

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Triennale in Fisica

SISTEMI HAMILTONIANI  
INTEGRABILI:  
LA CATENA DI TODA APERTA

Tesi di Laurea in Meccanica Analitica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
SIMONETTA ABENDA

Presentata da:  
DIEGO MATTEINI

---

IV Sessione  
Anno Accademico 2022-2023

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Parentesi di Poisson e strutture simplettiche</b>	<b>3</b>
1.1 Riepilogo sui tensori . . . . .	3
1.2 Parentesi di Poisson . . . . .	4
1.3 Struttura simplettica . . . . .	7
<b>2 Sistemi hamiltoniani integrabili</b>	<b>9</b>
2.1 Sistema Hamiltoniano . . . . .	9
2.2 Sistemi integrabili . . . . .	10
<b>3 Coppie di Lax, integrali primi e catena di Toda aperta</b>	<b>15</b>
3.1 La catena di Toda aperta . . . . .	16
3.2 Flusso di Toda . . . . .	23
3.3 Integrabilità del sistema . . . . .	25
3.4 Un esempio applicativo . . . . .	28
<b>Conclusioni</b>	<b>30</b>

# Introduzione

All'inizio degli anni '60 si sviluppò un grande interesse per quanto concerne la teoria dei problemi non lineari.

Il presente testo affronta il problema dell'integrabilità di un simile sistema partendo dalle definizioni elementari utili alla comprensione teorica dell'argomento e arrivando ad un esempio di sistema integrabile di facile trattazione. Il documento è diviso in tre capitoli: nel primo saranno richiamati alcuni risultati fondamentali, necessari per i restanti capitoli, su tensori, parentesi di Poisson e varietà simplettiche. Nel secondo capitolo verrà trattata la teoria dei sistemi integrabili e sarà enunciato il teorema di Liouville-Arnol'd. Nel terzo ci si concentrerà dapprima su un possibile strumento di risoluzione per vari problemi di integrabilità dei sistemi attraverso le coppie di Lax, per poi passare alla trattazione di un importante esempio di sistema integrabile, la catena di Toda aperta. Su quest'ultima sarà condotta un'analisi approfondita che illustri i più importanti risultati riguardanti l'integrabilità del sistema. Per rendere ancora più efficace la comprensione dell'argomento verrà infine proposta una riscrittura d'esempio di quanto detto sul sistema di Toda nel caso particolare in cui la catena sia formata da solo 3 particelle. Infine, nelle conclusioni sarà presentata una parentesi storica utile ad inquadrare lo sviluppo e la rilevanza del modello di Toda dalla sua nascita ad oggi.

# Capitolo 1

## Parentesi di Poisson e strutture simplettiche

Per trattare efficacemente lo sviluppo teorico dei sistemi integrabili è necessario richiamare alcuni strumenti noti. Nel seguente capitolo saranno presentate brevemente le informazioni essenziali riguardanti tensori e parentesi di Poisson.

### 1.1 Riepilogo sui tensori

**Definizione 1.1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{R}$  e  $V^*$  il corrispondente spazio duale. Definiamo  **tensore di tipo  $(r,s)$  su  $V$  un funzionale multilineare**

$$T : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

con  $r$  prodotti di  $V^*$  e  $s$  prodotti di  $V$ .

Nel caso di una varietà  $P$ , il posto dello spazio vettoriale  $V$  viene preso dalla famiglia di spazi tangenti  $T_x P$  con  $x \in P$  e si ha una corrispondente definizione intrinseca di tensori su di essa. Attraverso questa generalizzazione è possibile dare la seguente:

**Definizione 1.2.** Data una varietà  $P$  e una sua carta locale con coordinate  $(x^1, \dots, x^n)$ , un  **tensore (o meglio campo tensoriale) di tipo  $(r,s)$  è individuato da componenti  $T_{j^1, \dots, j^r}^{i_1, \dots, i_s}$  con la proprietà che, al cambiare della carta (ovvero sotto trasformazione delle coordinate), le nuove componenti sono date da  $T_{j'^1, \dots, j'^r}^{i'_1, \dots, i'_s}$ . dove**

$$T_{j'^1, \dots, j'^r}^{i'_1, \dots, i'_s} = \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \dots \frac{\partial x'^{j_r}}{\partial x^{l_r}} \frac{\partial x'^{m_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x'^{m_s}}{\partial x^{i_s}} T_{l^1, \dots, l^r}^{m_1, \dots, m_s}.$$

Riassumiamo brevemente anche le operazioni lineari con cui è possibile manipolare i tensori. Le più importanti sono due:

-il prodotto di tensori;

-la contrazione di tensori.

Siano dati due tensori  $A$  e  $B$ , rispettivamente di tipo  $(m, n)$  e  $(r, s)$ .

Il *prodotto tra tensori*, denotato con  $A \otimes B$ , restituisce un tensore di tipo  $(m + r, n + s)$  tale per cui

$$(A \otimes B)_{j_1 \dots j_n l_1 \dots l_s}^{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_r} = A_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} B_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}.$$

La *contrazione tensoriale* prende un tensore  $A$  di tipo  $(p, q)$  e ne restituisce uno di tipo  $(p - 1, q - 1)$  nel seguente modo:

$$C_{j_l}^{i_k}(A)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = A_{j_1 \dots j_{l-1} s j_{l+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{k-1} s i_{k+1} \dots i_p},$$

dove si somma sull'indice ripetuto  $s$  e c'è una dipendenza esplicita dagli indici  $i_k$  e  $j_l$ .

Per quanto verrà detto nei prossimi capitoli, per i nostri scopi lavoreremo soprattutto con tensori di tipo  $(2, 0)$  e  $(0, 2)$ . Un tensore  $(2, 0)$  è associato a un bivettore nell'algebra esterna, e risulterà utile nello sviluppo teorico della parentesi di Poisson (cap. 1.2).

Un tensore  $(0, 2)$  è associato a una 2-forma, strumento che, nel caso in cui sia chiusa e non degenera, compare nelle principali definizioni della geometria симплектика (cap. 1.3).

Per la trattazione dell'argomento nel dettaglio si rimanda ai testi specializzati.

## 1.2 Parentesi di Poisson

**Definizione 1.3.** *Sia  $P$  una varietà. Diremo che  $P$  è una **varietà di Poisson** se su di essa è definita un'operazione binaria chiusa tra funzioni infinitamente differenziabili che goda delle seguenti proprietà:*

- *Antisimmetria:*  $\forall f, g \in C^\infty(P)$

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

- *Bilinearità:*  $\forall f, h, g \in C^\infty(P), \forall m, n \in \mathbb{R}$

$$\{mf + nh, g\} = m\{f, g\} + n\{h, g\}$$

$$\{f, mh + ng\} = m\{f, h\} + n\{f, g\}$$

- Regola di Leibnitz:  $\forall f, h, g \in C^\infty(P)$

$$\{fh, g\} = f\{h, g\} + \{f, g\}h$$

- Identità di Jacobi:  $\forall f, h, g \in C^\infty(P)$

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$$

L'antisimmetria implica  $\{f, f\} = 0$ .

È possibile dimostrare che tale operazione è esprimibile attraverso un tensore  $(2, 0)$ , che denotiamo con il simbolo  $\pi$ . Abbiamo dunque:

$$\{f, g\} = \pi(f, g) = \langle \pi, df \wedge dg \rangle = \pi^{ij}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \frac{\partial g(x)}{\partial x^j}$$

con  $N = \text{Dim}(P)$ , dove abbiamo riscritto il vettore generico  $x$  in coordinate come  $x = (x^1, \dots, x^N)$ . In questa notazione si ha

$$\{x^i, x^j\} = \pi^{ij}(x) \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Dall'identità di Jacobi abbiamo:

$$\{x^i, \{x^j, x^k\}\} + \{x^j, \{x^k, x^i\}\} + \{x^k, \{x^i, x^j\}\} = 0, \quad 1 \leq i < j < k \leq N.$$

Per cui, passando alla notazione tensoriale, è valida la relazione

$$\frac{\partial \pi^{ij}(x)}{\partial x^s} \pi^{sk}(x) + \frac{\partial \pi^{ki}(x)}{\partial x^s} \pi^{sj}(x) + \frac{\partial \pi^{jk}(x)}{\partial x^s} \pi^{si}(x) = 0, \quad 1 \leq i < j < k \leq N.$$

**Definizione 1.4.** Chiamiamo una parentesi di Poisson **non degenera** se il rango della matrice associata  $\pi^{ij}$  è uguale alla dimensione della varietà  $P$ , ossia vale  $\text{rk}(\pi^{ij}) = N$ .

**Definizione 1.5.** Data una parentesi di Poisson, le funzioni che commutano con ogni altra funzione  $h \in C^\infty(P)$ , ovvero gli elementi di

$$\{f \in C^\infty(P) : \{f, h\} = 0 \quad \forall h \in C^\infty(P)\}$$

si chiamano **Casimirs della parentesi di Poisson**.

Osserviamo che se la parentesi di Poisson è non degenera, allora la condizione di appartenenza a tale insieme è soddisfatta solo dal caso banale di funzione identicamente nulla.

È intuitiva l'esistenza di un unico campo vettoriale  $X_f$  tale che

$$X_f(g) = \{f, g\}$$

e in particolare in coordinate locali

$$X_f = \pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Risulta quindi definito un omomorfismo

$$C^\infty(P) \rightarrow TP$$

$$f \mapsto X_f$$

Tale per cui

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

**Definizione 1.6.** *Date due varietà differenziabili  $M$  e  $N$ , definiamo **diffeomorfismo** una biezione  $\psi : M \rightarrow N$  differenziabile con continuità, la cui inversa  $\psi^{-1} : N \rightarrow M$  è a sua volta differenziabile con continuità.*

*Un diffeomorfismo di  $P$  in sé stesso  $\phi : P \rightarrow P$  è detto **diffeomorfismo di Poisson** se vale*

$$\phi^*\{f, g\} = \{\phi^*f, \phi^*g\}, \quad \text{con } \phi^*f(x) = f(\phi(x)).$$

Sia ora dato un gruppo di diffeomorfismi su  $P$   $\phi_t$ , con la condizione che il parametro  $t$  soddisfi  $t \leq 0$ , generato dal campo vettoriale

$$X = \frac{d}{dt} \phi_t(x)|_{t=0}.$$

Derivando in  $t = 0$  la relazione  $\phi_t^*\{f, g\} = \{\phi_t^*f, \phi_t^*g\}$  otteniamo

$$X(\{f, g\}) = \{X(f), g\} + \{f, X(g)\} \quad (1.1)$$

Se  $X$  soddisfa la (1.1), allora è detto **campo vettoriale di Poisson**.

È possibile verificare che ogni campo vettoriale Hamiltoniano è un campo vettoriale di Poisson (non è vero invece che ogni campo vettoriale di Poisson è Hamiltoniano).

### 1.3 Struttura symplettica

**Definizione 1.7.** *Definiamo **varietà symplettica** una varietà differenziabile  $P$ ,  $2n$ -dimensionale, munita di una **forma symplettica**, ovvero una 2-forma chiusa non degenera  $\omega$ .*

Esprimiamo la forma  $\omega$  in coordinate locali come

$$\omega = \sum_{i < j, i, j=1}^n \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

dove  $\wedge$  sta ad indicare il prodotto wedge (prodotto esterno). La condizione di chiusura di  $\omega$  si può quindi esplicitare attraverso l'espressione

$$\sum_{i, j, k=1}^N \frac{\partial}{\partial x^k} \omega_{ij} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = 0.$$

Tale equazione implica al contempo

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \omega_{ij} + \frac{\partial}{\partial x^i} \omega_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{ki} = 0 \quad \forall i \neq j \neq k.$$

**Lemma 1.8.** *Una varietà di poisson  $P$ , munita di una parentesi di Poisson non degenera  $\pi$ , è una varietà symplettica con  $\omega_{ij} = (\pi^{ij})^{-1}$ .*

*Dimostrazione.* Esplicitando l'equazione dell'identità di Jacobi si vede che questa coincide con la condizione di chiusura di  $\omega$ .  $\square$

**Teorema 1.9** (Darboux). *Sia  $(P, \omega)$  una varietà symplettica con la rispettiva 2-forma chiusa non degenera, e sia  $p$  un punto di  $P$ . Possiamo allora trovare un sistema di coordinate  $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  centrato in  $p$  tale che su  $U$  valga*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

In virtù del teorema di Darboux posso quindi definire per la mia varietà  $2N$ -dimensionale  $P$ , in un intorno di ciascun punto della stessa, un sistema di coordinate locali  $(q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$ , che chiameremo canoniche, tali per cui valga

$$\omega = \sum_{i=1}^N dp_i \wedge dq^i. \tag{1.2}$$

Le coordinate canoniche sono uno strumento utile alla semplificazione delle espressioni introdotte nelle pagine precedenti.

In particolare, in virtù della (1.2), si vede attraverso un semplice calcolo che si presentano nelle seguenti forme:

*-Parentesi di Poisson*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad (1.3)$$

*-Campo vettoriale Hamiltoniano*

$$X_f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (1.4)$$

*-tensore di Poisson*

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

# Capitolo 2

## Sistemi hamiltoniani integrabili

Presentiamo adesso gli elementi di meccanica analitica considerati indispensabili per la trattazione dell'argomento centrale della tesi.

In particolare ci concentreremo sulle definizioni, sui risultati principali riguardanti i sistemi Hamiltoniani integrabili, e sulle loro implicazioni da un punto di vista geometrico.

### 2.1 Sistema Hamiltoniano

**Definizione 2.1.** *Siano date una varietà simplettica  $P$  con  $\dim(P) = 2n$ , munita delle coordinate canoniche  $(q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$  definite nel capitolo precedente, e una funzione  $H \in C^\infty(P)$ .*

*Definiamo allora **sistema hamiltoniano** di hamiltoniana  $H$  il sistema di  $2n$  equazioni differenziali ordinarie (dette equazioni di Hamilton)*

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Adottando la convenzionale nomenclatura utilizzata nei testi di meccanica analitica, le variabili  $p$  sono dette momenti coniugati alle coordinate  $q$  ed  $n$  corrisponde al numero di gradi di libertà del sistema hamiltoniano.

**Definizione 2.2.** *Una funzione  $F \in C^\infty(P)$  si dice **quantità conservata** per un sistema hamiltoniano di hamiltoniana  $H$  se vale*

$$\frac{dF}{dt} = 0.$$

Risulta evidente che preso un numero arbitrario di quantità conservate  $F_1, \dots, F_n$ , allora una qualunque funzione  $g = g(F_1, \dots, F_n)$  è a sua volta una quantità conservata.

Sia a questo punto  $F$  una generica funzione  $F \in C^\infty(P)$ . Derivandola totalmente rispetto al tempo otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \dot{q} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \end{aligned}$$

È immediato verificare che, nel caso in cui la funzione  $F$  non dipenda esplicitamente da  $t$ , la condizione di conservazione relativa ad  $F$  risulta equivalente ad avere

$$\{F, H\} = 0.$$

## 2.2 Sistemi integrabili

Restringiamoci allo studio di un sistema Hamiltoniano come quello definito nel precedente capitolo. È fondamentale per lo sviluppo della teoria affrontare il concetto di trasformazione canonica.

Darne tuttavia una definizione immediata senza ulteriori spiegazioni sarebbe riduttivo. Iniziamo dunque trattandone una versione "ristretta".

Restringiamoci dapprima alle trasformazioni di coordinate indipendenti dal tempo del tipo

$$(p, q) = w(\tilde{p}, \tilde{q}) \quad w : \tilde{D} \rightarrow D,$$

con  $\tilde{D}, D$  aperti di  $\mathbb{R}^{2n}$  e  $w$  diffeomorfismo.

**Definizione 2.3.** Una trasformazione di coordinate indipendente dal tempo della forma di quella appena descritta è detta **canonica strettamente** se per qualunque hamiltoniana  $H : D \rightarrow \mathbb{R}$  le equazioni di hamilton relative ad essa

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

sono equivalenti a quelle relative a  $\tilde{H}$

$$\dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \quad \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}},$$

dove  $\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{q}) = H(w(\tilde{p}, \tilde{q}))$ .

Nel caso in cui esista una tale trasformazione canonica  $w$  le hamiltoniane  $H$  e  $\tilde{H}$  e le rispettive equazioni di Hamilton si dicono canonicamente coniugate attraverso  $w$ .

Soffermiamoci momentaneamente su una proprietà interessante delle trasformazioni canoniche strettamente.

**Definizione 2.4.** Diciamo che il cambiamento un coordinate

$$(p, q) = w(\tilde{p}, \tilde{q})$$

preserva le parentesi di Poisson se comunque si prendano due funzioni  $f$  e  $g$ , indicandone con  $\tilde{f} = f \circ w$  e  $\tilde{g} = g \circ w$  le trasformate, risulta

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \{f, g\} \circ w$$

Vale dunque la seguente

**Proposizione 2.5.** Una trasformazione di coordinate del tipo  $(p, q) = w(\tilde{p}, \tilde{q})$  è strettamente canonica se e solo se preserva la parentesi di Poisson.

La definizione di trasformazione strettamente canonica definisce, in maniera intuitiva, una trasformazione che muta sistemi hamiltoniani in sistemi hamiltoniani in modo tale che basti una sostituzione di variabili per ottenere la nuova hamiltoniana dalla precedente. Una definizione meno stringente di trasformazione canonica è la seguente

**Definizione 2.6.** Definiamo trasformazione **canonica generalmente** un cambiamento di variabili  $(p, q) = w(\tilde{p}, \tilde{q}), w : \tilde{D} \rightarrow D$  se per ogni  $H : D \rightarrow \mathbb{R}$  esiste una  $K : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  per cui le equazioni di Hamilton relative a  $H$  e  $K$  sono equivalenti.

Il cambiamento di variabili dato da  $w$  si può definire attraverso le seguenti

$$p_i = \alpha_i \tilde{p}_i \quad q_i = \beta_i \tilde{q}_i \quad \text{con} \quad \alpha_i \beta_i = c^{-1} \quad i \leq n$$

Le nuove equazioni del moto dopo il cambio di variabili sono le equazioni di Hamilton relative a  $K = cH \circ w$ .

Possiamo finalmente definire la nozione di sistema integrabile. Cominciamo con qualche considerazione sui sistemi hamiltoniani in generale: sappiamo dalla meccanica analitica che se l'hamiltoniana  $H$  non dipende da un dato numero di coordinate  $q_{m+1}, \dots, q_n$  con  $0 \leq m < n$ , i momenti coniugati alle coordinate suddette sono costanti del moto per il sistema.

Nel caso in cui tutte le coordinate  $q_i, \dots, q_n$  non compaiano nell'espressione di  $H$ , ovvero  $H(p, q) = h(p)$ , allora è estremamente facile integrare le equazioni del moto. Ponendo  $\omega_i(p) = \frac{\partial h}{\partial p_i}$  con  $i = 1, \dots, n$  le equazioni del moto divengono  $\dot{p}_i = 0$  e  $\dot{q}_i = \omega_i(p)$ . Integrando otteniamo

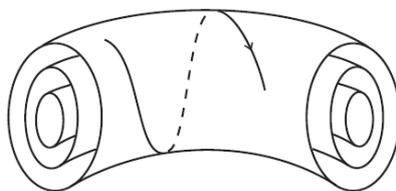
$$p_i(t) = p_i^0 \quad q_i(t) = q_i^0 + \omega_i(p^0)t$$

dove  $p_i^0, q_i^0$  sono i dati iniziali e  $i = 1, \dots, n$ . Come si è consueti fare in meccanica analitica, le coordinate che non compaiono nell'hamiltoniana sono dette

variabili cicliche.

Studiando questo risultato si nota subito la peculiare forma assunta dalle variabili cicliche  $q_i$ : queste sono infatti descritte da una funzione associabile ad un moto periodico, a velocità angolare costante, su una circonferenza. Di conseguenza l'n-upla  $q = (q_1, \dots, q_n)$  si muove lungo un toro n-dimensionale  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ .

Quando il dominio di  $p$  è un aperto  $L \subset \mathbb{R}^n$  lo spazio delle fasi è dato dal prodotto  $L \times \mathbb{T}^n$ .



**Figura 2.1:** Esempio di possibile moto su un toro

Immagine presa da "Appunti per il corso di Meccanica Analitica", Giancarlo Benettin, pag.29

Talvolta per rendere palese questa struttura è necessario operare un cambio di variabili.

Più precisamente, data una Hamiltoniana  $H : D \rightarrow \mathbb{R}$  dipendente da tutte le variabili  $p_i$  e  $q_i$ , è possibile esista una trasformazione canonica con nuove variabili  $(I, \phi) = (I_1, \dots, I_n, \phi_1, \dots, \phi_n) \in L \times \mathbb{T}^n$

$$(p, q) = w(I, \phi) \quad w : L \times \mathbb{T}^n \rightarrow w(L \times \mathbb{T}^n) \subset D$$

Tale per cui la nuova hamiltoniana  $K = H \circ \omega$  dipenda solo da  $I$

$$K(I, \phi) = h(I)$$

In questo modo ci riconduciamo al caso in cui il moto delle nuove variabili si svolge su un toro  $\mathbb{T}^n$ , lo spazio delle fasi nelle nuove variabili è decomposto in  $L \times \mathbb{T}^n$  e vale

$$I(t) = I^0 \quad \phi(t) = \phi^0 + \omega(I^0)t \quad \text{dove} \quad \omega = \frac{\partial h}{\partial I}.$$

Va notato che il cambio di variabili non genera la struttura, che già esisteva nelle vecchie, ma ne rende palese la forma.

In conclusione possiamo affermare che nel caso in cui  $H$  non dipenda da alcuna coordinata, ogni suo moto è quasi periodico, ed assume la forma

$$(p(t), q(t)) = w(I^0, \phi^0 + \omega(I^0)t).$$

**Definizione 2.7.** Diciamo l'hamiltoniana  $H : D \rightarrow \mathbb{R}$  *integrabile* (secondo Liouville) nel dominio  $D' \subset D$  se esiste una trasformazione canonica  $(p, q) = w(I, \phi)$  definita per  $I \in L \subset \mathbb{R}^n$  e  $\phi \in \mathbb{T}^n$  tale per cui  $D' = w(L \times \mathbb{T}^n)$  e la nuova hamiltoniana  $K = H \circ \omega$  è funzione della sola variabile  $I$ , ovvero

$$K(I, \phi) = h(I) \quad h : L \rightarrow \mathbb{R}$$

Con le considerazioni fatte fino ad ora siamo finalmente capaci di enunciare il teorema di Liouville-Arnol'd (per la dimostrazione si rimanda ai testi specializzati)

**Teorema 2.8.** Sia  $D$  un aperto di  $\mathbb{R}^{2n}$  munito delle coordinate canoniche  $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  e siano  $F_1, \dots, F_n$  con  $F_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni regolari in involuzione tra loro

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad \forall i, j.$$

Dato  $l \in \mathbb{R}^n$  definiamo

$$\Sigma_l = \{(p, q) \in D : F_i(p, q) = l_i, i = 1, \dots, n\}$$

e assumiamo che  $F_1, \dots, F_n$  siano indipendenti su  $\Sigma_{l^*} \neq \emptyset$  per un opportuno  $l^* \in \mathbb{R}^n$ , ovvero

$$\text{rank} \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)} = n$$

per ogni  $(p, q) \in \Sigma_{l^*}$

Quando vere, queste premesse implicano i seguenti:

- I)  $\Sigma_{f^*}$  è una varietà  $n$ -dimensionale, invariante per ciascuno degli  $n$  flussi hamiltoniani  $\Phi_{F_i}^t$ ;
- II)  $\Sigma_{f^*}$ , quando connessa e compatta, è diffeomorfa al toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ ;
- III) esiste un intorno  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$  di  $f^*$  tale che l'insieme

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \Sigma_f$$

è diffeomorfo a  $\mathcal{F} \times \mathbb{T}^n$ ;

IV) esiste un cambiamento di coordinate  $(p, q) = w(I, \phi)$  definito su

$$(I, \phi) \in L \times \mathbb{T}^n \quad L \subset \mathbb{R}^n$$

tale per cui  $\Sigma_{\mathcal{F}} = w(L \times \mathbb{T}^n)$  e ciascuna funzione trasformata  $\tilde{F}_i = F_i \circ \omega$  è funzione delle sole azioni

$$\tilde{F}_i(I, \phi) = \tilde{f}_i(I);$$

Viceversa le azioni  $I$  sono funzioni invertibili delle sole  $F$ , ovvero esiste  $\mathcal{J} : \mathcal{F} \rightarrow L$  tale per cui  $I(p, q) = \mathcal{J}(F_1(p, q), \dots, F_n(p, q))$ .

L'enunciato è simmetrico rispetto alle  $F_1, \dots, F_n$ , infatti una delle  $F_i$  può essere la nostra hamiltoniana mentre le altre non sono altro che le sue costanti del moto (poiché sono in involuzione con  $H$ ).

Il teorema ci dice in particolare che ogni moto di  $H$  è quasi-periodico con  $n$  frequenze nel dominio discusso nel teorema e si svolge su un toro  $n$ -dimensionale. Possiamo inoltre introdurre una coppia di nuove coordinate  $(I, \phi)$  che mutano  $H$  in una nuova hamiltoniana  $K$  che dipende esclusivamente dalle  $I$ . Questo implica per  $H$  l'integrabilità secondo Liouville nel dominio  $\Sigma_{\mathcal{F}}$ .

Date  $F_1, \dots, F_n$  è parimenti vero che ogni hamiltoniana che dipende funzionalmente da queste è a sua volta integrabile, ovvero

$$H(p, q) = \mathcal{H}(F_1(p, q), \dots, F_n(p, q))$$

con  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qualsiasi.

Per il teorema di Liouville-Arnol'd l'esistenza di  $n$  costanti del moto in involuzione le une con le altre è condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità del sistema in un opportuno dominio.

## Capitolo 3

# Coppie di Lax, integrali primi e catena di Toda aperta

Introduciamo in questo capitolo un potente strumento per trovare quantità conservate in alcuni sistemi di equazioni differenziali, le coppie di Lax. Proseguiamo poi con la trattazione di un esempio significativo di sistema integrabile attraverso l'utilizzo di questi ultimi: il modello della catena di Toda aperta.

**Definizione 3.1.** *Data una equazione differenziale ordinaria*

$$\dot{x} = f(x) \quad x = (x^1, \dots, x^N)$$

*diciamo che due matrici  $m \times m$  del tipo  $L = (L_{ij}(x))$  e  $A = (A_{ij}(x))$  costituiscono una **coppia di Lax** se per ogni soluzione  $x = x(t)$  dell'equazione differenziale le matrici  $L = (L_{ij}(x(t)))$  e  $A = (A_{ij}(x(t)))$  soddisfano l'equazione*

$$\frac{dL}{dt} = [A, L] \tag{3.1}$$

*dove con  $[A, L] = AL - LA$  si identifica il commutatore.*

Se esiste, una coppia di Lax non è unica; infatti ci basta sommare ad  $A$  una matrice che commuta con  $L$  e ad  $L$  una matrice indipendente dal tempo che commuta con  $A$  per trovare una nuova coppia di matrici che soddisfa l'equazione di Lax.

L'equazione di Lax ci assicura che lo spettro di  $L$  è invariante nel tempo, una proprietà che prende il nome di isospettralità. Che per un commutatore del tipo definito sopra la traccia sia nulla è evidente utilizzando semplici considerazioni di calcolo matriciale. Riprendendo la relazione  $\frac{dL}{dt} = [A, L]$

ci rendiamo subito conto che la traccia di  $L$  non deve allora dipendere dal tempo, infatti sono valide le relazioni

$$0 = \text{tr}([A, L]) = \text{tr}\left(\frac{d}{dt}(L)\right) = \frac{d}{dt}(\text{Tr}(L)).$$

Attraverso il metodo induttivo è possibile estendere il risultato alla traccia di  $L^k$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Risultato altrettanto interessante riguarda la conservazione degli autovalori di  $L$ .

**Teorema 3.2.** *Dato un sistema dinamico della forma*

$$\dot{x} = f(x) \quad x = (x^1, \dots, x^N)$$

*munito di una coppia di Lax, gli autovalori  $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$  di  $L(x)$  sono integrali primi del moto per il sistema dinamico*

*Dimostrazione.* Dato il polinomio caratteristico della matrice  $L(x)$

$$\det(L - \lambda I) = (-1)^m [\lambda^m - a_1(x)\lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m a_m(x)]$$

i coefficienti  $a_1(x), \dots, a_m(x)$  sono polinomi in  $\text{Tr}(L), \text{Tr}(L^2), \dots, \text{Tr}(L^m)$

$$a_1 = \text{Tr}(L) \quad a_2 = \frac{1}{2}[(\text{Tr}(L))^2 - \text{Tr}(L^2)] \quad a_3 = \dots$$

Notiamo che la traccia di  $L$  è un integrale primo del moto, infatti

$$\frac{d}{dt}\text{Tr}(L) = \text{Tr}(\dot{L}) = \text{Tr}(AL - LA) = 0.$$

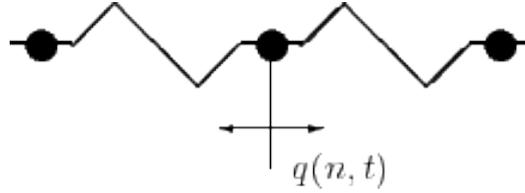
Questa considerazione si estende alla traccia di un qualunque  $L^k$  con  $k = 1, \dots, m$

$$\frac{d}{dt}\text{Tr}(L^k) = k\text{Tr}((AL - LA)L^{k-1}) = 0.$$

Poiché i coefficienti del polinomio caratteristico di  $L(x)$  sono costanti del moto, ne segue che lo sono anche i suoi autovalori. □

### 3.1 La catena di Toda aperta

Passiamo ora ad un'applicazione diretta dei concetti discussi nei capitoli precedenti. Il modello del Toda Lattice, ideato dal fisico giapponese Mirukazu Toda agli inizi degli anni '60, rappresenta tutt'oggi uno dei sistemi non lineari completamente integrabili di più facile trattazione.

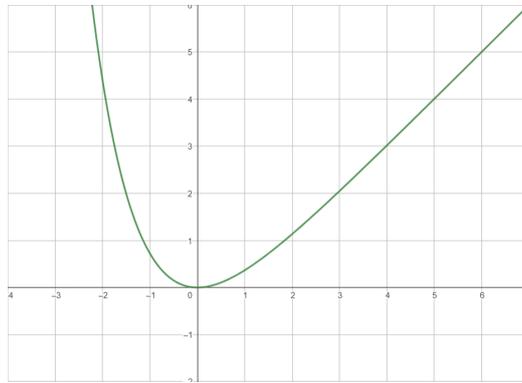


**Figura 3.1:** Particelle interagenti disposte su una retta  
 Immagine presa da "THE TODA LATTICE", Gerald Teschl

Per quanto concerne la struttura dei solidi, la configurazione più semplice è indubbiamente data da una catena unidimensionale di particelle tenute insieme da un qualche tipo di interazione a distanza. Il modello di Toda descrive questa struttura e nel presente capitolo si dimostrerà la sua integrabilità.

Chiamiamo **Toda Lattice** un sistema di  $n$  punti  $q_1, \dots, q_n$  (corrispondenti alle suddette particelle interagenti) disposti sulla retta reale e interagenti attraverso il potenziale

$$U(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}}$$



**Figura 3.2:** Potenziale di Toda  $V(q_i)$

L'Hamiltoniana del sistema  $H(p, q)$  assume la forma

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}}. \quad (3.2)$$

Introducendo le parentesi di Poisson canoniche le equazioni di Hamilton diventano:

$$\{q_k, p_j\} = \delta_{kj} \quad \{q_k, q_j\} = \{p_k, p_j\} = 0 \quad k, j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = p_k \quad k = 1, \dots, n$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = \begin{cases} -e^{q_1 - q_2} & k = 1 \\ e^{q_{k-1} - q_k} - e^{q_k - q_{k+1}} & 1 < k < n \\ e^{q_{n-1} - q_n} & k = n \end{cases}$$

L'hamiltoniana è invariante per traslazioni, dunque oltre ad essa si conserva anche il momento totale.

Per dimostrare che il Toda lattice è un sistema hamiltoniano completamente integrabile seguiamo il metodo usato da Flaschka. Per prima cosa introduciamo nuove variabili, dette variabili di Flaschka, utili a creare una coppia di Lax per il sistema

$$a_k = \frac{1}{2} e^{\frac{q_k - q_{k+1}}{2}} \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$b_k = -\frac{1}{2} p_k \quad k = 1, \dots, n,$$

la cui evoluzione è garantita dalle equazioni differenziali

$$\dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k) \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3.4)$$

$$\dot{b}_k = 2(a_k^2 - a_{k-1}^2) \quad k = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

dove per convenzione  $a_0 := a_n = 0$ . Poiché il sistema è invariante per traslazioni le variabili sono solamente  $2n-1$ .

Introduciamo le seguenti matrici quadrate tridiagonali di rango  $n$ :

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & 0 & 0 & \\ -a_1 & 0 & a_2 & & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & & 0 & a_{n-1} \\ 0 & & & & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Per una matrice quadrata  $X$  definiamo  $X_+$  la sezione triangolare superiore di  $X$  e  $X_-$  la sezione triangolare inferiore di  $X$ , in notazione:

$$(X_+)_{ij} = \begin{cases} X_{ij} & i \leq j \\ 0 & \text{qualunque altro caso} \end{cases}$$

$$(X_-)_{ij} = \begin{cases} X_{ij} & i \geq j \\ 0 & \text{qualunque altro caso} \end{cases}$$

Questo implica che  $A = L_+ - L_-$ .

**Lemma 3.3.** *Le equazioni del Toda Lattice (3.4) e (3.5) sono equivalenti a*

$$\frac{dL}{dt} = [A, L] \quad (3.8)$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è banale, basta sostituire i termini (3.4) e (3.5) nella derivata temporale della matrice  $L$  e poi calcolare il commutatore, per vedere che l'equazione è verificata.  $\square$

Abbiamo dunque trovato una coppia di matrici che soddisfano la condizione di coppia di Lax.

È possibile costruire una matrice  $\hat{L} = DLD^{-1}$ , coniugata alla matrice  $L$ , attraverso l'introduzione di una nuova matrice diagonale  $D$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \prod_{i=1}^n a_i \end{pmatrix}$$

che mi restituisce

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1^2 & b_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & b_3 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}^2 & b_n \end{pmatrix}$$

Attraverso queste sostituzioni le equazioni del Toda Lattice (3.4) e (3.5) assumono la forma

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = -2[\hat{A}, \hat{L}]$$

dove  $\hat{A} = \hat{L}_-$  ovvero

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto detto nel capitolo precedente riguardo le coppie di Lax e in particolare per il teorema (3.2) abbiamo garantita l'esistenza di quantità conservate, in particolare le tracce

$$H_k = \frac{1}{k+1} \text{Tr}(L^{k+1}), \quad k = 0, \dots, n-1$$

La funzione Hamiltoniana (3.2) è in relazione con  $H_1$  secondo  $H = 4H_1$  grazie al cambio di variabili di Flaschka.

Per dimostrare l'indipendenza degli integrali del moto  $H_0, \dots, H_{n-1}$  consideriamo la restrizione

$$H_i^0(p) := H_i(p, a = 0) \quad i = 0, \dots, n-1$$

da cui deriva la diagonalità della matrice  $L(b, a = 0)$  e che le funzioni di  $H_i^0(p)$  sono linearmente indipendenti.

Ci preme ora dimostrare che gli autovalori di  $L$  sono tutti distinti. Partiamo dimostrando prima il seguente

**Lemma 3.4.** *I) Lo spettro di  $L$  consiste di  $n$  numeri reali distinti  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ .*

*II) Dato  $Lv = \lambda v$  con  $v = (v_1, \dots, v_n)^t$  il problema agli autovalori di  $L$ , vale  $v_1 \neq 0$  e  $v_n \neq 0$ . Esiste inoltre un polinomio  $p_k(\lambda)$  di grado  $k$  tale per cui  $v_k = p_k(\lambda)$ .*

*Dimostrazione.* dimostriamo prima II) in quanto ci tornerà utile nella dimostrazione di I). dal problema agli autovalori di  $L$  si trova

$$(b_1 - \lambda)v_1 + a_1v_2 = 0 \tag{3.9}$$

$$a_{k-1}v_{k-1} + (v_k - \lambda)v_k + a_kv_{k+1} = 0 \quad 2 \leq k < n \tag{3.10}$$

Poichè  $a_1 \neq 0$  si ha che  $v_1 = 0$  implica  $v_2 = 0$ , dalla (4.5) prendendo  $k = 2$  e dal fatto che  $a_2 \neq 0$ ,  $v_1 = 0$  e  $v_2 = 0$  implicano  $v_3 = 0$ . Allora è  $v = 0$  se

$v_1 = 0$  e dunque  $v_1 \neq 0$ . In maniera induttiva si può arrivare a dimostrare che  $v_n \neq 0$ . Utilizzando le equazioni (3.9) e (3.10) si trova che  $v_k$  è un polinomio di grado  $k$  in  $\lambda$ .

Passiamo dunque alla dimostrazione del punto I).

Supponiamo che  $v$  e  $v'$  siano due autovalori corrispondenti allo stesso autovettore  $\lambda$ . Di conseguenza una qualunque combinazione lineare della forma  $\alpha v + \beta v'$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , è a sua volta un autovettore di  $L$  con autovalore  $\lambda$ . A questo punto si potrebbero scegliere  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$  in modo tale che  $\alpha v_1 + \beta v'_1 = 0$  e per quanto dimostrato nel punto precedente segue che  $\alpha v + \beta v' = 0$ . Manipolando l'equazione troviamo che  $v$  e  $v'$  sono linearmente dipendenti, provando I).  $\square$

Il lemma appena dimostrato implica che

$$L = U \Lambda U^t \quad (3.11)$$

dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e  $U$  è una matrice ortogonale, ovvero vale  $UU^t = 1$  con  $U_{ij} = u_{ij}$ , dove  $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})^t$  sono gli autovettori normalizzati di  $L$ . Dalla proprietà di ortogonalità di  $U$  ricaviamo

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} \quad \sum_{k=1}^n (u_{kj})^2 = 1 \quad i, j = 1, \dots, n$$

**Proposizione 3.5.** *Gli autovalori di  $L$  commutano rispetto alla parentesi di Poisson canonica definita in (3.3)*

*Dimostrazione.* siano  $\lambda$  e  $\mu$  due autovalori di  $L$  con autovettori normalizzati  $v$  e  $w$  rispettivamente. Allora sfruttando il fatto che  $(v, v) = 1$  e definendo  $a_0 := 0 = a_n$  abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} (v, Lv) = \lambda \frac{\partial}{\partial p_i} (v, v) + (v, \frac{\partial L}{\partial p_i} v) = -\frac{1}{2} v_i^2 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} (v, Lv) = a_i v_i v_{i+1} - a_{i-1} v_i v_{i-1} \end{aligned}$$

con  $i = 1, \dots, n$ . Le stesse relazioni valgono per  $\mu$ .

Scriviamo a questo punto la parentesi di Poisson canonica tra i due autovettori

$$\{\lambda, \mu\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \lambda}{\partial q_i} \frac{\partial \mu}{\partial p_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \frac{\partial \mu}{\partial q_i} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (v_i w_i (a_{i-1} (v_i w_{i+1} - v_{i+1} w_i) + a_{i-2} (w_i v_{i-1} - v_i w_{i-1})))$$

Introduciamo la quantità  $R_i = a_{i-1} (v_i w_{i+1} - v_{i+1} w_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  con  $R_n = 0$ . Dalle equazioni agli autovalori per  $v$  e  $w$ ,  $Lv = \lambda v$  e  $Lw = \mu w$ , otteniamo  $R_i - R_{i-1} = (\mu - \lambda) v_i w_i$ . Sostituendo quest'ultima relazione nell'espressione sopra ricavata per  $\{\lambda, \mu\}$ , otteniamo

$$\{\lambda, \mu\} = \frac{1}{2(\mu - \lambda)} \sum_{i=1}^n (R_i^2 - R_{i-1}^2) = \frac{R_n^2 - R_{-1}^2}{2(\mu - \lambda)} = 0$$

□

In conclusione, nel presente capitolo abbiamo dimostrato che il sistema di Toda è completamente integrabile, possiede  $n$  quantità conservate  $H_1, \dots, H_n$  che sono tra loro linearmente indipendenti e in involuzione.

Procedendo passo per passo, illustriamo adesso come il sistema possa essere integrato per quadratura.

Per conoscere  $L(t)$  al tempo  $t$  dobbiamo prima conoscere la matrice ortogonale  $U(t)$ . Riprendendo le formule (3.8) e (3.11) abbiamo

$$\dot{U} = AU$$

Concentriamoci sulla prima riga della matrice  $U$ ,  $u_{1i}$  con  $i = 1, \dots, n$

**Lemma 3.6.** *L'evoluzione temporale della prima riga della matrice  $U$ , ovvero  $u_{1i}$  con  $i = 1, \dots, n$ , è data da*

$$u_{1i}^2(t) = \frac{e^{2\lambda_i t} u_{1i}^2(0)}{\sum_{k=1}^n e^{2\lambda_k t} u_{1k}^2(0)} \quad i = 1, \dots, n$$

*Dimostrazione.* da  $\dot{U} = AU$  abbiamo

$$\frac{du_{1i}}{dt} = (AU)_{1i} = a_{1i} u_{2i}$$

che attraverso la relazione agli autovalori  $Lv_i = \lambda_i v_i$  con  $v_i = (u_{1i}, \dots, u_{ni})^t$  si riduce a

$$\frac{du_{1i}}{dt} = (\lambda_i - b_i) u_{1i}.$$

Una soluzione di questa equazione differenziale è

$$u_{1i}(t) = E(t) e^{t\lambda_i} u_{1i}(0) \quad E(t) = \exp\left(-\int_0^t b_1(\tau) d\tau\right)$$

Applichiamo la condizione di normalizzazione

$$1 = \sum_{i=1}^n u_{1i}^2(t) = E^2(t) \sum_{i=1}^n e^{2t\lambda_i} u_{1i}^2(0)$$

che implica

$$E^2(t) = \left( \sum_{i=1}^n e^{2t\lambda_i} u_{1i}^2(0) \right)^{-1}$$

dimostrando il lemma. □

Introduciamo la notazione

$$w_k(t) = u_{1i}^2(t) \quad k = 1, \dots, n$$

che rende più agile la visualizzazione della matrice U:

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{w_1(t)}p_0(\lambda_1, t) & \sqrt{w_2(t)}p_0(\lambda_2, t) & \dots & \sqrt{w_n(t)}p_0(\lambda_n, t) \\ \sqrt{w_1(t)}p_1(\lambda_1, t) & \sqrt{w_2(t)}p_1(\lambda_2, t) & \dots & \sqrt{w_n(t)}p_1(\lambda_n, t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{w_1(t)}p_{n-1}(\lambda_1, t) & \sqrt{w_2(t)}p_{n-1}(\lambda_2, t) & \dots & \sqrt{w_n(t)}p_{n-1}(\lambda_n, t) \end{pmatrix}$$

Poiché U è ortogonale, possiamo esplicitare una relazione di ortogonalità su U nella seguente forma

$$\sum_{k=1}^n w_k p_l(\lambda_k) p_j(\lambda_k) = \delta_{lj}.$$

I polinomi  $p_j(\lambda)$  sono quindi polinomi ortonormali normalizzati rispetto ai pesi  $w_k$  nei punti  $\lambda_k$ . Per trovare i polinomi ortogonali a partire dai pesi basta utilizzare l'algoritmo di Gram-Schmidt. Dunque a partire dai pesi  $w_1(t), \dots, w_n(t)$  è possibile ottenere la matrice ortogonale  $U(t)$ .

## 3.2 Flusso di Toda

Ci accingiamo adesso a creare un ponte tra l'integrazione del flusso di Toda e i polinomi ortogonali. Sia  $d\mu(\lambda)$  una misura positiva sulla retta dei reali tale per cui

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^k d\mu(\lambda) < \infty \quad k \geq 0$$

**Definizione 3.7.** *Definisco **matrice di Hankel** una matrice quadrata in cui ogni diagonale ascendente da sinistra a destra ha come elementi lo stesso valore costante.*

Consideriamo la matrice di Hankel  $(n+1) \times (n+1)$   $M_n$  della forma

$$(M_n)_{ij} = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{i+j-2} d\mu(\lambda) \quad i, j = 1, \dots, n+1$$

**Lemma 3.8.** *La matrice  $M_n$  è definita positiva*

*Dimostrazione.* consideriamo l'integrale positivo

$$0 < \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k=0}^n t_k \lambda^k \right)^2 d\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j,k=0}^n t_k t_j \lambda^{k+j} d\mu(\lambda) = \langle t, M_n t \rangle$$

dove  $t = (t_0, \dots, t_n)$ . Poiché  $t$  può assumere un qualunque valore, ne segue che  $M_n$  è definita positiva.

Ne definiamo il determinante  $D_n = \det(M_n)$  che, in virtù del lemma appena dimostrato, è positivo.  $\square$

Per convenienza imponiamo  $D_{-1} = 1$ .

Consideriamo a questo punto il polinomio di grado  $n$

$$\pi_n(\lambda) = \det \begin{pmatrix} & & & & \int_{\lambda}^n d\mu(\lambda) \\ & & & & \dots \\ & M_{n-1} & & & \int \lambda^{2n-1} d\mu(\lambda) \\ \lambda^0 & \dots & \dots & \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$$

**Lemma 3.9.** *I polinomi*

$$p_0(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{D_0}}$$

$$p_n(\lambda) = \frac{\pi_n(\lambda)}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}} (\lambda^n + O(\lambda^{n-1})) \quad n > 0 \quad (3.12)$$

sono polinomi ortogonali rispetto alla misura  $d\mu(\lambda)$ , ovvero vale

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) p_m(\lambda) d\mu(\lambda) = \delta_{nm}$$

*Dimostrazione.* l'ortonormalità è definita dalle due condizioni

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) \lambda^m d\mu(\lambda) = 0 \quad \text{con } m < n$$

$$\int_{\mathbb{R}} p_n^2(\lambda) d\mu(\lambda) = 1$$

Sfruttando la natura di mappa multilineare del determinante abbiamo, con  $m < n$ , il seguente

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) \lambda^m d\mu(\lambda) = \det \begin{pmatrix} & & & \int_{\lambda}^n d\mu(\lambda) \\ & & & \dots \\ & M_{n-1} & & \dots \\ \int \lambda^m d\mu(\lambda) & \dots & \dots & \int \lambda^{m+n-1} d\mu(\lambda) \\ & & & \int \lambda^{m+n} d\mu(\lambda) \end{pmatrix} = 0.$$

Sappiamo che una delle proprietà del determinante di una matrice è quella di essere identicamente nulla nel caso in cui due righe o due colonne della matrice siano identiche.

Notiamo che nella matrice sopra riportata l'ultima riga è identica alla riga  $(m+1)$ -esima. Questo si traduce dunque in un determinante  $\det(\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) \lambda^m d\mu(\lambda)) = 0$ .

La condizione di normalizzazione si scrive

$$\int_{\mathbb{R}} p_n^2(\lambda) d\mu(\lambda) = \frac{1}{D_n D_{n-1}} \int_{\mathbb{R}} D_{n-1} \lambda^n \pi_n(\lambda) d\mu(\lambda) = 1$$

□

**Lemma 3.10.** *I polinomi ortogonali (4.9) soddisfano*

$$\lambda p_0(\lambda) = a_1 p_1(\lambda) + b_1 p_0(\lambda)$$

$$\lambda p_n(\lambda) = a_{n+1} p_{n+1}(\lambda) + b_{n+1} p_n(\lambda) + a_n p_{n-1}(\lambda) \quad (3.13)$$

con

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{D_{n+1} D_{n-1}}{D_n^2}} \quad (3.14)$$

$$b_{n+1} = \frac{G_n}{D_n} - \frac{G_{n-1}}{D_{n-1}} \quad (3.15)$$

Dove  $G_{n-1}$  è il determinante della matrice ottenibile eliminando la  $(n+1)$ -esima riga e l' $n$ -esima colonna alla matrice  $D_n(\lambda)$

### 3.3 Integrabilità del sistema

Consideriamo la misura

$$d\tilde{\mu}(\lambda) = E^2(t) \sum_{j=1}^n e^{2\lambda_j t} \delta(\lambda - \lambda_j) u_{1,i}^2(0) d\lambda$$

associata al Toda Lattice con

$$E(t) = \left( \sum_{i=1}^n e^{2t\lambda_i} u_{1i}^2(0) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Sia i rapporti  $\frac{G_n}{D_n}$  che quelli  $\sqrt{\frac{D_{n+1}D_{n-1}}{D_n^2}}$ , introdotti alla fine dello scorso capitolo, sono indipendenti da  $E(t)$ . Perciò per convenienza è utile impostare  $E(t) = 1$  in quanto questo non porta ad alcuna perdita di generalità.

L'identità

$$\frac{\partial D_n}{\partial t} = 2G_n,$$

ricavabile attraverso semplici calcoli, può essere usata per riscrivere il coefficiente  $b_{n+1}$  nella seguente forma

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \log\left(\frac{D_n}{D_{n-1}}\right).$$

Quest'ultima relazione, insieme alla (3.14), permette l'integrazione dell'equazione del Toda Lattice rispetto alla misura

$$d\mu(\lambda, t) = \sum_{j=1}^n u_{1,i}^2(0) e^{2t\lambda_i} \delta(\lambda - \lambda_i) d\lambda.$$

Ci concentriamo adesso sul determinare l'evoluzione dei coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  come funzioni di  $t$ . Introduciamo il nuovo peso

$$d\mu(\lambda) = e^{2\sum_{k=1}^s \lambda^k t_k} d\tilde{\mu}(\lambda),$$

dove  $d\tilde{\mu}(\lambda)$  è indipendente dai tempi  $t_k$  con  $k = 1, \dots, s$  e  $t_1 = t$ .

Consideriamo la matrice semi-infinita tridiagonale

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & b_3 & & & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & \\ 0 & & & b_{n-1} & a_{n-1} & \dots \\ 0 & & & a_{n-1} & b_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

e il vettore infinito

$$p(\lambda) = \begin{pmatrix} p_0(\lambda) \\ p_1(\lambda) \\ p_2(\lambda) \\ \dots \\ p_n(\lambda) \\ \dots \end{pmatrix}$$

La relazione (3.13) può essere quindi riscritta in forma compatta come

$$\lambda p(\lambda) = Lp(\lambda)$$

Introduciamo a questo punto gli pseudo-polinomi

$$\psi_k(\lambda) = p_k(\lambda)e^{\sum_{k=1}^s \lambda^k t_k}.$$

Dall'ortonormalità dei polinomi  $p_k(\lambda)$  segue che

$$\int_{\mathfrak{R}} \psi_k(\lambda)\psi_j(\lambda)d\tilde{\mu}(\lambda) = \delta_{kj}. \quad (3.16)$$

Studiamo la dipendenza temporale di  $\psi_k$  attraverso il seguente

**Lemma 3.11.** *La relazione*

$$\frac{\partial \psi_j(\lambda)}{\partial t_\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} (A_\alpha)_{jm} \psi_m(\lambda)$$

con  $\alpha = 1, \dots, s$  e  $A_\alpha$  matrice antisimmetrica è soddisfatta

*Dimostrazione.* Differenziamo la relazione (3.16) rispetto a  $t_\alpha$

$$\int_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \psi_k(\lambda)}{\partial t_\alpha} \psi_j(\lambda) d\tilde{\mu}(\lambda) + \int_{\mathfrak{R}} \psi_k(\lambda) \frac{\partial \psi_j(\lambda)}{\partial t_\alpha} d\tilde{\mu}(\lambda) = 0$$

per cui

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} \sum_m (A_\alpha)_{jm} \psi_m(\lambda) \psi_k(\lambda) d\tilde{\mu}(\lambda) + (A_\alpha)_{km} \psi_m(\lambda) \psi_j(\lambda) d\tilde{\mu}(\lambda) \\ = (A_\alpha)_{jk} + (A_\alpha)_{kj} = 0 \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.12.** *La relazione*

$$A_\alpha = (L^\alpha)_+ - (L^\alpha)_-, \quad \alpha = 1, \dots, s$$

con  $(L^\alpha)_\pm$  parte triangolare superiore/inferiore di  $L^\alpha$  è verificata.

**Lemma 3.13.** *La matrice semi infinita  $L$  soddisfa l'equazione di Lax*

$$\frac{dL}{dt_\alpha} = [A_\alpha, L]$$

con  $\alpha = 1, \dots, s$ .

*Dimostrazione.* deriviamo rispetto a  $t_\alpha$  la relazione  $\lambda p(\lambda) = Lp(\lambda)$  ottenendo

$$\frac{dL}{dt_\alpha} \phi + (L - \lambda) \frac{d\phi}{dt_\alpha} = 0$$

dove  $\phi(\lambda) = p(\lambda) e^{\sum_{k=1}^s t_k \lambda^k}$  Usando il lemma 3.11 otteniamo

$$\frac{dL}{dt_\alpha} \phi + (L - \lambda) A_\alpha \phi = \left( \frac{dL}{dt_\alpha} - [A_\alpha, L] \right) \phi = 0$$

che unito alla completezza di  $\phi$  prova il teorema.  $\square$

Siano  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  gli zeri del polinomio  $p_n(\lambda)$ , allora la versione compatta di (4.12)  $\lambda p(\lambda) = Lp(\lambda)$  assume la forma

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\lambda_j) \\ p_1(\lambda_j) \\ p_2(\lambda_j) \\ \dots \\ p_{n-2}(\lambda_j) \\ p_{n-1}(\lambda_j) \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} p_0(\lambda_j) \\ p_1(\lambda_j) \\ p_2(\lambda_j) \\ \dots \\ p_{n-2}(\lambda_j) \\ p_{n-1}(\lambda_j) \end{pmatrix}.$$

Una conseguenza di quanto appena detto è che gli zeri di  $p_n(\lambda)$  sono gli autovalori di  $L$  definiti in (4.5), distinti e reali.

L'autovettore relativo all'autovalore  $\lambda_j$  è dato da  $(p_0(\lambda_j), \dots, p_{n-1}(\lambda_j))^t$ .

**Lemma 3.14.** *Due zeri del polinomio  $p_n(\lambda)$  sono tali che tra essi si trovi esattamente uno zero di  $p_{n-1}(\lambda)$ .*

### 3.4 Un esempio applicativo

Per comprendere meglio il funzionamento del processo descritto nel presente capitolo consideriamo una catena di Toda composta da solo tre punti  $q_1, q_2, q_3$ . Troviamo dunque l'hamiltoniana del sistema nella forma

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + \sum_{i=1}^2 e^{q_i - q_{i+1}}.$$

con equazioni di Hamilton

$$\dot{q}_k = p_k \quad k = 1, 2, 3$$

$$\dot{p}_k = \begin{cases} -e^{q_1 - q_2} & k = 1 \\ e^{q_1 - q_2} - e^{q_2 - q_3} & k = 2 \\ e^{q_2 - q_3} & k = 3 \end{cases}$$

Introduciamo le variabili di Flaschka e scriviamo le matrici L ed A:

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p_1 & \frac{1}{2}e^{\frac{q_1 - q_2}{2}} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{\frac{q_1 - q_2}{2}} & -\frac{1}{2}p_2 & \frac{1}{2}e^{\frac{q_2 - q_3}{2}} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{q_2 - q_3}{2}} & -\frac{1}{2}p_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{q_1 - q_2}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{q_1 - q_2}{2}} & 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{q_2 - q_3}{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2}e^{\frac{q_2 - q_3}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto detto nella sezione 3.2 possiamo già ricavare delle quantità conservate, in particolare

$$H_k = \frac{4}{k+1} Tr(L^{k+1}), \quad k = 0, 1, 2$$

ovvero

$$H_1 = -2(p_1 + p_2 + p_3)$$

$$H_2 = 2\left(\frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{4}p_2^2 + \frac{1}{4}p_3^2 + \frac{1}{2}e^{q_1 - q_2} + \frac{1}{2}e^{q_2 - q_3}\right) = H$$

$$H_3 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 p_i^4 + \frac{1}{6}(e^{q_1 - q_3} + e^{2q_1 - 2q_2} + e^{2q_2 - 2q_3} + e^{q_1 - q_2} e^{q_2 - q_3}) +$$

$$\frac{1}{3}(p_1^2 e^{q_1 - q_2} + p_2^2 e^{q_1 - q_2} + p_2^2 e^{q_2 - q_3} + p_3^2 e^{q_2 - q_3} + p_1 p_2 e^{q_1 - q_2} + p_2 p_3 e^{q_2 - q_3})$$

Verifichiamo che queste quantità siano effettivamente integrali primi del moto attraverso l'uso della parentesi di Poisson. Sappiamo infatti che una quantità conservata commuta con l'hamiltoniana.

Verifichiamo la cosa svolgendo i calcoli. Vale

$$\{H_1, H\} = (-(-2)(e^{q_1 - q_2})) + (-(-2)(-e^{q_1 - q_2} + e^{q_2 - q_3})) + (-(-2)(-e^{q_2 - q_3}))$$

$$= 2e^{q_1 - q_2} - 2e^{q_1 - q_2} + 2e^{q_2 - q_3} - 2e^{q_2 - q_3} = 0$$

$$\{H_2, H\} = \frac{\partial H_2}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H_2}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

La verifica per  $H_3$  è analoga nel procedimento e verrà tralasciata.

# Conclusioni

Poco più di 50 anni fa, nel 1967, Morikazu Toda pubblicò un paper intitolato "Vibration of a chain with a non-linear interaction", introducendo il modello hamiltoniano basato sull'interazione multiparticellare che da lui prende il nome.

Lo sviluppo di questo sistema da un punto di vista teorico è stato graduale ma costante. Già sette anni dopo la nascita del modello di Toda, nel 1974, Flaschka e Henon erano riusciti a dimostrare l'integrabilità di una versione della catena di Toda reale, finita e periodica. Sei anni più tardi Moser dimostrò lo stesso per una versione della catena che questa volta non era più periodica. Entrambe le dimostrazioni furono una conquista raggiunta grazie allo strumento risolutivo delle coppie di Lax. Passarono circa venti anni prima che delle iniziali trattazioni su varianti nonperiodiche e complesse del sistema comparissero ad opera di Ercolani, Flaschka, e Haine.

Nei 50 anni intercorsi tra la nascita della catena di Toda e oggi, la ricerca su questo sistema si è sviluppata in maniera orizzontale, abbracciando un grande numero di campi della matematica. Interessante è la possibilità di ricostruire il modello della catena di Toda utilizzando i moderni strumenti della geometria e della topologia, grazie all'utilizzo delle varietà di Tomei.

La catena di Toda è inoltre stata utile alla trattazione di alcuni problemi di fisica teorica.

Un esempio di questo sviluppo trasversale potrebbe essere l'analisi delle correlazioni che intercorrono tra la catena di Toda e la teoria di Yang-Mills supersimmetrica: la catena di Toda chiusa finito dimensionale è stata trovata nelle soluzioni di Seiberg-Witten per la teoria 4D supersimmetrica di Y-M con  $N = 2$ . Esiste infatti una corrispondenza tra la catena di Toda  $SU(N)$  e l'approssimazione delle soluzioni della teoria  $SU(N)$  di Y-M.

In conclusione l'analisi della catena di Toda non rappresenta solo un utile primo passo nella trattazione dei sistemi integrabili, ma un'introduzione ad un campo di ricerca ancora aperto ed in continua evoluzione, capace di adattarsi a svariati ambiti del sapere matematico a partire da un modello la cui descrizione è al contempo semplice ed efficace.

# Bibliografia

- [1] "Metodi matematici della meccanica classica" V.I.Arnold
- [2] "Notes on integrable systems and Toda lattice" Tamara Grava
- [3] Andrea Crati e Luigi Galgani, <http://www.mat.unimi.it/users/carati/didattica/dispense/tensori.pdf>
- [4] "Diffeomorphism", Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001 [1994]
- [5] "An introduction to Lax pairs and the zero curvature representation" Govind S. Krishnaswami and T. R. Vishnu Chennai Mathematical Institute
- [6] Lee, John M. (2011). "Introduction to Topological Manifolds" (2nd ed.). Springer Verlag. ISBN 978-1-4419-7940-7.
- [7] "Lectures on Symplectic Geometry", Ana Cannas da Silva
- [8] A Gorsky 2018 J. Phys. A: Math. Theor. 51 303001
- [9] Yuji Kodama and Barbara A Shipman 2018 J. Phys. A: Math. Theor. 51 353001
- [10] Morikazu Toda and Kiyoshi Sogo 2018 J. Phys. A: Math. Theor. 51 060201