettivo che valuti la distanza tra il gradiente della variabile u e quello richiesto per ottenere il flusso termico ottimale. Si può dunque estendere l'approccio del controllo ottimale formulando il seguente problema:

Problema 3.5 *Trovare le coppie di funzioni $(u, q) \in H^1(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma_c)$ tali per cui minimizzino il seguente funzionale*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} |\nabla u - (\nabla u)_d|^2 d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_c} |q|^2 d\Omega + \\ & + \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma_c} |\nabla q|^2 d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_1(-\mathcal{F}(u)) d\Omega - \int_{\Gamma_c} \lambda_2(u - q) dS, \end{aligned}$$

e risolvono il seguente sistema

$$\begin{aligned} -\frac{1}{P_e} \Delta(u) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(u) - f_T &= 0 & \text{su } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= q(\mathbf{x}) & \text{su } \Gamma_c, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 & \text{su } \Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_c. \end{aligned}$$

Per semplicità di calcolo, il gradiente obiettivo ($|\nabla u|_d$) viene preso uguale a zero. Di conseguenza il funzionale di costo assume l'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} |\nabla u|^2 d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_c} |q|^2 d\Omega + \\ & \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma_c} |\nabla q|^2 d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_1(-\mathcal{F}(u)) d\Omega - \int_{\Gamma_c} \lambda_2(u - q) dS. \end{aligned}$$

Il problema si risolve seguendo i passaggi mostrati nel precedente esempio. Pertanto, si procede con il calcolo della derivata del funzionale

$$\begin{aligned} d\mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) = & (\nabla u, \nabla \delta u)_{\Omega_d} + \alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(\nabla q, \delta q)_{\Gamma_c} - (\lambda, -\mathcal{F}(\delta u))_{\Omega} - \\ & - (\delta \lambda, -\mathcal{F}(u))_{\Omega} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, \delta u \right)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, -\delta q \right)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \delta \lambda}{\partial n}, u - q \right)_{\Gamma_c} \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Gauss-Green e imponendo le condizioni al contorno si ricava

$$\begin{aligned}
d\mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) &= (\nabla u, \nabla \delta u)_{\Omega_d} + \alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(\nabla q, \delta q)_{\Gamma_c} \\
&- \frac{1}{Pe}(\nabla \lambda, \nabla(\delta u))_{\Omega} - (\lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\delta u))_{\Omega} + (\lambda, f)_{\Omega} \\
&- \frac{1}{Pe}(\nabla \delta \lambda, \nabla(u))_{\Omega} - (\delta \lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(u))_{\Omega} + (\delta \lambda, f)_{\Omega} \\
&+ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, \delta u \right)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, -\delta q \right)_{\Gamma_c} = 0, \quad \forall \delta u, \delta q, \delta \lambda.
\end{aligned}$$

Questa relazione deve essere verificata per qualsiasi variazione δu , δq , $\delta \lambda$ di conseguenza si possono raccogliere a fattore comune i termini moltiplicati scalarmente per ognuno di questi differenziali

$$\begin{aligned}
(\nabla u, \nabla \delta u)_{\Omega_d} + -\frac{1}{Pe}(\nabla \lambda, \nabla(\delta u))_{\Omega} - (\lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\delta u))_{\Omega} + (\lambda, f)_{\Omega} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, \delta u \right)_{\Gamma_c} &= 0, \\
\alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(\nabla q, \delta q)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, -\delta q \right)_{\Gamma_c} &= 0, \\
-\frac{1}{Pe}(\nabla \delta \lambda, \nabla(u))_{\Omega} - (\delta \lambda, (\mathbf{v} \cdot \nabla)(u))_{\Omega} + (\delta \lambda, f)_{\Omega} &= 0.
\end{aligned}$$

Ipotizzando ora di trascurare la componente di avvezione e la sorgente di calore f si ricava

$$\begin{cases}
(\nabla u, \nabla \delta u)_{\Omega_d} + -\frac{1}{Pe}(\nabla \lambda, \nabla(\delta u))_{\Omega} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, \delta u \right)_{\Gamma_c} = 0 \\
\alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(\nabla q, \delta q)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, -\delta q \right)_{\Gamma_c} = 0 \\
-\frac{1}{Pe}(\nabla \delta \lambda, \nabla(u))_{\Omega} = 0 \\
u = h_d \text{ su } \Gamma \setminus \Gamma_c, u = q \text{ su } \Gamma_c, \lambda = 0 \text{ su } \Gamma.
\end{cases} \quad (3.19)$$

Queste equazioni formano il sistema del controllo: la prima corrisponde all'equazione dell'aggiunta, la seconda all'equazione del controllo e, infine, l'ultima coincide con l'equazione di stato. Anche in questo caso si dimostra che è soddisfatto il teorema della condizione necessaria di primo ordine, perciò è garantita l'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange.

Le equazioni (3.18) e (3.19) definiscono il sistema del controllo. La loro risoluzione numerica viene svolta utilizzando i metodi di discretizzazione e altre strategie fornite dal metodo agli elementi finiti esposte nel capitolo 1.

3.4 Controllo ottimale con regolarizzazione $H^{1/2}(\Gamma_c)$

In questo capitolo viene esposto il modello risolutivo per il calcolo della soluzione ottimale del problema del controllo su una superficie di contorno del dominio, mediante una regolarizzazione nello spazio frazionario di Sobolev. Come nel caso esposto nel paragrafo 3.3, la variabile di controllo q agisce sulla regione Γ_c tramite la seguente condizione al contorno

$$q(\mathbf{x}) = \gamma_0 u(\mathbf{x}) \quad \text{su} \quad \Gamma_c .$$

A differenza del metodo precedente, il quale regolarizza la funzione dentro lo spazio $H^1(\Gamma_c)$, questo procedimento garantisce che la funzione q appartenga allo spazio $H^{1/2}(\Gamma_c)$. Di conseguenza il risultato ottenuto è in grado di soddisfare il teorema del bilancio della regolarità, condizione non rispettata dalla soluzione esposta precedentemente. Per garantire alla funzione le caratteristiche necessarie per appartenere a tale spazio funzionale, si agisce modificando il fattore di regolarizzazione $G(q)$. Questo componente viene dunque preso pari alla norma frazionaria, la cui espressione viene riproposta di seguito

$$G(q)^2 = \|q\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)}^2 = \int_{\Gamma_c} |u|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_c} \int_{\Gamma_c} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+\frac{1}{2} \cdot 2}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} .$$

Si osserva che, a partire dalla definizione 2.2 si è sostituito il dominio Ω con Γ_c , in quanto la regolarizzazione viene fatta sulla regione di controllo e non sul dominio dello stato, mentre i coefficienti p e s sono stati presi rispettivamente 2 e 1/2. Infine il numero intero n coincide con la dimensione spaziale del confine del sistema: il suo valore è $n = 1$ nel caso di dominio 2D, $n = 2$ per il problema tridimensionale. Il problema del controllo sul campo di temperatura, nel caso di regolarizzazione frazionaria, viene dunque proposto:

Problema 3.6 *Trovare la coppia di funzioni $(u, q) \times (H^m(\Omega), Q(\Gamma_c))$ che minimizzano il seguente funzionale*

$$\mathcal{T}(u, q) = \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{\Omega_d}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_c} |q|^2 d\mathbf{x} + \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma_c} \int_{\Gamma_c} \frac{|q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+\frac{1}{2} \cdot 2}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} .$$

e rispettivo il seguente vincolo

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}(u) &= 0 & \text{su } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= q(\mathbf{x}) & \text{su } \Gamma_c, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 & \text{su } \Gamma \setminus \Gamma_c. \end{aligned}$$

Il termine $\mathcal{F}(u)$ coincide con l'equazione del calore, data dalla (3.15). Come svolto precedentemente, utilizzando i moltiplicatori di Lagrange, si riscrive il funzionale di costo in maniera tale da evidenziare il legame con le equazioni del vincolo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{\Omega_d}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_c} |q|^2 d\mathbf{x} + \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma_c} \int_{\Gamma_c} \frac{|q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+\frac{1}{2} \cdot 2}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\Omega} \lambda_1(-\mathcal{F}(u)) d\Omega - \int_{\Gamma_c} \lambda_2(u - q) dS. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Per ottenere le coppie (u, q) che minimizzano il valore restituito da questa espressione, occorre calcolare gli zeri della derivata prima. Ricordando il risultato dato dal teorema 2.1.1 si può comprendere come questo passaggio porta alla comparsa dell'operatore Laplaciano frazionario. Derivando la precedente espressione e tenendo conto del risultato fornito, il differenziale del funzionale diventa

$$\begin{aligned} d\mathcal{T}(u, q, \lambda_1, \lambda_2) &= (u - u_d, \delta u)_{\Omega_d} + \alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(-\Delta_{\Gamma_c}^{1/2} q, \delta q)_{\Gamma_c} - \\ &\quad - (\lambda, -\mathcal{F}(\delta u))_{\Omega} - (\delta \lambda, -\mathcal{F}(u))_{\Omega} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, \delta u \right)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, -\delta q \right)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \delta \lambda}{\partial n}, u - q \right)_{\Gamma_c}. \end{aligned}$$

Nonostante in letteratura siano numerosi i lavori svolti per risolvere problemi di controllo con operatori frazionari, la maggior parte di essi studia il Laplaciano frazionario come vincolo del sistema. Questo lavoro e pochi altri ([12], [13]) studiano il Laplaciano frazionario all'interno del fattore di regolarizzazione. Per tale motivo questo, e i lavori citati, aprono un nuovo campo di studio il quale permette di affinare ancora di più le soluzioni di questi problemi e accrescere la conoscenza sui modelli frazionari.

Poiché l'operatore Laplaciano frazionario risulta essere un operatore non locale, il teorema di Gauss-Green non è più applicabile, pertanto la formula sopra descritta non viene ulteriormente manipolata. Raccogliendo i termini comuni, come descritto dal paragrafo 3.3 e semplificando i

termini di avvezione e di sorgente termica, si ricava il sistema del controllo

$$\left\{ \begin{array}{l} (u - u_d, \delta u)_{\Omega_d} - \frac{1}{Pe} (\nabla \lambda, \nabla(\delta u))_{\Omega} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, \delta u \right)_{\Gamma_c} = 0 \\ \alpha(q, \delta q)_{\Gamma_c} + \beta(-\Delta_{\Gamma_c}^{1/2} q, \delta q)_{\Gamma_c} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}, -\delta q \right)_{\Gamma_c} = 0 \\ -\frac{1}{Pe} (\nabla \delta \lambda, \nabla(u))_{\Omega} = 0 \\ u = h_d \text{ su } \Gamma \setminus \Gamma_c, u = q \text{ su } \Gamma_c, \lambda = 0 \text{ su } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Infine sostituendo il primo membro della prima equazione del sistema (3.21) con $(\nabla u, \nabla \delta u)_{\Omega_d}$, si ottiene il controllo sul gradiente della variabile di stato. Come accennato anche nel capitolo 3.3 questo tipo di controllo può risultare utile, all'atto pratico, nel caso in cui si vogliono controllare i flussi di materia o energia del sistema studiato.

3.5 La funzione di lifting nei problemi di controllo ottimale

Fino a ora sono state analizzate due strategie risolutive al problema di ottimo: quella mediante regolarizzazione nello spazio intero di Sobolev e quella frazionaria. Nel caso di approccio mediante regolarizzazione in H^1 , nonostante la sua semplicità risolutiva agli elementi finiti, la soluzione ricavata risulta appartenere a uno spazio più piccolo di quello richiesto dal problema. Questo significa che tale procedimento porta a escludere molte soluzioni, generando un errore di approssimazione molto maggiore rispetto a quello proposto dal secondo metodo. Infatti, con la regolazione frazionaria si è stati in grado di estendere il campo di ricerca anche alle funzioni risidenti nello spazio $H^{1/2}$. D'altro canto, questo passaggio ha visto l'introduzione dell'operatore Laplaciano frazionario e il conseguente aumento della complessità del problema. Si è osservato come questo applicatore è caratterizzato da un comportamento non locale, il quale genera una matrice associata al sistema lineare densa. Tale comportamento si discosta molto da quello dei normali problemi risolti con metodo FEM, caratterizzati da matrici aventi la maggior parte degli elementi nulli. Di conseguenza, il calcolatore necessita di sufficiente memoria e potenza di calcolo per essere in grado di risolvere il sistema in cui la regolazione frazionaria viene applicata.

Nel seguente capitolo viene affrontata la risoluzione del problema del controllo introducendo il metodo della funzione di lifting. Esso consiste nel suddividere la soluzione come somma di due variabili, ognuna delle quali deve soddisfare requisiti diversi. Questa procedura viene anche utilizzata nella risoluzione di PDE complesse [3]. In questi casi la funzione di lifting è necessaria per ragioni teoriche, viene scelta in maniera tale da garantire determinate proprietà alla soluzione al fine di garantirne l'esistenza. Nel caso del controllo ottimale, invece, tale funzione deve essere tale per cui la sua restrizione sul bordo venga a coincidere proprio con la variabile di controllo ricercata. Alcuni esempi di utilizzi della funzione di lifting per problemi di controllo ottimale si possono ritrovare nei seguenti lavori, [18], [19], [20], [21].

Nel seguito si esegue prima una descrizione dei vantaggi e difetti della funzione di lifting, in relazione con le soluzioni sin ora proposte, per poi analizzarne il suo impiego nel problema del

controllo.

La funzione di lifting

Possiamo osservare, per quanto detto sopra, che i precedenti metodi possono avere dei difetti per motivi matematici o numerici. Questi problemi hanno origine dalla scelta del fattore di regolarizzazione $G(q)$ che in entrambi i casi agisce sulla regione di controllo Γ_c . La prima utilizzando la norma H^1 non garantisce le corrette proprietà matematiche richieste dal problema, la seconda, invece, mediante l'introduzione del Laplaciano frazionario aumenta notevolmente lo sforzo computazionale. La soluzione ora proposta è un metodo in grado sia di evitare l'introduzione dell'operatore non locale, sia di rispettare, allo stesso tempo, il teorema del bilancio della regolarità.

Sia u la variabile di stato del problema, si procede nel dividere tale funzione in due parti: la funzione di lifting e la funzione ausiliaria. Indicando la prima con \tilde{q} e la seconda con \tilde{u} , allora vale $u = \tilde{q} + \tilde{u}$. La funzione di lifting, in generale, appartiene al dominio di lifting, indicato con Ω_c , il quale ha in comune con il dominio del problema la regione del controllo Γ_c . Pertanto può essere vista come l'estensione della variabile q dal contorno verso l'interno del sistema. Nel nostro caso questa regione coincide con l'intero dominio del problema ($\Omega_c = \Omega$). Questa assunzione permette di definire il fattore di regolarizzazione come la norma in H^1 della funzione \tilde{q} sul dominio di lifting

$$G(q) = \|q\|_{H^1(\Omega_c)} = \left[\int_{\Omega_c} (|q(\mathbf{x})|^2 + |\nabla q(\mathbf{x})|^2) d\mathbf{x} \right]^{1/2}.$$

Si osserva che il termine di regolarizzazione è della stessa forma di quello utilizzato nell'approccio con normalizzazione in H^1 . Tuttavia, vi è una differenza sostanziale che garantisce la giusta regolarità della funzione: il dominio in cui la norma viene applicata. In questo caso la funzione non viene regolarizzata sul contorno di controllo, ma su tutta la regione estesa. Essendo poi una componente della funzione di stato, allora tale funzione appartiene allo spazio naturale dato dalla PDE che identifica il vincolo. Di conseguenza, la variabile di lifting appartiene nel dominio Ω_c allo spazio H^1 , garantendo così la corretta regolarizzazione nello spazio funzionale imposto dal problema. In questo modo si superano i limiti della prima soluzione in

cui si effettua una regolarizzazione intera sul contorno al posto di quella frazionaria (teorema del bilancio della regolarità).

La funzione di lifting dunque racchiude al suo interno sia la semplicità risolutiva del problema con normalizzazione in H^1 , che il rigore matematico della formulazione con operatore non locale. Infatti una volta regolarizzata la funzione nello spazio intero di Sobolev la soluzione è ottenuta mediante restrizione della funzione di lifting sul bordo di controllo. Dal teorema della traccia la funzione, definita in $H^1(\Omega_c)$, ha restrizione su Γ_c nel voluto spazio frazionario $H^{1/2}(\Gamma_c)$, soddisfacendo così le richieste del teorema del bilancio della regolarità. Inoltre la regolarizzazione nello spazio intero di Sobolev permette di ottenere un funzionale in cui il fattore $G(q)$ è facilmente calcolabile numericamente, senza incorrere nella pesantezza del calcolo dell'operatore Laplaciano frazionario.

Nel seguito viene presentato il procedimento per la risoluzione di un problema di controllo ottimale mediante funzione di lifting. Si analizza prima il caso generale in cui si prende come esempio l'equazione del calore descritta dall'equazione (3.15), per poi semplificarne alcuni fattori in maniera da ottenere come forzante il solo operatore Laplaciano. Infine viene eseguito sia il controllo sul valore della funzione di stato che sul gradiente. Come nei casi precedenti il problema viene risolto mediante l'utilizzo dei moltiplicatori di Lagrange.

Il sistema del controllo

Il metodo per ottenere le equazioni che caratterizzano il sistema del controllo è, ora, presentato. Si consideri inizialmente il problema di ottimizzazione del campo di temperatura in una generica zona Ω_d del dominio Ω . Sia u_d la temperatura richiesta nel dominio Ω_d , il problema di ottimizzazione può essere posto nel seguente modo.

Problema 3.7 *Trovare le coppie di funzioni $(\tilde{u}, \tilde{q}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_c)$ tali per cui minimizzino il seguente funzionale*

$$\mathcal{T}(\tilde{u}, \tilde{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} |\tilde{u} + \tilde{q} - u_d|^2 d\mathbf{x} + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega_c} |\tilde{q}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega_c} |\nabla \tilde{q}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} ,$$

e risolvano il seguente sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{u}, \tilde{q}) &= -\frac{1}{P_e} \Delta(\tilde{u} + \tilde{q}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\tilde{u} + \tilde{q}) - f_T = 0 & \text{su } \Omega, \\ \tilde{u} &= 0 & \text{su } \Gamma, \\ \tilde{q} &= h_d & \text{su } \Gamma \setminus \Gamma_c, \\ \tilde{q} &= h_c & \text{su } \Gamma_c. \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno h_d e h_c sono imposte, sulla funzione di lifting, rispettivamente nelle regioni $\Gamma \setminus \Gamma_c$ e Γ_c . La prima corrisponde alle classiche condizioni al contorno, scelte a seconda della modellazione e delle approssimazioni effettuate, la seconda è lasciata libera e coincide con la variabile di controllo q . Quest'ultima è ricavata dalla restrizione sul bordo Γ_c della funzione di lifting, $q = \gamma_0 \tilde{q} = h_c$.

Per quanto riguarda invece la funzione ausiliaria, \tilde{u} , si osserva che su di essa vengono imposte solo condizioni al contorno omogenee. Infatti le soluzioni accettabili sono solo quelle in cui le funzioni \tilde{u} appartengono al seguente spazio funzionale

$$\mathcal{Q} = \{ \tilde{u} \in H^1(\Omega) : -\mathcal{F}(\tilde{u}) = 0 \text{ su } \Omega \text{ e } \tilde{u} = 0 \text{ su } \Gamma \}. \quad (3.22)$$

Dunque, quando si implementa il metodo, è di fondamentale importanza applicare le corrette condizioni al contorno sulle variabili \tilde{u} e \tilde{q} . Nel momento in cui condizioni diverse da quelle omogenee vengono imposte, la soluzione perde di significato matematico in quanto la funzione ausiliaria esce dall'insieme \mathcal{Q} e la risoluzione con funzione di lifting non è più attuabile.

Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si riscrive il funzionale di costo in maniera tale da evidenziare il legame con le equazioni del vincolo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\tilde{u}, \tilde{q}, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} |\tilde{u} + \tilde{q} - u_d|^2 d\mathbf{x} + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega_c} |\tilde{q}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \\ &+ \frac{\beta}{2} \int_{\Omega_c} |\nabla \tilde{q}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda (-\mathcal{F}(\tilde{u} + \tilde{q})) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Confrontando questo funzionale con quelli ottenuti in precedenza, dati dalle equazioni (3.16) e (3.20), si osserva la presenza di uno solo dei due moltiplicatori di Lagrange. Questo è appunto dovuto al fatto che nei precedenti funzionali i fattori di regolarizzazione sono valutati sulla regione di controllo Γ_c . Di conseguenza per tenere in considerazione il vincolo ($u = \gamma_0 u = q$)

imposto su questa regione, ‘e stato necessario introdurre il moltiplicatore λ_2 . Con l’introduzione della funzione di lifting, nel costo funzionale compaiono solo fattori valutati sul dominio, o su parti di esso, ma mai su elementi di restrizione. Per questo motivo solo il moltiplicatore legato al vincolo imposto dalla PDE deve essere introdotto.

Seguendo il procedimento esposto nei precedenti paragrafi, si procede col derivare il costo funzionale rispetto alle variabili \tilde{u} , \tilde{q} e λ , ottenendo la seguente espressione

$$\begin{aligned} d\mathcal{T}(\tilde{u}, \tilde{q}, \lambda) &= (\tilde{u} + \tilde{q} - u_d, \delta\tilde{u})_{\Omega_d} + (\tilde{u} + \tilde{q} - u_d, \delta\tilde{q})_{\Omega_d} + \alpha(\tilde{q}, \delta\tilde{q})_{\Omega_c} + \\ &+ \beta(\nabla\tilde{q}, \delta\tilde{q})_{\Omega_c} + (\lambda, \mathcal{F}(\delta\tilde{u} + \delta\tilde{q}))_{\Omega} + (\delta\lambda, \mathcal{F}(\tilde{u} + \tilde{q}))_{\Omega} . \end{aligned}$$

Imponendo la condizione di minimo del funzionale ($\mathcal{T}(\tilde{u}, \tilde{q}, \lambda) = 0$) e sviluppando alcuni termini, l’equazione diventa la seguente

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{T}(\tilde{u}, \tilde{q}, \lambda) &= (\tilde{u} + \tilde{q} - u_d, \delta\tilde{u})_{\Omega_d} + (\tilde{u} + \tilde{q} - u_d, \delta\tilde{q})_{\Omega_d} + \alpha(\tilde{q}, \delta\tilde{q})_{\Omega_c} \delta + \\ &+ \beta(\nabla\tilde{q}, \delta\tilde{q})_{\Omega_c} - \frac{1}{Pe}(\nabla\lambda, \nabla\delta\tilde{u})_{\Omega} - (\lambda, \mathbf{u} \cdot \nabla\delta\tilde{u})_{\Omega} - \frac{1}{Pe}(\nabla\lambda, \nabla\delta\tilde{q})_{\Omega} - \\ &- (\lambda, (\mathbf{u} \cdot \nabla\delta\tilde{q}))_{\Omega} - \frac{1}{Pe}(\nabla\delta\lambda, \nabla\tilde{u})_{\Omega} - (\delta\lambda, \mathbf{u} \cdot \nabla\tilde{u})_{\Omega} - \frac{1}{Pe}(\nabla\delta\lambda, \nabla\tilde{q})_{\Omega} - \\ &- (\delta\lambda, (\mathbf{u} \cdot \nabla\tilde{q}))_{\Omega} = 0 . \end{aligned}$$

Questa relazione deve essere verificata per qualsiasi variazione $\delta\tilde{u}$, $\delta\tilde{q}$, $\delta\lambda$. Di conseguenza, si può raccogliere a fattore comune i termini moltiplicando scalarmente l’equazione ricavata per ognuno di questi differenziali

$$(\tilde{u} + \tilde{q} - u_d, \delta\tilde{u})_{\Omega_d} - \frac{1}{Pe}(\nabla\lambda, \nabla\delta\tilde{u})_{\Omega} - (\lambda, \mathbf{u} \cdot \nabla\delta\tilde{u})_{\Omega} = 0 ,$$

$$(\tilde{u} + \tilde{q} - u_d, \delta\tilde{q})_{\Omega_d} + \alpha(\tilde{q}, \delta\tilde{q})_{\Omega_c} \delta + \beta(\nabla\tilde{q}, \delta\tilde{q})_{\Omega_c} - \frac{1}{Pe}(\nabla\lambda, \nabla\delta\tilde{q})_{\Omega} - (\lambda, (\mathbf{u} \cdot \nabla\delta\tilde{q}))_{\Omega} = 0 ,$$

$$-\frac{1}{Pe}(\nabla\delta\lambda, \nabla\tilde{u})_{\Omega} - (\delta\lambda, \mathbf{u} \cdot \nabla\tilde{u})_{\Omega} - \frac{1}{Pe}(\nabla\delta\lambda, \nabla\tilde{q})_{\Omega} - (\delta\lambda, (\mathbf{u} \cdot \nabla\tilde{q}))_{\Omega} = 0 .$$

Come già accennato queste equazioni formano il sistema del controllo ottimale sul contorno per il problema governato dall’equazione del calore (3.15). Trascurando il termine di avvezione e quello di sorgente, si ottiene come unico forzante l’operatore Laplaciano e il seguente sistema

del controllo

$$\begin{cases} (\tilde{u} + \tilde{q} - u_d, \delta\tilde{u})_{\Omega_d} - (\nabla\lambda, \nabla\delta\tilde{u})_{\Omega} = 0, \\ (\tilde{u} + \tilde{q} - u_d, \delta\tilde{q})_{\Omega_d} + \alpha(\tilde{q}, \delta\tilde{q})_{\Omega_c} \delta + \beta(\nabla\tilde{q}, \nabla\delta\tilde{q})_{\Omega_c} - (\nabla\lambda, \nabla\delta\tilde{q})_{\Omega} = 0, \\ -(\nabla\delta\lambda, \nabla(\tilde{u} + \tilde{q}))_{\Omega} = 0, \\ \tilde{u} = 0 \text{ su } \Gamma, \tilde{q} = h_d \text{ su } \Gamma \setminus \Gamma_c, \tilde{q} = h_c \text{ su } \Gamma_c, \lambda = 0 \text{ su } \Gamma. \end{cases} \quad (3.24)$$

Anche in questo caso la prima equazione del sistema è ottenuta differenziando il funzionale per la variabile \tilde{u} , pertanto prende il nome di *equazione dell'aggiunta*. La seconda invece è l'*equazione del controllo* ed, infine, l'ultima è l'*equazione di stato*. Si esegue ora un confronto tra queste equazioni e quelle trovate nel paragrafo 3.2. Le due equazioni sicuramente differiscono per il termine in β del fattore di normalizzazione $G(q)$. Questo termine, però, non influenza la dimostrazione dell'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange, o meglio non influenza le caratteristiche degli operatori M e Q definiti dalla (3.5) e dalla (3.6). Ponendo $u_a = q_a = -\lambda$ si ricava l'equivalenza delle equazioni (3.11) e (3.10) con le prime due equazioni del sistema (3.24). I vincoli sono anch'essi equivalenti, pertanto le due trattazioni sono coincidenti. Si può dunque concludere che, anche per il problema descritto dal sistema (3.24), vale il teorema della condizione necessaria di primo ordine, dunque l'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange è verificata.

Infine sostituendo il primo termine della prima equazione del sistema (3.24) con $(\nabla u, \nabla\delta u)_{\Omega_d}$, si ottiene il sistema del controllo per il flusso termico. Come accennato anche nel capitolo 3.3 questo tipo di controllo può risultare utile nel caso in cui si vogliono controllare i flussi di materia o di energia del sistema studiato.

Commenti sulla funzione lifting

Nel precedente paragrafo si è mostrato come la funzione di lifting argini le problematiche date dalla necessità di regolarizzare una funzione sotto le stringenti richieste del teorema della traccia. Mediante l'espansione della variabile di controllo su un dominio più vasto, è stato possibile attuare la regolarizzazione intera su questa variabile estesa, evitando così l'introduzione dei modelli non locali e garantendo l'appartenenza del controllo allo spazio frazionario richiesto.

Un ulteriore punto di forza della funzione di lifting è dato dalla possibilità di svincolare tale incognita dal forzante del sistema. Nel caso precedente sia la funzione di lifting che quella ausiliaria sottostavano alla stessa PDE, data dall'equazione del calore. Tuttavia quello che deve soddisfare la variabile estesa, o meglio la sua restrizione sul bordo di controllo, sono i requisiti dettati dal teorema del bilancio della regolarità. Si prenda ad esempio problemi di controllo ottimale in cui il vincolo sia dato da equazioni molto più complesse rispetto a quella considerata sin ora, come ad esempio il sistema di Navier Stokes o l'equazione dell'elasticità. In questi casi scegliere la funzione di lifting come soluzione della stessa PDE del forzante sarebbe estremamente sconveniente dal punto di vista della spesa computazionale. Il vantaggio fornito da questo metodo consiste nel poter generare la funzione di lifting a partire da un vincolo diverso da quello del problema, purché la sua restrizione appartenga allo spazio dettato dal teorema del bilancio della regolarità. Entrambi gli esempi forniti generano funzioni appartenenti allo spazio intero di Sobolev $H^1(\Omega)$, di conseguenza la funzione di controllo deve appartenere allo spazio frazionario precedentemente studiato. La funzione di lifting può essere dunque ricavata come soluzione della più semplice equazione differenziale che abbia soluzione nello spazio $H^1(\Omega)$ e restrizione in $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Una scelta conveniente per il vincolo da imporre alla funzione di lifting negli esempi appena forniti è sicuramente la PDE costituita dal semplice Laplaciano omogeneo.

Infine il metodo con funzione di lifting può essere sviluppato in maniera diversa a seconda di come viene scelto il dominio di lifting Ω_c . Poiché l'estensione della funzione è necessaria solo per applicare la regolarizzazione su un dominio più ampio, evitando così l'utilizzo di operatori frazionari, allora tale regione può essere presa in maniera arbitraria a patto che $\Gamma_c \subset \Omega_c$. Nel problema sopra studiato si è preso questo dominio esattamente uguale a quello in cui il nostro sistema è definito ($\Omega_c = \Omega$). Questa procedura risulta estremamente svantaggiosa dal punto di vista dei tempi di calcolo, infatti l'equazione necessita di essere risolta due volte, prima per la variabile \tilde{u} , poi per la \tilde{q} . Dato che gli unici valori della funzione di lifting a cui siamo interessati sono solo quelli appartenenti al bordo di controllo, non è necessario ottenere i suoi valori su tutti i nodi del dominio. I punti in cui la funzione viene valutata possono essere ridotti limitando la sua estensione a solo una piccola regione del dominio (*lifting ristretto*), in maniera tale da alleggerire e velocizzare il calcolo computazionale. In alternativa è anche possibile limitare i

calcoli valutando questa variabile attuando l'estensione nota anche come *lifting esterno*. In questo caso la funzione viene definita su una regione esterna al dominio del problema e tale per cui $\Omega \cap \Omega_c = \Gamma_c$. In ognuna di queste estensioni la funzione può soddisfare lo stesso vincolo del problema o, come suggerito precedentemente, un'equazione più semplice, pur rispettando il teorema del bilancio della regolarità. In figura 3.2 sono illustrate queste ulteriori tipologie di estensione del dominio di lifting.

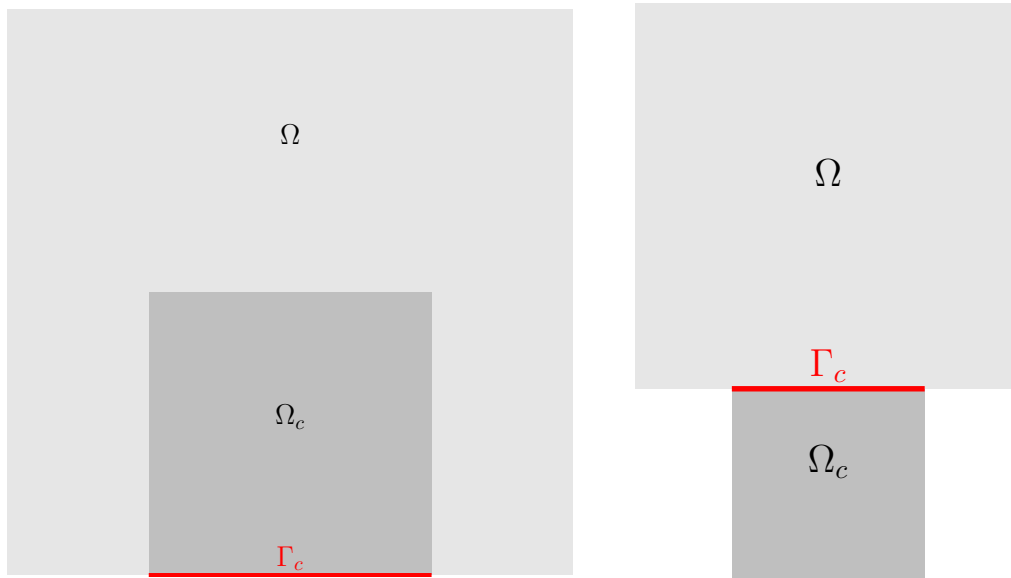


Figura 3.2. Estensione del dominio di lifting in maniera ristretta (sinistra) ed esterna (destra).

Si conclude questa sezione sottolineando alcuni limiti dei metodi appena descritti, vi sono infatti casi in cui queste estensioni del dominio non sono applicabili. Come esposto dal problema 3.7, per poter applicare il metodo della funzione di lifting occorre che la funzione estesa appartenga allo spazio vettoriale definito dalla (3.22). Questo è verificato quando solo condizioni omogenee sono imposte sulla variabile \tilde{u} . Tutte le condizioni non omogenee sono pertanto imposte sulla funzione di lifting, che deve dunque essere estesa su un dominio tale da contenere anche a queste regioni. Di conseguenza lifting esterno e ristretto sono applicabili solo se sul confine del sistema, eccetto quello di controllo, si applicano solo condizioni omogenee. In caso contrario, è necessaria l'estensione a tutto il dominio, che però si porta dietro un aumento del costo computazionale.

Come già accennato, in questo lavoro viene analizzato solo il caso di lifting esteso all'intero dominio, tuttavia i lettori interessati possono trovare in [13] un'applicazione del lifting ristretto a un problema del controllo analogo a quello sviluppato in questa tesi.

Capitolo 4

Risultati Numerici

In questo capitolo sono esposti i risultati numerici che forniscono la soluzione del problema del controllo sul contorno del dominio (problema 3.2). Tutti i metodi risolutivi esposti nei paragrafi 3.3, 3.4 e 3.5, sono stati analizzati. In particolare, i dati ottenuti fanno riferimento alla risoluzione dei sistemi (3.18), (3.21) e (3.24), ricavati alla fine di ognuno questi capitoli.

Si inizia ad analizzare il caso più semplice, ossia quello in cui il di dominio è bidimensionale e avente condizioni al contorno di Dirichlet omogenee, sviluppando anche un caso più realistico con condizioni non omogenee dello stesso tipo. I metodi risolutivi proposti sono testati per valutare l'accuratezza della soluzione e i tempi di calcolo al variare del coefficiente del fattore di regolarizzazione e del raffinamento della mesh. L'analisi viene svolta individuando un caso di riferimento, per poi studiare i possibili metodi di controllo per migliorare la soluzione ottenuta, tendendo anche in considerazione l'aumento dei costi di calcolo.

Gli stessi test sono sviluppati anche per il caso tridimensionale. Inoltre per qualunque dimensione spaziale viene effettuato sia un controllo ottmimale sul campo di tempratura che sul flusso termico. Nel dominio bidimensionale la valutazione dell'integrale misto nel fattore di regolarizzazione frazionario, equazione (2.19), viene risolto mediante l'utilizzo della formula analitica proposta in (2.26). Nel caso tridimensionale, invece, lo stesso integrale è valutato sia con l'utilizzo del metodo numerico, descritto in (2.25), che mediante la formula analitica (2.29). Per quanto riguarda l'approccio mediante funzione di lifting, solo il caso di dominio esteso per l'intera regione del sistema viene analizzato.

Tutti i risultati e i modelli forniti sono stati sviluppati in collaborazione con il Dipartimento di Matematica e Statistica dell'università Texas Tech University.

4.1 Risultati numerici: dominio bidimensionale

Questo paragrafo è dedicato all'esposizione dei risultati ottenuti nel caso di controllo ottimale in un dominio bidimensionale. In particolare la regione di interesse è data da $\Omega = \{x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$, il controllo agisce sul contorno $\Gamma_c = \{x \in [0.25, 0.75], y = 0\}$ e il target è richiesto su $\Omega_d = \{x \in [0, 1], y \in [0.5, 1]\}$, come mostrato in figura 4.1. Il problema simulato consiste nel controllo del campo di temperatura. Di conseguenza, facendo riferimento alla generica equazione del funzionale di costo, di equazione (3.1), l'errore di ottimizzazione è dato da

$$0.5 \int_{\Omega_d} (u - u_d)^2 d\mathbf{x} , \quad (4.1)$$

dove il target è fissato al valore $u_d = 1$. Questo problema è stato risolto mediante regolarizzazione intera ($s = 1$), frazionaria ($s = 0.5$) e tramite funzione di lifting (lift). Inoltre, per ognuna di esse diverse simulazioni sono state svolte variando il parametro α (coefficiente di regolarizzazione) e il raffinamento della mesh (N_{lev}). Quest'ultimo parametro ha come riferimento il livello più grossolano dato dalla discretizzazione con una griglia 2×2 uniforme di quadrilateri. Infine, tutte le variabili del sistema sono state discretizzate tramite l'uso di funzioni biquadratiche continue a tratti, come descritto nel capitolo 1.

I dati relativi al valore dell'equazione (4.1), ricavati da queste simulazioni, sono raccolti nella tabella 4.1. Analizzando i risultati ottenuti, si osserva la costante diminuzione della distanza dal valore obiettivo con il diminuire del fattore α , in accordo con quanto discusso nel paragrafo 3.1.1. Infatti, al calare di tale parametro, il fattore di regolarizzazione $G(q)$ assume sempre meno rilevanza a favore, invece, della distanza dal target ricercato. Questo porta ad avere risposte che ottimizzano sempre meglio il sistema, ovvero seguono molto bene il target imposto, ma che allo stesso tempo risultano molto più irregolari. Questo fenomeno è testimoniato dai profili che la variabile di controllo assume in funzione del coefficiente di regolarizzazione, mostrati in figura 4.2. Analizzando le soluzioni fornite dalla regolarizzazione intera ed effettuando un paragone

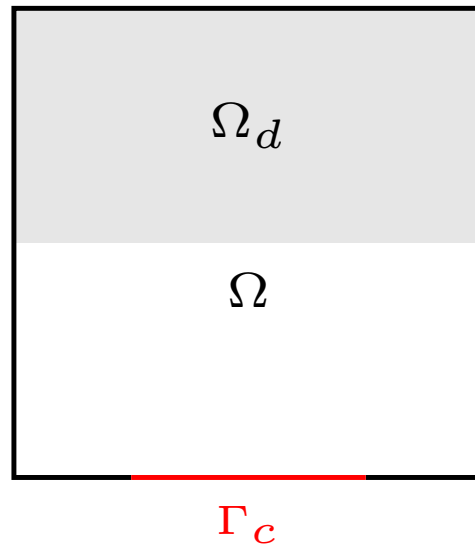


Figura 4.1. Problema di analisi nel caso bidimensionale.

con quelle appartenenti allo spazio frazionario, si evince che le seconde ottimizzano meglio il sistema. Questo risultato può essere considerato come una dimostrazione pratica del teorema del bilancio della regolarità, evidenziando come la corretta appartenenza della soluzione allo spazio funzionale del problema garantisca di trovare il minimo del funzionale ricercato. Infine, è importante notare che il raffinamento della mesh non influisce in modo significativo sulla soluzione numerica dell'algoritmo.

Ulteriori dati, forniti da queste simulazioni, sono raccolti in tabella 4.2. In essa vengono raccolte le misure, espressi in secondi, del tempo di assemblaggio e del tempo di risoluzione. Ovviamente questi valori aumentano con l'aumentare del numero di raffinamento della mesh, in quanto sarà maggiore il numero di nodi in cui la funzione deve essere calcolata, per tanto si è deciso di analizzarli solo per il caso $N_{lev} = 7$. Focalizzandoci sulla velocità del metodo frazionario, è evidente come esso necessiti di tempi molto più lunghi rispetto le altre soluzioni proposte. Il principale autore di questa pesantezza è sicuramente l'operatore Laplaciano frazionario che compare nel fattore di regolarizzazione $G(q)$. Infatti, come esposto nel capitolo 2, la sua presenza porta a dover maneggiare matrici dense, le quali richiedono operazioni di assemblaggio più onerose rispetto alle controparti intere e di lifting.

α	$N_{lev} = 6$			$N_{lev} = 7$		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	0.2477080365	0.2497508654	0.2478428460	0.2476968103	0.2497507205	0.2478288473
10^{-2}	0.2294104116	0.2475385801	0.2305034666	0.2293199598	0.2475371663	0.2303892514
10^{-3}	0.1524102288	0.2280586153	0.1547381679	0.1522235865	0.2280474374	0.1544850312
10^{-4}	0.1128541264	0.1498205133	0.1131269040	0.1128359294	0.1498000773	0.1130175319
10^{-5}	0.1111959242	0.1128382975	0.1112071819	0.1111891218	0.1128372971	0.1111975793
10^{-6}	0.1102855318	0.1114297982	0.1103010324	0.1102636398	0.1114295644	0.1102742311
10^{-7}	0.1055431969	0.1110134656	0.1055704284	0.1054856266	0.1110111272	0.1055059578

Tabella 4.1. Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).

α	Tempo di assemblaggio			Tempo di risoluzione		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	1.221983	0.379299	0.525643	2.016127	1.820986	1.936550
10^{-2}	1.248504	0.373633	0.522294	2.056594	1.833646	1.896492
10^{-3}	1.203502	0.382326	0.540599	2.083847	1.861978	1.947254
10^{-4}	1.237983	0.388538	0.538992	2.082678	1.862964	1.949215
10^{-5}	1.217509	0.385502	0.539003	2.116409	1.902704	1.937398
10^{-6}	1.184595	0.386326	0.537765	2.080748	1.877445	2.029098
10^{-7}	1.176929	0.390519	0.544691	2.058411	1.854969	1.969081

Tabella 4.2. Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento.

Questa è un'ulteriore dimostrazione di come la presenza degli operatori frazionari complichino notevolmente il modello e la risoluzione del sistema. Per tanto, se possibile, sarebbe meglio evitarne il loro utilizzo o trovare strategie alternative, come quella della funzione di lifting, per la risoluzione di questi problemi.

Una ulteriore riflessione la si ricava comparando i tempi delle due restanti tipologie, quella intera e di lifting. Si osserva infatti che, sia per l'assemblaggio che la risoluzione, il secondo metodo richiede un impegno maggiore al calcolatore per ottenere la soluzione. Questo è imputabile dal fatto che il calcolo della soluzione della PDE viene eseguito due volte, una per la variabile estesa (\tilde{u}) e una per il lifting (\tilde{q}), mentre la soluzione nello spazio intero (H^1) risolve il sistema lineare solo per la variabile di stato (u).

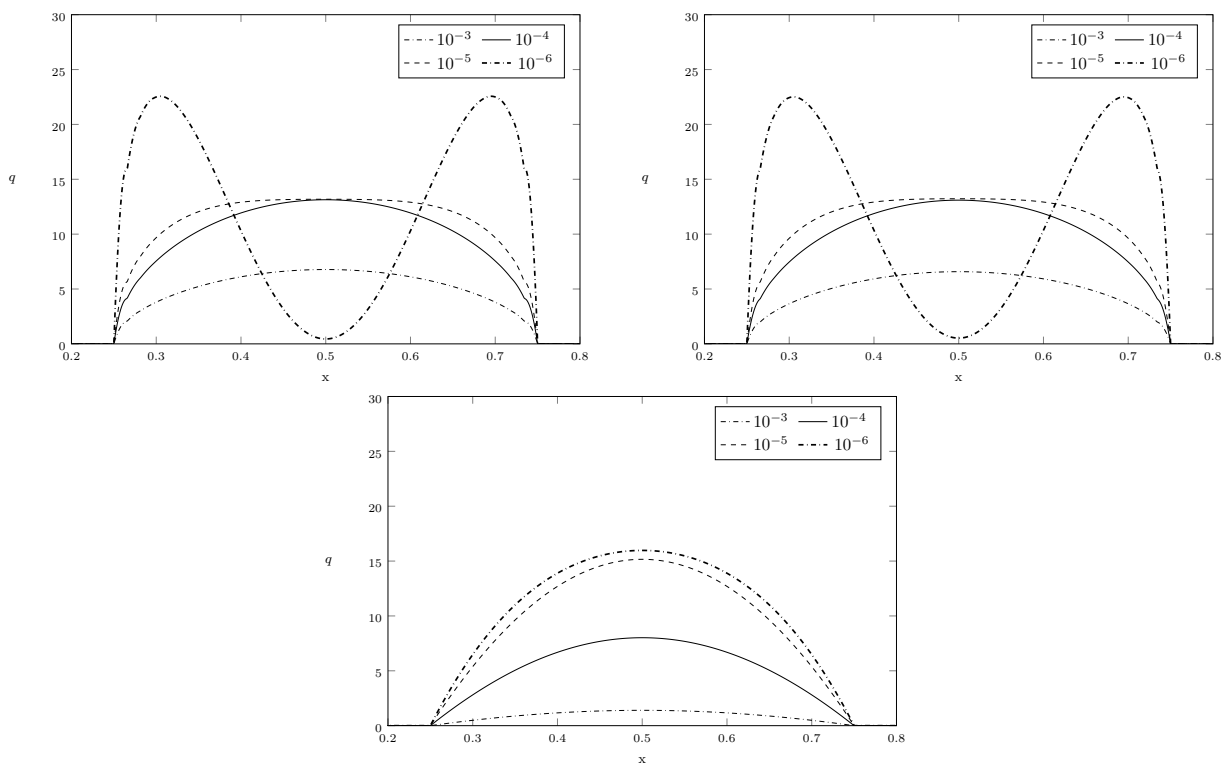


Figura 4.2. Caso bidimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento per $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ e $\alpha = 10^{-6}$, per regolarizzazione frazionaria (alto a sinistra), regolarizzazione con lifting (alto a destra) e regolarizzazione intera (basso).

In figura 4.2 sono mostrate le soluzioni grafiche dei risultati appena descritti. In particolare si sono rappresentate le soluzioni ottenute con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento, dove la variabile di controllo viene regolarizzata tramite le tre strategie studiate e con parametro di regolarizzazione α che varia da 10^{-3} a 10^{-6} . Si può osservare come le funzioni vanno via via ad assumere tratti sempre più complessi man mano che si trascura questo termine. Si passa infatti da funzioni estremamente regolari, con singola concavità e un unico punto stazionario, ad avere funzioni con carattere quasi oscillatorio, in cui sono presenti variazioni di concavità e multipli punti stazionari. Una ulteriore e fondamentale conclusione la si ricava paragonando la soluzione frazionaria e quella di lifting. Si osserva, infatti, come tali andamenti siano perfettamente coincidenti. Questo risultato fornisce dunque una dimostrazione applicata del teorema proposto nel paragrafo 3.1.1, il quale afferma che due diverse regolarizzazioni nello stesso spazio funzionale generano soluzioni equivalenti.

Nel seguito si considerano queste soluzioni, i dati forniti dalle tabelle e le figure illustrate, come riferimento o base di partenza a partire dal quale si sviluppano nuovi metodi di controllo per incrementarne l'ottimizzazione effettuata. Prima di entrare nel merito si studia il caso di ottimizzazione del flusso termico.

4.1.1 Ottimizzazione del gradiente

Considerando lo stesso dominio rappresentato in figura 4.1, si considera ora il caso in cui il target sia dato dal gradiente della variabile di stato. La forma del funzionale obiettivo risulta essere

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_d} |\nabla u - (\nabla u)_d|^2 d\Omega, \quad (4.2)$$

dove il gradiente obiettivo è posto pari al vettore nullo $(\nabla u)_d = \emptyset$. Risulta chiaro che, avendo imposto sia il target che le condizioni al contorno pari a zero, anche la funzione del controllo q sul bordo Γ_c risulta assumere un profilo di temperatura nullo. Per ottenere soluzioni più interessanti e trarre conclusioni analoghe al caso precedente, introduciamo condizioni al contorno più articolate. Ciò non solo genera un campo di temperatura complesso, giustificando un controllo sul gradiente, ma fornisce anche un esempio più realistico di problema. Infatti, nella

pratica ingegneristica raramente i confini del dominio sono sottoposti a condizioni omogenee come quelle imposte fin ora. I nuovi vincoli consistono in due campi di temperatura lineari, imposti sui lati esterni rispetto al controllo, e un campo omogeneo sul bordo opposto a Γ_c . Il primo assume valore nullo nei vertici in comune con il bordo in cui risiede q , fino ad arrivare al valore unitario nei vertici opposti, dove il campo rimane costante a questo valore su tutti i restanti punti della frontiera. Una rappresentazione grafica delle nuove condizioni al contorno sono illustrate in figura 4.3.

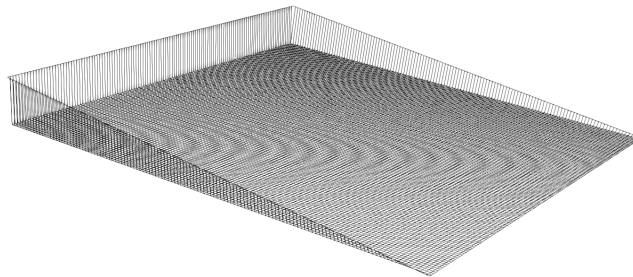


Figura 4.3. Caso bidimensionale: condizioni al contorno imposte nel caso di ottimizzazione del gradiente.

La tabella 4.3 descrive come varia il funzionale di costo, equazione (4.2), col variare del raffinamento della mesh e del coefficiente di regolarizzazione α per i tre tipi di funzionali $G(q)$ studiati. Anche in questo caso si osserva valori maggiori per le soluzioni in H^1 , mentre per gli altri due casi i dati ottenuti sono pressoché equivalenti. I valori inerenti i tempi di calcolo sono raccolti, invece, in tabella 4.4. Anche in questo caso tutte le previsioni sono rispettate. Infatti si osserva come la regolarizzazione frazionaria sia sempre quella con il maggior sforzo computazionale e quindi col la maggior durata delle operazioni risolutive. Inoltre, anche il confronto tra il lifting e la regolarizzazione intera soddisfa quanto atteso. Dovendo risolvere il sistema sia per la variabile di controllo che quella estesa, la prima risoluzione (lift) è caratterizzata da tempi di calcolo più elevati rispetto alla seconda ($s = 1$).

Confrontando ulteriormente i seguenti risultati con quelli esposti in tabella 4.2, si nota come i tempi di calcolo per risolvere le due tipologie di problema siano praticamente le stesse.

α	$N_{lev} = 6$			$N_{lev} = 7$		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	0.0178596885	0.0204342564	0.0170320486	0.0178482616	0.0204340397	0.0170123888
10^{-2}	0.0111928243	0.0176931597	0.0111089911	0.0111812044	0.0176918491	0.0110923175
10^{-3}	0.0086110250	0.0110464548	0.0086115527	0.0086089166	0.0110454930	0.0086080120
10^{-4}	0.0082485705	0.0086140772	0.0082502546	0.0082473053	0.0086142950	0.0082481687
10^{-5}	0.0080102518	0.0082965601	0.0080122527	0.0080077655	0.0082968439	0.0080090844
10^{-6}	0.0078098944	0.0081299229	0.0078107420	0.0078091468	0.0081296727	0.0078096264
10^{-7}	0.0077686882	0.0078648772	0.0077691394	0.0077684810	0.0078647042	0.0077686789

Tabella 4.3. Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).

α	Tempo di assemblaggio			Tempo di risoluzione		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	1.372739	0.423955	0.605772	2.229685	2.015761	2.011255
10^{-2}	1.358876	0.425452	0.584126	2.227428	2.011985	1.933957
10^{-3}	1.438795	0.406619	0.557759	2.476241	1.897079	1.963797
10^{-4}	1.239380	0.434898	0.570715	2.170265	1.934226	1.908697
10^{-5}	1.216095	0.406403	0.581069	2.237598	1.887653	2.065143
10^{-6}	1.268247	0.417967	0.618544	2.329757	1.978970	2.017775
10^{-7}	1.295014	0.418314	0.635796	2.244216	1.946614	2.050462

Tabella 4.4. Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento.

Questo è motivato dal fatto che, al lato numerico, implementare un funzionale di costo come in (4.1) o in (4.2), non comporta considerevoli modifiche dell'algoritmo e i tempi di calcolo rimangono inalterati.

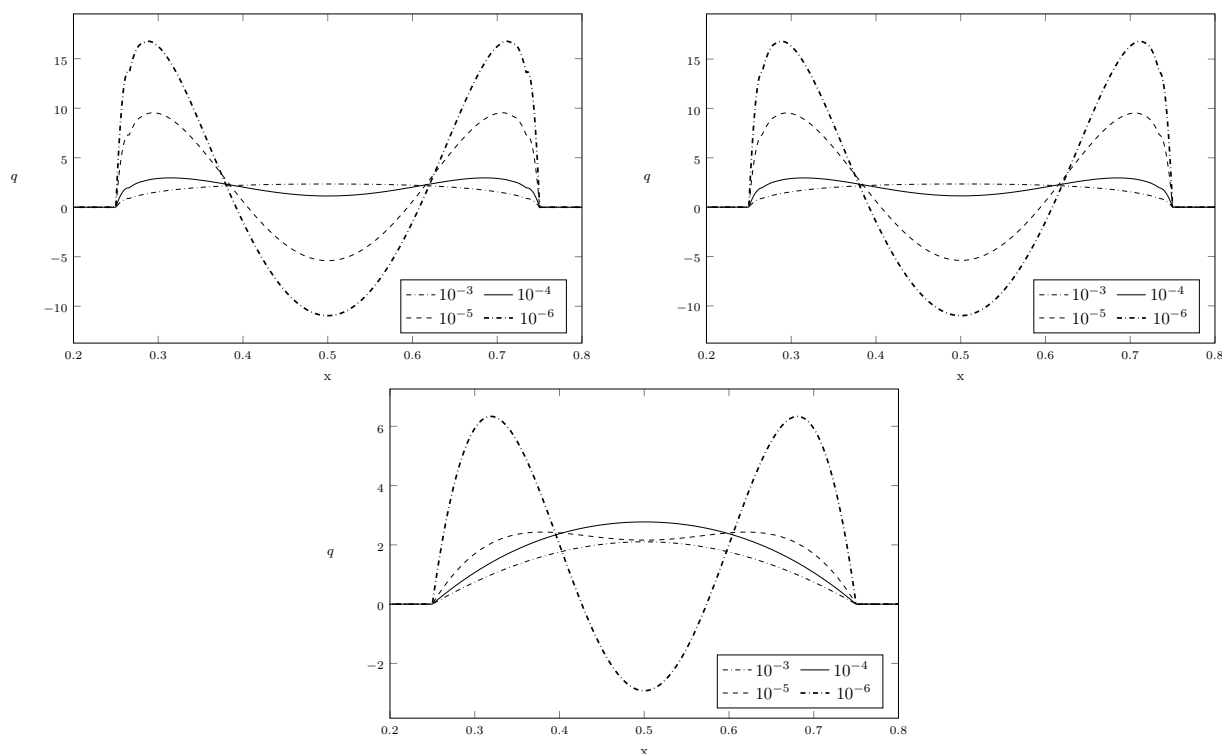


Figura 4.4. Caso bidimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento per $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ e $\alpha = 10^{-6}$, per regolarizzazione frazionaria (alto a sinistra), regolarizzazione con lifting (alto a destra) e regolarizzazione intera (basso).

Gli andamenti delle soluzioni per coefficienti di regolarizzazione da 10^{-3} a 10^{-6} , con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento della mesh, sono esposti in figura 4.4 per ogni tipo di soluzione q studiata. Si nota come le funzioni rappresentate perdono la loro regolarità, acquisendo andamenti oscillatori, man mano che il parametro α cala, proprio come ottenuto nel caso precedente. Infine è evidente come le soluzioni di lifting e quella frazionaria siano esattamente equivalenti, provando ancora una volta quanto sostenuto dal teorema della regolarizzazione.

Si può concludere che sia l'applicazione per l'ottimizzazione del campo di temperatura, che per il gradiente, forniscono gli stessi risultati in termini di confronto tra le varie strategie di regolarizzazione. Di conseguenza nel seguito, solo il primo caso illustrato verrà analizzato e i risultati che andremo ad esporre saranno da considerarsi validi per entrambi i problemi.

4.1.2 Miglioramento delle prestazioni del controllo

Allargamento della regione di controllo

Vogliamo ora analizzare quali sono le possibili strategie per migliorare l'ottimizzazione fin ora ottenuta. Considerando, per quanto appena detto, solo l'applicazione data dal costo funzionale di equazione (4.1). Un primo approccio può essere quello di estendere la regione di controllo all'intero bordo di confine, come mostrato in figura 4.5.

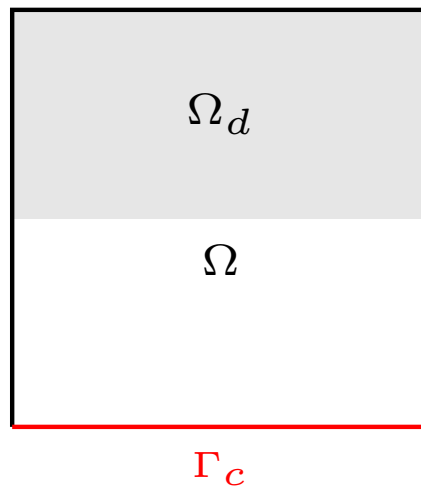


Figura 4.5. Caso bidimensionale: estensione della regione di controllo Γ_c .

Si analizzano i risultati ottenuti dalla precedente soluzione (tabella 4.1) con quelli proposti di seguito (tabella 4.5). Si osserva che effettivamente l'estensione della regione di controllo migliora l'ottimizzazione. Ovviamente questo è conforme con quanto atteso, infatti aumentare il dominio di q permette di ampliare la zona manipolabile e dunque avere una maggiore influenza sul comportamento dello stato all'interno del dominio. Inoltre anche in questo caso aumentare il livello di raffinamento non migliora la soluzione in maniera apprezzabile.

α	$N_{lev} = 6$			$N_{lev} = 7$		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	0.2442039572	0.2487195971	0.2458522012	0.2441947749	0.2487188295	0.2458522016
10^{-2}	0.2050495916	0.2379472493	0.2155909051	0.2049947968	0.2379404514	0.2155909070
10^{-3}	0.1242599652	0.1756845907	0.1322543044	0.1242273808	0.1756596392	0.1322542910
10^{-4}	0.1102417234	0.1146328792	0.1106531242	0.1102392306	0.1146284063	0.1106531002
10^{-5}	0.1092242581	0.1101777607	0.1094276587	0.1092183558	0.1101771863	0.1094276409
10^{-6}	0.1050531071	0.1093878910	0.1053532675	0.1050353603	0.1093836730	0.1053532702
10^{-7}	0.1012038905	0.1052272772	0.1012616222	0.1012006740	0.1052121964	0.1012616040

Tabella 4.5. Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).

α	Tempo di assemblaggio			Tempo di risoluzione		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	1.404873	0.385204	0.551536	2.132778	1.858534	2.016257
10^{-2}	1.413125	0.407359	0.540576	2.104937	1.893790	1.953207
10^{-3}	1.400776	0.389047	0.541764	2.132248	1.876480	1.979792
10^{-4}	1.401014	0.393028	0.576561	2.163928	1.895074	2.082915
10^{-5}	1.462633	0.394124	0.549316	2.204974	1.889948	2.041320
10^{-6}	1.524003	0.424808	0.536823	2.227672	1.943697	1.991017
10^{-7}	1.485106	0.421536	0.539449	2.265641	1.916866	2.020058

Tabella 4.6. Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento.

Anzi, osservando il contributo alla minimizzazione del funzionale di costo tra il raffinamento della mesh e l'estensione del dominio di controllo, quest'ultimo risulta dare un contributo molto più marcato. Per tanto nel seguito l'analisi del raffinamento della mesh verrà trascurata, eseguendo ogni simulazione con $N_{lev} = 7$ livelli di divisione del dominio. Ovviamente, anche in questo caso, la regolazione frazionaria e quella con il lifting risultano essere i migliori approcci per ottimizzare il sistema.

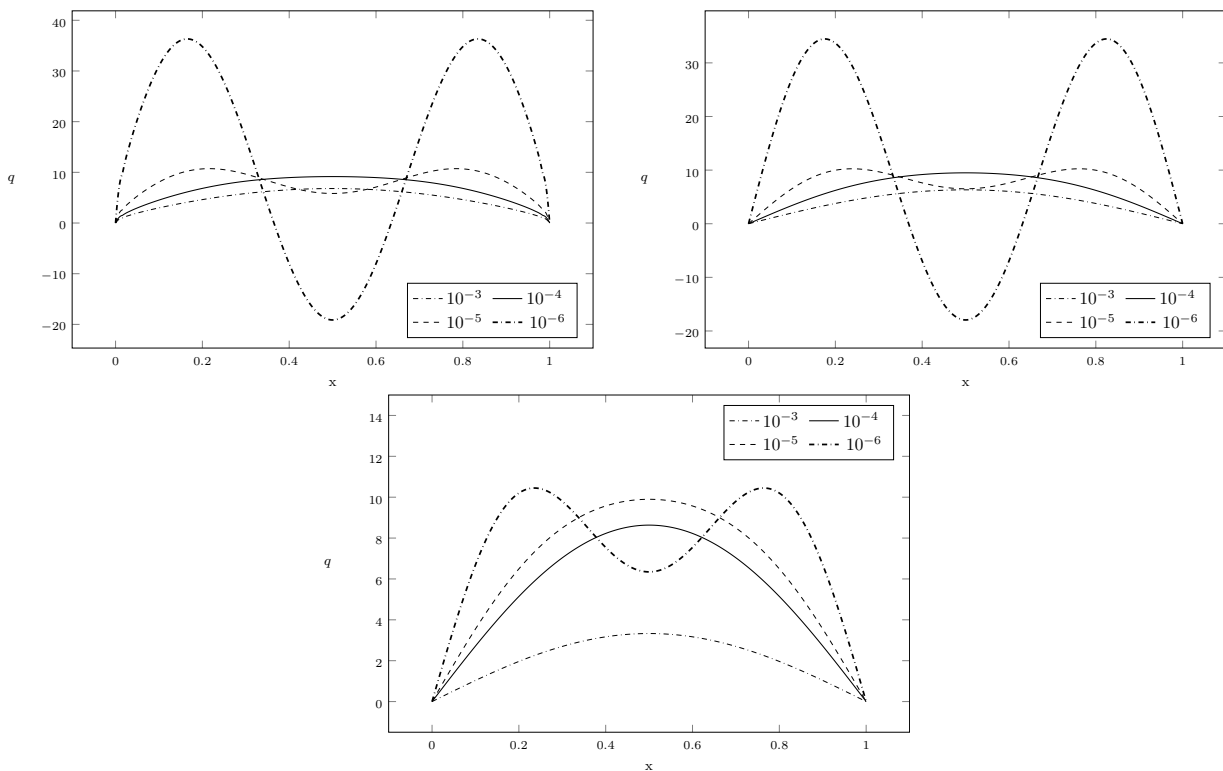


Figura 4.6. Caso bidimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento per $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ e $\alpha = 10^{-6}$, per regolarizzazione frazionaria (alto a sinistra), regolarizzazione con lifting (alto a destra) e regolarizzazione intera (basso).

L'estensione della regione del target porta con sé anche degli svantaggi. Analizzando la tabella 4.6, la quale raccoglie i dati relativi ai tempi di calcolo, si osserva che la nuova strategia è più laboriosa rispetto quella in cui il controllo è attuato su una regione più ristretta. In

altri termini, l'aumento della regione di controllo aumenta a sua volta il costo computazionale. Questo è giustificato dal fatto che, a livello numerico, aumentare le zone di controllo porta ad introdurre delle variabile dove prima vi erano valori noti a priori, dati dalle condizioni al contorno di Dirichlet. I gradi di libertà dell'incognita di conseguenza aumentano e con essi anche i nodi in cui occorre risolvere il problema, il che comporta ad un un aumento delle operazioni da effettuare e quindi maggiore tempo di calcolo.

Confrontiamo ora i trend delle soluzioni ottenute col dominio di controllo ampliato, forniti in figura 4.6, con quelli ottenuti precedentemente. Si osserva che tale estensione porta ad una maggiore irregolarità delle funzioni. Infatti le soluzioni di lifting e quelle frazionarie assumono precocemente un andamento oscillatorio a partire da valori del coefficiente α pari a 10^{-5} . Tale comportamento lo si osserva anche per la regolarizzazione in H^1 , se prima la funzione rimaneva molto regolare anche per i più bassi valori di α , ora anche lei inizia ad assumere caratteri irregolari con multipli punti stazionari.

Controlli multipli

Una seconda strategia per raffinare la soluzione di riferimento è data dall'utilizzo di multiple regioni di controllo. Consideriamo dunque il caso illustrato in figura 4.7 , dove alla precedente $\Gamma_{c,1} = \{x \in [0.25, 0.75], y = 0\}$, viene aggiunta anche $\Gamma_{c,2} = \{x = 0, y \in [0.25, 0.75]\}$.

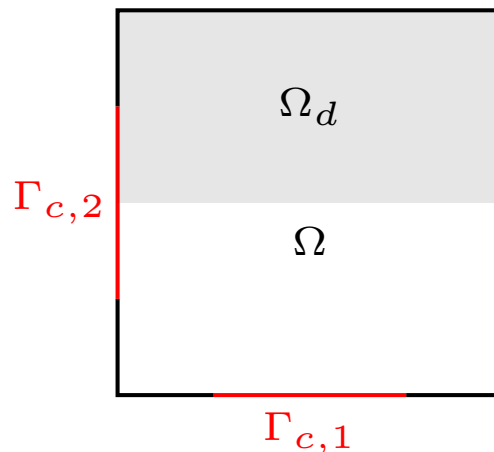


Figura 4.7. Caso bidimensionale: multiple regioni di controllo $\Gamma_{c,1}$ e $\Gamma_{c,2}$.

Confrontiamo dunque i risultati ottenuti da queste simulazioni con le precedenti. Dalla tabella 4.8 si osserva che il funzionale di costo viene notevolmente ridotto. Questo è sicuramente giustificato dalle motivazioni esposte in precedenza, l'incremento delle regioni di controllo aumenta la capacità di influire sul sistema permettendo di avvicinarsi sempre più al comportamento desiderato. Questo forte incremento è sicuramente dovuto anche dal fatto che, a differenza del test precedente in cui l'estensione del controllo avveniva sullo stesso bordo di confine, in questo caso l'ampliamento avviene su una regione differente della frontiera. Quest'ultima, trovandosi più vicino alla zona di target Ω_d , riesce ad influire maggiormente sul comportamento dello stato del sistema, fornendo un contributo più significativo all'ottimizzazione.

La tabella 4.8 fornisce i nuovi tempi di calcolo della soluzione. Ovviamente il tempo computazionale è maggiore di tutti i casi analizzata in precedenza. Tuttavia, confrontando questi risultati con quelli mostrati in tabella 4.6, si osserva che tale scostamento non risulta poi così marcato. Si può concludere che, visti i simili tempi di calcolo con la proposta precedente, l'aggiunta di una regione di controllo fornisce benefici molto più marcati, in termini di minimizzazione del costo funzionale, rispetto alla sola estensione del bordo di controllo.

Infine, la figura 4.8 mostra la variabile di controllo q su ognuno dei bordi ad essa dedicati. Come sperato anche in queste simulazioni si ha la verifica del teorema della regolarizzazione, in quanto si ricava lo stesso comportamento sia per la funzione ottenuta tramite regolarizzazione frazionaria che mediante funzione di lifting. Inoltre per quanto riguarda il bordo $\Gamma_{c,1}$, si osservano andamenti più regolari di quelli mostrati in figura 4.6. Infatti per queste funzioni si evidenzia un andamento verso l'oscillatorio solo per il caso $\alpha = 10^{-6}$, mentre per la regolarizzazione in H^1 il grafico rimane sempre molto regolare. Tuttavia questa proprietà non si trasmette anche al controllo ottenuto sul bordo $\Gamma_{c,2}$. Su questa regione le soluzioni ricavate risultano essere significativamente irregolari, presentando multipli punti stazionari già per i più elevati valori di α . Questo comportamento è giustificato dal fatto che, essendo $\Gamma_{c,2}$ il bordo più adiacente ad Ω_d , il sistema sfrutterà maggiormente questa componente per ottimizzare il sistema. Questo si traduce in una maggiore irregolarità del controllo ottenuto, che si aggrava sempre più man mano che si raggiungono i bordi coincidenti col confine della regione di controllo.

	$N_{lev} = 7$		
α	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	0.2256759369	0.2469768081	0.2261897176
10^{-2}	0.1641644115	0.2252627884	0.1639861169
10^{-3}	0.1166815963	0.1652957515	0.1172022460
10^{-4}	0.0937246434	0.1183758025	0.0941026680
10^{-5}	0.0900537378	0.0947188775	0.0901104344
10^{-6}	0.0878985997	0.0911088597	0.0877622277
10^{-7}	0.0869962178	0.0884140840	0.0864517189

Tabella 4.7. Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).

α	Tempo di assemblaggio			Tempo di risoluzione		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	1.457330	0.418891	0.581202	2.302559	1.985770	2.093432
10^{-2}	1.446539	0.397814	0.528552	2.295316	1.884401	1.936329
10^{-3}	1.440671	0.404870	0.541334	2.273028	2.001904	1.963640
10^{-4}	1.527242	0.408759	0.571764	2.323466	2.126711	2.162986
10^{-5}	1.446590	0.390017	0.579452	2.320914	1.865078	2.090847
10^{-6}	1.533931	0.386481	0.533698	2.445666	1.911854	2.041884
10^{-7}	1.486984	0.409126	0.535369	3.036452	1.993848	2.070377

Tabella 4.8. Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento.

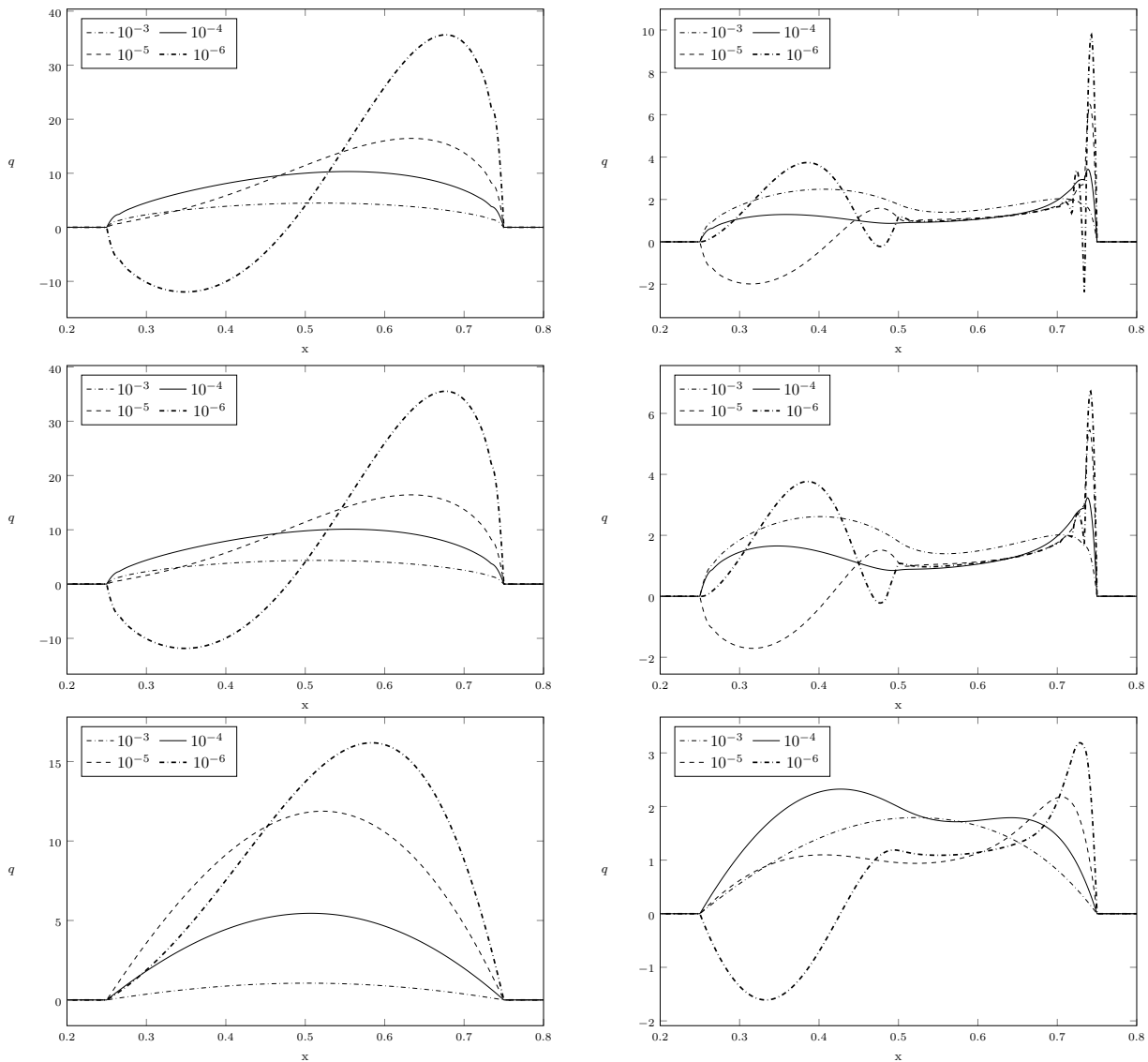


Figura 4.8. Caso bidimensionale: variabile di controllo q su $\Gamma_{c,1}$ (sinistra) e su $\Gamma_{c,2}$ (destra) con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento per $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ e $\alpha = 10^{-6}$, per regolarizzazione frazionaria (alto), regolarizzazione con lifting (centro) e regolarizzazione intera (basso).

Da queste simulazioni si sono ricavati risultati importanti, i quali suggeriscono un ulteriore percorso da intraprendere per incrementare le performance dell'ottimizzazione. Infatti si è osservato come l'aggiunta di un bordo di controllo in vicinanza con la regione del target migliori

significativamente la soluzione, con quasi gli stessi costi di quelli dovuti all'ampliamento del controllo su tutta un'intera regione di confine. Quello che si propone di seguito sarà per tanto non quello di estendere ulteriormente la regione di controllo, ma di spostare il controllo dalla regione $\Gamma_{c,1}$ a $\Gamma_{c,2}$.

Spostamento della regione di controllo

Si decide dunque di tornare nel caso originario in cui è presente un'unica regione di controllo localizzata su uno dei bordi di frontiera. A differenza del problema di riferimento il dominio della nostra variabile q è il seguente $\Gamma_c = \{x = 0, y \in [0.25, 0.75]\}$, come viene mostrato in figura 4.9.

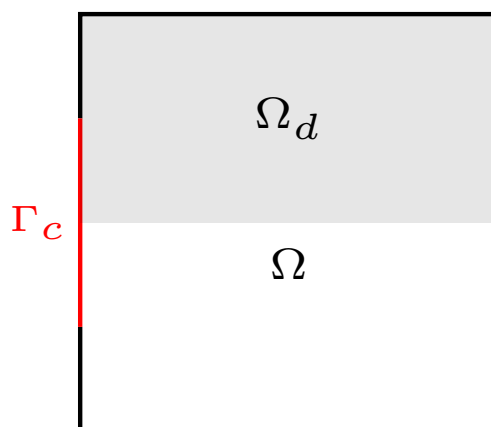


Figura 4.9. Caso bidimensionale: regione di controllo Γ_c in prossimità della zona di target Ω_d .

Si confrontino i dati inerenti la minimizzazione del funzionale, raccolti in tabella 4.9, con quelli delle simulazioni precedenti. Si osserva che, eccetto il caso in cui si utilizzano due regioni di controllo differenti, il caso dove la funzione q giace il più vicino possibile alla regione del target Ω_d risulta essere quello che meglio ottimizza il sistema. Infatti questo metodo non solo risulta essere più efficiente del test di riferimento, ma anche della sua versione estesa (tabella 4.5).

	$N_{lev} = 7$		
α	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	0.2276239149	0.2472211426	0.2290413246
10^{-2}	0.1742463443	0.2273322849	0.1758457394
10^{-3}	0.1501240117	0.1760220627	0.1505325511
10^{-4}	0.1322645980	0.1560805461	0.1324545297
10^{-5}	0.1216049698	0.1372233411	0.1216909590
10^{-6}	0.1140950796	0.1264964814	0.1139720861
10^{-7}	0.1089465510	0.1177394714	0.1084519966

Tabella 4.9. Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).

	Tempo di assemblaggio			Tempo di risoluzione		
α	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	1.300394	0.408386	0.588317	2.405033	1.863072	2.173303
10^{-2}	1.475683	0.405522	0.661582	2.119794	1.904443	2.290272
10^{-3}	1.140590	0.404038	0.536100	2.115155	1.908242	1.934231
10^{-4}	1.210213	0.396886	0.557717	2.168919	1.846706	1.956352
10^{-5}	1.144792	0.399812	0.524849	2.136394	1.861151	1.968373
10^{-6}	1.163152	0.407262	0.531448	2.125217	1.914364	1.923530
10^{-7}	1.339372	0.408026	0.547340	2.131240	1.938628	2.002231

Tabella 4.10. Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento.

Anche paragonando i dati in tabella 4.10 inerenti ai tempi di risoluzione, si ricavano utili informazioni. Infatti, questi test mostrano come tale strategia di controllo risulti avere costi computazionali paragonabili con il problema di riferimento. La giustificazione di ciò è giustificata come segue. A differenza dei metodi di estensione o di doppiaggio della regione di controllo, quello ora proposto non aumenta i gradi di libertà della variabile q . I nodi in cui valutare il controllo rimangono esattamente gli stessi del caso principale, eccetto il loro collocamento sulle regioni di contorno.

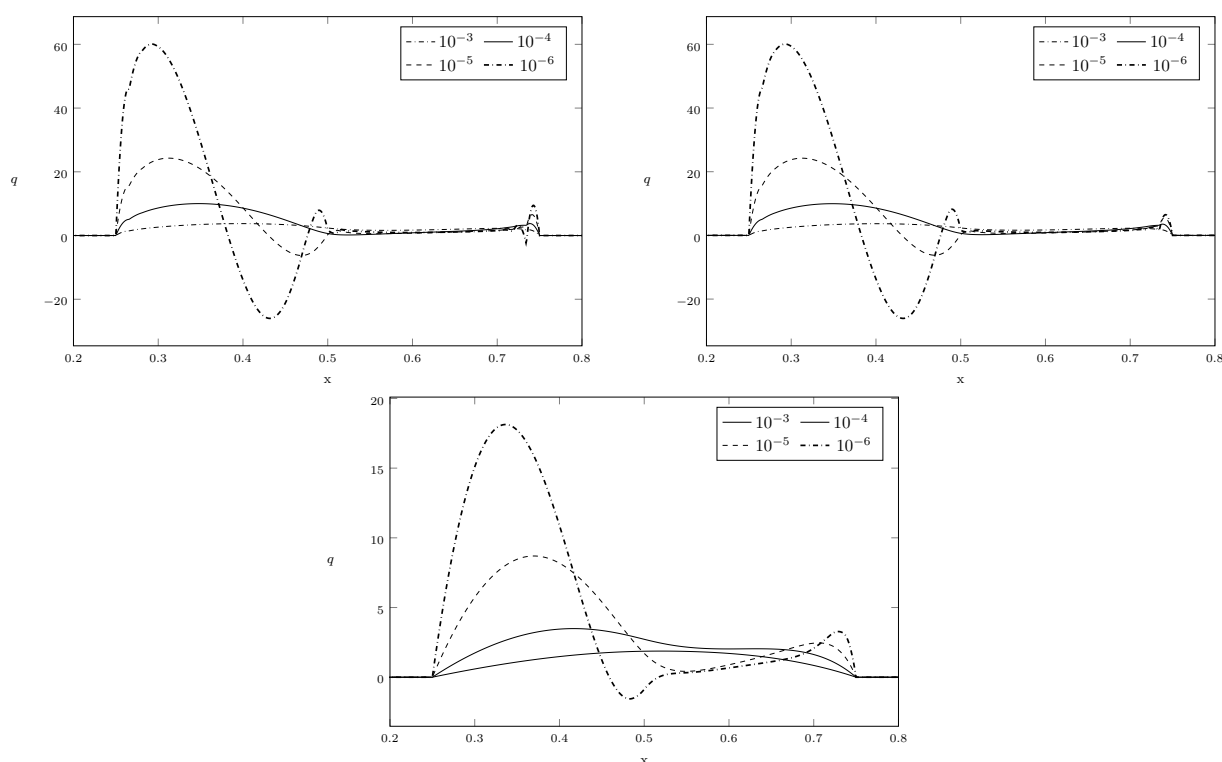


Figura 4.10. Caso bidimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento per $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ e $\alpha = 10^{-6}$, per regolarizzazione frazionaria (alto a sinistra), regolarizzazione con lifting (alto a destra) e regolarizzazione intera (basso).

Analizziamo infine gli andamenti delle funzioni di controllo così ricavate. In figura 4.10 è mostrato come l'avvicinamento della regione Γ_c alla zona di target complichino notevolmente i profili delle soluzioni ottenute. Confrontandoli con quelli ricavati dal problema di riferimento di

figura 4.2, si nota come gli andamenti assumono dei caratteri molto più irregolari, caratterizzati da forti oscillazioni e picchi marcati. Se nel primo caso le oscillazioni si manifestavano solo nella regolarizzazione frazionaria e di lifting, per $\alpha = 10^{-6}$, ora le soluzioni presentano svariati punti di minimo e di massimo per qualunque metodo di regolarizzazione e valore del parametro α .

4.2 Risultati numerici: dominio tridimensionale

Nel seguito il caso tridimensionale è analizzato. Simulazioni analoghe al caso bidimensionali sono state svolte al fine di trarre conclusioni in merito al legame tra la soluzione ottenuta e il numero di raffinamento della mesh N_{lev} , il coefficiente di regolarizzazione α e i tempi di calcolo per ottenere la risposta. La regione presa in esame è un cubo di dominio $\Omega = \{x \in [0, 1], y \in [0, 1], z \in [0, 1]\}$, la regione di controllo è $\Gamma_c = \{x = 0, y \in [0.25, 0.75], z \in [0.25, 0.75]\}$ e la regione del target è data da $\Omega_d = \{x \in [0.5, 1], y \in [0, 1], z \in [0, 1]\}$, come mostrato in figura 4.11. Nel seguito i metodi di regolarizzazione frazionario, quello intero e mediante funzione di lifting vengono confrontati. Per il primo approccio si utilizza la formula numerica per la risoluzione del Laplaciano frazionario di Riesz e solo alla fine del capitolo viene svolto un confronto con la soluzione fornita dal metodo analitico. Come problema di riferimento si considera l'ottimizzazione del campo di temperatura, dunque la minimizzazione del funzionale di equazione (3.1) avente l'integrale di costo dato dalla (4.1) e target pari a $u_d = 1$. Infine, il dominio di lifting viene esteso a tutta la regione dello spazio analizzato, $\Omega_c = \Omega$.

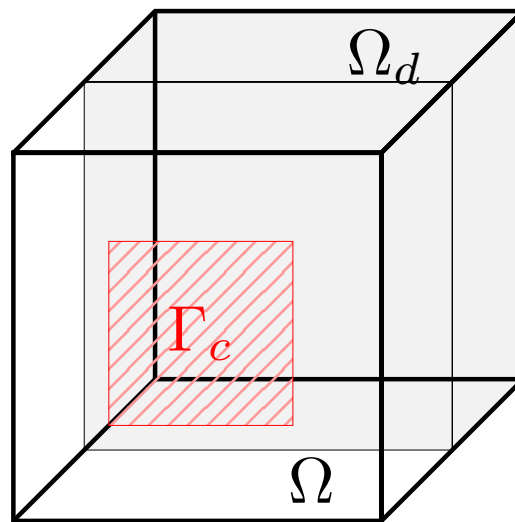


Figura 4.11. Caso tridimensionale: dominio del problema per l'ottimizzazione del campo di temperatura (test di riferimento).

Si procede dunque a risolvere il problema studiando la prestazione dell'ottimizzazione al variare del coefficiente α e del numero di raffinamento della mesh N_{lev} . In queste e nelle

successive simulazioni il livello più grossolano di raffinamento è data da una suddivisione $3 \times 3 \times 3$ del dominio, mentre le funzioni sono discretizzate mediante funzioni tri-quadratiche continue a tratti.

La tabella 4.11 analizza il valore dell'integrale (4.1) facendo variare il coefficiente α da 10^{-1} a 10^{-7} per $N_{lev} = 2$ (216 celle, 2197 nodi) e $N_{lev} = 3$ (1728 celle, 15625 nodi) livelli di raffinamento. I risultati ottenuti sono conformi con quanto atteso dalle previsioni teoriche e analoghi a quelli ottenuti nel caso bidimensionale. Infatti si nota come i valori ricavati tramite regolarizzazione intera ($s = 1$) risultino maggiori dei restanti due casi, i quali risultano proporre dati molto simili tra loro. Di conseguenza anche nel dominio 3D si ha la dimostrazione pratica dell'esattezza del teorema del bilancio della regolarità delle funzioni. Si osserva inoltre il progressivo miglioramento dell'ottimizzazione con la riduzione del parametro α , a testimonianza di come tale fattore giochi un ruolo di estrema rilevanza nella modellazione di queste soluzioni. Si noti che in questo caso, dove i livelli di raffinamento non sono elevati, l'aumento del parametro N_{lev} fornisce un sensibile miglioramento all'accuratezza dei risultati calcolati, al contrario del caso 2D dove si era utilizzato un livello elevato già dalle prime simulazione, per tanto l'ulteriore aumento del livello della mesh non generava significativi miglioramenti nella soluzione ottenuta.

Consideriamo ora il secondo campo di studio, quello relativo ai tempi di calcolo. La tabella 4.12 mostra i dati raccolti in merito $N_{lev} = 3$ livelli. Si evince che la risoluzione mediante regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$) risulta più onerosa rispetto quella intera ($s = 1$). Ovviamente questo è indice del fatto che gli operatori non locali, come il Laplaciano frazionario, richiedono sforzi maggiori per la loro risoluzione, di conseguenza questi modelli rallentano notevolmente gli algoritmi utilizzati. Un risultato molto peculiare è dato dai tempi di calcolo con l'utilizzo della funzione di lifting (lift). Quello che ci si aspetta, come anche riscontrato nel dominio bidimensionale, è che questa metodologia sia più rapida di quella frazionaria, in quanto evita l'introduzione dell'operatore non locale nel funzionale $G(q)$. Al contrario si osservano valori più elevati rispetto le precedenti strategie analizzate. Questo comportamento viene giustificato dalla scelta di estendere la funzione di lifting a tutto il dominio tridimensionale.

α	$N_{lev} = 2$			$N_{lev} = 3$		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	0.2498150020	0.2499842678	0.2498278907	0.2498064970	0.2499839514	0.2498168380
10^{-2}	0.2481725780	0.2498428433	0.2482984788	0.2480895292	0.2498396852	0.2481904100
10^{-3}	0.2337373090	0.2484447653	0.2347429920	0.2330753703	0.2484137946	0.2338713906
10^{-4}	0.1763410910	0.2359280860	0.1783415629	0.1749332408	0.2356711399	0.1764077723
10^{-5}	0.1497236031	0.1808631980	0.1499357206	0.1490990465	0.1801726850	0.1492353758
10^{-6}	0.1485112963	0.1502403106	0.1485901393	0.1476326107	0.1498130805	0.1476935796
10^{-7}	0.1461802741	0.1488879770	0.1464598246	0.1433799185	0.1483149810	0.1435706545

Tabella 4.11. Caso tridimensionale:: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).

α	Tempo di assemblaggio			Tempo di risoluzione		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	3.494757	2.476501	5.864859	20.803920	19.648269	32.902600
10^{-2}	3.453612	2.497778	5.018795	20.594907	19.762246	29.651778
10^{-3}	3.466154	2.594032	5.118356	20.934743	20.071391	29.355262
10^{-4}	3.461745	2.567347	5.193933	21.073647	19.899580	29.003776
10^{-5}	3.515080	2.799990	5.174307	21.365412	22.269126	29.962821
10^{-6}	3.478134	2.574835	5.018378	21.190286	20.490422	30.141090
10^{-7}	3.478202	2.653298	5.193445	20.976876	20.122098	31.134950

Tabella 4.12. Caso tridimensionale:: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 3$ livelli di raffinamento.

Come già ampiamene spiegato, dovendo questo approccio risolvere il sistema lineare per le due variabili \tilde{q} e \tilde{u} , far coincidere il dominio di lifting con l'intero spazio del problema (\tilde{q} e \tilde{u}) porta ad appesantire notevolmente la risoluzione, generando gli elevati tempi di calcolo raccolti in tabella. Questa spesa può essere tuttavia ridotta tramite la riduzione della regione di estensione (*lifting ristretto* o *lifting esterno*). Questo permette di ridurre i nodi in cui viene valutata la funzione \tilde{q} rendendo tale metodo anche più efficiente dell'approccio frazionario, per il quale non sono ancora stati trovati metodi per alleggerire le operazioni di calcolo.

In figura 4.12 sono mostrate le forme che la variabile di controllo assume per i casi $\alpha = 10^{-3}$ e $\alpha = 10^{-7}$ e per le tre strategie di regolarizzazione analizzate. Si osserva come è rispettata la teoria matematica secondo la quale al calare del coefficiente di regolarizzazione cala anche la regolarità delle soluzioni ottenute. Infatti si osserva un profilo molto più complesso per le soluzioni ottenute con $\alpha = 10^{-7}$. La regolarizzazione in H^1 sente meno di questo fenomeno dato che in questo spazio funzionale, molto più stringente rispetto agli altri due casi, la funzione rimane regolare anche per i più bassi valori del parametro. Inoltre è osservabile come gli andamenti delle funzioni regolarizzate nello stesso spazio frazionario ($s = 0.5$ e 'lift') risultino qualitativamente simili, in perfetto accordo con il teorema della regolarizzazione.

Da questi risultati si potrebbe erroneamente concludere che la regolarizzazione mediante Laplaciano frazionario sia più vantaggiosa dell'utilizzo del metodo con funzione di lifting in quanto, a parità di valore dell'errore di regolarizzazione commesso, richiede minori costi computazionali. Come già discusso questo limite può essere arginato restringendo il dominio di estensione della variabile di lifting. Inoltre un ulteriore fattore è da evidenziare quando si parla di benefici del metodo della variabile estesa. Come si può notare, al contrario del caso bidimensionale dove il livello di raffinamento è stato spinto fino a $N_{lev} = 7$, in queste simulazioni il massimo grado di suddivisione del dominio è dato da $N_{lev} = 3$. Questo è dovuto, ancora una volta, all'operatore non locale. Infatti, come descritto nel capitolo ad esso dedicato, l'introduzione del Laplaciano frazionario genera una matrice associata al problema lineare che risulta essere densa.

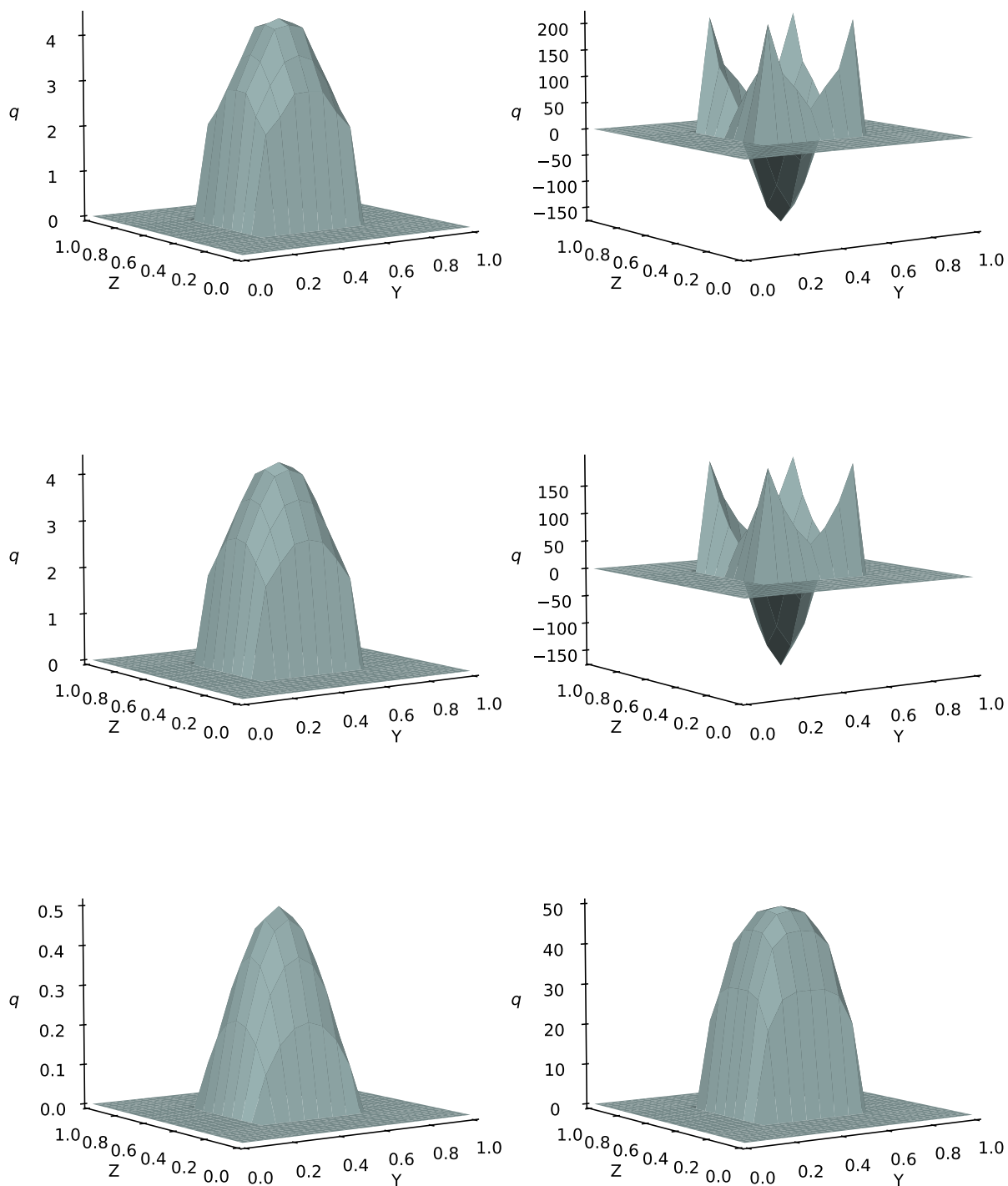


Figura 4.12. Caso tridimensionale (campo di temperatura): variabile di controllo q sulla regione di controllo contenente Γ_c per regolarizzazione frazionaria (in alto), regolarizzazione con lifting (al centro) e regolarizzazione in H^1 (in basso) per valori del coefficiente $\alpha = 10^{-3}$ (a sinistra) e $\alpha = 10^{-7}$ (a destra), con $N_{lev} = 3$ livelli di raffinamento.

Tale proprietà non genera eccessivi problemi nel caso 2D in quanto il numero di nodi rimane limitato, ma risulta essere molto gravosa quando si incrementa la dimensione del sistema. Nel caso 3D, dove i gradi di libertà delle incognite aumentano notevolmente, la densità della matrice richiede un'elevata capacità di memoria da parte del calcolatore, causando l'interruzione del processo nel momento in cui si eccede del limite massimo di archiviazione consentito, in questo caso raggiunto livelli superiori a $N_{lev} = 3$. Di conseguenza non solo la funzione di lifting permette di migliorare le prestazioni computazionali introducendo metodi alternativi di estensione del dominio, ma garantisce anche di ottenere soluzioni più accurate tramite l'ulteriore incremento dei livelli di raffinamento della mesh. Per tanto si comprende come l'utilizzo di questa strategie, permettendo di evitare la trattazione dell'operatore Laplaciano frazionario, fornisce un'alternativa efficace per la risoluzione di problemi di controllo ottimale sul contorno.

4.2.1 Ottimizzazione del gradiente

Nel seguito il problema di ottimizzazione del gradiente viene analizzato. Questo è svolto utilizzando lo stesso dominio, regione del target e del controllo del caso precedente ed illustrato in figura 4.11. A differenza di quanto svolto fin ora la formula del funzionale di costo viene sostituita con quella espressa nell'equazione (4.2), dove il gradiente obiettivo viene imposto $(\nabla u)_d = \emptyset$. Come svolto nel caso bidimensionale, si definiscono nuove condizioni al contorno di Dirichlet non omogenee. Sulle superfici adiacenti al controllo viene imposto un andamento lineare, con valore nullo nei vertici adiacenti alla superficie in cui risiede il controllo e unitario in quelli opposti. Infine la superficie coniugata a Γ_c è fissata al valore unitario.

In tabella 4.13 sono raccolti i valori del costo funzionale per le tre regolarizzazioni studiate al variare del parametro α e N_{lev} . Si osserva ancora una volta come il metodo frazionario e di lifting forniscano ottimizzazioni più efficaci rispetto al caso in cui il controllo venga ad appartenere allo spazio H^1 , in accordo col teorema del bilancio della regolarità. Come riscontrato in precedenza, la presenza dell'operatore frazionario non permette la risoluzione del problema per raffinamenti della mesh superiori a $N_{lev} = 3$. Tuttavia, anche per questi bassi valori, si può notare un leggero miglioramento dei risultati forniti con l'aumento di quest'ultimo parametro.

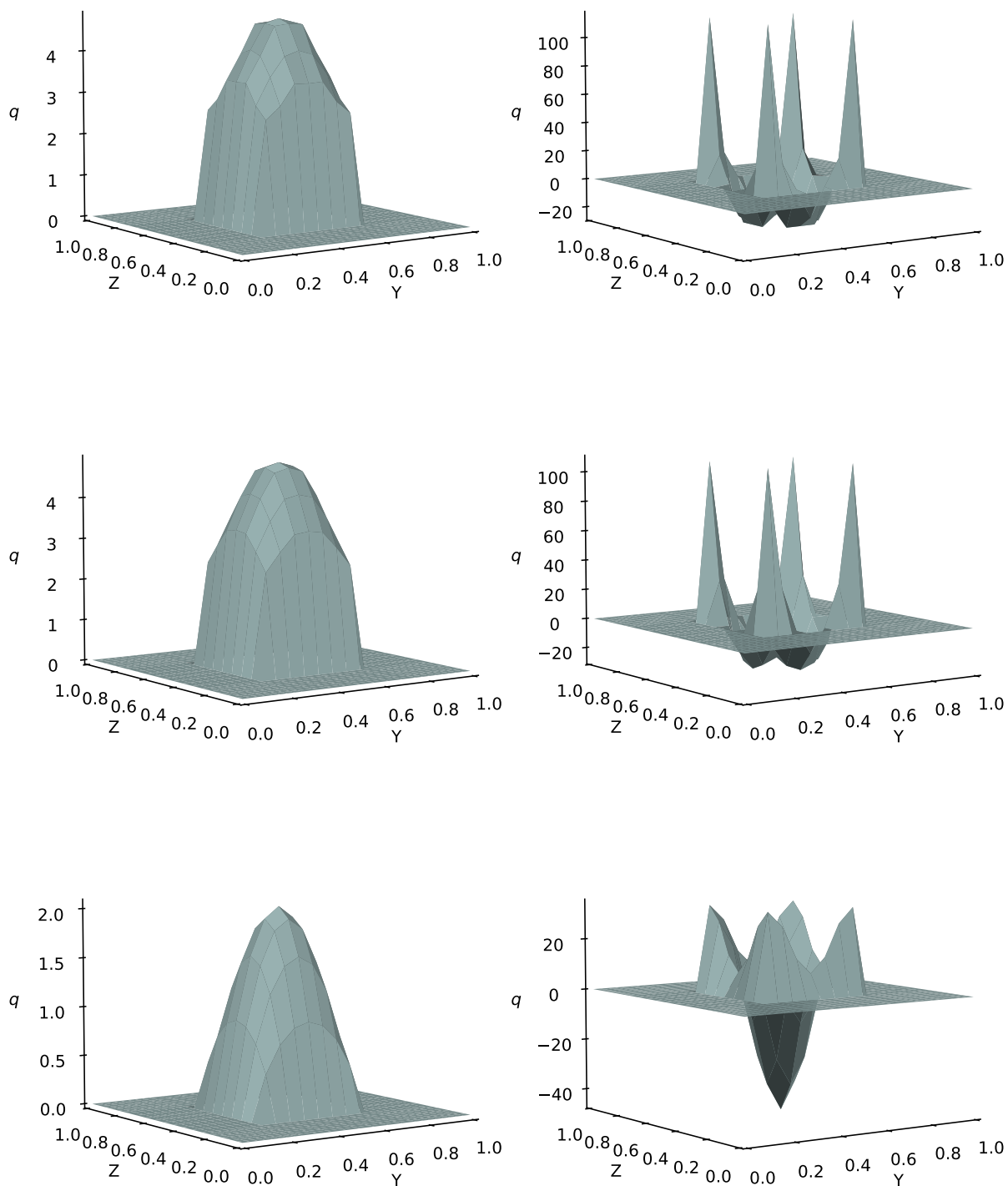


Figura 4.13. Caso tridimensionale (gradiente): variabile di controllo q sulla regione di controllo contenente Γ_c per regolarizzazione frazionaria (in alto), regolarizzazione con lifting (al centro) e regolarizzazione in H^1 (in basso) per valori del coefficiente $\alpha = 10^{-3}$ (a sinistra) e $\alpha = 10^{-7}$ (a destra), con $N_{lev} = 3$ livelli di raffinamento.

α	$N_{lev} = 2$			$N_{lev} = 3$		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	0.0204886953	0.0208028193	0.0203101944	0.0204736678	0.0208022382	0.0202754604
10^{-2}	0.0183890261	0.0205388303	0.0183722891	0.0183137711	0.0205334374	0.0182594094
10^{-3}	0.0146561341	0.0186533280	0.0147205295	0.0146034347	0.0186247951	0.0146323827
10^{-4}	0.0135622860	0.0148480144	0.0135967282	0.0135314114	0.0148320578	0.0135440650
10^{-5}	0.0133206802	0.0136154886	0.0133578723	0.0132105076	0.0136122393	0.0132242534
10^{-6}	0.0129346247	0.0134217097	0.0129960212	0.0128214292	0.0133581249	0.0128311387
10^{-7}	0.0126929753	0.0131446784	0.0127995677	0.0126889653	0.0129621417	0.0126943686

Tabella 4.13. Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).

α	Tempo di assemblaggio			Tempo di risoluzione		
	$s = 0.5$	$s = 1$	lift	$s = 0.5$	$s = 1$	lift
10^{-1}	3.763912	2.908472	5.267879	22.655894	21.064994	29.758339
10^{-2}	3.600288	2.863310	5.224243	22.132264	20.832527	29.742180
10^{-3}	3.636057	2.727764	5.300264	22.760556	20.756141	30.333494
10^{-4}	3.670654	2.704343	5.215727	22.813128	21.208994	30.298917
10^{-5}	3.558408	2.689176	5.311326	22.379803	20.544751	30.773767
10^{-6}	3.618733	2.751435	5.264612	23.225199	22.485566	30.538751
10^{-7}	3.601821	2.918398	5.510259	22.075402	23.047491	29.817904

Tabella 4.14. Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 3$ livelli di raffinamento.

Infine i dati inerenti ai tempi di calcolo sono raccolti in tabella 4.14 e anche per questa tipologia di test si ricavano le stesse conclusioni già discusse in precedenza. In figura 4.13 sono dunque riportati gli andamenti della funzione q sulla superficie in cui risiede il controllo per $\alpha = 10^{-3}$ e $\alpha = 10^{-7}$. Anche per la regolarizzazione del gradiente questi andamenti seguono lo stesso comportamento di quello riscontrato per il caso 2D. Infatti si nota la perdita di regolarità con il decremento del coefficiente α e profili analoghi per le soluzioni fornite dall'approccio frazionario e di lifting. Da questi due casi analizzati, controllo del campo e del gradiente di temperatura, è evidente come le conclusioni ottenute nel dominio 2D si riflettono in maniera analoga anche al caso 3D. Per tali ragioni le strategie di miglioramento delle prestazioni, quali l'estensione della regione di controllo, l'aumento delle superfici di controllo e lo spostamento del controllo in una regione adiacente al dominio del target, non vengono ulteriormente analizzate. Per le discussioni inerenti agli effetti che queste modifiche comportano all'ottimizzazione, si rimanda a quanto discusse nella precedente sezione.

4.2.2 Soluzioni analitiche e numeriche del Laplaciano di Riesz

Nei precedenti paragrafi si è affermato come una corretta implementazione della regolarizzazione frazionaria e della funzione di lifting porta ad ottenere profili delle due variabili di controllo pressoché equivalenti. Questo fatto è ulteriormente ribadito dalla vicinanza dei valori assunti dal funzionale di costo quando minimizzato con questi due approcci. Partendo da queste convinzioni si vuole ora valutare la validità della formula analitica proposta per la valutazione dell'integrale esteso al dominio, equazione (2.23), che compare nella formulazione del Laplaciano frazionario di Riesz. Questo confronto viene svolto confrontando i profili assunti dalle variabili di controllo per $\alpha = 10^{-7}$ e per il massimo livello di raffinamento studiato. Non viene analizzata l'influenza di tali parametri sulla regolarizzazione e i tempi di calcolo in quanto, anche per la soluzione analitica, valgono le stesse conclusioni ricavate dai test fin'ora svolti.

Per confermare l'esattezza della regolarizzazione ottenuta con il metodo della funzione di lifting, si esegue un primo paragone nel dominio bidimensionale. Si ricorda che in questo spa-

zio la regolarizzazione frazionaria è sempre stata svolta mediante soluzione analitica, espressa dall'equazione (2.26). In figura 4.14 sono mostrate dunque le variabili di controllo q ricavate mediante regolarizzazione intera, con funzione di lifting e mediante utilizzo della formula analitica per la regolarizzazione frazionaria. Tali andamenti sono soluzioni del problema di riferimento con $\alpha = 10^{-7}$ e $N_{lev} = 7$. Analizzando i grafici ottenuti è chiaro come la soluzione analitica e la funzione di lifting siano esattamente sovrapponibili. Questo risultato, oltre che a sostenere il teorema della regolarizzazione, prova anche l'esattezza della risoluzione di lifting, per tali motivazioni essa viene presa come riferimento per l'analisi della soluzione numerica nel caso 3D.

L'integrale esteso al dominio del Laplaciano frazionario di Riesz, nel caso di dominio tridimensionale, è stato fin ora valutato mediante la formula numerica di equazione (2.25). Si vuole ora effettuare un confronto tra i metodi fin ora utilizzati per regolare la soluzione e quello proposto dalla formula analitica di equazione (2.29). Il caso in analisi è quello di riferimento per il caso tridimensionale, ovvero l'ottimizzazione del campo di temperatura dove il dominio del sistema, quello del target e la regione di controllo Γ_c sono rappresentati in figura 4.11. Le funzioni q , soluzione del problema del controllo appena descritto, saranno graficate in funzione della coordinata t individuata sulla retta $\tau = \{\forall(y, z) \in \Gamma_c \wedge y = z\}$ e tale per cui $t := \left\{ t \in \mathbb{R}, t \in \tau \wedge t = \sqrt{y^2 + z^2} \right\}$.

In figura 4.15 sono rappresentati gli andamenti delle quattro soluzioni ricavate. Per le motivazioni dedotte dall'analisi del caso 2D, la funzione ritenuta più accurata, ovvero quella che meglio soddisfa i criteri del teorema del bilancio della regolarità, è quella ottenuta mediante approccio di lifting. Di conseguenza tutte le restanti soluzioni saranno da considerarsi matematicamente corrette nel caso in cui il loro profilo si sovrapponga esattamente a quello appena individuato. Si osserva che la risoluzione numerica ricalca molto bene l'andamento voluto, eccetto per le zone di massimo di funzione dove si discosta leggermente. Ovviamente questo leggero errore è dovuto dal fatto che, a differenza della soluzione analitica 2D, l'approccio numerico non permette di la soluzione in maniera esatta e il risultato fornito è intrinseco di un certo grado di incertezze.

Confrontando ora la soluzione analitica tridimensionale con quella di lifting, si riscontra

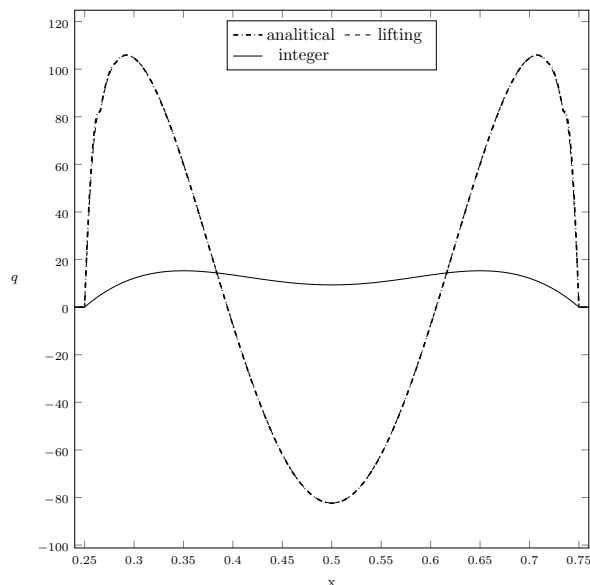


Figura 4.14. Caso bidimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento e $\alpha = 10^{-7}$, per regolarizzazione frazionaria con soluzione analitica, regolarizzazione con lifting e regolarizzazione intera.

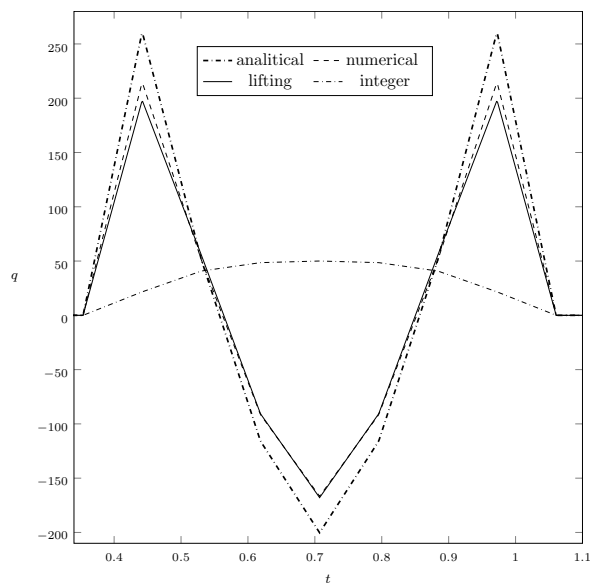


Figura 4.15. Caso tridimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento e $\alpha = 10^{-7}$, per regolarizzazione frazionaria con soluzione analitica, regolarizzazione frazionaria con soluzione numerica, regolarizzazione con lifting e regolarizzazione intera.

un ulteriore peggioramento. Infatti il nuovo andamento si discosta in maniera significativa da quello desiderato, riscontrando il massimo errore nelle zone dei picchi. Questo scostamento può essere imputabile al limitato numero di raffinamenti della mesh. Infatti si osserva come, a differenza del caso 2D, le soluzioni ora proposte risultano molto più segmentate. Questo è dovuto dal fatto che, utilizzando una mesh grossolana, sono pochi i punti disponibili in cui la soluzione viene valutata come soluzione del sistema lineare associato al problema. Nelle restanti zone del dominio la funzione viene poi costruita utilizzando tecniche di interpolazione. Questo suggerisce che, diminuendo il passo della griglia, si possono aumentare i nodi in cui la soluzione viene calcolata in maniera esatta. Questo procedimento può fornire dunque un metodo di analisi della soluzione qui proposta decisamente più accurato di quello che si è stato in grado di fare fin ora. Si auspica che con tale approccio la funzione di lifting e quella numerica tornino ad assumere profili combacianti, in analogia al problema bidimensionale.

Conclusioni

Il lavoro di tesi ha avuto come principale obiettivo l'utilizzo della teoria del controllo per l'ottimizzazione di sistemi governati dall'equazione del calore. Si è focalizzata l'attenzione sui problemi in cui la zona controllabile risulta essere una porzione del contorno del dominio. In questa regione si è voluto trovare il profilo di temperatura in grado di generare un preciso campo o flusso termico in una prestabilita zona interna al sistema.

Si può notare che la soluzione del controllo, essendo definita su una regione di frontiera, non può appartenere allo spazio naturale della soluzione dell'equazione del calore. Questo è stato individuato dallo spazio frazionario di Sobolev e i principali teoremi e definizioni inerenti ad esso sono stati esposti al fine di comprendere i vincoli matematici a cui la nostra incognita deve sottostare. Si è per tanto presentato il Laplaciano frazionario e la sua trattazione come operatore non locale. L'integrale che definisce tale operatore è stato quindi separato in due parti, una limitata al dominio e l'altra estesa allo spazio esterno. Algoritmi risolutivi per la risoluzione di questi due termini sono stati esposti e, infine, è stata proposta una formula analitica per il caso $n = 2$. Nella parte successiva della tesi, il problema del controllo è stato formulato in termini matematici definendo un funzionale di costo per valutare la distanza della soluzione ottenuta da quella obiettivo. Mediante la teoria dei moltiplicatori di Lagrange è stato possibile inserire dei termini che vincolassero il comportamento del sistema alle sue leggi fisiche, date dall'equazione del calore e dalle condizioni al contorno. Un ultimo termine di regolarizzazione è stato aggiunto al fine di modellare la soluzione per rispecchiare le stringenti condizioni imposte dalle teorie matematiche del controllo. In particolare, in questo lavoro tre diversi metodi di regolarizzazione sono stati studiati. Il primo limita la soluzione al ristretto spazio intero di Sobolev, mentre nelle restanti il campo di indagine viene allargato, inglobando tutto lo spazio

frazionario $H^{1/2}$. Il secondo metodo introduce all'interno del funzionale l'operatore Laplaciano frazionario. Si è osservato come tale fattore, caratterizzato da un comportamento non locale, aggrava l'algoritmo risolutivo e il costo computazionale. Per arginare queste inefficienze un ulteriore approccio è stato proposto. Mediante l'introduzione di una funzione di lifting è stato possibile espandere la variabile di controllo dalla regione di bordo ad una più estesa. Questo ha premesso di effettuare una regolarizzazione intera generando una funzione la cui restrizione è conforme con i vincoli teorici.

Una volta definiti tutti i termini che compaiono nel funzionale, è stato possibile ottenere il sistema del controllo mediante un'operazione di differenziazione. Si sono ricavate così le equazioni di stato, del controllo e dell'aggiunta. I risultati numerici, forniti nell'ultimo capitolo, sono stati calcolati mediante l'utilizzo del codice agli Elementi Finiti FeMTTU, sul quale è stato implementato un algoritmo diretto in grado di trasformare il problema del controllo in un sistema lineare. Da questi risultati è stato possibile osservare come il campo della temperatura di controllo venga fortemente influenzato dal fattore di regolarizzazione. Infatti man mano che questo termine viene trascurato i profili diventano sempre più complessi e il funzionale di costo sempre di più minimizzato. Questo comporta che la soluzione finale dovrà emergere da profonde analisi su quanto la minimizzazione del funzionale sia rilevante rispetto alla possibilità di ottenere funzioni più regolari e facili da ricreare nella pratica. Il controllo risulta inoltre influenzato dalla scelta della regione di controllo Γ_c . La soluzione aumenta la capacità di ottimizzare il sistema man mano che si allargano o si aggiungono le regioni manipolabili. Inoltre si è osservato come la vicinanza di tale zona a quella obiettivo generi significativi miglioramenti senza aggravare notevolmente il calcolo. In conclusione se vi è la possibilità di estendere la regione Γ_c questo genera sicuramente dei vantaggi, in caso contrario sarà necessario imporre il controllo nelle vicinanze più immediate alla regione del target per ottenere l'ottimizzazione più efficiente. Ovviamente tutti questi sviluppi al lato pratico si traducono in aumenti dei costi, per tanto questo lavoro fornisce un metodo utile alla valutazione del contributo che queste operazioni generano sull'ottimizzazione del sistema. Infine si è eseguito un confronto dei risultati ricavati mediante utilizzo delle formule, sia analitiche che numeriche, per la risoluzione del Laplaciano frazionario nel termine di regolarizzazione del secondo metodo proposto. Si è riscontrato nel

caso 2D la perfetta coincidenza dei profili regolarizzati con tale approccio e quello con funzione di lifting. Questo è testimonianza dei numerosi vantaggi che l'estensione della variabile di controllo (lifting) comporta, sia in termini di costi di calcolo, che di accuratezza della soluzione. Nel caso 3D, invece, la soluzione analitica proposta non segue il profilo desiderato. Questo potrebbe essere attribuito al ridotto livello di raffinamento della griglia con cui si sono svolte le simulazioni tridimensionali. Tuttavia, tale esito non deve far tramontare la ricerca per ottenere una soluzione analitica per la risoluzione del Laplaciano frazionario anche in queste geometrie più districate. Infatti il continuo sviluppo di questi modelli è la giusta strada da percorrere al fine di ottenere solutori numerici sempre più efficienti e affidabili in grado di sostenere anche i più complessi problemi dell'ingegneria moderna.

Appendice A

A.1 Concetti di base: gruppi, campi, spazi vettoriali, funzionali

In questa appendice i concetti fondamentali dell'algebra lineare saranno esposti.

A.1.1 Gruppi e Campi

Sia G un insieme, $G \neq \emptyset$; indichiamo con “ $*$ ”

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\rightarrow x * y, \end{aligned}$$

un *operazione bilineare* interna su G .

Definizione A.1 $(G, *)$ si dice **gruppo** se

- “ $*$ ” è *associativo* $\forall x, y, z \in G$, $(x * y) * z = x * (y * z)$,
- *esiste l'elemento neutro* “ e ”, $e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$,
- *esiste l'inverso* “ x' ” $\forall x \in G, \exists x' \in G : x * x' = x' * x = e$,
- è *commutativo* $\forall x, y \in G$, $x * y = y * x$.

Se vale l'ultima proprietà; allora $(G, *)$ viene anche detto **gruppo commutativo** (o **abeliano**).

casi particolari:

- operazione additiva “ $+$ ”
 - Elemento neutro : 0.
 - Inverso : “ $-x$ ” (“opposto”).
- operazione moltiplicativa “ \cdot ”
 - Elemento neutro : 1, (“unità”).

– Inverso : “ $\frac{1}{x}$ ”, (“reciproco”).

Definizione A.2 Sia \mathbb{K} un insieme non vuoto; siano $(+, \cdot)$ de operazioni binarie interne su \mathbb{K} ; $(\mathbb{K}, +)$ si dice **campo** se

- $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo,
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo commutativo,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$

$$- x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z ,$$

$$- (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x .$$

A.1.2 Spazi vettoriali

Sia \mathbb{K} un campo di elementi scalari (indicati con $\lambda, \mu, \delta, \dots$) e V un insieme. Si dice che V è uno **spazio vettoriale** (e i suoi elementi **vettori**) su un campo \mathbb{K} di scalari se in v possono essere definite due operazioni con le seguenti caratteristiche.

- Addizione

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(u, v) \rightarrow u + v ,$$

con le seguenti proprietà

1. L'addizione sia associativa, $\forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w)$.
2. L'addizione sia commutativa, $\forall u, v \in V, u + v = v + u$.
3. Esistenza del vettore nullo $\mathbf{0}$, $\forall u \in V, u + \mathbf{0} = u$.
4. Esistenza del vettore opposto, $\forall u \in V \exists u' \in V : u + u' = u' + u = \mathbf{0}$.

- Moltiplicazione per scalare

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, v) \rightarrow \lambda \cdot v ,$$

con le seguenti proprietà

1. Unnità di \mathbb{K} , $\forall u \in V \rightarrow 1 \cdot u = u$,
2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \wedge \forall u \in V \rightarrow (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$,
3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \wedge \forall u \in V \rightarrow (\lambda \cdot \mu)u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$,
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \wedge \forall u, v \in V \rightarrow \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} e W un sottoinsieme di V , $W \neq \emptyset$. Si dice che W è un **sottospazio vettoriale** di V se soddisfa le seguenti condizioni:

1. W è chiuso rispetto all'addizione tra vettori, $\forall u, v \in W \rightarrow u + v \in W$.
2. W è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari, $\forall u, v \in W \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K} \rightarrow \lambda u \in W$.

Queste proprietà si possono scrivere in maniera compatta come segue

$$\forall u, v \in W \wedge \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \rightarrow \lambda u + \mu v \in W .$$

A.1.3 Mappatura lineare

Definizione A.3 *Siano dati due spazi vettoriali U e V su \mathbb{K} ; si dice che una mappatura $A: U \rightarrow V$ è lineare (o applicazione lineare) su U , se*

1. $\forall u, v \in U \rightarrow A(u + v) = A(u) + A(v)$,
2. $\forall u \in U \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K} \rightarrow A(\lambda u) = \lambda A(u)$.

Si possono compattare queste proprietà generando un'unica richiesta

$$\forall u, v \in U \wedge \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \rightarrow A(\lambda u + \mu v) = \lambda A(u) + \mu A(v) .$$

Definizione A.4 *Sia data la mappatura lineare $A: U \rightarrow V$ si dice **iniettiva** se*

$$\forall x_1, x_2 \in U : A(x_1) = A(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 ,$$

ovvero

$$\forall x_1, x_2 \in U : x_1 \neq x_2 \Rightarrow A(x_1) \neq A(x_2) .$$

*A si dice **suriettiva** se $A(U) = V$ e **biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.*

Definizione A.5 Si definisce **codominio** di A ($A: U \rightarrow V$) l'insieme $A(x)$ così descritto

$$A(x) = \{A(x) : x \in U\} .$$

Questo insieme è detto *immagine dell'applicazione lineare* ed è più comunemente indicato con $Im(A)$ Si definisce **rango** dell'applicazione lineare A la dimensione di $Im(A)$ e si indica con

$$\nu(A) = \dim(Im(A)) .$$

Definizione A.6 Si dice che una mappatura $A: U \rightarrow V$ è continua su U se, per ogni sequenza $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ che verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_U = 0$, è verificato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A(u_n) - A(u)\|_V = 0 . \quad (\text{A.1})$$

Definizione A.7 Sia $A: U \rightarrow V$ un operatore lineare e continuo, la norma di A , indicata con $\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)}$ è definita dalla seguente relazione

$$\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)} = \sup_{\|u\|_U=1} \|A(u)\|_V < +\infty . \quad (\text{A.2})$$

In maniera compatta la notazione può essere scritta $\|A\|$.

Definizione A.8 Si dice che una mappatura $A: U \rightarrow V$ è limitata se esiste una costante $c(A)$, dipendente dalla mappatura stessa, tale per cui

$$\|A(u)\|_V \leq c(A)\|u\|_U . \quad (\text{A.3})$$

Si ricorda che un operatore lineare è limitato se e solo se è continuo.

A.2 Spazi funzionali

In questa sezione saranno esposti le principali nozioni degli spazi funzionali. Partendo dalla definizione di spazio normato verranno definiti i principali spazi funzionali utilizzati nella seguente tesi quali: spazi di Banach, spazi di Lebesgue, spazi di Sobolev. Di seguito sono fornite alcune notazione utilizzate in tutta la trattazione.

1. Derivata di una funzione. La derivata generica di una funzione in un dominio multidimensionale R^n si indica:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}} = D^p u = D_1^{p_1} \cdots D_n^{p_n} \quad (\text{A.4})$$

dove $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $k = |p| = p_1 + \dots + p_n$.

2. Chiusura di un insieme. Sia dato l'insieme $V \subset \mathbb{R}^n, V \neq \emptyset$. Si indica con \bar{V} la chiusura di V .
3. Supporto di un insieme. Sia u una funzione definita su V , si definisce supporto di u e lo si indica con “ $supp$ ”, l'insieme:

$$supp(u) = \overline{\{x \in V : u(x) \neq 0\}}$$

A.2.1 Spazi normati e con prodotto scalare

Definizione A.9 (Spazio normato) *Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Si definisce norma dello spazio V la funzione f , definita su V e a valori reali \mathbb{K} ($f : V \rightarrow \mathbb{K}$), che soddisfa i seguenti requisiti*

- $\forall x \in V \rightarrow f(x) \geq 0 \wedge f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\forall x \in V \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K} \rightarrow f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$,
- $\forall x, y \in V \rightarrow f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Uno spazio normato è uno spazio vettoriale V provvisto di norma. In questo lavoro la norma sarà indicata utilizzando la seguente notazione $\|\cdot\|_V$.

Si ricorda che due norme definite sullo stesso spazio vettoriale V sono equivalenti se

$$\forall x \in V, \exists a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 .$$

Definizione A.10 (Spazi di Banach) *Siano date le seguenti definizioni di successione di Cauchy e di spazio completo:*

- Una successione $\{x_n\}$ in uno spazio normato V è detta di Cauchy se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} : \|x_m - x_n\|_V < \epsilon \Leftrightarrow m, n > N .$$

- Uno spazio vettoriale V è completo se ogni successione di Cauchy, definite su tale spazio, convergono ad un limite ancora appartenente allo spazio V .

Si definisce spazio di Banach uno spazio normato e completo.

Definizione A.11 *Dato uno spazio vettoriale V il funzionale $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilineare definito su $V \times V$ a valori reali ($\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$) si definisce prodotto scalare se, per ogni $x, y, z \in V$ e due scalari $a, b \in \mathbb{R}$, sono soddisfatte le seguenti proprietà*

- positività $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- simmetria $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- linearità $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$.

Definizione A.12 (Spazio di Hilbert) *Uno spazio V dotato della funzione prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è detto spazio con prodotto scalare. È possibile generare la norma di tale spazio direttamente dalla definizione di prodotto scalare*

$$\|x\|_V = \langle x, x \rangle^{1/2} \quad , \quad \forall x \in V . \tag{A.5}$$

Se V è uno spazio dotato di prodotto scalare e completo (spazio di Banach) rispetto alla norma appena definita; allora viene chiamato Spazio di Hilbert.

Quando la norma di uno spazio vettoriale V è a partire dal prodotto scalare secondo la (A.5), allora tale norma deve soddisfare anche la regola del parallelogramma

$$\|x + y\|_V^2 + \|x - y\|_V^2 = 2\|x\|_V^2 + 2\|y\|_V^2 . \quad (\text{A.6})$$

Reciprocamente se la norma soddisfa la (A.6) allora è originaria da un prodotto scalare come nella (A.5).

La rappresentazione di Riesz. Sia U uno spazio di Hilbert. Il funzionale lineare F , definito su U , appartenente a U^* se e solo se esiste un elemento $u \in U$, tale per cui per ogni $u \in U$ si ha

$$F(v) = (v, u)_V . \quad (\text{A.7})$$

In questo caso vale $\|F\|_{U^*} = \|u\|_U$.

A.2.2 Spazio delle funzioni continue: C^k

Sia Ω un dominio contenuto in \mathbb{R}^n . Posto l'intero positivo k si denota con C^k lo spazio di tutte le funzioni f continua, con derivate $D^\alpha f$ di ordine $|\alpha| \leq k$ anch'esse continue su Ω .

L'insieme $C_0^k(\Omega)$ è un particolare insieme di funzione continue aventi la caratteristica di annullarsi sulla frontiera $\partial\Omega$,

$$f \in C_0^k(\Omega) \Rightarrow f(\partial\Omega) = 0 . \quad (\text{A.8})$$

Essendo la derivata un operatore lineare, è facile dimostrare che tale insieme è uno spazio vettoriale in quanto gode anch'esso delle proprietà in merito alla somma e al prodotto per scalare, vale infatti che

- $\forall f, g \in C^k \rightarrow f + g \in C^k$,
- $\forall f \in C^k \wedge \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda f \in C^k$.

Considerando ora lo spazio delle funzioni continue $C^0(\Omega)$, è possibile attribuire a tale spazio il seguente

$$\|f(x)\|_{C^0(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| .$$

È facile dimostrare che il funzionale appena descritto, rispettando i requisiti dati dalle (A.9),(A.9),(A.9); pertanto rappresenta una norma per lo spazio $C^0(\Omega)$.

A.2.3 Spazio delle funzioni misurabili: L^p

Posto il dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e fissato un intero positivo p , si definisce $L^p(\Omega)$ lo spazio di tutte le funzioni misurabili f , definite su Ω tali per cui

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty .$$

Per una trattazione più completa della definizione di misurabilità si può consultare [5, 22, 23].

Le funzioni appartenenti a questo spazio sono tutte definite a meno di un set di valori a misura nulla. E' facile dimostrare che il funzionale $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ così definito

$$\|f(x)\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} , \quad (\text{A.9})$$

rappresenta una norma per lo spazio $L^p(\Omega)$.

Anche in questo caso, sfruttando le proprietà dell'integrale che compare nella (A.9), è facile dimostrare

- $\forall u \in L^p(\Omega) \rightarrow \|u\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
- $\forall u \in L^p(\Omega) \forall \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \|\lambda u\|_{L^p} = |\lambda| \|u\|_{L^p}$,
- $\forall u, v \in L^p(\Omega) \rightarrow \|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$ (**disuguaglianza di Minkowski**).

Per tanto si è dimostrato che il funzionale $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ rappresenta una norma per lo spazio L^p .

A.2.4 Spazio delle funzioni differenziabili o di Sobolev

Considerato un insieme $\Omega \in \mathbb{R}^n$, un intero positivo m , e $1 \leq p \leq \infty$ si definisce l'insieme $H^{k,p}(\Omega)$ come l'insieme delle funzioni misurabili aventi derivate, fino all'ordine k , misurabili.

La derivata in questo contesto è intesa in forma debole e la sua definizione è di seguito enunciata.

Definizione A.13 *Sia data la funzione $f(x) \in L^2$ sul dominio Ω , il numero intero k e il numero reale positivo $1 \leq p \leq \infty$; allora la funzione $g(x) \in L^2(\Omega)$ è definita derivata in senso debole di $f(x)$ se soddisfa la seguente relazione*

$$\int_{\Omega} f(x) \phi'(x) dx = (-1)^{\alpha} \int_{\Omega} g(x) \phi dx \quad , \forall \phi(x) \in C_0^{\infty}(\Omega) .$$

Per tanto lo spazio di Sobolev, di indici k e p , viene così definito

$$H^{k,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega), \exists g \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} f(x)\phi'(x) dx = (-1)^\alpha \int_{\Omega} g(x)\phi dx, \forall \phi(x) \in C_0^\infty(\Omega) \right\}. \quad (\text{A.10})$$

A partire dalla norma dello spazio L^2 è possibile generare il seguente funzionale

$$\|f(x)\|_{H^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f(x)\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } 1 \leq p \leq \infty.$$

Essendo generata appunto dalla norma in L^2 allora soddisfa i requisiti (A.9),(A.9),(A.9); per tanto rappresenta una norma per lo spazio $H^{k,p}(\Omega)$.

In questa tesi solo i casi $p = 2$ e $k = 1$ saranno analizzati; per semplificare la trattazione si utilizzerà la notazione più compatta per indicare lo spazio intero di Sobolev. Facendo riferimento con $H^1(\Omega)$ a questo spazio, la sua norma sarà espressa come

$$\|f(x)\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 + |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.11})$$

Dalla definizione di spazio di Sobolev (A.10) si ricava una relazione tra gli spazi squesti ultimi e gli spazi di Lebesgue. Infatti per definizione se una funzione u appartiene allo spazio H^1 ; allora la sua derivata u' appartiene allo spazio L^2 . Quest'ultimo viene spesso indicato come lo spazio di Sobolev con indice nullo: $H^0 = L^2$. Questo risultato è una generalizzazione del seguente teorema: *sia u una funzione appartenente allo spazio H^k , allora la sua derivata u' appartiene a H^{k-1} .*

A.3 I moltiplicatori di Lagrange

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è un procedimento matematico che permette di manipolare il comportamento di un sistema con lo scopo di ottimizzare determinate prestazioni e, allo stesso tempo, sottostare a vincoli saldamente imposti. Siano date m funzioni $u_j(x)$, con $j = 0, 1, \dots, m-1$, dette variabili di stato del sistema, ognuna di esse appartenenti ad un generico spazio vettoriale $U(\Omega)$ e siano, $g_i(u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$ con $i = 0, 1, \dots, n-1$, gli n vincoli a cui il sistema deve sottostare. Dato il funzionale $f(u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$, funzione delle variabili di stato e, al più, di altri parametri caratteristici del sistema, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è descritto dal seguente problema.

Problema A.1 *Trovare le m funzioni $u_j(x)$ e gli n moltiplicatori di lagrange λ_i tali per cui il seguente funzionale viene minimizzato*

$$\mathcal{L}(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = f(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) - \sum_{i=0}^n \lambda_i g_i(u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$$

e siano rispettate le seguenti condizioni

$$g_i(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) = 0 \text{ con } i = 0, 1, \dots, n-1$$

Soluzione

Minimizzare il funzionale vuol dire calcolarne il differenziale e porlo uguale a zero. Essendo, il funzionale, dipendente sia dalle m variabili di stato che dagli n moltiplicatori lagrangiani,

risolvere il problema dell'ottimizzazione vuol dire trovare la soluzione del seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u_0} f(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) - \frac{\partial}{\partial u_0} \sum_{i=0}^n \lambda_i g_i(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) = 0, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial u_{m-1}} f(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) - \frac{\partial}{\partial u_{m-1}} \sum_{i=0}^n \lambda_i g_i(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_0} f(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \sum_{i=0}^n \lambda_i g_i(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) = 0, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_{m-1}} f(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) - \frac{\partial}{\partial \lambda_{m-1}} \sum_{i=0}^n \lambda_i g_i(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) = 0. \end{array} \right.$$

Bibliografia

- [1] A. Lischke, G. Pang, M. Gulian, F. Song, C. Glusa, X. Zheng, Z. Mao, W. Cai, M. M. Meerschaert, M. Ainsworth, *et al.*, “What is the fractional laplacian? a comparative review with new results,” *Journal of Computational Physics*, vol. 404, p. 109009, 2020.
- [2] G. Leoni, *A first course in fractional Sobolev spaces*, vol. 229. American Mathematical Society, 2023.
- [3] V. Girault and P. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, 1979.
- [4] E. D. Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci, “Hitchhiker’s guide to the fractional sobolev spaces,” 2011.
- [5] R. A. Adams and J. J. Fournier, *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.
- [6] M. D’Elia and M. Gunzburger, “The fractional laplacian operator on bounded domains as a special case of the nonlocal diffusion operator,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 66, no. 7, pp. 1245–1260, 2013.
- [7] Q. Du and X. Yin, “A conforming dg method for linear nonlocal models with integrable kernels,” *Journal of Scientific Computing*, vol. 80, pp. 1913–1935, 2019.
- [8] A. Bonito and J. Pasciak, “Numerical approximation of fractional powers of elliptic operators,” *Mathematics of Computation*, vol. 84, no. 295, pp. 2083–2110, 2015.

- [9] A. Bonito and J. E. Pasciak, “Numerical approximation of fractional powers of regularly accretive operators,” *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 37, no. 3, pp. 1245–1273, 2017.
- [10] A. Bonito, J. P. Borthagaray, R. H. Nochetto, E. Otárola, and A. J. Salgado, “Numerical methods for fractional diffusion,” *Computing and Visualization in Science*, vol. 19, no. 5-6, pp. 19–46, 2018.
- [11] E. Aulisa, G. Capodaglio, A. Chierici, and M. D’Elia, “Efficient quadrature rules for finite element discretizations of nonlocal equations,” *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 38, no. 6, pp. 1767–1793, 2022.
- [12] A. Chierici, “Mathematical and numerical models for boundary optimal control problems applied to fluid-structure interaction,” 2021.
- [13] G. Bornia, A. Chierici, and S. Ratnavale, “A comparison of regularization methods for boundary optimal control problems,” *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, vol. 19, no. 2-3, pp. 329–346, 2022.
- [14] F. Tröltzsch, *Optimal control of partial differential equations: theory, methods, and applications*, vol. 112. American Mathematical Soc., 2010.
- [15] E. Gagliardo, “Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili,” *Rendiconti del seminario matematico della universita di Padova*, vol. 27, pp. 284–305, 1957.
- [16] J. Kim and T. R. Bewley, “A linear systems approach to flow control,” *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 39, pp. 383–417, 2007.
- [17] S. J. Wright, *Numerical optimization*. 2006.
- [18] G. Bornia and S. Ratnavale, “Different approaches for dirichlet and neumann boundary optimal control,” in *AIP Conference Proceedings*, vol. 1978, AIP Publishing, 2018.

-
- [19] L. Chirco, A. Chierici, R. Da Via, V. Giovacchini, and S. Manservigi, “Optimal control of the wilcox turbulence model with lifting functions for flow injection and boundary control,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1224, p. 012006, IOP Publishing, 2019.
- [20] E. Aulisa, G. Bornia, and S. Manservigi, “Boundary control problems in convective heat transfer with lifting function approach and multigrid vanka-type solvers,” *Communications in Computational Physics*, vol. 18, no. 3, pp. 621–649, 2015.
- [21] G. Bornia, M. Gunzburger, and S. Manservigi, “A distributed control approach for the boundary optimal control of the steady mhd equations,” *Communications In Computational Physics*, vol. 14, no. 3, pp. 722–752, 2013.
- [22] W. Rudin, *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.
- [23] G. B. Folland, *Real Analysis*. Wiley and Sons, 1999.

Elenco delle figure

1.1	Andamento della funzione $\phi_i^0(x)$ della base dello spazio S_h^0	17
1.2	Andamento della funzione della base dello spazio X_h^1	22
1.3	Funzioni di forma della base dello spazio X_h^2	25
1.4	Dominio bidimensionale Ω e sua suddivisione in elementi Ω_e	35
1.5	Dominio bidimensionale Ω e sua suddivisione in elementi Ω_e	37
1.6	Nodi di gauss di due diverse quadrature indicate con " + " e " • ".	39
1.7	Dominio bidimensionale Ω e sua suddivisione in elementi Ω_e	40
1.8	Rappresentazione di un HEX8 a sinistre e di un HEX27 a destra.	42
2.1	Raffinamento della cella per il punto di quadratura \mathbf{x}_g	58
2.2	Area di integrazione per ogni suddivisione della regione $\partial\Omega$	59
2.3	Strategia numerica per l'integrale misto di un elemento della suddivisione di $\partial\Omega$	60
3.1	Variazione degli andamenti della funzione al variare del coefficiente moltiplicativo α del fattore di regolarizzazione.	73
3.2	Estensione del dominio di lifting in maniera ristretta (sinistra) ed esterna (destra).	99
4.1	Problema di analisi nel caso bidimensionale.	103
4.2	Caso bidimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento per $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ e $\alpha = 10^{-6}$, per regolarizzazione frazionaria (alto a sinistra), regolarizzazione con lifting (alto a destra) e regolarizzazione intera (basso).	105

4.3	Caso bidimensionale: condizioni al contorno imposte nel caso di ottimizzazione del gradiente.	107
4.4	Caso bidimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento per $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ e $\alpha = 10^{-6}$, per regolarizzazione frazionaria (alto a sinistra), regolarizzazione con lifting (alto a destra) e regolarizzazione intera (basso).	109
4.5	Caso bidimensionale: estensione della regione di controllo Γ_c	110
4.6	Caso bidimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento per $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ e $\alpha = 10^{-6}$, per regolarizzazione frazionaria (alto a sinistra), regolarizzazione con lifting (alto a destra) e regolarizzazione intera (basso).	112
4.7	Caso bidimensionale: multiple regioni di controllo $\Gamma_{c,1}$ e $\Gamma_{c,2}$	113
4.8	Caso bidimensionale: variabile di controllo q su $\Gamma_{c,1}$ (sinistra) e su $\Gamma_{c,2}$ (destra) con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento per $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ e $\alpha = 10^{-6}$, per regolarizzazione frazionaria (alto), regolarizzazione con lifting (centro) e regolarizzazione intera (basso).	116
4.9	Caso bidimensionale: regione di controllo Γ_c in prossimità della zona di target Ω_d	117
4.10	Caso bidimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento per $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ e $\alpha = 10^{-6}$, per regolarizzazione frazionaria (alto a sinistra), regolarizzazione con lifting (alto a destra) e regolarizzazione intera (basso).	119
4.11	Caso tridimensionale: dominio del problema per l'ottimizzazione del campo di temperatura (test di riferimento).	121
4.12	Caso tridimensionale (campo di temperatura): variabile di controllo q sulla regione di controllo contenente Γ_c per regolarizzazione frazionaria (in alto), regolarizzazione con lifting (al centro) e regolarizzazione in H^1 (in basso) per valori del coefficiente $\alpha = 10^{-3}$ (a sinistra) e $\alpha = 10^{-7}$ (a destra), con $N_{lev} = 3$ livelli di raffinamento.	125

-
- 4.13 Caso tridimensionale (gradiente): variabile di controllo q sulla regione di controllo contenente Γ_c per regolarizzazione frazionaria (in alto), regolarizzazione con lifting (al centro) e regolarizzazione in H^1 (in basso) per valori del coefficiente $\alpha = 10^{-3}$ (a sinistra) e $\alpha = 10^{-7}$ (a destra), con $N_{lev} = 3$ livelli di raffinamento. 127
- 4.14 Caso bidimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento e $\alpha = 10^{-7}$, per regolarizzazione frazionaria con soluzione analitica, regolarizzazione con lifting e regolarizzazione intera. 131
- 4.15 Caso tridimensionale: variabile di controllo q su Γ_c con $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento e $\alpha = 10^{-7}$, per regolarizzazione frazionaria con soluzione analitica, regolarizzazione frazionaria con soluzione numerica, regolarizzazione con lifting e regolarizzazione intera. 131

Elenco delle tabelle

1.1	Tabella dei punti e dei nodi di Gauss fino al sesto ordine.	29
3.1	Dal funzionale di costo alle equazioni del sistema del controllo	80
4.1	Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).	104
4.2	Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento.	104
4.3	Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).	108
4.4	Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento.	108

4.5	Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).	111
4.6	Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento.	111
4.7	Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).	115
4.8	Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento.	115
4.9	Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).	118
4.10	Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 7$ livelli di raffinamento.	118
4.11	Caso tridimensionale:: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift).	123

-
- 4.12 Caso tridimensionale:: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 3$ livelli di raffinamento. 123
- 4.13 Caso bidimensionale: valutazione dell'errore di controllo per differenti livelli di raffinamento N_{lev} e del parametro di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift). 128
- 4.14 Caso bidimensionale: valutazione del tempo di assemblaggio e di risoluzione (in secondi) per differenti parametri di regolarizzazione α per regolarizzazione frazionaria ($s = 0.5$), regolarizzazione in H^1 ($s = 1$) e mediante funzione di lifting (lift) e utilizzando $N_{lev} = 3$ livelli di raffinamento. 128