

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**Teoria ed esperimenti sull'entanglement  
quantistico: dal Paradosso EPR al Premio  
Nobel ad Aspect, Clauser e Zeilinger**

**Relatore:**  
**Prof. Francesco Ravanini**

**Presentata da:**  
**Erika Chinaia**

Anno Accademico 2022/2023

# Abstract

Il presente lavoro di tesi si propone di mettere in luce l'evoluzione del fenomeno dell'entanglement quantistico, a partire dalla prima formulazione fino agli sviluppi più recenti. In particolare, dopo aver brevemente descritto il fenomeno sulla base della visione di Erwin Schrödinger, si passa alla descrizione formale (sia quella proposta da Albert Einstein, sia quella proposta da David Bohm) del celebre paradosso EPR che, nel 1935, ha aperto il dibattito sulla completezza e la validità della meccanica quantistica come teoria fisica. Il lavoro prosegue poi seguendo il percorso che, dalla formulazione delle disuguaglianze di Bell nel 1964 (rivisitate poi da Clauser, Horne, Shimony e Holt nella disuguaglianza CHSH), ha portato al conferimento del Premio Nobel per la Fisica nel 2022 a John Clauser, Alain Aspect e Anton Zeilinger *“per esperimenti con fotoni entangled, stabilendo la violazione delle disuguaglianze di Bell e aprendo la strada alla scienza dell'informazione quantistica”*. Infine, in merito all'informazione quantistica, si introducono brevemente i concetti di distanza tra stati quantistici e di entropia di informazione.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduzione all'entanglement</b>	<b>5</b>
1.1 Definizione di entanglement di Schrödinger . . . . .	5
1.2 Paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen . . . . .	6
1.3 Formulazione del paradosso tramite gli spin di Bohm . . . . .	8
<b>2 Teorema di Bell e disuguaglianza CHSH</b>	<b>10</b>
2.1 Teorema di Bell . . . . .	10
2.2 Disuguaglianza CHSH . . . . .	14
<b>3 Esperimenti con fotoni entangled</b>	<b>16</b>
3.1 John Clauser . . . . .	16
3.2 Alain Aspect . . . . .	19
3.3 Anton Zeilinger . . . . .	22
3.3.1 Teletrasporto quantistico . . . . .	23
3.3.2 Introduzione all'esperimento GHZ . . . . .	29
3.3.3 Realizzazione dell'esperimento GHZ . . . . .	35
<b>Conclusioni</b>	<b>40</b>
<b>A Anelli Borromei e stato GHZ</b>	<b>41</b>
<b>B Distanza tra stati quantistici: distanza di traccia, fidelity e negativity</b>	<b>45</b>
<b>C Incertezza in uno stato quantistico: entropia di informazione</b>	<b>48</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>

# Introduzione

La nascita della teoria dei quanti risale al XX secolo che è scandito da due rivoluzioni: la “Prima Rivoluzione Quantistica” del 1927 e la “Seconda Rivoluzione Quantistica” del 1935.

L’anno della “Prima Rivoluzione Quantistica” corrisponde all’anno del quinto Congresso Solvay dedicato alla fisica di elettroni e fotoni; erano già stati realizzati, infatti, i primi esperimenti di interferenza in cui la luce mostrava un comportamento “dualistico” tipico sia di una particella, sia di un’onda. L’idea di questo dualismo si estese anche alle particelle materiali grazie ad un’ipotesi avanzata da Louis De Broglie. Nel frattempo Werner Karl Heisenberg formulò il famoso “Principio di Indeterminazione” e grazie a Niels Bohr si diffuse la cosiddetta “Interpretazione di Copenaghen” della meccanica quantistica basata su due aspetti fondamentali: l’impossibilità di determinare lo stato preciso e il comportamento di un sistema quantistico (quindi ad esempio di una particella) prima di effettuare una misura (a causa del dualismo), e il collasso della funzione d’onda a causa di una misurazione. Proprio l’indeterminazione che caratterizzava la meccanica quantistica portò Albert Einstein a ritenere che questa nascente teoria basata sulla probabilità e non sul determinismo non fosse completa; da qui la celebre frase attribuitagli: “Dio non gioca a dadi col mondo”.

Uno dei fenomeni della meccanica quantistica, che non aveva corrispettivo classico e che portò Einstein alla pubblicazione dell’articolo in cui è contenuto il celebre “Paradosso EPR”, è l’entanglement. Il termine venne utilizzato per la prima volta da Erwin Schrödinger che sosteneva che *“quando due sistemi, dei quali conosciamo gli stati sulla base della loro rispettiva rappresentazione, entrano in una interazione fisica temporanea dovuta a forze note che agiscono tra di loro, e quando, dopo un certo periodo di mutua interazione, i sistemi si separano nuovamente, non possono più essere descritti come prima dell’interazione, cioè dotando ognuno di una propria rappresentazione. Non chiamerei questo un tratto, ma il tratto distintivo della meccanica quantistica, quello che rafforza il suo completo allontanamento dalle linee classiche di pensiero”*[1]. L’anno della “Seconda Rivoluzione Quantistica” è proprio l’anno in cui Schrödinger diede questa definizione e Einstein formulò il “Paradosso EPR”. Per risolvere il paradosso Einstein ipotizzò una teoria quantistica basata su variabili nascoste che potessero dare una spiegazione a quei fenomeni che andavano contro il determinismo e la località della fisica classica, come

l'entanglement.

Nel 1964 John Stewart Bell, grazie alle sue disuguaglianze, dimostrò che la meccanica quantistica non può essere descritta da variabili nascoste aggiuntive e che, se la teoria dei quanti è vera, allora non possono sussistere il determinismo e la località. Dal 1964 in poi si susseguirono una serie di esperimenti volti a verificare concretamente le disuguaglianze di Bell, a confutare la teoria a variabili nascoste e a studiare tutte le possibili applicazioni di una teoria così complessa. In questa tesi si vuole dare una visione generale del percorso storico citato.

Nel Capitolo 1 si propone in maniera più ampia la visione di Schrödinger circa il fenomeno dell'entanglement e si presenta il "Paradosso EPR" formulato da Einstein, Podolsky e Rosen riportandone sia la dimostrazione originale, sia la versione semplificata formulata da Bohm attraverso gli spin.

Nel Capitolo 2 vengono trattate le disuguaglianze di Bell, sia nella forma teorica originale proposta dal fisico stesso, sia nella versione applicabile agli esperimenti di Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH).

Nel Capitolo 3 si presentano alcuni esperimenti basati sull'entanglement tra particelle (principalmente fotoni): i primi due esperimenti trattati sono quelli di Clauser e Aspect volti a verificare le disuguaglianze di Bell e quindi la validità della meccanica quantistica (gli esperimenti descritti sono quelli che hanno portato i due fisici alla vittoria del Premio Nobel nel 2022); gli altri due esperimenti descritti sono stati svolti entrambi da Zeilinger e hanno per oggetto il teletrasporto quantistico (esperimento valso il Premio Nobel per la Fisica sempre nel 2022) e lo stato entangled GHZ.

Infine, nell'appendice, si introducono i concetti di distanza tra stati quantistici e di incertezza ad essi associata, rispettivamente in termini di informazione e di entropia di informazione, e si illustra una peculiarità dello stato GHZ introdotto nel Capitolo 3.

# Capitolo 1

## Introduzione all'entanglement

Uno dei temi più caldi della nascente meccanica quantistica che si è sviluppato a partire dal XX secolo è l'entanglement. Questo particolare fenomeno, menzionato per la prima volta da Erwin Schrödinger, portò Einstein ad affermare che la meccanica quantistica fosse una teoria incompleta e quindi incapace di descrivere un sistema fisico.

### 1.1 Definizione di entanglement di Schrödinger

*“Se due corpi separati, ognuno dei quali conosciuto in modo massimale, entrano in una situazione in cui si influenzano a vicenda, e si separano di nuovo, allora accade in modo regolare quello che ho appena definito entanglement della nostra conoscenza dei due corpi.”* [2]

Questa è la definizione che il noto fisico austriaco Erwin Schrödinger propone del fenomeno dell'entanglement nell'articolo del 1935, anche conosciuto come *“The cat paradox paper”* in onore del famoso paradosso. Nell'articolo, partendo dalla meccanica classica e dalla definizione di variabili coniugate, viene proposto un excursus sulla teoria della meccanica quantistica, dalle prime formulazioni all'allora situazione attuale (1935, anno di pubblicazione). In particolare si pone l'evidenza sul fatto che le variabili quantistiche, a differenza di quelle classiche, sono soggette al *Principio di indeterminazione di Heisenberg*: le variabili che descrivono un sistema quantistico non possono essere misurate simultaneamente con precisione assoluta a meno che gli operatori che le rappresentano non commutino. Questo allontana in maniera evidente la meccanica quantistica dal ben noto determinismo che contraddistingue la meccanica classica. Mentre è possibile misurare con precisione il valore degli osservabili classici (ad esempio velocità e posizione di un corpo), che si ripresentano sempre uguali a se stessi se il sistema è realizzato allo stesso modo e nelle stesse condizioni prima di ogni esperimento, per gli osservabili quantistici ciò non è possibile. Un sistema quantistico infatti, è definito da un vettore d'onda  $|\psi\rangle$ , sovrapposizione di tutti i possibili stati in cui può trovarsi, che collassa a seguito di una

misurazione definendo il valore dell'osservabile misurato. In questo caso però, ripetendo più volte la misurazione sul sistema (preparato sempre nello stesso modo e nelle stesse condizioni come nel caso classico), il vettore d'onda può collassare su uno stato diverso dal precedente con una certa probabilità, mostrando così la natura non deterministica della teoria quantistica.

L'entanglement è un particolare fenomeno della meccanica quantistica, che non trova alcun riscontro nella teoria classica, e che prevede un "collegamento" tra due sistemi, creati in maniera opportuna, che non interagiscono più tra loro. Dati due sistemi,  $S_1$  descritto dalle variabili  $a, b$  e  $S_2$  descritto dalle variabili  $A, B$ , allora è possibile conoscere il valore di  $A$  o quello di  $B$  senza disturbare il secondo sistema, effettuando una misura di  $a$  o  $b$  rispettivamente sul sistema  $S_1$ . Si ponga attenzione sul fatto che non è possibile misurare  $a$  e  $b$  contemporaneamente con precisione e che una volta conosciuta  $a$  (o  $b$ ), non si può determinare anche il valore di  $b$  (o  $a$ ).

## 1.2 Paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen

Il rifiuto di Einstein verso l'ipotesi del fenomeno dell'entanglement era sostanzialmente dovuto al fatto che questo portasse all'apparente violazione di uno dei principi base della relatività ristretta, ovvero che la velocità della luce  $c$ , costante universale e indipendente dalla scelta del sistema di riferimento, è la massima velocità con cui può propagarsi l'informazione. Dal momento che l'entanglement prevede una reazione istantanea da parte di uno dei due sistemi quando il gemello viene disturbato, questo principio, anche noto come *Principio di località*, non è rispettato. Nel famoso articolo del 1935 [3] pubblicato da Albert Einstein insieme a Boris Podolsky e Nathan Rosen, (articolo in cui viene proposto il *Paradosso EPR*), vengono formulati il *Principio di realtà* e il *Principio di completezza*.

**Principio di realtà.** *Se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo predire con certezza (con probabilità uguale all'unità) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento della realtà fisica che corrisponde a questa quantità.*

**Principio di completezza.** *Ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica.*

Quello che Einstein, Podolsky e Rosen sostengono è che, se due quantità descritte da operatori non commutanti non possono essere misurate contemporaneamente, allora, o la descrizione della realtà data dalla funzione d'onda in meccanica quantistica è incompleta, o due quantità fisiche come la posizione e la quantità di moto non possono avere realtà simultanea. Quest'ultima affermazione, però, entra in contrasto con il *Principio di completezza* poiché, se la meccanica quantistica fosse completa, allora sia la posizione che la quantità di moto dovrebbero rientrare nella descrizione che la funzione d'onda fornisce

della realtà, ma per quanto affermato dal *Principio di indeterminazione di Heisenberg* ciò non avviene (infatti non è possibile misurare contemporaneamente le due grandezze citate). In particolare, ciò che viene dimostrato è che, due quantità fisiche descritte da operatori che non commutano tra di loro possono avere realtà simultanea (cosa proibita dalla meccanica quantistica) risolvendo il paradosso grazie alla *Teoria delle variabili nascoste*: la formulazione della meccanica quantistica è incompleta, mancano delle variabili (dette nascoste perché non ancora scoperte in quel periodo) che possano conciliarla con i principi formulati sopra. Più tardi, nel 1964, il fisico britannico John Stewart Bell dimostrerà che, se la meccanica quantistica è corretta, nessuna variabile nascosta può evitare la non località e il conflitto con gli altri due principi.

La trattazione esposta nell'articolo da Einstein, Podolsky e Rosen è la seguente: si supponga di avere due sistemi indicati con  $S_1$  e  $S_2$  che interagiscono tra di loro nell'intervallo temporale  $t = 0$  e  $t = T$ ; prima di  $t = 0$  si conoscono gli stati dei due sistemi e dopo  $t = T$  non c'è più interazione. Sia  $\psi$  la funzione d'onda che descrive lo stato congiunto dei sistemi per ogni tempo  $t > T$ . Allora, dati  $a_1, a_2, a_3 \dots$  gli autovalori di una certa grandezza fisica  $A$  del sistema  $S_1$  e  $u_1(x_1), u_2(x_2), u_3(x_3) \dots$  le corrispondenti autofunzioni,  $\psi$  può essere espressa come:

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1) \quad (1.1)$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono le variabili che descrivono rispettivamente  $S_1$  e  $S_2$ . A seguito di una misurazione della grandezza  $A$  con esito  $a_k$ , il sistema  $S_1$  si trova in uno stato descritto dalla funzione  $u_k(x_1)$  e il secondo sistema nello stato descritto da  $\psi_k(x_2)$ . In generale quindi la (1.1) si può esprimere nella forma più semplice:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_k(x_2) u_k(x_1). \quad (1.2)$$

Un ragionamento analogo a quello appena descritto è valido se al posto della grandezza  $A$  si considera la grandezza  $B$  appartenente al sistema  $S_1$  con autovalori  $b_1, b_2, b_3 \dots$  e autofunzioni  $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1) \dots$ . In questo caso lo stato dopo  $t > T$  sarebbe dato dalla seguente espressione:

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x_2) v_j(x_1). \quad (1.3)$$

Quindi, dopo la misurazione di due grandezze differenti, il sistema  $S_2$  può trovarsi in due stati differenti, descritti dalle funzioni  $\psi_k(x_2)$  (se misurando  $A$  si ottiene un valore  $a_k$ ) e  $\phi_j(x_2)$  (se misurando  $B$  si ottiene un valore  $b_j$ ). Dal momento che, per un qualsiasi istante  $t > T$ , i due sistemi non sono più in interazione tra di loro, nessuna misurazione effettuata su  $S_1$  può realmente influenzare il sistema  $S_2$ ; pertanto  $\psi_k(x_2)$  e  $\phi_j(x_2)$  sono funzioni di stati differenti appartenenti alla stessa realtà fisica. Si supponga che  $\psi_k(x_2)$  e  $\phi_j(x_2)$



siano le autofunzioni di due operatori, rispettivamente  $P$  e  $Q$ , non commutanti tra loro ( $PQ - QP \neq 0$ ) e che  $p_k$  e  $q_j$  siano i rispettivi autovalori. In questo caso, identificando  $P$  con la grandezza fisica quantità di moto e  $Q$  con la grandezza fisica posizione, è possibile dimostrare, seguendo il ragionamento esposto in precedenza, che, nonostante posizione e quantità di moto non possano essere misurate simultaneamente, entrambe appartengono alla realtà fisica del sistema  $S_2$ , poiché è possibile identificarne con certezza il valore semplicemente effettuando misurazioni sul sistema  $S_1$  senza disturbare  $S_2$ .

Tra le altre formulazioni del paradosso EPR, quella più famosa e di più semplice comprensione è quella di David Bohm [4] che, al posto di prendere in considerazione posizione e quantità di moto, utilizza solamente lo spin delle particelle.

### 1.3 Formulazione del paradosso tramite gli spin di Bohm

Si consideri il decadimento di un pione in una coppia particella e antiparticella, in particolare il seguente decadimento di un pione neutro in un elettrone e un positrone:

$$\pi^0 \longrightarrow e^- + e^+. \quad (1.4)$$

La conservazione del momento angolare comporta che la coppia formata da particella e antiparticella abbia momento angolare di spin pari a zero; elettrone e positrone si trovano in uno stato di singoletto dato dalla seguente espressione:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (1.5)$$

Infatti, per le regole di somma dei momenti angolari, dal momento che il pione si può considerare a riposo (momento angolare orbitale  $l = 0$ ) e che il suo spin (calcolato convenzionalmente lungo la direzione  $z$ ) è  $S_z = 0$ , allora la coppia  $e^-e^+$  deve trovarsi in uno stato tale da avere componenti di spin opposte; se, a seguito di una misura, l'elettrone ha spin su, allora il positrone deve avere spin giù e viceversa. Secondo l'*Interpretazione di Copenaghen* della meccanica quantistica, nel momento in cui viene effettuata una misurazione, la funzione d'onda descritta nella (1.5) collassa istantaneamente in una delle due possibilità, facendo sì che la "caratteristica" dell'elettrone di avere spin su, si rifletta immediatamente e senza alcun dubbio nella "caratteristica" del positrone di avere spin giù, come se elettrone e positrone comunicassero tra di loro. Quest'ultimo aspetto entra, in maniera evidente, in contrasto con il *Principio di località* poiché prevede un'informazione che si propaga in modo immediato a velocità apparentemente superiori a quelle della luce traducendosi in una "sinistra azione a distanza" (espressione utilizzata da Einstein per riferirsi all'entanglement) in disaccordo con la relatività. Per questo motivo secondo Einstein, Podolsky e Rosen, lo spin (nella formulazione appena esposta),

la posizione e la quantità di moto (nella formulazione originale del paradosso EPR) sono da considerarsi elementi della realtà fisica e costituiscono qualcosa di posseduto da elettrone e positrone sin dal momento in cui vengono creati. È da escludersi l'ipotesi per cui il collasso della  $|\psi\rangle$  sia un evento con velocità finita poiché questo comporterebbe la non conservazione del momento angolare durante l'ipotetico percorso dell'informazione da elettrone a positrone.

In realtà, è risaputo che il processo descritto non è in alcun modo in contrasto con le leggi della relatività poiché l'informazione è comunque trasmessa classicamente. Per dare una dimostrazione di questa affermazione si tenga a mente la seguente descrizione semplificata del fenomeno dell'entanglement: si considerino due amici, Alice ( $A$ ) e Bob ( $B$ ) ai quali in un certo momento viene data una coppia di particelle (una particella ad Alice e una a Bob) in entanglement tra di loro;  $A$  e  $B$  vengono poi separati ad una certa distanza (i due amici possono anche trovarsi agli estremi dell'universo). Secondo quanto affermato in precedenza nella descrizione di Bohm, se  $A$  misurasse lo spin della sua particella trovando spin su, allora la particella  $B$  avrebbe sicuramente spin giù. Quello che risulta evidente è che Alice non potrebbe suggerire a Bob l'esito della sua misurazione se non attraverso mezzi classici, e quindi non in maniera istantanea come invece accade per il meccanismo di collasso della funzione d'onda. Si può quindi affermare che quello che viene "trasportato" a causa dell'entanglement non è informazione nella concezione classica del termine, ma è qualcosa collegato al collasso della  $|\psi\rangle$ .

# Capitolo 2

## Teorema di Bell e disuguaglianza CHSH

### 2.1 Teorema di Bell

Nell'articolo del 1964 [5] Bell riprende l'ipotesi di una formulazione della meccanica quantistica attraverso le variabili nascoste, suggerita nell'articolo EPR circa 30 anni prima, dimostrando tramite l'omonima disuguaglianza che ciò è impossibile.

Rispetto all'esperimento suggerito da Bohm, Bell immagina di non misurare gli spin lungo una direzione prestabilita, ma di lasciar ruotare i rilevatori di  $e^-$  ed  $e^+$  in maniera indipendente.

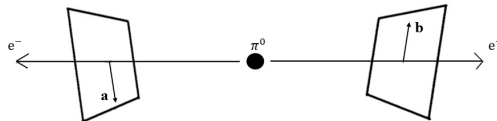


Figura 2.1: *Rappresentazione dell'apparato sperimentale immaginato da Bell con i rilevatori rotanti.*

Come mostrato in figura 2.1, le misure dei due spin vengono effettuate in direzioni diverse, contrassegnate dai versori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Secondo le previsioni della meccanica quantistica, esprimendo gli spin in unità di  $\hbar/2$  e quindi registrando per le varie misure un valore di  $+1$  o  $-1$  rispettivamente per spin su e spin giù, per orientazioni arbitrarie dei detector il valore medio del prodotto degli spin deve essere dato da:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (2.1)$$

*Dimostrazione.* Si considerino due particelle di spin  $1/2$  nella configurazione di singoletto (1.5). Siano  $S_a^1$  e  $S_b^2$  le componenti dello spin delle due particelle rispettivamente lungo

le direzioni  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  e sia  $\theta$  l'angolo tra di esse. Quello che si vuole dimostrare è che:

$$\langle S_a^1 S_b^2 \rangle = \frac{-\hbar^2 \cos \theta}{4} = -\frac{\hbar^2}{4} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (2.2)$$

Per comodità si consideri  $\mathbf{a}$  lungo l'asse  $z$  e  $\mathbf{b}$  nel piano  $xz$ ; allora  $S_b^2$  può essere scomposto come segue:

$$S_b^2 = S_z^2 \cos \theta + S_x^2 \sin \theta. \quad (2.3)$$

Dal momento che  $\langle S_a^1 S_b^2 \rangle = \langle 00 | S_a^1 S_b^2 | 00 \rangle$ , si ha:

$$\begin{aligned} S_a^1 S_b^2 |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ S_z^1 \left( \cos \theta S_z^2 + \sin \theta S_x^2 \right) \right] \left( |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( S_z |\uparrow\rangle \right) \left( \cos \theta S_z |\downarrow\rangle + \sin \theta S_x |\downarrow\rangle \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( S_z |\downarrow\rangle \right) \left( \cos \theta S_z |\uparrow\rangle + \sin \theta S_x |\uparrow\rangle \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left( \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle \right) \left[ \cos \theta \left( \frac{-\hbar}{2} |\downarrow\rangle \right) + \sin \theta \left( \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{-\hbar}{2} |\downarrow\rangle \right) \left[ \cos \theta \left( \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle \right) + \sin \theta \left( \frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle \right) \right] \right\} \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \left[ \cos \theta \frac{(-|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{2}} + \sin \theta \frac{(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \left[ -\cos \theta |00\rangle + \sin \theta \frac{(|11\rangle + |1-1\rangle)}{\sqrt{2}} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove  $|11\rangle$  e  $|1-1\rangle$  corrispondono rispettivamente agli stati di tripletto  $|\uparrow\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\downarrow\rangle$ . L'altra parte del prodotto bra-ket è data da:

$$\begin{aligned} \langle S_a^1 S_b^2 \rangle &= \frac{\hbar^2}{4} \langle 00 | \left[ -\cos \theta |00\rangle + \sin \theta \frac{(|11\rangle + |1-1\rangle)}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{-\hbar^2 \cos \theta}{4} \langle 00 | 00 \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nei calcoli sono stati utilizzati gli spinori

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

e l'operatore  $S_z$  definito come

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

□

Quello che Bell dimostra è che la (2.1) è incompatibile con una teoria che prevede l'esistenza di variabili nascoste. Nel seguito si riportano i passaggi e i ragionamenti semplificati che portano alla celebre disuguaglianza di Bell [6].

Supponendo che lo stato di singoletto della coppia  $e^-e^+$  sia descritto dalla variabile (nascosta)  $\lambda$  e che la misura dello spin dell'elettrone sia indipendente dalla direzione in cui è orientato il rivelatore del positrone, allora devono esistere delle funzioni  $A(\mathbf{a}, \lambda)$  e  $B(\mathbf{b}, \lambda)$ , che indicano rispettivamente il risultato della misura effettuata sull'elettrone e il risultato della misura effettuata sul positrone, tali per cui  $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1$  e  $B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$ . Se i rivelatori sono allineati allora i risultati sono correlati tra di loro tramite la seguente espressione:

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{a}, \lambda). \quad (2.8)$$

La media del prodotto delle due misure può essere espressa come:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) d\lambda \quad (2.9)$$

dove  $\rho(\lambda)$  rappresenta la densità di probabilità per la variabile nascosta ed è una quantità non negativa. Presa in considerazione la (2.8), si può riscrivere la (2.9) considerando solo la dipendenza dalla misura sull'elettrone:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) d\lambda. \quad (2.10)$$

Considerando un altro versore differente da  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  e indicandolo con  $\mathbf{c}$ , allora si può scrivere:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda) [A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] d\lambda \quad (2.11)$$

dove si è voluto esprimere la differenza tra la media del prodotto delle misure effettuate lungo le direzioni  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  e la media del prodotto delle misure lungo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{c}$ . Tenendo a mente che  $[A(\mathbf{b}, \lambda)]^2 = +1$ , si ottiene:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) d\lambda. \quad (2.12)$$

Dal momento che i risultati delle misure di spin possono avere valori solamente pari a  $\pm 1$ , e che la  $\rho(\lambda)$  è una quantità non negativa, è possibile esplicitare queste due affermazioni (per poi usarle in (2.12)) come segue:

$$\begin{cases} -1 \leq [A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda)] \leq +1 \\ \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] \geq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

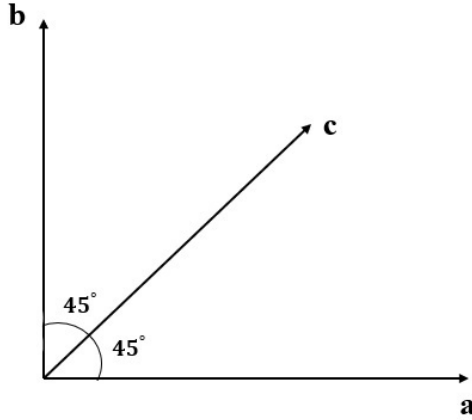


Figura 2.2: Rappresentazione della disposizione dei tre vettori considerati nell'esempio.

Quindi, la (2.12) può essere riscritta come

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int \rho(\lambda)[1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)]d\lambda, \quad (2.14)$$

oppure:

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (2.15)$$

Per chiarire quanto appena detto è utile fare un esempio: si considerino i tre vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  sullo stesso piano come indicato in figura 2.2. Allora secondo la meccanica quantistica si deve avere

$$\begin{cases} P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \\ P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \quad (2.16)$$

che risulta in disaccordo con la disuguaglianza di Bell, che in questo caso diventa

$$0.707 = \frac{\sqrt{2}}{2} \not\leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.293. \quad (2.17)$$

L'equazione (2.15) rappresenta la formulazione della disuguaglianza di Bell. In particolare, se questa disuguaglianza viene confermata sperimentalmente, ciò significa che il *Principio di località* discusso nell'articolo del paradosso EPR è corretto e che quindi la meccanica quantistica è una teoria errata; la violazione di tale disuguaglianza conferma invece l'inesattezza del *Principio di località*, a favore della meccanica quantistica. È importante sottolineare che la violazione della 2.15, è una condizione necessaria, ma non sufficiente per poter affermare che la meccanica quantistica sia una teoria completamente valida. Esperimenti successivi alla pubblicazione dell'articolo di Bell, portarono alla violazione della disuguaglianza a favore della meccanica quantistica anche con scarti molto superiori alle 5 deviazioni standard, escludendo così definitivamente l'ipotesi di una teoria a variabili nascoste.

## 2.2 Disuguaglianza CHSH

Sebbene la teoria proposta da Bell (ed illustrata nel paragrafo 2.1) fosse la prima vera e propria dimostrazione dell'inefficacia di una teoria della meccanica quantistica basata su variabili nascoste, lo era solo da un punto di vista teorico. Bell infatti, ipotizza la perfetta correlazione tra i parametri presi in considerazione durante la misurazione, rendendo così difficile l'applicazione della disuguaglianza ad esperimenti reali. Nel 1969 John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony e Richard A. Holt pubblicano un articolo in cui propongono una formulazione verificabile sperimentalmente della disuguaglianza di Bell (detta anche disuguaglianza CHSH dai nomi degli autori) [7].

Si supponga di avere un insieme di coppie di particelle correlate che si muovono verso due polarizzatori indicati con  $K_a$  e  $K_b$ , dove  $a$  e  $b$  sono parametri modificabili dei due apparati. Siano  $A(a) = \pm 1$  e  $B(b) = \pm 1$  i risultati delle misure dei rilevatori posti dietro ai polarizzatori (+1 se la particella è emersa dal polarizzatore e  $-1$  altrimenti). Supponendo che sia valida una teoria a variabili nascoste e indicata con  $\lambda$  tale variabile allora, come già visto in precedenza, è possibile definire la media del prodotto delle misure:

$$P(a, b) = \int_{\Gamma} A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \quad (2.18)$$

con  $\Gamma$  spazio totale della variabile nascosta  $\lambda$ . Allora si ha che:

$$\begin{aligned} |P(a, b) - P(a, c)| &\leq \int_{\Gamma} |A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(a, \lambda)B(c, \lambda)|\rho(\lambda)d\lambda \\ &= \int_{\Gamma} |A(a, \lambda)B(b, \lambda)[1 - B(b, \lambda)B(c, \lambda)]|\rho(\lambda)d\lambda \\ &= \int_{\Gamma} [1 - B(b, \lambda)B(c, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda \\ &= 1 - \int_{\Gamma} B(b, \lambda)B(c, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Si consideri inoltre una correlazione non perfetta come quella considerata da Bell, ma del tipo  $P(b', b) = 1 - \delta$  con  $0 \leq \delta \leq 1$ , dove  $\delta = 0$  solo negli esperimenti ideali. Dividendo lo spazio  $\Gamma$  in  $\Gamma_{\pm}$  tale per cui  $\Gamma_{\pm} = \{\lambda \mid A(b', \lambda) = \pm B(b, \lambda)\}$  e  $\int_{\Gamma_{\pm}} \rho(\lambda)d\lambda = \delta/2$  si trova:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} B(b, \lambda)B(c, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda &= \int_{\Gamma} A(b', \lambda)B(c, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda - 2 \int_{\Gamma_-} A(b', \lambda)B(c, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \\ &\geq P(b', c) - 2 \int_{\Gamma_-} |A(b', \lambda)B(c, \lambda)|\rho(\lambda)d\lambda \\ &= P(b', c) - \delta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Da qui segue che:

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq 2 - P(b', b) - P(b', c). \quad (2.21)$$

Questa espressione può anche essere riscritta definendo  $\alpha \equiv b - a$ ,  $\beta \equiv c - b$ ,  $\gamma \equiv b - b'$  (angoli relativi tra le direzioni dei polarizzatori), nel seguente modo:

$$|P(\alpha) - P(\alpha + \beta)| \leq 2 - P(\gamma) - P(\beta + \gamma). \quad (2.22)$$

Per poter applicare le disuguaglianze (2.21) e (2.22) è utile introdurre il parametro  $R(a, b)$ , che rappresenta il tasso di rivelazione delle coincidenze proporzionale a  $w[A(a)_\pm, B(b)_\pm]$  (probabilità che  $A(a) = \pm 1$  e  $B(b) = \pm 1$ ), e tener conto anche del caso in cui l'esperimento viene svolto togliendo uno dei due polarizzatori ( $A(\infty) = +1$  o  $B(\infty) = +1$ ). In questo modo è possibile riscrivere la disuguaglianza CHSH:

$$|R(\alpha) - R(\alpha + \beta)| + R(\gamma) + R(\beta + \gamma) - R_1 - R_2 \leq 0 \quad (2.23)$$

dove  $R_1$  e  $R_2$  sono due costanti. Per arrivare a questo risultato applicabile sperimentalmente si utilizzano le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} P(a, b) &= w[A(a)_+, B(b)_+] - w[A(a)_+, B(b)_-] - w[A(a)_-, B(b)_+] + w[A(a)_-, B(b)_-], \\ w[A(a)_+, B(\infty)_+] &= w[A(a)_+, B(b)_+] + w[A(a)_+, B(b)_-], \\ w[A(\infty)_+, B(b)_+] &= w[A(a)_+, B(b)_+] + w[A(a)_-, B(b)_+], \\ w[A(\infty)_+, B(\infty)_+] &= w[A(a)_+, B(b)_+] + w[A(a)_-, B(b)_-]. \end{aligned} \quad (2.24)$$



## Capitolo 3

# Esperimenti con fotoni entangled

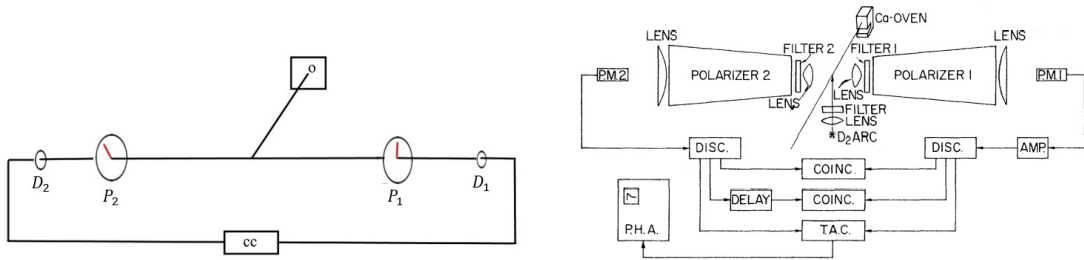
Sono numerosi gli esperimenti effettuati nel corso degli anni per verificare la violazione della disuguaglianza di Bell e quindi dimostrare la validità della teoria della meccanica quantistica senza l'utilizzo di variabili nascoste. In questo capitolo verranno illustrati i tre che hanno portato John Francis Clauser (fisico statunitense), Alain Aspect (fisico francese) e Anton Zeilinger (fisico austriaco) alla vittoria del Premio Nobel per la Fisica nel 2022 *“per esperimenti con i fotoni entangled, stabilendo la violazione delle disuguaglianze di Bell e aprendo la strada alla scienza dell'informazione quantistica.”* Inoltre verrà illustrato anche un esperimento di Anton Zeilinger riguardante l'entanglement tra tre fotoni (stati GHZ).

### 3.1 John Clauser

Nel 1972 Clauser e Freedman (al tempo studente seguito da Commins) pubblicano i risultati dell'esperimento proposto nell'articolo CHSH che prevede un miglioramento di quello realizzato precedentemente da Kocher e Commins (di cui viene data una breve descrizione sempre nell'articolo della disuguaglianza CHSH) [8]. L'esperimento KC originale prevedeva l'utilizzo di fotoni correlati prodotti con il metodo a cascata (eccitazione di atomi di calcio con conseguente emissione di fotoni durante il processo di diseccitazione) e l'utilizzo di polarizzatori con orientazioni relative di  $0^\circ$  e  $90^\circ$  che limitava l'applicazione della (2.23). Il miglioramento apportato rispetto al lavoro di Kocher e Commins consiste nell'utilizzo di polarizzatori orientati ad angoli differenti (non solo a  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ) e nell'osservazione senza uno dei due polarizzatori e senza nessuno dei due. Le assunzioni di base per l'esperimento sono le seguenti:

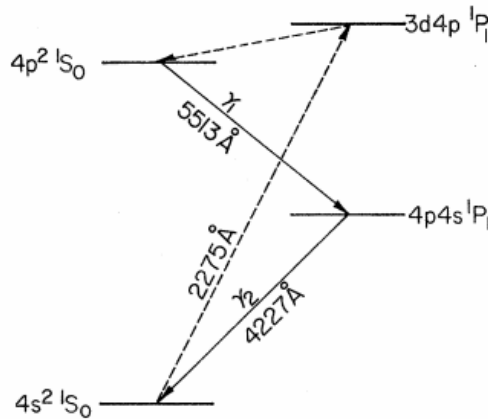
1. i due fotoni si muovono come particelle separate localizzate;
2. avviene un processo di selezione binaria per ogni fotone che arriva al proprio polarizzatore (il fotone viene o non viene trasmesso);

3. la selezione non dipende dall'orientazione dell'altro polarizzatore a distanza;
4. tutti i fotoni incidenti sul rivelatore hanno una probabilità di essere effettivamente rilevati che è indipendente dal fatto che il fotone sia passato o meno attraverso il polarizzatore.



(a) Schema semplificato dell'apparato sperimentale realizzato da Clauser e Freedman.

(b) Schema originale dell'apparato sperimentale riportato nell'articolo del 1972 di Clauser e Freedman [8].



(c) Schema della produzione di fotoni entangled con il metodo a cascata. Gli elettroni (dell'atomo di Calcio) nello stato fondamentale  $4s^2$  vengono eccitati tramite un impulso ultravioletto fino allo stato  $3d4p$ . Da qui, il diseccitamento avviene passando per i due stati intermedi  $4p^2$  e  $4p4s$  con l'emissione di due fotoni, uno con lunghezza d'onda di circa  $552\text{nm}$  e l'altro con lunghezza d'onda di  $423\text{nm}$ .

Figura 3.1: Schemi dell'esperimento di Clauser e Freedman.

I fotoni (prodotti anche in questo caso con il metodo a cascata illustrato in figura 3.1.c) vengono inviati verso i polarizzatori ( $P_1$  e  $P_2$  in figura 3.1) e raccolti dai rispettivi rivelatori ( $D_1$  e  $D_2$ ). I risultati sono poi registrati da un contatore di coincidenze ( $cc$ ).

La disuguaglianza di Bell testata in questo caso è

$$-1 \leq \Delta(\phi) \leq 0 \quad (3.1)$$

dove si ha che

$$\Delta(\phi) = \frac{3R(\phi) - R(3\phi) - R_1 - R_2}{R_0} \quad (3.2)$$

con  $R(\phi)$  tasso di coincidenze per la rilevazione di due fotoni,  $\phi$  angolo tra i piani di polarizzazione di  $P_1$  e  $P_2$ ,  $R_1$  tasso di coincidenze con il polarizzatore  $P_2$  rimosso,  $R_2$  tasso di coincidenze senza il polarizzatore  $P_1$  e  $R_0$  tasso di coincidenze con entrambi i polarizzatori rimossi. Per polarizzatori sufficientemente efficienti, esistono due diverse orientazioni relative che portano ad una violazione decisiva della (2.23) (e quindi della (3.1)) che sono  $22.5^\circ$  e  $67.5^\circ$ . Utilizzando questi due valori come  $\phi$ , la disuguaglianza (3.2) può essere riscritta nel seguente modo

$$\delta = \left| \frac{R(22.5^\circ) - R(67.5^\circ)}{R_0} \right| - \frac{1}{4} \leq 0. \quad (3.3)$$

L'esperimento risultò essere quindi a favore della meccanica quantistica con uno scarto di 5 deviazioni standard rispetto alla teoria che prevedeva l'utilizzo delle variabili nascoste ( $\delta = 0.050 \pm 0.008$  in chiaro disaccordo con l'espressione (3.3)).

È necessario però mettere in evidenza i limiti del procedimento illustrato:

1. data la bassa efficienza dei rilevatori solo una coppia di fotoni correlati ogni milione veniva effettivamente individuata (l'esperimento infatti richiese circa duecento ore di osservazione);
2. entrambi i polarizzatori ruotavano in base ad una sequenza ben precisa portando a pensare che, dopo un certo numero di ripetizioni, questi avrebbero potuto in qualche modo "memorizzare" la sequenza e scambiarsi segnali con velocità minore o uguale a quella della luce.

Le espressioni (3.1) e (3.2) sono state ricavate da Clauser e Horne in un articolo del 1974 [9] (estensione dell'articolo contenente la disuguaglianza CHSH) e la dimostrazione è riportata di seguito per completezza.

*Dimostrazione (3.1) e (3.2).*

**Teorema 1.** *Dati sei numeri  $x_1, x_2, y_1, y_2, X$  e  $Y$  tali per cui*

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq X \\ 0 \leq x_2 \leq X \\ 0 \leq y_1 \leq Y \\ 0 \leq y_2 \leq Y \end{cases} \quad (3.4)$$

allora la funzione  $U = x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - Yx_2 - Xy_1$  è limitata dalle disuguaglianze:

$$-XY \leq U \leq 0. \quad (3.5)$$

Siano  $a$  e  $a'$  due orientazioni arbitrarie del polarizzatore  $P_1$  e  $b$  e  $b'$  due orientazioni per il polarizzatore  $P_2$ . Siano  $p_1(\lambda, a)$ ,  $p_1(\lambda, a')$ ,  $p_2(\lambda, b)$  e  $p_2(\lambda, b')$  le probabilità di avere un conteggio negli analizzatori  $D_1$  e  $D_2$  e  $\lambda$  la variabile nascosta considerata. Allora si può scrivere che:

$$\begin{cases} p_1(a) = \int_{\Gamma} p_1(\lambda, a) \rho(\lambda) d\lambda \\ p_1(a') = \int_{\Gamma} p_1(\lambda, a') \rho(\lambda) d\lambda \\ p_{12}(a, b) = \int_{\Gamma} p_1(\lambda, a) p_2(\lambda, b) \rho(\lambda) d\lambda \end{cases} \quad (3.6)$$

con  $\Gamma$  spazio totale delle variabili nascoste (considerando che valgono espressioni analoghe anche per  $p_2(b)$  e  $p_2(b')$ ). Tenendo conto della definizione di probabilità, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 0 \leq p_1(\lambda, a) \leq 1 \\ 0 \leq p_1(\lambda, a') \leq 1 \\ 0 \leq p_2(\lambda, b) \leq 1 \\ 0 \leq p_2(\lambda, b') \leq 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Utilizzando il teorema 3.1 è possibile ricavare l'espressione

$$\begin{aligned} -1 \leq & p_1(\lambda, a) p_2(\lambda, b) - p_1(\lambda, a) p_2(\lambda, b') + p_1(\lambda, a') p_2(\lambda, b) + \\ & p_1(\lambda, a') p_2(\lambda, b') - p_1(\lambda, a') - p_2(\lambda, b) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

che, moltiplicata per  $\rho(\lambda)$  e integrata su  $\lambda$ , restituisce:

$$-1 \leq p_{12}(a, b) - p_{12}(a, b') + p_{12}(a', b) + p_{12}(a', b') - p_1(a') - p_2(b) \leq 0. \quad (3.9)$$

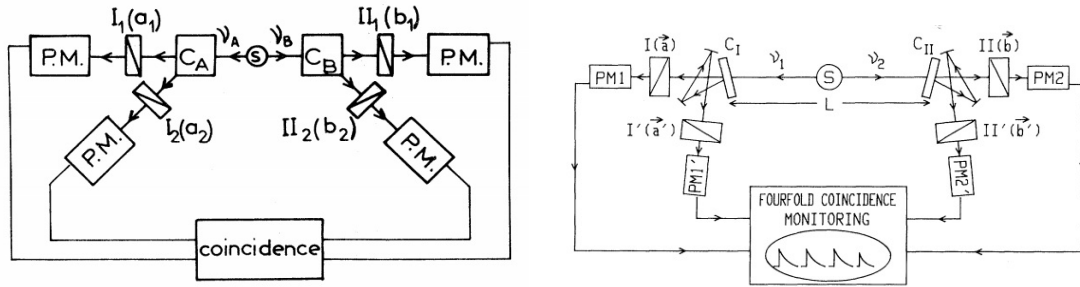
Se  $p_1(a)$  e  $p_2(b)$  sono costanti e  $p_{12}(a, b) = p_{12}(\phi)$  con  $\phi = |b - a|$ , allora si ritrova

$$-1 \leq 3p_{12}(\phi) - p_{12}(3\phi) - p_1 - p_2 \leq 0 \quad (3.10)$$

dove si è posto  $|a - b| = |a' - b| = |a' - b'| = |a - b'|/3 = \phi$ .  $\square$

## 3.2 Alain Aspect

Sebbene fossero già stati realizzati numerosi esperimenti per dimostrare la violazione della disuguaglianza di Bell (e della più generale disuguaglianza CHSH), questi risultavano essere tutti esperimenti statici o comunque periodici, portando a pensare che, dopo un certo numero di ripetizioni, la strumentazione stessa potesse interferire con le misurazioni.



(a) Schema dell'apparato sperimentale proposto da Aspect con analizzatori variabili nel tempo.

(b) Schema dell'apparato sperimentale utilizzato da Aspect con analizzatori variabili nel tempo.

Figura 3.2: Schemi dell'esperimento di Aspect, a sinistra quello proposto nell'articolo [10] e a destra quello effettivamente utilizzato e riportato nell'articolo [11].

In questo modo sarebbe venuta a mancare la località ipotizzata da Bell nella formulazione della sua teoria, ovvero l'indipendenza tra le misure effettuate dai due polarizzatori.

In un articolo del 1976 [10] Alain Aspect ipotizza quindi un esperimento con analizzatori non più statici, ma variabili nel tempo, di cui verranno pubblicati i risultati in un seguente articolo del 1982 [11].

Lo schema dell'esperimento proposto è rappresentato in figura 3.2. I fotoni correlati vengono prodotti con il metodo a cascata a partire da un atomo di calcio eccitato e poi diretti verso due commutatori  $C_A$  e  $C_B$  ( $C_I$  e  $C_{II}$ ). Il commutatore  $C_A$  ( $C_I$ ) direziona il fotone  $\nu_A$  ( $\nu_I$ ) nel polarizzatore  $I_1$  ( $I(\vec{a})$ ), poi cambia stato e nel periodo seguente direziona il fotone  $\nu_A$  nel polarizzatore  $I_2$  ( $I'(\vec{a}')$ ); lo stesso vale per il funzionamento del commutatore  $C_B$  ( $C_{II}$ ). I dati vengono poi raccolti da un contatore di coincidenze. Nella realizzazione dell'esperimento vengono fatte alcune assunzioni:

1. gli intervalli di tempo tra due scambi sono stocastici e i due commutatori lavorano in maniera indipendente;
2. il tempo di autocorrelazione di ogni commutatore è minore di  $L/c$  dove  $L$  è la distanza tra i commutatori e  $c$  è la velocità della luce;
3. il tasso medio di emissione delle coppie registrate (con entrambi i fotoni che arrivano al commutatore) non cambia quando un polarizzatore viene rimosso;
4. la probabilità che un fotone emerga da un polarizzatore non cambia se un altro polarizzatore viene rimosso;
5. le funzioni di commutazione non dipendono dalla variabile nascosta  $\lambda$  (se così non fosse i fotoni potrebbero essere diretti da una parte o dall'altra in base alla quantità  $\lambda$ );

6. i polarizzatori non hanno “memoria”: non possono immagazzinare le informazioni ricevute dai commutatori per un lungo tempo e influenzare le misure successive;
7. gli scambi nei commutatori sono governati da generatori differenti a diversa frequenza (pertanto si assume la loro totale indipendenza).

In questo caso lo scambio dei fotoni nei commutatori è dato dall’interazione con un’onda di ultrasuoni in acqua, e avviene circa ogni  $10ns$  (tempo minore rispetto a quello dato da  $L/c$  che risulta essere pari a circa  $40ns$  e che corrisponde al tempo che impiegherebbe un commutatore a ricevere l’informazione inviata dall’altro). La distanza di ogni commutatore dalla sorgente di fotoni è di circa  $6m$ . Una prova ha la durata di  $12000ns$  di cui  $4000ns$  con tutti i polarizzatori,  $4000ns$  con tutti i polarizzatori rimossi e  $4000ns$  con un solo polarizzatore da ogni parte. Le orientazioni a cui sono state effettuate le prove principali sono  $22.5^\circ$  e  $67.5^\circ$  (angoli per cui si prevedeva il conflitto più evidente tra la meccanica quantistica e la teoria a variabili nascoste).

La disuguaglianza testata in questo caso è

$$-1 \leq S \leq 0 \quad (3.11)$$

dove  $S$  corrisponde alla (2.23) generalizzata come segue:

$$S = \frac{N(\vec{a}, \vec{b})}{N(\infty, \infty)} - \frac{N(\vec{a}, \vec{b}')} {N(\infty, \infty')} + \frac{N(\vec{a}', \vec{b})}{N(\infty', \infty)} + \frac{N(\vec{a}', \vec{b}')}{N(\infty', \infty')} - \frac{N(\vec{a}', \infty)}{N(\infty', \infty)} - \frac{N(\infty, \vec{b})}{N(\infty, \infty)} \quad (3.12)$$

con ovvio significato dei simboli, facendo riferimento alla figura 3.2.b. Nel caso della figura 3.2.a, la formula ipotizzata è la seguente:

$$S = \frac{N_{11}(a_1, b_1)}{N_{11}(\infty, \infty)} - \frac{N_{12}(a_1, b_2)}{N_{12}(\infty, \infty)} + \frac{N_{21}(a_2, b_1)}{N_{21}(\infty, \infty)} + \frac{N_{22}(a_2, b_2)}{N_{22}(\infty, \infty)} - \frac{N_{2j}(a_2, \infty)}{N_{2j}(\infty, \infty)} - \frac{N_{i1}(\infty, b_1)}{N_{i1}(\infty, \infty)} \quad (3.13)$$

dove  $N_{ij}$  rappresenta il tasso di rilevazioni congiunte; in particolare  $N_{ij}(a_i, \infty)$  è il tasso di rilevazioni congiunte con il polarizzatore  $II_j$  rimosso e  $N_{ij}(\infty, \infty)$  è il tasso di rilevazioni in  $I_i$  e  $II_j$  con i rispettivi polarizzatori rimossi. L’esperimento ha portato ad  $S = 0.101 \pm 0.020$  violando la disuguaglianza (3.11) di circa 5 deviazioni standard.

È possibile ricavare l’espressione (3.13), quindi la (3.12), seguendo un procedimento analogo a quello illustrato da Clauser e Horne e riportato in precedenza nella dimostrazione del paragrafo 3.1. In particolare, si definisca la probabilità di avere coincidenze nei rilevatori

$$P_{ij} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T dt_1 \int d\lambda \hat{u}(\lambda, t_1) \hat{a}_i(t_2) \hat{\beta}_j(t_2) \times \hat{\mathcal{A}}_i(\lambda, t_3) \hat{\mathcal{B}}_j(\lambda, t_3) \quad (3.14)$$

con  $t_1$  tempo di emissione della coppia di fotoni nel laboratorio,  $t_2 = t_1 + L/2c$  tempo in cui i fotoni arrivano ai commutatori,  $t_3 > t_2$  tempo in cui i fotoni emergono dai polarizzatori,  $\hat{u}(\lambda, t_1)$  distribuzione di probabilità della variabile nascosta,  $\hat{\alpha}_i(t)$  e  $\hat{\beta}_j(t)$  funzioni di commutazione,  $\hat{\mathcal{A}}_i(\lambda, t_3)$  e  $\hat{\mathcal{B}}_j(\lambda, t_3)$  funzioni di risposta dei polarizzatori. Allora l'espressione (3.14) può essere riscritta nel modo seguente:

$$P_{ij} = \alpha_i \beta_j \int A_i(\lambda) B_j(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (3.15)$$

dove  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  sono le medie rispetto al tempo delle funzioni di commutazione  $\alpha_i(t)$  e  $\beta_j(t)$ ,  $A_i(\lambda)$  e  $B_j(\lambda)$  sono le funzioni collegate agli esiti dei polarizzatori  $I_i$  e  $II_j$ . È possibile quindi ricavare un'espressione per la variabile  $S$  da misurare data da:

$$S = \frac{P_{11}}{\alpha_1 \beta_1} - \frac{P_{12}}{\alpha_1 \beta_2} + \frac{P_{21}}{\alpha_2 \beta_1} + \frac{P_{22}}{\alpha_2 \beta_2} - \frac{P_{20}}{\alpha_2} - \frac{P_{01}}{\beta_1}. \quad (3.16)$$

Per ottenere la (3.13) nella forma applicabile agli esperimenti (e quindi con quantità direttamente misurabili), si esprime il tasso di rilevazioni congiunte tenendo conto del tasso medio di emissione delle coppie rilevate ( $N$ ) e dell'efficienza dei rilevatori ( $\epsilon_{ij}$ ):  $N_{ij}(a_i, b_j) = \epsilon_{ij} P_{ij} N$ . Assumendo che il tasso medio di emissione delle coppie di fotoni non cambi quando i polarizzatori vengono rimossi (e che quindi  $N_{ij}(\infty, \infty) = \epsilon_{ij} \alpha_i \beta_j N$ ) si ha:

$$\frac{P_{ij}}{\alpha_i \beta_j} = \frac{N_{ij}(a_i, b_j)}{N_{ij}(\infty, \infty)} \quad (3.17)$$

che permette di calcolare i primi quattro termini della (3.16). Per quanto riguarda gli ultimi due termini, questi sono ottenuti da espressioni analoghe a quella per i primi quattro considerando che, se il polarizzatore  $II_j$  fosse rimosso, allora il tasso di coincidenze sarebbe del tipo  $N_{ij}(a_i, \infty) = \epsilon_{ij} \beta_j P_{i0} N$ , giungendo alle espressioni:

$$\begin{aligned} \frac{P_{i0}}{\alpha_i} &= \frac{N_{ij}(a_i, \infty)}{N_{ij}(\infty, \infty)}, \\ \frac{P_{0j}}{\beta_j} &= \frac{N_{ij}(\infty, b_j)}{N_{ij}(\infty, \infty)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.3 Anton Zeilinger

In questo paragrafo verranno illustrati due esperimenti effettuati sotto la guida di Anton Zeilinger: il primo, che è valso il Premio Nobel a Zeilinger nel 2022, mette alla prova la teoria del teletrasporto quantistico basato sul fenomeno dell'entanglement; il secondo consiste nella dimostrazione della disuguaglianza di Bell utilizzando non una coppia di fotoni entangled, ma tre fotoni in uno stato detto GHZ.

### 3.3.1 Teletrasporto quantistico

Nel 1997 Zeilinger pubblica l'articolo in cui vengono mostrati i risultati dell'esperimento sul teletrasporto quantistico basato sul fenomeno dell'entanglement [12]. L'idea del teletrasporto quantistico, introdotta precedentemente da Bennett [13], si basa su due concetti fondamentali: il *Postulato della Proiezione* (o collasso della funzione d'onda) e il *Teorema di No-Cloning* di Zurek [14].

**Teorema di No-Cloning.** *È impossibile creare una copia perfetta (clone) e indipendente di uno stato quantistico sconosciuto arbitrario.*

*Dimostrazione.* Si considerino due particelle, una nello stato  $|\psi\rangle$  (stato che si vuole copiare) e una nello stato arbitrario  $|K\rangle$ . Quello che si vuole ottenere è clonare lo stato della prima particella nella seconda:

$$|\psi\rangle |K\rangle \rightarrow |\psi\rangle |\psi\rangle. \quad (3.19)$$

Si supponga quindi di poter clonare due stati  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  ottenendo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle |K\rangle &\rightarrow |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle, \\ |\psi_2\rangle |K\rangle &\rightarrow |\psi_2\rangle |\psi_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si consideri ora di voler clonare lo stato  $|\psi\rangle = \alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle$ . Assumendo allora la linearità del processo, date le equazioni (3.20), quello che si ottiene è l'espressione seguente:

$$|\psi\rangle |K\rangle \rightarrow \alpha |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle |\psi_2\rangle. \quad (3.21)$$

Svolgendo i calcoli però, si nota che in realtà quello che si ottiene dalla clonazione è diverso dalla (3.21), infatti:

$$|\psi\rangle |K\rangle = \alpha |\psi_1\rangle |K\rangle + \beta |\psi_2\rangle |K\rangle. \quad (3.22)$$

Tenendo a mente l'espressione generale del processo di clonazione, data dalla (3.19), si ricava che:

$$\begin{aligned} &\alpha |\psi_1\rangle |K\rangle + \beta |\psi_2\rangle |K\rangle = \\ &\alpha |\psi_1\rangle (\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle) + \beta |\psi_2\rangle (\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle) = \\ &\alpha^2 |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle + \beta^2 |\psi_2\rangle |\psi_2\rangle + \alpha\beta(|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle + |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle) \end{aligned} \quad (3.23)$$

che non corrisponde alla (3.21). □

Si considerino Alice (A) e Bob (B). Alice possiede un fotone in un certo stato  $|\psi\rangle_1 = \alpha |\leftrightarrow\rangle + \beta |\updownarrow\rangle$  (sovrapposizione di polarizzazione orizzontale e verticale data dai diversi pesi  $\alpha$  e  $\beta$ ) e vuole che Bob ottenga informazioni per far sì che il suo fotone sia



esattamente nello stesso identico stato. A causa del *Postulato della Proiezione* però, nessuna misurazione fatta da Alice potrà essere sufficiente affinché Bob possa portare il suo fotone nello stesso stato  $|\psi\rangle$ ; la misurazione infatti fa sì che lo stato  $|\psi\rangle$  venga proiettato in una delle due possibilità distruggendo quindi metà dell'informazione. Pertanto Bennett suggerisce che sia possibile trasferire lo stato quantico di una particella in un'altra facendo in modo che, durante il processo, nessuno ottenga informazioni riguardo allo stato in esame ricorrendo all'entanglement. Il teletrasporto quantistico prevede quindi la presenza di tre particelle: la particella 1, che è quella che Alice vuole teletrasportare, e le particelle 2 e 3, in entanglement, possedute rispettivamente da Alice e Bob. La particella 1 si trova inizialmente nello stato  $|\psi\rangle_1$  descritto sopra, le particelle 2 e 3 si trovano invece nello stato di singoletto dato da

$$|\psi\rangle_{23} = \frac{|\leftrightarrow\rangle_2 |\updownarrow\rangle_3 - |\updownarrow\rangle_2 |\leftrightarrow\rangle_3}{\sqrt{2}}, \quad (3.24)$$

dove si stanno già prendendo in considerazione i fotoni dell'esperimento di Zeilinger con polarizzazione orizzontale  $\leftrightarrow$  e verticale  $\updownarrow$  (nella sua formulazione del problema Bennett utilizza particelle con spin 1/2). Se, attraverso una misurazione precisa (detta "joint Bell-state measurement"), fosse possibile portare le particelle di Alice (1 e 2) nello stato entangled

$$|\psi\rangle_{12} = \frac{|\leftrightarrow\rangle_1 |\updownarrow\rangle_2 - |\updownarrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2}{\sqrt{2}} \quad (3.25)$$

(cosa possibile solo nel 25% dei casi dal momento che sono possibili quattro combinazioni per lo stato delle particelle 1 e 2), allora si avrebbe il teletrasporto quantistico senza che nè Alice, nè Bob ottengano informazioni durante il processo e senza violazione del teorema 3.3.1. Lo stato dell'intero sistema di particelle (1, 2, 3) è dato dalla combinazione dello stato della particella da clonare  $|\psi\rangle_1$  con lo stato entangled delle particelle ausiliarie di Alice e Bob  $|\psi\rangle_{23}$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{система}} &= |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_{23} = (\alpha |\leftrightarrow\rangle_1 + \beta |\updownarrow\rangle_1) \otimes \left( \frac{|\leftrightarrow\rangle_2 |\updownarrow\rangle_3 - |\updownarrow\rangle_2 |\leftrightarrow\rangle_3}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\alpha(|\leftrightarrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2 |\updownarrow\rangle_3 - |\leftrightarrow\rangle_1 |\updownarrow\rangle_2 |\leftrightarrow\rangle_3)}{\sqrt{2}} + \frac{\beta(|\updownarrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2 |\updownarrow\rangle_3 - |\updownarrow\rangle_1 |\updownarrow\rangle_2 |\leftrightarrow\rangle_3)}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

La misurazione da parte di Alice avviene nella base operatoriale di Bell definita come segue:

$$\begin{aligned} |\psi^+\rangle_{12} &= \frac{|\leftrightarrow\rangle_1 |\updownarrow\rangle_2 + |\updownarrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, & |\psi^-\rangle_{12} &= \frac{|\leftrightarrow\rangle_1 |\updownarrow\rangle_2 - |\updownarrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, \\ |\Phi^+\rangle_{12} &= \frac{|\leftrightarrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2 + |\updownarrow\rangle_1 |\updownarrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, & |\Phi^-\rangle_{12} &= \frac{|\leftrightarrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2 - |\updownarrow\rangle_1 |\updownarrow\rangle_2}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Utilizzando questa base, ogni prodotto del tipo  $|x\rangle_1 |x\rangle_2$  può essere espresso in termini di  $|\psi^\pm\rangle$  e  $|\Phi^\pm\rangle$ , ottenendo l'espressione:

$$|\psi\rangle_{sistema} = \frac{1}{2} \left[ |\psi^-\rangle_{12} (-\alpha |\leftrightarrow\rangle_3 - \beta |\updownarrow\rangle_3) + |\psi^+\rangle_{12} (-\alpha |\leftrightarrow\rangle_3 + \beta |\updownarrow\rangle_3) + |\Phi^-\rangle_{12} (\alpha |\updownarrow\rangle_3 + \beta |\leftrightarrow\rangle_3) + |\Phi^+\rangle_{12} (\alpha |\updownarrow\rangle_3 - \beta |\leftrightarrow\rangle_3) \right]. \quad (3.28)$$

La particella di Bob sarà quindi proiettata in una delle 4 possibili combinazioni date dall'equazione (3.28) con probabilità pari a 1/4. È possibile ricavare lo stesso risultato utilizzando i qubit e le porte logiche quantistiche ponendo  $|\leftrightarrow\rangle = |0\rangle$  e  $|\updownarrow\rangle = |1\rangle$ . Lo stato combinato del sistema allora è:

$$|\psi\rangle_{sistema} = \frac{\alpha |0\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 - \alpha |0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3 + \beta |1\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 - \beta |1\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3}{\sqrt{2}}. \quad (3.29)$$

Applicando di seguito le operazioni di CNOT (3.31) e la trasformazione Hadamard (3.32) solo alle particelle 1 e 2 di Alice, si ottiene la seguente espressione per lo stato totale del sistema:

$$|\psi\rangle_{sistema} = \frac{1}{2} \left[ |0\rangle_1 |0\rangle_2 (\alpha |1\rangle_3 - \beta |0\rangle_3) + |0\rangle_1 |1\rangle_2 (-\alpha |0\rangle_3 + \beta |1\rangle_3) + |1\rangle_1 |0\rangle_2 (\alpha |1\rangle_3 + \beta |0\rangle_3) + |1\rangle_1 |1\rangle_2 (-\alpha |0\rangle_3 - \beta |1\rangle_3) \right] \quad (3.30)$$

dove sono state usate le seguenti regole per il CNOT

$$\begin{cases} |0\rangle_1 |0\rangle_2 \rightarrow |0\rangle_1 |0\rangle_2 \\ |0\rangle_1 |1\rangle_2 \rightarrow |0\rangle_1 |1\rangle_2 \\ |1\rangle_1 |0\rangle_2 \rightarrow |1\rangle_1 |1\rangle_2 \\ |1\rangle_1 |1\rangle_2 \rightarrow |1\rangle_1 |0\rangle_2 \end{cases} \quad (3.31)$$

e le seguenti espressioni per la trasformazione Hadamard

$$\begin{cases} |0\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ |1\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (3.32)$$

Dall'espressione (3.25) è possibile osservare che, se la particella 1 si trova in un determinato stato, allora la particella 2 deve trovarsi in quello opposto e quindi, data l'espressione (3.24), la 3 si trova nello stato opposto a quello della particella 2. Si ottiene quindi che la particella 3 si trova automaticamente nello stato iniziale della particella 1. Osservando l'espressione dello stato totale del sistema (3.28) si nota immediatamente quanto spiegato

sopra: se Alice, effettuando una misura sulle sue particelle 1 e 2, ottenesse la configurazione  $|\psi^-\rangle_{12}$  (o analogamente  $|1\rangle_1|1\rangle_2$ ) con probabilità pari a  $1/4$ , allora la particella 3 di Bob si troverebbe nello stato  $-\alpha|\leftrightarrow\rangle_3 - \beta|\downarrow\rangle_3$  (o analogamente  $-\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3$ ) che, a meno di una trasformazione unitaria (in questo caso la trasformazione identità cambiata di segno), è lo stato di partenza che si voleva clonare. Nelle restanti tre configurazioni (e quindi nel 75% dei casi) Bob dovrebbe applicare una trasformazione unitaria diversa dall'identità. È importante sottolineare che le trasformazioni che Bob deve applicare sono unitarie se e solo se  $|\psi\rangle_{23}$  è uno stato massimamente entangled (ad esempio uno dei quattro stati di Bell); se ciò non avviene la fidelity <sup>1</sup> del teletrasporto risulta essere ridotta.

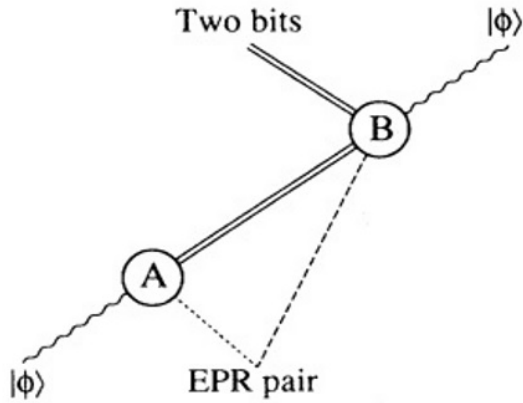
Con la metodologia descritta non c'è violazione né del *Teorema di No-Cloning*, né della relatività: infatti, affinché il teletrasporto risulti completo, Alice deve misurare lo stato congiunto delle sue due particelle. In questo modo distrugge lo stato iniziale che si voleva clonare a causa del *Postulato della Proiezione*, e utilizza un canale classico per l'invio dell'informazione riguardo la misurazione effettuata.

Nella figura 3.3.b è riportato lo schema dell'esperimento sul teletrasporto quantistico ed in particolare è mostrato il metodo con cui vengono create le particelle 1, 2 e 3 (in questo caso fotoni). I fotoni entangled di Alice e Bob vengono creati con il metodo della Parametric Down-Conversion, per cui un fotone ad alta frequenza viene convertito in due fotoni con frequenza minore, bombardando un cristallo non lineare con una sorgente ultravioletta. A causa dell'inversione del fascio ultravioletto e del secondo passaggio all'interno del cristallo, vengono creati altri due fotoni entangled, uno rappresenta il corrispondente della particella 1 da teletrasportare, l'altro sta semplicemente ad indicare che il fotone da clonare è stato creato. Dopo la creazione delle tre particelle, la 1 e la 2 devono essere portate nello stato descritto dall'equazione (3.25). Per fare ciò i fotoni vengono inviati verso un divisore di fascio (un Beam Splitter 50/50 indicato con BS nella figura); per ottenere  $|\psi\rangle_{12}$  è sufficiente registrare le coincidenze in uscita dai due lati del divisore di fascio ( $f_1$  e  $f_2$ ). Infatti, per questioni legate al funzionamento del Beam Splitter 50/50 che non verranno approfondite nel presente lavoro di tesi, i fotoni emergono da lati diversi del Beam Splitter (e non entrambi dallo stesso lato) solo quando lo stato in ingresso è lo stato di Bell  $|\psi^-\rangle_{12}$ . Per rendere i fotoni 1 e 2 indistinguibili dal punto di vista temporale (il fotone 1 è infatti prodotto in ritardo rispetto al 2 dal fascio ultravioletto riflesso), questi vengono fatti passare attraverso due filtri che producono un tempo di coerenza maggiore rispetto all'intervallo tra gli impulsi generati dalla sorgente. In particolare gli impulsi della sorgente utilizzata sono distanziati da un intervallo di circa  $200fs$ , mentre i fotoni dopo il passaggio nei filtri hanno un tempo di coerenza di circa  $520fs$ .

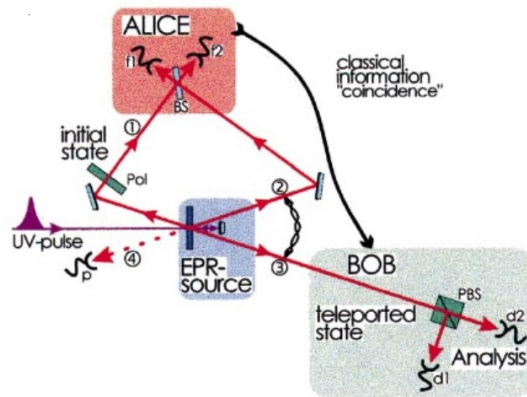
Nell'esperimento realizzato da Zeilinger, il fotone 1 è polarizzato a  $+45^\circ$ . Non appena si ha lo stato  $|\psi\rangle_{12}$ , cioè quando si contano coincidenze nei rilevatori indicati come  $f_1$  e  $f_2$

---

<sup>1</sup>Il concetto di fidelity viene approfondito nell'Appendice B.



(a) Nella figura è riportato lo schema del protocollo per il teletrasporto quantistico ipotizzato da Bennett. Le linee ondulate rappresentano la particella quantistica nello stato incognito  $|\Phi\rangle$ ; le linee tratteggiate rappresentano la coppia di particelle entangled di Alice e Bob (2 e 3); le linee spesse rappresentano la via di comunicazione classica.



(b) Schema dell'esperimento realizzato da Zeilinger sul teletrasporto quantistico. BS è il Beam Splitter 50/50 (divisore di fascio);  $f_1$  e  $f_2$  sono i contatori di coincidenze all'uscita del Beam Splitter;  $d_1$  e  $d_2$  misurano la polarizzazione della particella 3 di Bob per verificare se il teletrasporto è avvenuto.

Figura 3.3: Schemi del protocollo del teletrasporto quantistico e del relativo esperimento.

in 3.3, allora il fotone 3 ha una polarizzazione di  $+45^\circ$ . Se il teletrasporto è avvenuto, il detector indicato con  $d_1$  non deve entrare in funzione ( $d_1$  e  $d_2$  misurano la polarizzazione del fotone 3, in particolare rilevano rispettivamente la polarizzazione a  $-45^\circ$  e a  $+45^\circ$ ). Il procedimento descritto viene ripetuto aumentando e diminuendo l'intervallo di tempo che intercorre tra l'arrivo del fotone 1 e del fotone 2 al divisore di fascio; inoltre si esegue l'esperimento prendendo in considerazione anche i casi in cui il fotone 1 è inizialmente polarizzato a  $-45^\circ$ . Quello che si ottiene è visibile in figura 3.4. Nei grafici sono riportate le coincidenze dei detector ( $d_2 f_1 f_2$  per l'analisi a  $+45^\circ$  e  $d_1 f_1 f_2$  per l'analisi a  $-45^\circ$ ) in funzione del ritardo tra l'arrivo dei fotoni 1 e 2 al divisore di fascio. Per l'analisi con polarizzazione iniziale a  $+45^\circ$  ( $-45^\circ$ ), si nota un andamento costante delle coincidenze  $d_2 f_1 f_2$  ( $d_1 f_1 f_2$ ) e una importante diminuzione delle coincidenze  $d_1 f_1 f_2$  ( $d_2 f_1 f_2$ ) quando il ritardo tra i fotoni 1 e 2 si annulla rendendoli indistinguibili e dando luogo allo stato  $|\psi\rangle_{12}$ ; la diminuzione delle coincidenze relative all'angolo di polarizzazione opposto a quello del fotone 1, evidenzia come, alle giuste condizioni, avvenga effettivamente il teletrasporto dello stato della particella 1 alla particella 3: questa infatti viene rilevata nella maggior parte dei casi sempre dallo stesso detector. Ripetendo il procedimento per polarizzazioni di  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , si ottengono dei risultati analoghi a quelli in figura 3.4, dimostrando che il teletrasporto non è proprio solo di angoli specifici (basi specifiche) e che non può avere

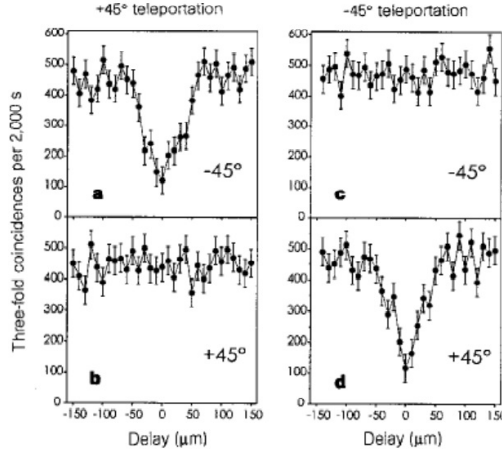


Figura 3.4: Risultati dell'esperimento sul teletrasporto quantistico realizzato con polarizzazione iniziale di  $\pm 45^\circ$ . Il grafico mostra le coincidenze dei detector in funzione del ritardo tra i fotoni (indicato attraverso la posizione dello specchio che riflette il fascio ultravioletto dopo la produzione dei fotoni 2 e 3).

alcuna spiegazione classica.

È possibile generalizzare il protocollo di Bennett, mostrato in figura 3.3.a e descritto in precedenza, anche al caso in cui Alice utilizzi una coppia di particelle entangled con  $N$  stati al posto della coppia di particelle con polarizzazione orizzontale o verticale. In questa circostanza lo stato delle particelle di Alice 1 e 2 è dato dall'espressione:

$$\sum_j \left( \frac{|j\rangle \otimes |j\rangle}{\sqrt{N}} \right) \quad (3.33)$$

dove  $j = 0, 1, \dots, N - 1$  indicano gli elementi della base ortonormale per ciascuno dei sistemi a  $N$  stati. Alice effettua una misura congiunta sulle particelle 1 e 2 come nel caso precedente; tale misura ha come autostati:

$$|\psi_{nm}\rangle = \sum_j \left( e^{2\pi i j n / N} \frac{|j\rangle \otimes |(j+m)|N\rangle}{\sqrt{N}} \right). \quad (3.34)$$

Successivamente comunica a Bob il risultato. Infine Bob agisce sulla sua particella (la particella 3) con una trasformazione unitaria

$$U_{nm} = \sum_k \left( e^{2\pi i k n / N} |k\rangle \otimes |(k+m)|N\rangle \right) \quad (3.35)$$

portandola nello stato in cui si trovava la particella 1 di Alice.

### 3.3.2 Introduzione all'esperimento GHZ

Nel 1990 Zeilinger, insieme a Horne, Shimony e Greenberg, pubblica un articolo in cui viene illustrato un esperimento che, ancora una volta, esclude la possibilità che la meccanica quantistica sia una teoria a variabili nascoste. La differenza di questo esperimento rispetto a quelli realizzati precedentemente, e illustrati nei paragrafi 3.1 e 3.2, consiste nell'utilizzo di tre fotoni nello stato GHZ <sup>2</sup> (dai nomi dei fisici che l'hanno teorizzato: Greenberg, Horne e Zeilinger) e in una formulazione diversa del teorema di Bell sotto esame [15].

**Stato GHZ.** *Uno stato GHZ è uno stato di entanglement per un sistema di tre oggetti (particelle, qubits) a due stati dato dall'espressione:*

$$|GHZ\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.36)$$

*Questo stato è tale per cui una misura su un singolo oggetto è in grado di rompere l'entanglement: se la misura fornisce come esito 0 allora sicuramente il sistema collassa nello stato  $|000\rangle$  (la stessa cosa vale per una misura che produce come esito 1, questa fa collassare sicuramente il sistema nello stato  $|111\rangle$ ).*

La trattazione teorica riportata nell'articolo per ricavare il "Teorema di Bell senza disuguaglianze" (da cui deriva l'esperimento GHZ) è la seguente. Sia dato un sistema di quattro particelle dotate di spin  $1/2$ , due delle quali (1 e 2) si muovono lungo la direzione positiva dell'asse  $z$  e le altre due (3 e 4) nella direzione opposta, come mostrato in figura 3.5. Le quattro particelle entrano poi in quattro differenti apparati di Stern-Gerlach con orientazioni  $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4$ . Lo stato congiunto delle quattro particelle è dato dall'espressione

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 |-\rangle_4 - |-\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |+\rangle_4 \right] \quad (3.37)$$

se le particelle sono il prodotto del decadimento di una particella iniziale con spin pari a 1 (con componente di spin lungo  $z$  pari a 0) in due particelle con spin pari a  $1/2$  le quali, a loro volta, decadono ciascuna in due particelle con spin pari a  $1/4$ ;  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  indicano rispettivamente spin su e spin giù, i pedici invece indicano le direzioni spaziali degli spin. Il valore di aspettazione del prodotto degli esiti degli spin delle quattro particelle in uscita dagli apparati di Stern-Gerlach, considerando la direzione nel piano  $xy$ , è dato da:

$$E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = -\cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4) \quad (3.38)$$

---

<sup>2</sup>Nell'Appendice A sarà trattato lo stato GHZ confrontandolo con la struttura topologica degli Anelli Borromei.

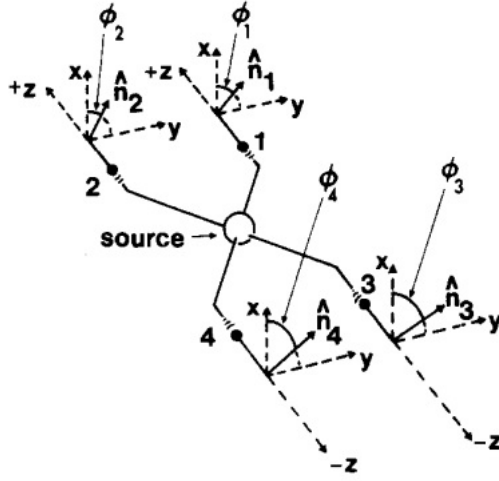


Figura 3.5: Schema dell'argomento per ricavare il Teorema di Bell senza disuguaglianze applicato nell'esperimento GHZ con tre fotoni.

(le dimostrazioni non riprodotte sono riportate nell'appendice dell'articolo). In caso di perfetta correlazione tra le variabili, come suggerito inizialmente da Bell nel suo argomento, si ricavano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) &= -1 \quad \text{se} \quad \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0 \\ E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) &= +1 \quad \text{se} \quad \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Supponendo l'esistenza di funzioni dipendenti dalla variabile nascosta  $\lambda$  che descrivono gli esiti delle misurazioni dello spin delle quattro particelle, la (3.39) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} A_\lambda(\phi_1)B_\lambda(\phi_2)C_\lambda(\phi_3)D_\lambda(\phi_4) &= -1 \quad \text{se} \quad \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0 \\ A_\lambda(\phi_1)B_\lambda(\phi_2)C_\lambda(\phi_3)D_\lambda(\phi_4) &= +1 \quad \text{se} \quad \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi \end{aligned} \quad (3.40)$$

dove le varie funzioni  $A_\lambda(\phi_1), B_\lambda(\phi_2), C_\lambda(\phi_3), D_\lambda(\phi_4)$  hanno valore  $\pm 1$  corrispondente a spin su e spin giù. La prima delle (3.40) può essere considerata in quattro casi particolari:

$$\begin{cases} A_\lambda(0)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(0) = -1 \\ A_\lambda(\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(\phi)D_\lambda(0) = -1 \\ A_\lambda(\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(\phi) = -1 \\ A_\lambda(2\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi) = -1 \end{cases} \quad (3.41)$$

Osservando le prime due casistiche si nota subito che  $A_\lambda(\phi)C_\lambda(\phi) = A_\lambda(0)C_\lambda(0)$ , mentre dalla prima e dalla terza si ricava analogamente che  $A_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi) = A_\lambda(0)D_\lambda(0)$ . Dividendo queste due espressioni tra di loro si ottiene che  $C_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi) = C_\lambda(0)D_\lambda(0)$  (infatti

$D_\lambda(\phi) = \pm 1$  così come  $D_\lambda(0)$ , e quindi entrambe le espressioni sono uguali alla loro inversa); questa, unita alla quarta delle (3.41), porta a scrivere che

$$A_\lambda(2\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(0) = -1 \quad (3.42)$$

e quindi che:

$$A_\lambda(2\phi) = A_\lambda(0) = \text{cost.} \quad (3.43)$$

Seguendo gli stessi ragionamenti partendo dalla seconda delle (3.40), considerando la combinazione particolare di angoli  $A_\lambda(\theta + \pi)B_\lambda(0)C_\lambda(\theta)D_\lambda(0) = +1$  e confrontandola con la seconda delle (3.41), si ottiene la condizione:

$$A_\lambda(\theta + \pi) = -A_\lambda(\theta). \quad (3.44)$$

Prendendo gli angoli  $\phi = \pi/2$  e  $\theta = 0$  si nota immediatamente che le equazioni (3.43) e (3.44) entrano in evidente contrasto tra di loro. Sebbene matematicamente siano entrambe corrette, fisicamente non possono sussistere perché misure di spin lungo direzioni opposte devono dare risultati opposti e misure di spin lungo la stessa direzione devono portare tutte allo stesso esito. Il procedimento per ricavare la contraddizione tra realismo locale e meccanica quantistica, descritto da Mermin in un articolo dello stesso anno [16], è riportato di seguito.

*Dimostrazione.* Date tre particelle di spin  $1/2$ , lo stato di spin  $|\psi\rangle$  è descritto da un insieme completo di operatori Hermitiani commutanti del tipo  $\sigma = (\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i)$ . Considerando misurazioni lungo la direzione verticale ( $\sigma_x^i$ ) e orizzontale ( $\sigma_y^i$ ), allora il set completo di operatori Hermitiani commutanti è dato da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3 \\ \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3 \\ \sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3 \end{array} \right. . \quad (3.45)$$

Gli operatori commutano tra di loro perché il prodotto tra due di essi differisce dal prodotto nell'ordine inverso degli stessi per un numero pari di commutazioni. Dal momento che i tre operatori commutano tra di loro, possiedono autostati simultanei e autovalori pari a  $\pm 1$ . Inoltre, dato che gli operatori di spin di particelle distinte commutano componente per componente, è possibile misurare contemporaneamente la componente  $x$  di una particella e le componenti  $y$  delle altre due. Considerando il caso in cui le particelle sono in un autostato in cui tutti e tre gli operatori hanno autovalore  $+1$

$$|\psi\rangle = \frac{|111\rangle - |-1 - 1 - 1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.46)$$

allora il prodotto dei risultati provenienti dalla misurazione dei tre spin deve essere  $+1$ . Si consideri di misurare la componente  $x$  di una qualsiasi delle tre particelle: se



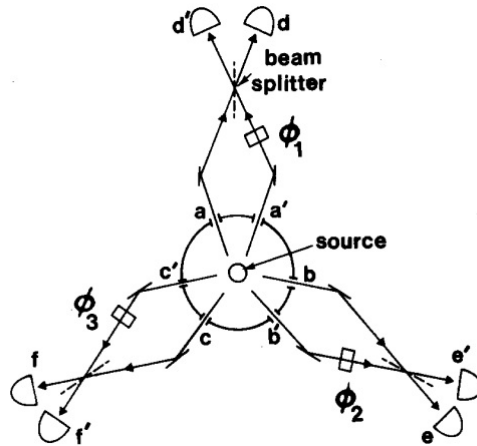


Figura 3.6: *Apparato sperimentale a tre fotoni utilizzato per verificare il Teorema di Bell.*

le componenti  $y$  delle altre due sono uguali, allora la componente  $x$  della particella misurata deve avere valore  $+1$  (analogamente, se le componenti  $y$  sono diverse,  $x$  deve essere pari  $-1$ ). Quindi esistono tre elementi della realtà  $m_x^1, m_x^2, m_x^3$  ciascuno con valore  $\pm 1$  per ogni particella. Analogamente si può prevedere il risultato della misurazione della componente  $y$  di una particella misurando rispettivamente le componenti  $x$  e  $y$  delle altre due: anche  $m_y^1, m_y^2, m_y^3$  sono quindi elementi della realtà. Questo non può essere possibile poiché le componenti  $\sigma_x, \sigma_y$  della stessa particella non commutano tra di loro. Inoltre, dato l'operatore Hermitiano  $\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3$ , questo commuta con gli operatori (3.45); il numero di commutazioni è pari e quindi il valore di questo operatore nello stato  $|\psi\rangle$  è sempre  $+1$ . In realtà, per la meccanica quantistica si ha che, moltiplicando tra di loro gli operatori dell'espressione (3.45), l'operatore  $\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3$  è ottenuto tramite un numero dispari di commutazioni e quindi è dato dall'opposto del prodotto dei tre (il prodotto delle misurazioni dei tre spin è pertanto  $-1$ ). Quindi la previsione di autovalore pari a  $+1$  derivante dall'esistenza degli elementi della realtà, è in contrasto con l'autovalore  $-1$  previsto invece dalla meccanica quantistica.  $\square$

Il vero e proprio esperimento GHZ segue lo stesso ragionamento appena riportato utilizzando però tre fotoni; lo schema è mostrato in figura 3.6. I tre fotoni vengono prodotti utilizzando la transizione di un atomo attraverso due livelli intermedi. In particolare l'atomo passa da uno stato di momento angolare totale pari a 0 ad un altro stato di momento angolare totale pari a 0, passando per due stati con momento angolare totale uguale a 1 rispettivamente. Intorno alla sorgente centrale sono disposte sei aperture ( $a, b, c, a', b', c'$ ) e i fotoni possono emergere sia dalle aperture  $a, b, c$  che dalle aperture  $a', b', c'$  (sia le aperture del primo set che quelle del secondo set si trovano ad una distanza

angolare di  $120^\circ$  tra loro). Lo stato dei fotoni dopo l'apertura è:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |a\rangle_1 |b\rangle_2 |c\rangle_3 + |a'\rangle_1 |b'\rangle_2 |c'\rangle_3 \right]. \quad (3.47)$$

All'uscita delle aperture i fotoni (sia quelli provenienti dal primo set, sia quelli provenienti dal secondo set) incontrano un divisore di fascio e vengono rilevati dai detector  $d, e, f, d', e', f'$ . Lo stato del fotone in uscita dalle porte  $a, a'$ , e analogamente per le altre porte, è dato dalle seguenti sovrapposizioni:

$$\begin{cases} |a\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |d\rangle_1 + i |d'\rangle_1 \right] \\ |a'\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi_1} \left[ |d'\rangle_1 + i |d\rangle_1 \right] \end{cases}. \quad (3.48)$$

Combinando gli stati in uscita dei fotoni dalle sei porte con lo stato (3.47), si ottiene la seguente combinazione di otto termini

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = \frac{1}{4} \left[ & (1 - ie^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}) |d\rangle_1 |e\rangle_2 |f\rangle_3 + (i - e^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}) |d\rangle_1 |e\rangle_2 |f'\rangle_3 \right. \\ & + (i - e^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}) |d\rangle_1 |e'\rangle_2 |f\rangle_3 + (-1 + ie^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}) |d\rangle_1 |e'\rangle_2 |f'\rangle_3 \\ & + (i - e^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}) |d'\rangle_1 |e\rangle_2 |f\rangle_3 + (-1 + ie^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}) |d'\rangle_1 |e\rangle_2 |f'\rangle_3 \\ & \left. + (-1 + ie^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}) |d'\rangle_1 |e'\rangle_2 |f\rangle_3 + (-i + e^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}) |d'\rangle_1 |e'\rangle_2 |f'\rangle_3 \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

da cui è possibile ricavare la probabilità di rilevazione dei tre fotoni da parte di una delle otto possibili configurazioni dei rilevatori come il modulo quadro dell'ampiezza. Si riporta per completezza l'esempio del calcolo per la combinazione di rilevatori  $d, e, f$ :

$$\begin{aligned} P_{def}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= \left| \frac{1}{4} (1 - ie^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}) \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} \left[ (1 + \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3))^2 + (-\cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3))^2 \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[ 1 + \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ripetendo lo stesso procedimento per tutti i termini si nota che la probabilità di rilevazione è uguale a quella appena trovata se si considera un numero pari di rilevatori con apice (quindi o zero o due), mentre il seno ha segno opposto negli altri casi. Assegnando il valore  $+1$  alla rilevazione con un numero pari di rilevatori designati dall'apice e  $-1$  agli altri, è possibile ricavare il valore di aspettazione dei prodotti degli esiti come:

$$\begin{aligned} E(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) &= P_{def}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) + P_{d'e'f'}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) + P_{d'ef}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ &+ P_{de'f}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) - P_{def'}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) - P_{de'f'}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ &- P_{d'ef'}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) - P_{d'e'f}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Anche in questo caso, è possibile evidenziare le combinazioni di perfetta correlazione:

$$\begin{aligned} E(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) &= +1 \quad \text{se} \quad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi/2 \\ E(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) &= -1 \quad \text{se} \quad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 3\pi/2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Seguendo il ragionamento ampiamente descritto in precedenza per il caso con quattro particelle, si potrebbe ipotizzare una dipendenza delle funzioni che restituiscono il risultato della misura dei rilevatori  $(A_\lambda(\phi_1), B_\lambda(\phi_2), C_\lambda(\phi_3))$  dalla variabile nascosta  $\lambda$ . Per particolari scelte degli angoli  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , correlate alle relazioni (3.52), si può scrivere che:

$$\begin{cases} A_\lambda(\pi/2)B_\lambda(0)C_\lambda(0) = +1 \\ A_\lambda(0)B_\lambda(\pi/2)C_\lambda(0) = +1 \\ A_\lambda(0)B_\lambda(0)C_\lambda(\pi/2) = +1 \end{cases} \quad (3.53)$$

Moltiplicando tra di loro queste tre espressioni si ottiene che:

$$\begin{aligned} A_\lambda(\pi/2)B_\lambda(0)C_\lambda(0)A_\lambda(0)B_\lambda(\pi/2)C_\lambda(0)A_\lambda(0)B_\lambda(0)C_\lambda(\pi/2) &= \\ A_\lambda(\pi/2)B_\lambda(\pi/2)C_\lambda(\pi/2) &= +1. \end{aligned} \quad (3.54)$$

In questo caso la somma dei tre angoli  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  è  $3\pi/2$  e, come previsto, tale relazione entra in conflitto con la seconda delle espressioni (3.52) che prevede che il prodotto degli esiti delle misurazioni dei rilevatori sia pari a  $-1$  se la somma degli angoli è  $3\pi/2$ . Questo equivale ad affermare che:

$$\Lambda_4 \subseteq \bar{\Lambda}_1 \cup \bar{\Lambda}_2 \cup \bar{\Lambda}_3 \quad (3.55)$$

dove  $\Lambda_1$  è l'insieme di tutte le variabili  $\lambda$  tale per cui vale la prima delle (3.53),  $\Lambda_2$  è l'insieme di tutte le variabili  $\lambda$  tale per cui vale la seconda delle (3.53),  $\Lambda_3$  è l'insieme di tutte le variabili  $\lambda$  tale per cui vale la terza delle (3.53) e  $\Lambda_4$  è l'insieme di tutte le variabili  $\lambda$  tale per cui vale  $A_\lambda(\pi/2)B_\lambda(\pi/2)C_\lambda(\pi/2) = -1$ . Esprimendo tutto in termini della misura di probabilità  $\rho$  (definita su tutto lo spazio delle variabili nascoste), e facendo uso di relazioni insiemistiche, si giunge alla seguente disuguaglianza

$$\rho(\Lambda_4) \leq \rho(\bar{\Lambda}_1) + \rho(\bar{\Lambda}_2) + \rho(\bar{\Lambda}_3). \quad (3.56)$$

Per rendere la (3.56) testabile, è necessario collegarla a quantità misurabili sperimentalmente; in particolare, la probabilità  $\rho(\Lambda_1)$  (per  $\phi_1 = \pi/2, \phi_2 = 0, \phi_3 = 0$ ) sarà data dal quoziente tra il numero di conteggi in coincidenza per cui il prodotto degli esiti delle misurazioni è  $+1$  e il numero totale di triplette di particelle rilevati. Analogamente si definiscono  $\rho(\Lambda_2)$  e  $\rho(\Lambda_3)$  con angoli  $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi/2, \phi_3 = 0$  e  $\phi_1 = 0, \phi_2 = 0, \phi_3 = \pi/2$  rispettivamente. Per  $\rho(\Lambda_4)$  si scelgono gli angoli  $\phi_1 = \pi/2, \phi_2 = \pi/2, \phi_3 = \pi/2$  e si divide il numero di conteggi per cui il prodotto degli esiti è  $-1$  per il numero totale di rilevatori attivati.

Quanto illustrato mette quindi in crisi l'argomento EPR e i principi formulati da Einstein, Podolsky e Rosen (*Principio di località*, *Principio di realtà*, *Principio di completezza*). Dal momento che, in base a quanto visto fino ad ora, è possibile predire il valore dell'osservabile  $A_\lambda(\phi_1)$  con certezza conoscendo i valori di  $B_\lambda(\phi_2)$ ,  $C_\lambda(\phi_3)$  e degli angoli relativi ai divisori di fascio, senza disturbare in alcun modo la particella direzionata alle aperture  $a$  e  $a'$ , allora  $A_\lambda(\phi_1)$  è un elemento della realtà (in base al ragionamento proposto da Einstein, Podolsky e Rosen). Inoltre il risultato di  $A_\lambda(\phi_1)$ , per il *Principio di località*, non può dipendere in alcun modo dalle misure di  $B_\lambda(\phi_2)$  e  $C_\lambda(\phi_3)$  e dai rispettivi angoli. Analogamente, ripetendo il ragionamento,  $B_\lambda(\phi_2)$  e  $C_\lambda(\phi_3)$  sono essi stessi elementi della realtà. In particolare  $A_\lambda(\pi/2)$ ,  $B_\lambda(\pi/2)$ ,  $C_\lambda(\pi/2)$ ,  $A_\lambda(0)$ ,  $B_\lambda(0)$ ,  $C_\lambda(0)$  sono elementi della realtà. Dal momento che la predizione della meccanica quantistica per cui  $A_\lambda(\pi/2)B_\lambda(\pi/2)C_\lambda(\pi/2) = -1$  entra in evidente contrasto con l'equazione  $A_\lambda(\pi/2)B_\lambda(\pi/2)C_\lambda(\pi/2) = +1$  ricavata matematicamente, si giunge alla conclusione che, se la meccanica quantistica è corretta, il *Principio di località*, e di conseguenza il *Principio di realtà*, non possono essere validi in una trattazione quantistica e, più precisamente, nella descrizione di un fenomeno come l'entanglement.

### 3.3.3 Realizzazione dell'esperimento GHZ

L'esperimento GHZ realizzato viene descritto in un articolo pubblicato nel 2000 [17]. La produzione dei tre fotoni entangled avviene con lo stesso procedimento illustrato nel paragrafo 3.3.1, e quindi tramite un cristallo non lineare (*BBO* in figura 3.7) bombardato con un impulso ultravioletto che all'andata produce i primi due fotoni e al ritorno produce il terzo fotone dello stato GHZ e il fotone di "trigger" (rilevato da  $T$ ) che conferma la creazione della seconda coppia.

L'esperimento consiste nella realizzazione di tre differenti misurazioni della correlazione tra le polarizzazioni dei fotoni che permettono di fare previsioni riguardo all'eventuale esito di una quarta misurazione. Partendo dallo stato entangled dei tre fotoni GHZ

$$|\psi\rangle = \frac{|H\rangle_1 |H\rangle_2 |H\rangle_3 + |V\rangle_1 |V\rangle_2 |V\rangle_3}{\sqrt{2}} \quad (3.57)$$

(dove  $H$  indica polarizzazione orizzontale e  $V$  indica polarizzazione verticale), si considerino misurazioni lungo la direzione  $H'/V'$  (denotata con  $x$  da qui in avanti) ruotata di  $45^\circ$  rispetto a quella  $H/V$  e misurazioni della polarizzazione circolare  $L/R$  (denotata con  $y$  da qui in avanti), che possono essere espresse in termini della polarizzazione iniziale come:

$$\begin{aligned} |H'\rangle &= \frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}, & |V'\rangle &= \frac{|H\rangle - |V\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |R\rangle &= \frac{|H\rangle + i|V\rangle}{\sqrt{2}}, & |L\rangle &= \frac{|H\rangle - i|V\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

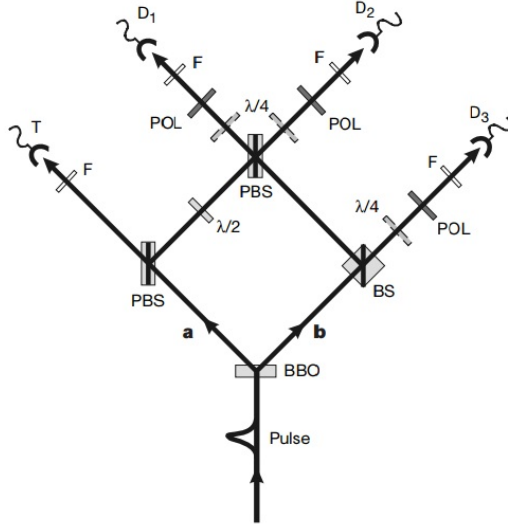


Figura 3.7: In figura è mostrato l'apparato sperimentale costituito da un cristallo non lineare (BBO), un beam splitter (BS), due beam splitter polarizzanti (PBS), quattro rivelatori ( $T, D_1, D_2, D_3$ ), tre polarizzatori (POL).

Per il primo esperimento si consideri una misura  $yyx$ , cioè di polarizzazione circolare sui fotoni 1 e 2 e di polarizzazione lineare sul fotone 3. Effettuando un cambio di base nell'equazione (3.57) utilizzando le espressioni (3.58), è possibile esprimere lo stato  $|\psi\rangle$  come

$$|\psi\rangle = \frac{|R\rangle_1 |L\rangle_2 |H'\rangle_3 + |L\rangle_1 |R\rangle_2 |H'\rangle_3 + |R\rangle_1 |R\rangle_2 |V'\rangle_3 + |L\rangle_1 |L\rangle_2 |V'\rangle_3}{2} \quad (3.59)$$

considerando che

$$|H\rangle = \frac{|R\rangle + |L\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |V\rangle = \frac{|R\rangle - |L\rangle}{\sqrt{2}i}. \quad (3.60)$$

Dalla (3.59) è facile notare che, dati i risultati delle misurazioni di due fotoni qualsiasi, è possibile predire con certezza il risultato della misurazione sull'altro fotone del tripletto. Si possono ottenere espressioni analoghe anche per gli esperimenti  $xyx$  (polarizzazione circolare sui fotoni 1 e 3 e polarizzazione lineare sul fotone 2) e  $xyy$  (polarizzazione circolare sui fotoni 2 e 3 e polarizzazione lineare sul fotone 1):

$$|\psi\rangle = \frac{|L\rangle_1 |H'\rangle_2 |R\rangle_3 + |R\rangle_1 |H'\rangle_2 |L\rangle_3 + |R\rangle_1 |V'\rangle_2 |R\rangle_3 + |L\rangle_1 |V'\rangle_2 |L\rangle_3}{2}, \quad (3.61)$$

$$|\psi\rangle = \frac{|H'\rangle_1 |R\rangle_2 |L\rangle_3 + |H'\rangle_1 |L\rangle_2 |R\rangle_3 + |V'\rangle_1 |R\rangle_2 |R\rangle_3 + |V'\rangle_1 |L\rangle_2 |L\rangle_3}{2}.$$

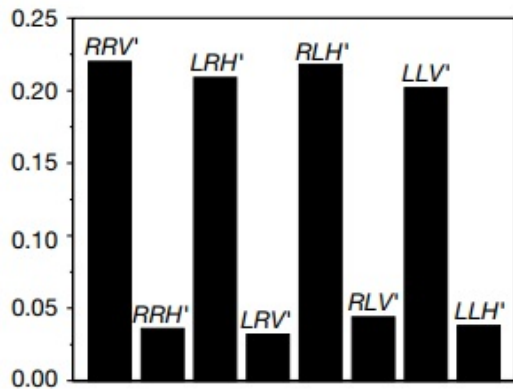
Dal momento che, per l'argomento EPR, nessuna misurazione effettuata su un fotone può dipendere dagli esiti delle altre misure sugli altri fotoni (per il *Principio di località*), allora

ogni fotone “contiene” gli elementi della realtà associati alle misurazioni di polarizzazione circolare e lineare che determinano le predizioni specifiche (3.59) e (3.61). L’elemento della realtà associato alla polarizzazione lineare  $H'(V')$  è  $X_i$  con valori  $+1(-1)$ ; l’elemento della realtà associato alla polarizzazione circolare  $R(L)$  è  $Y_i$  con valori  $+1(-1)$ . Affinchè le predizioni fatte siano rispettate devono valere  $Y_1Y_2X_3 = -1$ ,  $Y_1X_2Y_3 = -1$ ,  $X_1Y_2Y_3 = -1$ , quindi, indipendentemente dal valore di  $Y_i$ ,  $X_i = -1$ . Considerando un esperimento del tipo  $xxx$  (con tutti e tre i fotoni polarizzati linearmente), il realismo locale prevede che  $X_1X_2X_3 = -1$  e quindi ammette solo risultati del tipo  $V'V'V'$ ,  $H'V'H'$ ,  $V'H'H'$ ,  $H'H'V'$ ; dall’altro lato, la meccanica quantistica prevede il seguente risultato:

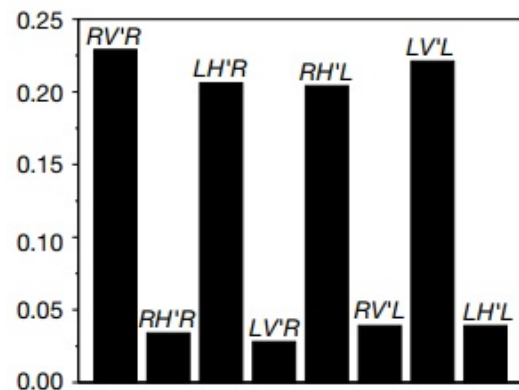
$$|\psi\rangle = \frac{|H'\rangle_1 |H'\rangle_2 |H'\rangle_3 + |H'\rangle_1 |V'\rangle_2 |V'\rangle_3 + |V'\rangle_1 |H'\rangle_2 |V'\rangle_3 + |V'\rangle_1 |V'\rangle_2 |H'\rangle_3}{2}. \quad (3.62)$$

I risultati ottenuti per i primi tre esperimenti  $yyx, yxy, xyy$  sono riportati in figura 3.8 e mostrano che in una frazione pari allo  $0.85 \pm 0.04$  dei casi totali si osservano le predizioni della meccanica quantistica (3.59) e (3.61), mentre nella restante frazione dei casi ( $0.15 \pm 0.02$ ) si osservano eventi spuri. In questo caso si assume che gli eventi spuri siano dovuti semplicemente ad errori inevitabili durante l’esperimento.

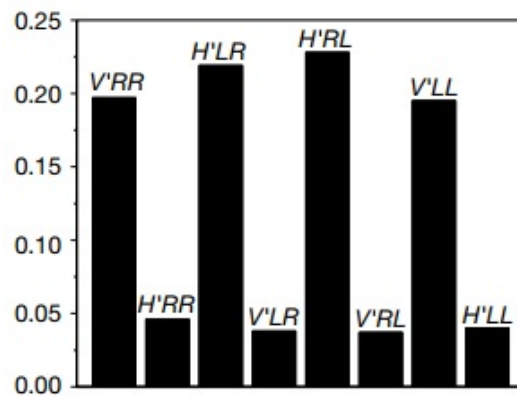
In figura 3.9 sono invece riportati i risultati per l’esperimento  $xxx$  con la misurazione della polarizzazione lineare per tutti e tre i fotoni, confrontati con la previsione quantomeccanica (3.62) e la previsione derivata dal realismo locale. Assumendo che gli eventi spuri siano dovuti non ad errori durante la misurazione, ma ad una deviazione effettiva del comportamento dei fotoni GHZ dalla meccanica quantistica, si può conoscere in che modo il realismo locale può riprodurre i risultati in figura 3.9.c. Si consideri ad esempio che l’evento  $H'H'H'$  sia riprodotto da un insieme di variabili nascoste tali per cui si abbiano eventi in accordo con la meccanica quantistica sia nell’esperimento  $xyy$  ( $H'LR$ ) che nell’esperimento  $yxy$  ( $LH'R$ ), ed eventi spuri per l’esperimento  $yyx$  ( $LLH'$ ). Allora ogni previsione data dal realismo locale per un evento previsto dalla meccanica quantistica nell’esperimento  $xxx$  farebbe uso di almeno un evento spurio delle misurazioni degli altri esperimenti e di due eventi corretti. In questo caso la frazione di eventi corretti per il realismo locale sarebbe data al massimo dalla somma degli eventi spuri degli esperimenti  $yyx, yxy, xyy$  che è pari allo  $0.45 \pm 0.03$  degli eventi totali. Dal grafico però, risulta evidente che la frazione dei casi in accordo con le previsioni quantomeccaniche per l’esperimento  $xxx$  è di  $0.87 \pm 0.04$ . Pertanto gli eventi spuri non rappresentano una deviazione del comportamento dei fotoni GHZ verso il realismo locale (o comunque una deviazione generale dalla meccanica quantistica), poiché i risultati violano questa possibilità con uno scarto di circa 8 deviazioni standard.



(a) Risultati dell'esperimento con polarizzazioni  $yyx$

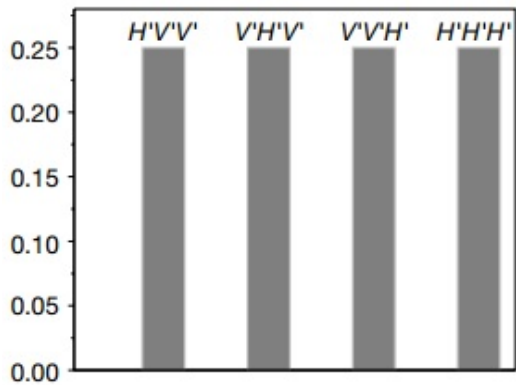


(b) Risultati dell'esperimento con polarizzazioni  $xy$

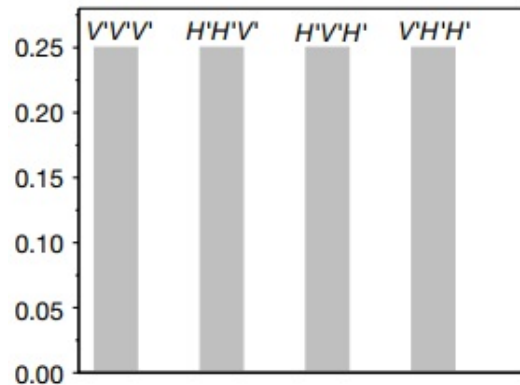


(c) Risultati dell'esperimento con polarizzazioni  $xy$

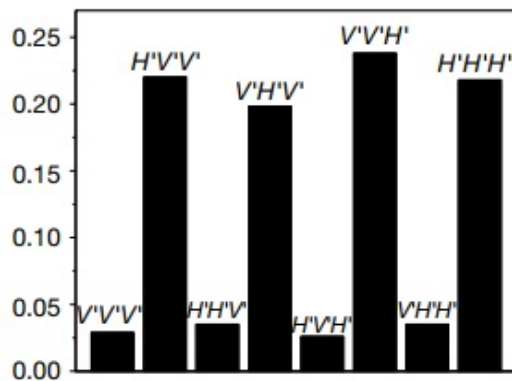
Figura 3.8: Risultati ottenuti per i primi 3 esperimenti, in particolare frazioni ottenute per le previsioni (3.59) e (3.61).



(a) Previsioni per l'esperimento  $xxx$  ricavate con una trattazione quantomeccanica.



(b) Previsioni per l'esperimento  $xxx$  ricavate dall'argomento EPR.



(c) Risultati effettivamente ottenuti per l'esperimento  $xxx$

Figura 3.9: I grafici mettono a confronto le previsioni della meccanica quantistica e del realismo locale con i risultati effettivi dell'esperimento.



# Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi era quello di mettere in luce un fenomeno quantistico (l'entanglement) di grande importanza dal punto di vista storico, ma soprattutto dal punto di vista fisico. Si è scelto infatti di ripercorrere le tappe principali del percorso che ha portato questo fenomeno dall'essere una "sinistra azione a distanza" all'essere la motivazione del conferimento di un Premio Nobel molto recente (2022). È proprio l'assegnazione di questo prestigioso premio in tempi così recenti che sottolinea come la meccanica quantistica e l'entanglement quantistico siano delle teorie giovani e ancora in fase di sviluppo che stanno trovando applicazione proprio in questo periodo.

Le peculiarità che caratterizzano la meccanica quantistica e l'entanglement quantistico, come ad esempio la possibilità di teletrasportare uno stato quantistico da una particella all'altra, sono infatti al centro di numerosi studi che hanno permesso la realizzazione di calcolatori ed algoritmi molto più potenti ed efficienti di quelli realizzati tramite le leggi della fisica classica. Per citare un esempio, si può prendere in considerazione l'algoritmo di Deutsch-Jozsa che permette di stabilire se una funzione  $f(x)$  (con  $x$  numero tra 0 e  $2^n - 1$ ) è costante (quindi sempre uguale a 0 o a 1) o bilanciata (quindi uguale a 0 nella metà dei casi e uguale a 1 nella restante metà) con solo una iterazione (per risolvere lo stesso problema in modo classico sarebbero necessarie  $2^n/2 + 1$  iterazioni). La scienza dell'informazione quantistica, quindi, sta trovando nuove applicazioni che potrebbero avere un grande impatto nella fisica moderna.

# Appendice A

## Anelli Borromei e stato GHZ

Prima di descrivere l'analogia tra stato GHZ e gli Anelli Borromei è necessario introdurre il concetto di operatore densità.

**Operatore Densità.** *Si consideri un sistema quantistico in uno degli stati descritti dal set  $|\psi_i\rangle$ , ognuno con la rispettiva probabilità  $p_i$ . L'insieme  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$  è detto ensemble di stati puri. L'operatore densità per il sistema è definito come*

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (\text{A.1})$$

Se  $p_i = 1$  per un dato indice  $i$ , allora la matrice densità

$$\rho = |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (\text{A.2})$$

descrive uno stato puro corrispondente al vettore di stato  $|\psi_i\rangle$ ; in ogni altro caso, l'operatore  $\rho$  rappresenta uno stato misto. Un sistema quantistico si trova in uno stato puro quando il suo stato  $|\psi\rangle$  è conosciuto in modo esatto a priori (in questo caso l'entropia di Von Neumann<sup>1</sup> è nulla). Un sistema è descritto da uno stato misto quando si trova in una sovrapposizione di stati puri, ognuno con una certa probabilità; in questo caso lo stato esatto è conosciuto solo dopo il collasso della funzione d'onda, ovvero dopo la misurazione del sistema.

L'operatore densità è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1. ha traccia unitaria,  $Tr(\rho) = 1$ ;
2. è un operatore positivo,  $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \geq 0$ .

Si può quindi affermare che un operatore  $\rho$  è un operatore densità per l'ensemble  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$  se e solo se soddisfa le due condizioni descritte sopra.

---

<sup>1</sup>Nell'Appendice C verranno trattate brevemente l'entropia di Shannon per l'informazione classica e l'entropia di Von Neumann per l'informazione quantistica

**Operatore Densità Ridotto.** Dato un sistema fisico composto dai sottosistemi  $A$  e  $B$ , il cui stato è descritto dall'operatore  $\rho^{AB}$ , allora l'operatore densità ridotto è definito come

$$\rho^A = Tr_B(\rho^{AB}). \quad (\text{A.3})$$

Nell'espressione (A.3)  $Tr_B$  è la traccia parziale sul sottosistema  $B$  data da:

$$Tr_B = (|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) = |a_1\rangle \langle a_2| Tr(|b_1\rangle \langle b_2|) \quad (\text{A.4})$$

con  $|a_1\rangle, |a_2\rangle, |b_1\rangle, |b_2\rangle$  vettori degli stati  $A$  e  $B$ .

Alla luce delle definizioni date, uno stato misto è separabile se può essere scomposto attraverso l'operatore densità nel seguente modo:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B. \quad (\text{A.5})$$

Uno stato misto non separabile è uno stato entangled e l'entropia di entanglement è diversa da zero.

Secondo il fisico P. K. Aravind esiste una analogia tra lo stato entangled GHZ e gli Anelli Borromei, una particolare struttura topologica [18]. Si consideri lo stato GHZ come definito nell'equazione (3.36). Si consideri inoltre la misura di uno dei tre qubit. Allora, lo stato risultante dal collasso della funzione d'onda (o  $|000\rangle$  o  $|111\rangle$ ), risulta essere uno stato completamente separabile e quindi non più uno stato entangled. In particolare, l'azione della misura consiste nell'“eliminare” il qubit relativo allo stato  $A$  (il primo qubit) trovando l'operatore densità ridotto.

*Dimostrazione.* Innanzitutto si calcola l'operatore densità per lo stato GHZ:

$$\rho_{GHZ} = |GHZ\rangle \langle GHZ| = \frac{1}{2} \left[ |000\rangle \langle 000| + |000\rangle \langle 111| + |111\rangle \langle 000| + |111\rangle \langle 111| \right]. \quad (\text{A.6})$$

Dato  $\rho_{GHZ}$ , l'operatore densità ridotto degli stati  $B$  e  $C$  si ricava nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\rho_{BC} &= Tr_A(\rho_{GHZ}) \\
&= \frac{1}{2} \left[ Tr_A(|000\rangle \langle 000|) + Tr_A(|000\rangle \langle 111|) + Tr_A(|111\rangle \langle 000|) + Tr_A(|111\rangle \langle 111|) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ |00\rangle \langle 00| Tr |0\rangle \langle 0| + |00\rangle \langle 11| Tr |0\rangle \langle 1| \right. \\
&\quad \left. + |11\rangle \langle 00| Tr |1\rangle \langle 0| + |11\rangle \langle 11| Tr |1\rangle \langle 1| \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ |00\rangle \langle 00| \langle 0|0\rangle + |00\rangle \langle 11| \langle 1|0\rangle + |11\rangle \langle 00| \langle 0|1\rangle + |11\rangle \langle 11| \langle 1|1\rangle \right] \\
&= \frac{|00\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11|}{2}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

□

Si considerino ora gli Anelli Borromei in figura A.1, una struttura topologica che, nella teoria dei nodi, rappresenta un nodo banale (intuitivamente un nodo banale può essere visualizzato come una corda chiusa non annodata su se stessa e quindi sciolta). La proprietà degli Anelli Borromei di essere un nodo banale si riscontra nel fatto che,

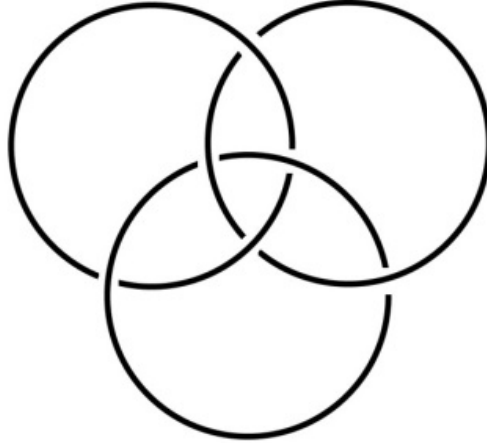


Figura A.1: *Anelli Borromei.*

tagliando uno dei tre anelli, automaticamente tutta la struttura risulta essere scollegata; tagliando un anello (e quindi misurando il primo qubit attraverso la traccia ridotta dell'operatore densità totale sullo stato  $A$ ), si trovano due anelli non più intrecciati, ma

separati (dopo aver misurato il primo qubit il sistema collassa in uno stato separabile). I tre qubit dello stato GHZ possono quindi essere visti come i tre anelli della struttura Borromea che vengono sciolti dopo un taglio (misura).

È possibile dimostrare che questa analogia tra lo stato GHZ e gli Anelli Borromei dipende dalla base scelta per effettuare la misura [19]. Scegliendo infatti gli operatori di proiezione

$$P_+ = |+\rangle \langle +| \quad P_- = |-\rangle \langle -| \quad (\text{A.8})$$

dove  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  e  $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ , lo stato GHZ può essere scritto nel seguente modo:

$$|GHZ\rangle = \frac{|+00\rangle + |+11\rangle + |-00\rangle - |-11\rangle}{2}. \quad (\text{A.9})$$

In questo caso infatti, dopo la misura, il sistema può collassare o nello stato

$$|\psi\rangle_1 = |+00\rangle + |+11\rangle = |+\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \quad (\text{A.10})$$

o nello stato

$$|\psi\rangle_2 = |-00\rangle - |-11\rangle = |-\rangle \otimes (|00\rangle - |11\rangle). \quad (\text{A.11})$$

In entrambi i casi è evidente che gli stati  $B$  e  $C$  sono ancora stati entangled non separabili.

## Appendice B

# Distanza tra stati quantistici: distanza di traccia, fidelity e negativity

Quando si ha a che fare con la teoria dell'informazione (sia classica che quantistica) è utile poter stabilire quanto due diverse informazioni hanno in comune (quanto sono simili tra di loro) e quanto bene una informazione è preservata durante un determinato processo (quanta parte dell'informazione originaria viene effettivamente lasciata immutata durante la trasmissione e quanta invece viene distorta a causa di eventi che la disturbano). Nel primo caso si ha a che fare con una misura statica, mentre nel secondo caso con una misura dinamica. In questo paragrafo verranno trattate la distanza di traccia e la fidelity che sono esempi di misure statiche [20].

Nel caso in cui si consideri un'informazione classica, questa può essere descritta da una variabile aleatoria e quindi da una distribuzione di probabilità. Confrontare due sorgenti di informazione significa quindi mettere a confronto due distribuzioni di probabilità  $\{p_x\}$  e  $\{q_x\}$  utilizzando la distanza di traccia

$$D(p_x, q_x) = \frac{1}{2} \sum_x |p_x - q_x|. \quad (\text{B.1})$$

Questa distanza risulta essere una metrica poiché si può dimostrare che è simmetrica ( $D(p_x, q_x) = D(q_x, p_x)$ ) e che è soddisfatta la disuguaglianza triangolare ( $D(p_x, p_z) \leq D(p_x, p_y) + D(p_y, p_z)$ ).

Per quanto riguarda l'informazione quantistica, le distribuzioni di probabilità sono sostituite dagli operatori densità  $\rho$  e  $\sigma$  definiti nell'Appendice A e la distanza di traccia diventa allora

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr}|\rho - \sigma| \quad (\text{B.2})$$

dove  $|\rho - \sigma| = \sqrt{(\rho - \sigma)^\dagger(\rho - \sigma)}$ . Si può dimostrare che, se gli operatori densità commutano tra di loro, la distanza di traccia tra  $\rho$  e  $\sigma$  corrisponde alla distanza di traccia tra gli autovalori degli stessi operatori densità. Come nel caso classico, anche nel caso quantistico è possibile dimostrare che la distanza di traccia è una metrica, infatti  $D(\rho, \sigma) = D(\sigma, \rho)$ ,  $D(\rho, \sigma) = 0$  se e solo se  $\sigma = \rho$  e  $D(\rho, \tau) \leq D(\rho, \sigma) + D(\sigma, \tau)$ .

Ricordando che l'informazione classica è descritta da variabili aleatorie e quindi da distribuzioni di probabilità, si può introdurre un'altra misura accanto alla distanza di traccia, che è la fidelity

$$F(p_x, q_x) = \sum_x \sqrt{p_x q_x}. \quad (\text{B.3})$$

La prima differenza tra fidelity e distanza di traccia è che la fidelity non rappresenta una metrica in quanto è facile notare che, se  $\{p_x\} = \{q_x\}$  allora

$$F(p_x, q_x) = \sum_x \sqrt{p_x p_x} = \sum_x p_x = 1. \quad (\text{B.4})$$

Nel trattare l'informazione quantistica, la fidelity è definita come

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr} \sqrt{\rho^{\frac{1}{2}} \sigma \rho^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{B.5})$$

Come per la distanza di traccia nel caso quantistico, anche per la fidelity è valida l'uguaglianza tra l'espressione appena definita e la fidelity calcolata tra gli autovalori degli operatori densità in esame.

Anche nel caso quantistico, la fidelity non è una metrica, ma gode delle seguenti proprietà:

1. è simmetrica  $F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho)$ ;
2. è limitata  $0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$ ;
3.  $F(\rho, \sigma) = 0$  se e solo se  $\rho$  e  $\sigma$  appartengono a sottospazi ortogonali.

È possibile trovare una espressione semplificata quando uno dei due stati è puro (definizione nell'Appendice A), e quindi  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , e l'altro è descritto dall'operatore densità  $\sigma$ . In questo caso si ha che

$$F(|\psi\rangle, \sigma) = \text{Tr} \sqrt{|\psi\rangle\langle\psi| \sigma |\psi\rangle\langle\psi|} = \sqrt{\langle\psi| \sigma |\psi\rangle}. \quad (\text{B.6})$$

Se entrambi gli stati sono puri ( $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  e  $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$ ) allora la fidelity diventa

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \sqrt{\langle\psi|\phi\rangle\langle\psi|\phi\rangle} = |\langle\psi|\phi\rangle|. \quad (\text{B.7})$$

Qualitativamente la fidelity aumenta quando quando gli stati coinvolti sono meno distinguibili e diminuisce quando gli stessi sono più distinguibili (e quindi più distanti)

tra loro per contenuto di informazione); la distanza di traccia si comporta inversamente. È possibile collegare fidelity e distanza di traccia con le disuguaglianze di Fuchs–van de Graaf

$$1 - F(\rho, \sigma) \leq D(\rho, \sigma) \leq \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)^2} \quad (\text{B.8})$$

che mostrano come la distanza di traccia fornisca un limite inferiore e un limite superiore alla fidelity e come le due misure siano qualitativamente equivalenti.

Insieme a distanza di traccia e fidelity è possibile definire un'altra misura che è la negativity; questa è una funzione che descrive la “quantità” di entanglement in un dato stato quantistico  $\rho$ . La negativity è data dalla seguente espressione

$$N(\rho) = \frac{\text{Tr}|\rho^{TA}| - 1}{2} \quad (\text{B.9})$$

dove  $|\rho^{TA}| = \sqrt{(\rho^{TA})^\dagger \rho^{TA}}$  e  $\rho^{TA}$  è la matrice trasposta parziale di  $\rho$  rispetto al sottosistema  $A$  ( $\rho$  è la matrice densità del sistema quantistico composto da due sottosistemi  $A$  e  $B$ ). Analogamente la negativity può essere definita come

$$N(\rho) = \sum_i \frac{|\lambda_i| - \lambda_i}{2} \quad (\text{B.10})$$

dove  $\lambda_i$  sono gli autovalori negativi della matrice densità  $\rho^{TA}$  (si considerano solo gli autovalori negativi perché si può dimostrare, per il criterio di Peres–Horodecki, che se  $\rho^{TA}$  ha autovalori non negativi allora il sistema  $\rho$  è separabile, mentre se  $\rho^{TA}$  ha autovalori negativi allora il sistema è entangled).



# Appendice C

## Incertezza in uno stato quantistico: entropia di informazione

Nella teoria dell'informazione l'incertezza associata ad uno stato di un sistema fisico è legata all'entropia del sistema stesso. In particolare, per quanto riguarda l'informazione classica, si parla di entropia di Shannon, mentre l'analogo quantistico è l'entropia di Von Neumann [20].

L'entropia di Shannon

$$H(X) = H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_x p_x \log p_x \quad (\text{C.1})$$

permette di quantificare l'ammontare di informazione che si ottiene conoscendo il valore esatto della variabile aleatoria  $X$  che descrive l'informazione classica. Allo stesso modo l'entropia indica anche da quanta incertezza è caratterizzata questa variabile prima di conoscerne il suo valore esatto.

Nell'espressione (C.1) viene messa in evidenza la dipendenza dell'entropia dalla distribuzione di probabilità della variabile  $X$  (escludendo quindi la dipendenza dalla singola variabile specifica che si considera); le  $p_1, \dots, p_n$  rappresentano le probabilità di tutti i valori diversi possibili che  $X$  può assumere. Le  $p_n$  soddisfano le usuali proprietà della probabilità classica:

$$\sum_n p_n = 1, \quad 0 \leq p_n \leq 1. \quad (\text{C.2})$$

Nell'espressione (C.1) inoltre, il logaritmo che compare è in base due poiché classicamente l'informazione è codificata da un certo numero di bit che possono assumere i valori 0 o 1. È importante sottolineare che se la probabilità di un evento è nulla, allora si ha che l'entropia è nulla, in modo più formale vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0. \quad (\text{C.3})$$

A partire dalla definizione di entropia di Shannon è possibile ricavare le seguenti definizioni.

**Entropia binaria.** *Si definisce entropia binaria l'entropia di una variabile aleatoria con solo due possibili esiti:*

$$H_{bin}(p) = -p \log(p) - (1 - p) \log(1 - p) \quad (C.4)$$

con  $p$  e  $1 - p$  probabilità dei due possibili esiti.

**Entropia relativa.** *Si definisce entropia relativa la misura della distanza tra due distribuzioni di probabilità della stessa variabile:*

$$H(p(x)||q(x)) = \sum_x p(x) \log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = -H(X) - \sum_x p(x) \log q(x) \quad (C.5)$$

con  $p(x)$  e  $q(x)$  distribuzioni di probabilità differenti sullo stesso indice  $x$ .

**Entropia condizionale.** *Si definisce entropia condizionale la misura dell'incertezza sul valore della variabile aleatoria  $X$  dato il valore della variabile aleatoria  $Y$ :*

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) \quad (C.6)$$

dove  $H(X, Y) = -\sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y)$  è l'entropia congiunta di  $X$  e  $Y$ , ovvero l'incertezza totale sul valore della coppia di variabili aleatorie  $X$  e  $Y$ .

**Informazione mutuale.** *Si definisce informazione mutuale di due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  la misura di quanta informazione condividono le due variabili:*

$$H(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = H(X) - H(X|Y). \quad (C.7)$$

Date queste definizioni, l'entropia di Shannon soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $H(X, Y) = H(Y, X)$  e  $H(X : Y) = H(Y : X)$ ;
2.  $H(Y|X) \geq 0$  e  $H(X : Y) \leq H(Y)$  con uguaglianza se e solo se  $Y = f(X)$ ;
3.  $H(X) \leq H(X, Y)$  con uguaglianza se e solo se  $Y = f(X)$ ;
4.  $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$  con uguaglianza se e solo se  $X$  e  $Y$  sono variabili aleatorie indipendenti;
5.  $H(Y|X) \leq H(Y)$  e  $H(X : Y) \geq 0$  con uguaglianza se e solo se  $X$  e  $Y$  sono variabili aleatorie indipendenti;

6.  $H(X, Y, Z) + H(Y) \leq H(X, Y) + H(Y, Z)$  con uguaglianza se e solo se  $Z \rightarrow Y \rightarrow X$  è un processo per cui la probabilità di ogni evento dipende solo dallo stato raggiunto nell'evento precedente;
7.  $H(X|Y, Z) \leq H(X|Y)$ .

Per quanto riguarda l'informazione quantistica, questa è codificata da un certo numero di qubit ( $|0\rangle, |1\rangle$ ) e le distribuzioni di probabilità che definivano l'informazione classica e l'entropia di Shannon sono sostituite dagli operatori densità definiti nell'Appendice A. L'entropia di Shannon trova il suo analogo nell'entropia di Von Neumann definita come segue:

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho). \quad (C.8)$$

Questa espressione può essere riformulata usando gli autovalori della matrice densità  $\rho$ ,  $\lambda_x$ :

$$S(\rho) = - \sum_x \lambda_x \log \lambda_x. \quad (C.9)$$

Anche in questo caso è possibile definire la misura della distanza tra due operatori densità differenti  $\rho$  e  $\sigma$ .

#### Entropia relativa.

$$S(\rho||\sigma) = Tr(\rho \log \rho) - Tr(\rho \log \sigma). \quad (C.10)$$

*Questa relazione soddisfa la disuguaglianza di Klein  $S(\rho||\sigma) \geq 0$  in cui l'uguaglianza vale se e solo se  $\rho = \sigma$ .*

Si possono inoltre dare le definizioni di entropia congiunta, entropia condizionale e informazione mutuale.

**Entropia congiunta.** *Per un sistema composto da due stati  $A$  e  $B$ , si definisce entropia congiunta*

$$S(A, B) = -Tr(\rho_{AB} \log(\rho_{AB})). \quad (C.11)$$

**Entropia condizionale.** *Si definisce entropia condizionale*

$$S(A|B) = S(A, B) - S(B). \quad (C.12)$$

**Informazione mutuale.** *Si definisce informazione mutuale*

$$S(A : B) = S(A) + S(B) - S(A, B) = S(A) - S(A|B) = S(B) - S(B|A). \quad (C.13)$$

L'entropia di Von Neumann gode delle seguenti proprietà:

1. l'entropia è non negativa ed è pari a zero se e solo se lo stato è uno stato puro  $A$ ;

2. in uno spazio di Hilbert  $n$ -dimensionale l'entropia è al massimo  $\log n$ . L'entropia è esattamente uguale a  $\log n$  se e solo se il sistema è nello stato completamente misto  $I/n$ ;
3. se un sistema composto  $AB$  è in uno stato puro allora  $S(A) = S(B)$ ;
4. date  $p_i$  probabilità e  $\rho_i$  matrici densità corrispondenti ciascuna ad uno stato  $i$ , allora  $S(\sum_i p_i \rho_i) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i)$ ;
5. date  $p_i$  probabilità,  $|i\rangle$  stati ortogonali per il sistema  $A$  e  $\rho_i$  operatori densità per il sistema  $B$ , allora  $S(\sum_i p_i |i\rangle \langle i| \otimes \rho_i) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i)$ .

# Bibliografia

- [1] E. Schrödinger, “*Discussion of Probability Relations between Separated Systems,*” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 31, pp. 555–563, 1935.
- [2] —, “*Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik (The present situation in quantum mechanics),*” *Naturwissenschaften*, vol. 23.
- [3] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*” *Physical Review*, vol. 47, pp. 777–780, 1935.
- [4] D. Bohm, *Quantum Theory*. Prentice Hall, 1951.
- [5] J. S. Bell, “*On the Einstein Podolsky Rosen paradox,*” *Physics Publishing Co.*, vol. 1, pp. 195–200, 1964.
- [6] D. J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [7] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “*Proposed experiment to test local hidden-variable theories,*” *Physical Review Letters*, vol. 23, pp. 880–884, 1969.
- [8] S. J. Freedman and J. F. Clauser, “*Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories,*” *Physical Review Letters*, vol. 28, pp. 938–941, 1972.
- [9] J. F. Clauser and M. A. Horne, “*Experimental consequences of objective local theories,*” *Physical Review D*, vol. 10, pp. 526–535, 1974.
- [10] A. Aspect, “*Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics,*” *Physical Review D*, vol. 14, pp. 1944–1951, 1976.
- [11] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, “*Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers,*” *Physical Review Letters*, vol. 49, pp. 1804–1807, 1982.

- [12] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “*Experimental quantum teleportation,*” *Nature*, vol. 390, pp. 575–579, 1997.
- [13] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, “*Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels,*” *Physical Review Letters*, vol. 70, pp. 1895–1899, 1993.
- [14] W. K. Wootters and W. H. Zurek, “*A single quantum cannot be cloned,*” *Nature*, vol. 299, pp. 802–803, 1982.
- [15] D. M. Greenberg, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, “*Bell’s theorem without inequalities,*” *Am. J. Phys.*, vol. 58, pp. 1131–1143, 1990.
- [16] N. D. Mermin, “*What’s wrong with these elements of reality?*” *Physics Today*, vol. 43, pp. 9–11, 1990.
- [17] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, M. Daniell, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “*Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberg-Horne-Zeilinger entanglement,*” *Nature*, vol. 403, pp. 515–519, 2000.
- [18] P. K. Aravind, “*Borromean Entanglement of the GHZ state,*” *Potentiality, Entanglement, and Passion-At-A-Distance*, pp. 53–59, 1997.
- [19] A. Sugita, “*Borromean Entanglement Revisited,*” *Proceedings of the International Workshop on “Knot Theory for Scientific Objects” held in Osaka (Japan), March 8-10, 2006*, 2007.
- [20] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.