ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Punti di Lebesgue e Differenziazione delle Funzioni Monotone

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Andrea Cavalli

Anno Accademico 2022/2023

Alla mia famiglia, che mi ha sostenuto,
Ai professori, che mi hanno istruito,
Agli amici, che mi hanno accompagnato

Introduzione

Lo scopo di questo elaborato è di studiare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*, nella sua versione più generale relativa alla misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ in $\mathbb{R}^n$ e alla nozione di *punto di Lebesgue* di una funzione. Inoltre, studieremo la nozione di limite approssimato, che permette di formulare in modo naturale alcuni noti risultati di Analisi. Come applicazione di questi risultati di Teoria della Misura, vedremo che ruolo riveste il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale nella dimostrazione della derivabilità delle funzioni monotone di variabile reale.

Come è ben noto dai corsi di Analisi Matematica del biennio, la teoria dell'integrazione secondo Riemann ha il pregio di essere relativamente "semplice," ma ha il problema di non essere pienamente soddisfacente: infatti esiste una vasta classe di funzioni non integrabili secondo Riemann, che -una volta introdotta la nozione di funzione misurabile- viene ampiamente estesa alle funzioni misurabili, che vengono studiate con successo attraverso l'integrale di Lebesgue. Sappiamo bene che l'integrale di Riemann ha anche il grande difetto di non prestarsi bene al passaggio al limite sotto il segno di integrale, nozione per la quale -al contrario- sipresta molto bene l'integrale di Lebesgue.

Il risultato cardine della teoria dell'integrale è il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, che unisce il passaggio al limite -sotto la forma di derivata, ossia di limite del rapporto incrementale- all'integrale stesso, o meglio alla funzione integrale. La sua forma più semplice unidimensionale è, come noto, la seguente, riscritta appunto sotto forma di limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f = f(x) \quad \text{ossia} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} = f(x),$$

ove f è ad esempio continua su $[a,b]$ e $x \in [a,b]$. Dalla additività dell'integrale, quest'ultima è a sua volta equivalente a

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f}{h} = f(x).$$

Prendendo rispettivamente i due limiti unilateri (scrivendo $h = r$ e $h = -r$ con $r > 0$)

$$\lim_{r\to 0+}\frac{\int_x^{x+r} f}{r} = f(x), \qquad \lim_{r\to 0+}\frac{\int_x^{x-r} f}{-r} = f(x),$$

e osservando che il secondo limite si puï¿½ riscrivere come

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\int_{x-r}^{x} f}{r} = f(x),$$

ne segue immediatamente (facendo la media tra i due limiti in rosso) che

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\int_{x-r}^{x+r} f}{2r} = f(x), \quad \text{ossia} \quad \lim_{r\to 0+} \frac{\int_{B(x,r)} f}{\mathcal{L}^1(B(x,r))} = f(x),$$

ove $B(x,r) = [x-r, x+r]$ è la palla di centro x e raggio r e $\mathcal{L}^1$ è la misura 1-dimensionale.

Sorge dunque in modo naturale la scelta conveniente di scrivere il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale in $\mathbb{R}^n$ nella forma seguente:

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(\xi)\, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = f(x).$$

Nella prima parte della Tesi dimostreremo che questo è vero per quasi ogni x non appena f è localmente sommabile. A tal fine, inizieremo con l'introdure concetti della Teoria della Misura convenienti, quali quello di *punto di Lebesgue* di f, che ricorderemo tra poco.

Ci sono però immancabilmente dei prerequisiti per questa Tesi, tutti di Teoria della Misura, alcuni dei quali non banali: nel primo capitolo di prerequisiti ricorderemo infatti alcuni risultati e definizioni, tra cui: misura assolutamente continua (rispetto ad un'altra), misure singolari, derivata di Radon-Nikodym e Teorema di Decomposizione di Lebesgue. In particolare, quando μ è assolutamente continua rispetto a λ si ha (Teorema di Radon-Nikodym)

$$\int f\, \mathrm{d}\mu = \int f \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\, \mathrm{d}\lambda.$$

Successivamente considereremo, come detto, la nozione di punto di Lebesgue per una funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (ove, qui e nel seguito, Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$): ovvero diremo che x è un punto di Lebesgue per f se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(\xi) - \ell|\, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = 0.$$

Indicheremo il valore ℓ qui sopra con $\tilde{f}(x)$, poiché esso -se esiste- è univocamente determinato da f e x. Con queste notazioni, si noti che la identità in blu di cui sopra è equivalente a dire che

$$x \text{ è un punto di Lebesgue per } f \text{ e } \widetilde{f}(x) = f(x).$$

Quella di punto di Lebesgue è la nozione su cui si basano quasi tutti i risultati che verranno dimostrati in questo elaborato. Possiamo dire che questi sono i punti in cui f non oscilla troppo, in senso medio-integrale. Non è scontato che i punti di Lebesgue esistano per una funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, mentre noi dismosteremo addirittura che il complementare dei punti di Lebesgue ha misura nulla.

I primi lemmi affrontati saranno molto tecnici e serviranno per poter poi dimostrare risultati più interessanti; ad esempio utilizzermo un lemma (basato su un risultato di tipo ricoprimento di Vitali) che per metterà di dimostrare il seguente teorema centrale della tesi:

Teorema di Vitali-Lebesgue sui punti di Lebesgue:
se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ allora quasi ogni punto x di Ω è di Lebesgue per f e $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

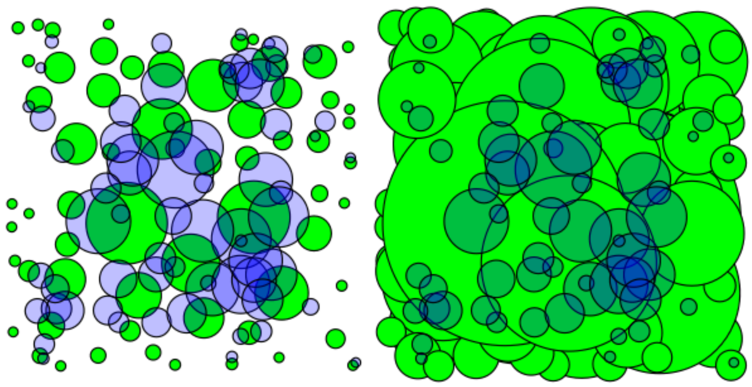
Questo risultato è notevole perché prescinde totalmente dalla continuità di f; infatti potremmo prendere al posto di f la funzione di Dirichlet che non ha nemmeno un punto di continuità. Questo teorema permette di dimostrare altri risultati senza troppi sforzi.

Il citato lemma tecnico su cui si basa pesantemente la prova del Teorema di Vitali-Lebesgue è il seguente:

Lemma ★. *Sia μ una misura di Radon su Ω e sia A un sottoinsieme Boreliano di Ω tale che $\mu(A) = 0$. Allora si ha*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(\xi,r))} = 0 \quad \textit{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in A.$$

Non possiamo entrare nel dettaglio della prova di questo lemma, che è estremamente tecnica e utilizza un risultato fine di ricoprimento alla Vitali: data una famiglia finita di palle (quelle verdi e azzurre a sinistra), esiste una sottofamiglia di palle (quelle verdi, sempre a sinistra) a due a due disgiunte e tali che le stesse palle con raggio triplicato (quelle verdi a destra) ricoprono tutta la famiglia iniziale.



Il Lemma ★ ha una interessante applicazione immediata. Sia μ una misura di Radon sull'aperto Ω e consideriamone la decomposizione di Lebesgue rispetto alla misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$: ricordiamo che si ha

$$\mu = \mu_a + \mu_s,$$

dove μ_s è una misura singolare rispetto a $\mathcal{L}^n$ e che la misura assolutamente continua μ_a è della forma $\mu_a = \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$, ove la funzione densità φ si denota con $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathcal{L}^n}$. Allora si ha

$$(\bigstar) \qquad \lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_s(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \Omega.$$

La prova ï¿½ semplice: per definizione di misure singolari, esiste S Boreliano tale che $\mathcal{L}^n(S) = 0$ e $\mu_s(\Omega \backslash S) = 0$. Per il Lemma $\bigstar$ si ha

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_s(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \Omega \setminus S,$$

quindi (visto che S è $\mathcal{L}^n$-trascurabile)

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_s(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \Omega.$$

Vediamo invece delle conseguenze immediate del Teorema di Vitali-Lebesgue: applicando tale teorema alla funzione caratteristica dell'insieme $\mathbb{R}^n \backslash E$ si ottiene quanto segue: *Sia E un insieme $\mathcal{L}^n$-misurabile; allora si ha*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \textit{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in E.$$

Si usa dire che un punto x che verifica questa identità è *approssimativamente interno* ad E; quindi quasi ogni punto di E è approssimativamente interno ad esso. Nel terzo capitolo approfondiremo questa nozione e parleremo di limiti approssimati. Non ci addentriamo in questa introduzione su questa parte della Tesi ma ci concentriamo sul resto.

Ovviamente, dal Teorema di Vitali-Lebesgue si ottiene immediatamente il:

Teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Lebesgue in una dimensione. *Data $f \in L^1(]a,b[)$, definiamo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ponendo*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(t).$$

Se $x \in]a,b[$ è un punto di Lebesgue per f allora F è derivabile in x e $F'(x) = \widetilde{f}(x)$. In particolare: F è derivabile $\mathcal{L}^1 -$ q.o. in $]a,b[$ e

$$F'(x) = f(x) \ \textit{per } \mathcal{L}^1 - \text{q.o. } x \ \textit{in }]a,b[.$$

L'ultima parte della Tesi affronta, infine, un'applicazione degli argomenti trattati fino ad ora. Considereremo il problema della derivabilità delle funzioni monotone, argomento molto noto nell'ambito dell'Analisi Reale. Per tale risultato servono vari prerequisiti, tra cui il Teorema di Riesz sulla rappresentazione dei funzionali positivi. In questo elaborato daremo quest'ultimo per noto e mostreremo come usare la teoria dei punti di Lebesgue per completare la dimostrazione del fatto che una funzione monotona è derivabile quasi dappertutto. Lo schema della prova è il seguente.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona crescente. Consideriamo il funzionale lineare

$$\Lambda : C_c^\infty(a, b) \to \mathbb{C}, \quad \Lambda(\varphi) := -\int_a^b \varphi'(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Dalla monotonia di f è facile provare che esso è un funzionale positivo. Dal Teorema della Rappresentazione di Riesz per i funzionali lineari e monotoni (si veda Rudin [1]) esiste una ed una sola misura (regolare) di Radon μ su (a, b) tale che

$$-\int_a^b \varphi'(x)\, f(x)\, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = \int_{(a,b)} \varphi\, \mathrm{d}\mu, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(a, b).$$

Questa identità ci dice che, nel senso delle distribuzioni, f' è la misura μ, ed è dunque una versione debole del teorema di differenziazione delle funzioni monotone.

Per dimostrare che la funzione monotona f è derivabile quasi dappertutto, si applica la decomposizione di Lebesgue a μ. Dal Teorema di Decomposizione di Lebesgue, esiste quindi una $h \in L^1(\mathrm{d}x)$ tale che

$$\mu = h\, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 + \mu_s,$$

dove μ_s è la misura singolare della decomposizione di μ rispetto alla misura di Lebesgue $\mathcal{L}^1$. Grazie alla teoria dei punti di Lebesgue sviluppata in questa tesi, si riesce a provare che f è derivabile quasi dappertutto e che $h = f'$. Vediamo uno sketch di questa parte della dimostrazione.

1. Essendo f monotona, è semplice provare che i suoi punti di discontinuità sono numerabili, quindi f è continua quasi dappertutto;

2. dal Teorema di Vitali-Lebesgue sappiamo che $\mathcal{L}^1$-quasi ogni punto di (a, b) è di Lebesgue per h, poiché h è sommabile;

3. infine sappiamo dalla formula $(\bigstar)$ che

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mu_s((x - r, x + r))}{\mathcal{L}^1((x - r, x + r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^1 - \text{q.o. } x \in (a, b).$$

Mettendo assieme queste tre cose, e con un poco di lavoro, si prova infine che $f'(x) = \widetilde{h}(x)$ come volevasi.

Indice

Capitolo 1

Preliminari e notazioni

1.1 Derivata di Radon-Nikodym

Definizione 1.1 (Spazio misurabile e di misura). *Sia X un insieme. Denotiamo con $\mathfrak{M}$ una σ-algebra in X. Inoltre chiamiamo spazio misurabile la coppia $(X, \mathfrak{M})$. Chiamiamo spazio di misura la terna $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, dove X è un insieme, $\mathfrak{M}$ una σ-algebra in X e μ una misura su $\mathfrak{M}$.*

Definizione 1.2 (Insiemi boreliani). *Sia X uno spazio metrico. Denotiamo con $\mathfrak{B}(X)$ (o brevemente $\mathfrak{B}$) la σ-algebra in X generata dagli aperti di X. Chiamiamo $\mathfrak{B}$ la σ-algebra di Borel. Gli elementi di $\mathfrak{B}(X)$ si chiamano sottoinsiemi boreliani di X.*

Definizione 1.3 (Famiglia delle misure boreliane). *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con $\mathcal{M}(\Omega)$ la famiglia delle misure boreliane su Ω che siano finite sui compatti di Ω. Gli elementi di $\mathcal{M}(\Omega)$ si chiamano misure di Radon (positive) su Ω.*

Osservazione 1.4. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. La misura $\mathcal{L}^n$ ristretta a $\mathfrak{B}(\Omega)$ appartiene a $\mathcal{M}(\Omega)$. Poiché Ω è unione numerabile di compatti, ogni $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ è σ-finita.

Definizione 1.5 (Applicazione boreliana). *Sia X uno spazio metrico. Un'applicazione $f : X \to [-\infty, +\infty]$ si dice boreliana, se è $\mathfrak{B}(X)$-misurabile.*

Definizione 1.6 (Misura assolutamente continua rispetto ad un'altra). *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure su $\mathfrak{M}$. Diciamo che μ è assolutamente continua rispetto a λ, se per ogni $E \in \mathfrak{M}$ tale che $\lambda(E) = 0$ allora $\mu(E) = 0$. In tal caso scriviamo $\mu \ll \lambda$.*

Definizione 1.7 (Misura singolare rispetto ad un'altra). *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure su $\mathfrak{M}$. Diciamo che μ è singolare rispetto a λ, se esiste $S \in \mathfrak{M}$ tale che $\lambda(S) = \mu(X \setminus S) = 0$. in tal caso si scrive $\mu \perp \lambda$.*

Ovviamente, se μ è singolare rispetto a λ, allora λ è singolare rispetto a μ e quindi possiamo parlare di misure singolari (tra loro).

Nel seguito faremo uso del seguente teorema, la cui dimostrazione può essere trovata nel libro di Rudin [1].

Teorema 1.8 (**Decomposizione di Lebesgue**). *Siano* $(X, \mathfrak{M})$ *uno spazio misurabile e* λ, μ *due misure* σ*-finite su* $\mathfrak{M}$. *Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *esiste una ed una sola coppia* $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda})$ *di misure su* $\mathfrak{M}$ *tale che*
$$\mu = \mu_{a,\lambda} + \mu_{s,\lambda}, \qquad \text{e inoltre} \qquad \mu_{a,\lambda} \ll \lambda \text{ e } \mu_{s,\lambda} \perp \lambda;$$

2. *esiste una ed una sola funzione* $\mathfrak{M}$*-misurabile* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *tale che* $\varphi \geq 0$ *e per ogni* $E \in \mathfrak{M}$ *vale*
$$\mu_{a,\lambda}(E) = \int_E \varphi \, \mathrm{d}\lambda.$$

Definizione 1.9 (**Decomposizione di Lebesgue**). *Siano* $(X, \mathfrak{M})$ *uno spazio misurabile e* λ, μ *due misure* σ*-finite su* $\mathfrak{M}$. *La coppia* $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda})$, *del Teorema di Decomposizione 1.8, si dice decomposizione di Lebesgue di* μ *rispetto a* λ. *Inoltre*

- $\mu_{a,\lambda}$ *si chiama parte assolutamente continua di* μ *rispetto a* λ;
- $\mu_{s,\lambda}$ *si chiama parte singolare di* μ *rispetto a* λ.

Definizione 1.10 (**Derivata di Radon-Nikodym**). *Siano* $(X, \mathfrak{M})$ *uno spazio misurabile e* λ, μ *due misure* σ*-finite su* $\mathfrak{M}$. *La funzione* $\varphi \in M(X, \lambda)$, *caratterizzata nel Teorema di Decomposizione 1.8, si chiama derivata di Radon-Nikodym di* μ *rispetto a* λ *e si deota con* $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$.

Del Teorema di Decomposizione 1.8 segue immediatamente il seguente risultato:

Teorema 1.11 (**Radon-Nikodym**). *Siano* $(X, \mathfrak{M})$ *uno spazio misurabile e* λ, μ *due misure* σ*-finite su* $\mathfrak{M}$ *con* $\mu \ll \lambda$. *Allora per ogni* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ*-integrabile e per ogni* $f : X \to \mathbb{C}$ μ*-sommabile, si ha*
$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Capitolo 2

Punti di Lebesgue

2.1 Punti di Lebesgue

Nel corso di questo capitolo Ω denoterà un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.1 (Punto di Lebesgue). *Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ e sia $x \in \Omega$. Diciamo che x è un punto di Lebesgue per f, se esiste $\ell \in \mathbb{C}$ tale che*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(\xi) - \ell| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = 0.$$

L'insieme dei punti di Lebesgue per f verrà chiamato insieme di Lebesgue di f.

Osservazione 2.2. Dalla Definizione 2.1 si ha che:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(\xi) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) - \ell \right| = \\
&= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \left| \int_{B(x,r)} (f(\xi) - \ell) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(\xi) - \ell| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi).
\end{aligned}$$

Questo implica che, se x è un punto di Lebesgue di f, allora

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(\xi) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = \ell.$$

In particolare: se x è un punto di Lebesgue per f, allora il numero ℓ in realtà è un numero univocamente determinato da f e da x. Inoltre, se f è a valori reali, anche ℓ è reale. D'ora in poi utlizzeremo il simbolo $\widetilde{f}(x)$ per indicare il numero ℓ.

Proposizione 2.3. *Sia $f \in C(\Omega;\mathbb{C})$; allora ogni punto $x \in \Omega$ è di Lebesgue per f e si ha $\widetilde{f}(x) = f(x)$.*

Dimostrazione. Siano $x \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$. Per continuità di f abbiamo che esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $\xi \in B(x, \delta)$. Dunque, se $r \in (0, \delta)$ si ha che:

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(\xi) - f(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) \leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \varepsilon \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = \varepsilon,$$

da cui si ha la tesi. □

Lemma 2.4. *Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Fissiamo $x \in \Omega$ e poniamo*

$$\overline{D}\mu(x) := \inf_{h \in \mathbb{N}} \left(\sup \left\{ \frac{\mu(B)}{\mathcal{L}^n(B)} \;\middle|\; \begin{array}{c} \textit{al variare di } B \subseteq \Omega \textit{ palla aperta che contiene } x \\ \textit{con raggio minore di } 1/2^h \end{array} \right\} \right).$$

Allora la funzione $\overline{D}\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ è boreliana.

Dimostrazione. Consideriamo, per $h \in \mathbb{N}$ fissato, la funzione $\delta_h : \Omega \to [0, +\infty]$ definita da

$$\delta_h(x) = \sup \left\{ \frac{\mu(B)}{\mathcal{L}^n(B)} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{al variare di } B \subseteq \Omega \text{ palla aperta che contiene } x \\ \text{con raggio minore di } 1/2^h \end{array} \right\}.$$

Sia $c \in \mathbb{R}$ e proviamo che $\delta_h^{-1}\big( ]c, +\infty] \big)$ è aperto, dunque boreliano. Se x verifica $\delta_h(x) > c$, allora, per definizione di sup, esiste una palla $B_0 \subseteq \Omega$ con $x \in B_0$ ed avente raggio $< 2^{-h}$, tale che

$$\frac{\mu(B_0)}{\mathcal{L}^n(B_0)} > c.$$

Per ogni altro x' in B_0 si ha allora

$$\delta_h(x') = \sup\{\cdots\} \geq \frac{\mu(B_0)}{\mathcal{L}^n(B_0)} > c.$$

Ne segue che $\delta_h(x') > c$ per ogni $x' \in B_0$ e quindi $\delta_h^{-1}\big( ]c, +\infty] \big)$ contiene B_0. Dalla arbitrarietà di x segue che $\delta_h^{-1}\big( ]c, +\infty] \big)$ è aperto, dunque boreliano. Questo implica che δ_h è boreliana, pertanto $\overline{D}\mu$ è una funzione boreliana (come inviluppo inferiore di una famiglia di funzioni boreliane). □

Osservazione 2.5. Si noti che $\inf_{h \in \mathbb{N}}$ di cui sopra coincide con $\lim_{h \to \infty}$ poiché la successione (rispetto ad $h \in \mathbb{N}$) nelle parentesi tonde è decrescente. Quindi $\overline{D}\mu(x)$ ricorda un $\limsup$, da cui la notazione. Si noti che la palla B non è necessariamente centrata in x. Fissata $x \in \Omega$, nel caso di prendano solo palle $B = B(x, r)$ centrate in x, la funzione

$$r \mapsto \Phi_r(x) := \frac{\mu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}$$

è definita per r sufficientemente piccolo (dipendente solo da x e Ω, quest'ultimo essendo aperto), ed è dunque ben posto il $\limsup_{r\to 0^+} \Phi_r(x)$, che è definito da

$$\limsup_{r\to 0^+} \Phi_r(x) = \inf_{r>0} \left(\sup_{0<\rho<r} \Phi_r(x) \right);$$

per questione di monotonia (crescente) della funzione $r \mapsto \sup_{0<\rho<r} \Phi_r(x)$, tale $\inf_{r>0}$ si può sequenzializzare, e quindi

$$\limsup_{r\to 0^+} \Phi_r(x) = \inf_{h\in\mathbb{N}} \left(\sup_{0<\rho<1/2^h} \Phi_r(x) \right).$$

Visto infine che le palle centrate in x sono un caso particolare di palle B tali che $x \in B$, si vede immediatamente che

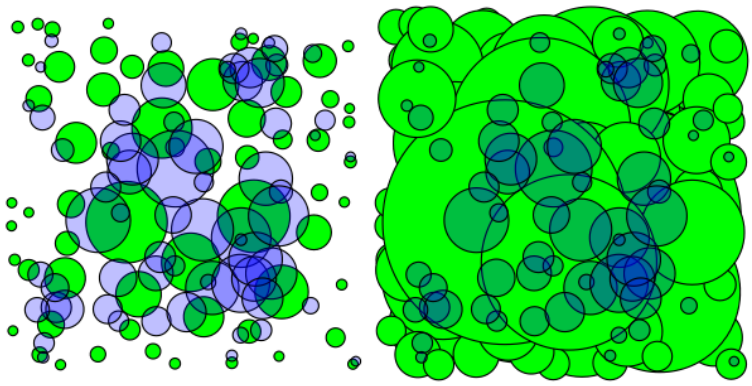
$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\mu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \overline{D}\mu(x), \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{2.1}$$

Al primo membro si dà abitualmente il nome di derivata superiore *simmetrica* della misura μ rispetto alla misura di Lebesgue in x.

Lemma 2.6. *Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e sia $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ tale che $\mu(A) = 0$. Allora si ha*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(\xi,r))} = 0 \quad \textit{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in A.$$

Questa prova è estremamente tecnica e utilizza un risultato fine di ricoprimento alla Vitali: data una famiglia finita di palle (quelle verdi e azzurre a sinistra), esiste una sottofamiglia di palle (quelle verdi a sinistra) a due a due disgiunte e tali che le stesse palle con raggio triplicato (quelle verdi a destra) ricoprono tutta la famiglia iniziale.



Dimostrazione. Abbiamo visto in (2.1) che, per ogni $x \in \Omega$, sussiste

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\mu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \overline{D}\mu(x).$$

Quindi è sufficiente dimostrare che $\overline{D}\mu(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in A$.

Procediamo per assurdo. Supponiamo che $\{x \in A \,|\, \overline{D}\mu(x) > 0\}$ non sia $\mathcal{L}^n$ trascurabile (osserviamo che tale insieme è boreliano per il lemma precedente). Allora esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\{x \in A \,|\, \overline{D}\mu(x) > \varepsilon\}$ non sia $\mathcal{L}^n-$trascurabile. Per la regolarità interna della misura di Lebesgue, sia

$$(\star) \qquad K \subseteq \{x \in A \,|\, \overline{D}\mu(x) > \varepsilon\},$$

K compatto con $\mathcal{L}^n(K) > 0$. Posto $K_h = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{dist}(x, K) \leq 2^{-h}\}$, risulta che (K_h) è una successione decrescente di compatti con

$$K = \bigcap_{h=1}^{\infty} K_h.$$

Quindi, ricordando che $\mu(K) \leq \mu(A) = 0$, passando al limite abbiamo che

$$\lim_{h \to +\infty} \mu(K_h) = \mu(K) = 0.$$

Scegliamo $h \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(K_h) < \varepsilon \mathcal{L}^n(K)\, 3^{-n}$. Dunque, ricordando che vale $(\star)$, per ogni $x \in K$ esistono $\xi = \xi(x) \in \Omega$ e $r = r(x) \in \,]0, 2^{-h-1}[$ tali che $x \in B(\xi, r) \subseteq \Omega$ e

$$(2\star) \qquad \frac{\mu(B(\xi, r))}{\mathcal{L}^n(B(\xi, r))} > \varepsilon \quad \text{per ipotesi.}$$

Ricordiamo che K è compatto, quindi esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(\xi_i, r_i).$$

Ora a meno di riordinare gli indici, possiamo supporre senza perdere di generalità che $r_m \leq \cdots \leq r_1$.

A questo punto è necessario fare una selezione delle $B(\xi_i, r_i)$ nel seguente modo:

i) poniamo $(\xi_{i_1}, r_{i_1}) = (\xi_1, r_1)$;

ii) chiamiamo $i_2 := \min\{j \in \{2, \ldots, m\} \,|\, B(\xi_{i_1}, r_{i_1}) \cap B(\xi_j, r_j) = \varnothing\}$ nel caso che tale j esista, altrimenti se un tale j non esiste allora abbiamo già finito la nostra selezione;

iii) chiamiamo $i_3 := \min\{j \in \{3, \ldots, m\} \,|\, ((B(\xi_{i_1}, r_{i_1}) \cup B(\xi_{i_2}, r_{i_2})) \cap B(\xi_j, r_j)) = \varnothing\}$ nel caso che tale j esista, altrimenti se un tale j non esiste allora abbiamo già finito la nostra selezione.

Iterando otteniamo una famiglia di insiemi disgiunti del tipo: $\{B(\xi_{i_s}, r_{i_s}) \,|\, 1 \leq s \leq k\}$ dove se $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, allora esiste $i_s < j$ tale che $B(\xi_{i_s}, r_{i_s}) \cap B(\xi_j, r_j) \neq \varnothing$. Quindi se $r_j \leq r_{i_s}$ allora

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(\xi_i, r_i) \subseteq \bigcup_{s=1}^{k} B(\xi_{i_s}, 3r_{i_s}).$$

Dunque si ha che:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\mathcal{L}^n(K) &\le \sum_{s=1}^{k} \varepsilon\mathcal{L}^n(B(\xi_{i_s}, 3r_{i_s})) = 3^n \sum_{s=1}^{k} \varepsilon\mathcal{L}^n(B(\xi_{i_s}, r_{i_s})) \overset{(2\star)}{<} \\
&< 3^n \sum_{s=1}^{k} \mu(B(\xi_{i_s}, r_{i_s})) = 3^n \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} B(\xi_i, r_i)\right) \le \\
&\le 3^n \mu(K_h) < 3^n \varepsilon\mathcal{L}^n(K)\, 3^{-n} = \varepsilon\mathcal{L}^n(K),
\end{aligned}
$$

da cui abbiamo l'assurdo. □

2.2 Teorema di Vitali-Lebesgue sui punti di Lebesgue

Teorema 2.7 **(Vitali-Lebesgue sui punti di Lebesgue).** *Se* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{C})$ *allora:*

$$
\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(\xi) - f(x)| \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \quad \textit{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \Omega;
$$
$$
\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(\xi) \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = f(x) \quad \textit{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \Omega.
$$

In altre parole, quasi ogni punto di Ω *è di Lebesgue per* f*. In particolare, il complementare in* Ω *dell'insieme di Lebesgue di* f *è* $\mathcal{L}^n-$*trascurabile e si ha:*

$$
\widetilde{f}(x) = f(x) \quad \textit{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \Omega.
$$

Dimostrazione. Ovviamente basta dimostrare la prima uguaglianza, poiché la seconda ne è una conseguenza. Dividiamo la prova in due casi: f a valori reali e f a valori complessi.

Iniziamo studiando il caso in cui f è a valori reali. Ora dimostriamo che

$$
\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(\xi) - f(x))^+ \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \Omega.
$$

Il caso con $(\cdots)^-$ si prova in modo analogo e lo tralasciamo; questo infine darà la tesi.

Ora per ogni $q \in \mathbb{Q}$ fissato definiamo la misura $\mu : \mathfrak{B}(\Omega) \to [0, +\infty]$ ponendo

$$
\mu_q(E) = \int_E (f(\xi) - q)^+ \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi).
$$

Osserviamo che $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se poniamo $A_q = \{x \in \Omega \,|\, f(x) \le q\}$, allora $\mu_q(A_q) = 0$. Inoltre per il Lemma 2.6 sappiamo che per ogni $q \in \mathbb{Q}$ esiste un sottoinsieme $\mathcal{L}^n$-trascurabile E_q di A_q tale che

$$
(\bigstar) \qquad \forall\, x \in A_q \setminus E_q \quad \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(\xi) - q)^+ \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = 0.
$$

Poniamo $E = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_q$. Poiché tutti gli E_q sono $\mathcal{L}^n$-trascurabili possiamo concludere che anche E è $\mathcal{L}^n$-trascurabile. D'altra parte, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) < q < f(x) + \varepsilon$ (qui usiamo il fatto che f è a valori reali). Sia ora in particolare $x \in \Omega \backslash E$ (cosicché $x \notin E_q$); dunque $x \in A_q \backslash E_q$ (per lo stesso q di cui sopra) e si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(\xi) - f(x))^+ \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(\xi) - q + q - f(x))^+ \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) \leq \\
&\leq \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(\xi) - q)^+ \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) + \\
&+ \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \underbrace{(q - f(x))}_{<\varepsilon}{}^+ \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) < \\
&< \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(\xi) - q)^+ \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) + \varepsilon \overset{(\bigstar)}{\leq} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pertanto per ogni $x \in \Omega \setminus E$ e per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(\xi) - f(x))^+ \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) \leq \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε si ha che, per ogni $x \in \Omega \setminus E$,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(\xi) - f(x))^+ \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) = 0.$$

Dunque abbiamo concluso il caso di f a valori reali.

Se f è a valori complessi sappiamo che possiamo scrivere f come $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$. Osserviamo che

$$|f(\xi) - f(x)| \leq |\mathrm{Re}f(\xi) - \mathrm{Re}f(x)| + |\mathrm{Im}f(\xi) - \mathrm{Im}f(x)|\,.$$

Usando ora il risultato appena dimostrato nel caso reale si ottiene la tesi anche per f a valori complessi. $\square$

Vediamo ora alcune conseguenze dirette di questo teorema.

Corollario 2.8. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che E è $\mathcal{L}^n$-misurabile. Allora si ha*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \textit{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in E,$$
$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \textit{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \mathbb{R}^n\setminus E.$$

Dimostrazione. Usiamo il Teorema dei punti di Lebesgue 2.7 alle funzioni caratteristiche degli insiemi $\mathbb{R}^n \setminus E$ e di E. □

Corollario 2.9. *Siano $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{C})$ e $\{\phi_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ una successione regolarizzante. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ tale che x è un punto di Lebesgue per f si ha*

$$\lim_{h\to+\infty} R_h f(x) = \widetilde{f}(x).$$

In particolare, dal Teorema 2.7 si ha

$$\lim_{h\to+\infty} R_h f(x) = f(x) \quad \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Sappiamo che ϕ_h è della forma $\phi_h(z) = h^n \phi(h\,z)$ per una certa $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ non negativa, con supporto in $B(0,1)$ e tale che $\int \phi = 1$. Ne segue che $\phi_h(z) \leq ch^n$, ove $c = \|\phi\|_\infty$. Sia ora $x \in \mathbb{R}^n$ un punto di Lebesgue per f; allora si ha

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\int_{B(x,\frac{1}{h})} f(y)\phi_h(x-y)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(y)\right) - \widetilde{f}(x)\right| \\
&= \left|\int_{B(x,\frac{1}{h})} \big(f(y) - \widetilde{f}(x)\big)\phi_h(x-y)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(y)\right| \leq \\
&\leq \int_{B(x,\frac{1}{h})} \left|f(y) - \widetilde{f}(x)\right| \phi_h(x-y)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(y) \leq \\
&\leq c\,h^n \int_{B(x,\frac{1}{h})} \left|f(y) - \widetilde{f}(x)\right| \mathrm{d}\mathcal{L}^n(y) = \\
&= \frac{c\,\mathcal{L}^n(B(x,1))}{\mathcal{L}^n(B(x,\frac{1}{h}))} \int_{B(x,\frac{1}{h})} \left|f(y) - \widetilde{f}(x)\right| \mathrm{d}\mathcal{L}^n(y),
\end{aligned}$$

da cui la tesi. Si noti che abbiamo usato solo la definizione di punto di Lebesgue e di $\widetilde{f}$. □

Corollario 2.10. *Siano $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e $h \in \mathbb{N}$. Allora $R_h f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \cap C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, $||R_h f|| \leq ||f||_{\mathcal{L}^\infty}$, e inoltre si ha*

$$\lim_{h\to+\infty} R_h f(x) = f(x) \quad \textit{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$|R_h f(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{B(x,\frac{1}{h})} |f| \leq ||f||_{L^\infty},$$

da cui $||R_h f||_\infty \leq ||f||_{\mathcal{L}^\infty}$. Inoltre è ben noto che si ha $R_h f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.

La convergenza q.o. di $R_h f(x)$ a $f(x)$ è una conseguenza del Corollario 2.9. □

Corollario 2.11 (Teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Lebesgue in una dimensione). *Data $f \in L^1(]a,b[)$, definiamo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ponendo*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(t).$$

Se $x \in]a,b[$ è un punto di Lebesgue per f allora F è derivabile in x e $F'(x) = \widetilde{f}(x)$.

In particolare: F è derivabile $\mathcal{L}^1-$q.o. in $]a,b[$ e

$$F'(x) = f(x) \text{ per } \mathcal{L}^1 - \text{q.o. } x \text{ in }]a,b[.$$

Dimostrazione. Sia $x \in]a,b[$ un punto di Lebesgue di f. Ora studiamo il rapporto incrementale di F. Dato $r > 0$ si ha:

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+r)-F(x)}{r} - \widetilde{f}(x)\right| &= \left|\frac{1}{r}\int_x^{x+r} f(t)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(t) - \widetilde{f}(x)\right| = \\ &= \frac{1}{r}\left|\int_x^{x+r} (f(t)-\widetilde{f}(x))\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(f)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{r}\int_x^{x+r} \left|f(t)-\widetilde{f}(x)\right|\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(f) \leq \\ &\leq \frac{1}{r}\int_{x-r}^{x+r} \left|f(t)-\widetilde{f}(x)\right|\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(f) \\ &= 2\cdot\frac{1}{\mathcal{L}^1(]x-r,x+r[)}\int_{x-r}^{x+r} \left|f(t)-\widetilde{f}(x)\right|\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(f).\end{aligned}$$

Per $r \to 0^+$ il secondo membro tende a 0 per definizione di punto di Lebesgue e di $\widetilde{f}(x)$. Dunque si ha

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{F(x+r)-F(x)}{r} = \widetilde{f}(x).$$

Analogamente si ottiene che

$$\lim_{r\to 0^-} \frac{F(x+r)-F(x)}{r} = \widetilde{f}(x),$$

da cui la tesi, poiché il resto dell'asserto segue dal Teorema 2.7. □

2.3 Ancora sulla decomposizione di Lebesgue

Nel seguente teorema facciamo riferimento alla decomposizione di Lebesgue di una misura $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ rispetto alla misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$; ricordiamo che si ha

$$\mu = \mu_a + \mu_s,$$

dove μ_s è una misura singolare rispetto alla misura di Lebesgue e che la misura assolutamente continua μ_a è della forma $\mu_a = \varphi\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n$, ove la funzione densità φ si denota con $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathcal{L}^n}$.

Teorema 2.12. *Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora valgono:*

1. $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathcal{L}^n} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$;

2. *si ha che*

$$(\bigstar) \qquad \lim_{r \to 0^+} \frac{\mu_s(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \textit{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \Omega;$$

3. *sia $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ una qualunque successione in $\mathfrak{B}(\Omega)$ con $\mathcal{L}^n(E_h) > 0$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e (ad $x \in \Omega$ fissato) tale da verificare tutte le seguenti condizioni*

$$\lim_{h\to+\infty} \mathrm{dist}(x, E_h) = 0, \qquad \lim_{h\to+\infty} \mathrm{diam}(E_h) = 0,$$

$$\limsup_{h\to+\infty} \frac{(\mathrm{dist}(x, E_h) + \mathrm{diam}(E_h))^n}{\mathcal{L}^n(E_h)} < +\infty.$$

Allora, se $x \in \Omega$ è un punto di Lebesgue di $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathcal{L}^n}$ in cui vale la $(\bigstar)$, si ha

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{\mu(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} = \widetilde{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathcal{L}^n}}(x).$$

Dimostrazione.

1. Poniamo $\varphi = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathcal{L}^n}$. Sia $K \subseteq \Omega$, K compatto. Allora si ha

$$\int_K \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \mu_a(K) \le \mu(K) < +\infty,$$

per cui $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

2. Sia $S \in \mathfrak{B}(\Omega)$ tale che $\mathcal{L}^n(S) = 0$ e $\mu_s(\Omega \setminus S) = 0$. Per il Lemma 2.6 si ha

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mu_s(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \Omega \setminus S,$$

quindi (visto che S è $\mathcal{L}^n$-trascurabile)

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mu_s(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in \Omega.$$

3. Consideriamo ora la successione $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ definita come nell'enunciato. Fissiamo $x \in \Omega$ e poniamo

$$d_h := \mathrm{dist}(x, E_h) + \mathrm{diam}(E_h).$$

Allora si ha che $E_h \subseteq B(x, 2d_h)$, quindi

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mu(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} - \widetilde{\varphi}(x)\right| &\leq \left|\frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)}\int_{E_h} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) - \widetilde{\varphi}(x)\right| + \frac{\mu_s(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} \leq \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)}\int_{E_h} |\varphi(\xi) - \widetilde{\varphi}(x)|\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) + \frac{\mu_s(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} \leq \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)}\left(\int_{B(x,2d_h)} |\varphi(\xi) - \widetilde{\varphi}(x)|\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) + \mu_s(B(x,2d_h))\right) = \\
&= 2^n\mathcal{L}^n(B(x,1))\frac{d_h^n}{\mathcal{L}^n(E_h)}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,2d_h))}\int_{B(x,2d_h)} |\varphi(\xi) - \widetilde{\varphi}(x)|\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mu_s(B(x,2d_h))}{\mathcal{L}^n(B(x,2d_h))}\right).
\end{aligned}$$

Passando al limite per $h \to +\infty$, si ottiene la tesi.

$\square$

Capitolo 3

Limiti approssimati

3.1 Punto approssimativamente interno

Definizione 3.1 (Punto approssimativamente interno). *Siano $x \in \mathbb{R}^n$ ed $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che x è approssimativamente interno ad E, se:*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0.$$

Inoltre, poniamo

$$E_* = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \text{ è un punto approssimativamente interno ad } E\}.$$

Osservazione 3.2. Dalla Definizione 3.1 si nota che $\mathrm{int}(E) \subseteq E_*$. In generale $E_* \not\subseteq E$. Ad esempio, se $E = B(0,1) \setminus \{0\}$, allora $0 \notin E$, ma 0 è approssimativamente interno ad E poiché

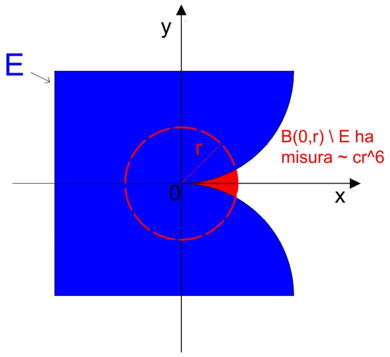
$$B(x,r) \setminus E = \{0\} \quad \text{per ogni } 0 < r < 1.$$

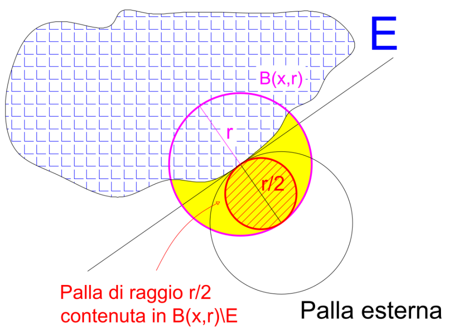
Si possono fare anche esempi meno banali di questo: ad esempio, se E è l'insieme nella seguente figura, dove i bordi curvi sono ottenuti da due rami di parabola $y = \pm x^2$, si può provare che il punto $(0,0)$ è approssimativamente interno ad E. Quindi punti "a spina" sono esempi di punti di bordo approssimativamente interni.

Si può anche facilmente riconoscere che punti di frontiera in cui esiste una palla esterna non sono mai approssimativamente interni: per semplicità, nel caso $n = 2$, basta osservare che, per raggi piccoli, $B(x,r) \setminus E$ contiene una palla di raggio $r/2$ (si veda la seguente figura), e quindi la sua $\mathcal{L}^2$-misura è maggiore di $\pi(r/2)^2$, e quindi

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \geq \frac{\pi(r/2)^2}{\pi\, r^2} = 1/4$$

non può tendere a 0.





Osservazione 3.3. Se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $E_* \subseteq F_*$.

Teorema 3.4. *Per ogni* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *si ha:*

- *l'insieme* E_* *è boreliano;*
- *l'insieme* $E_* \setminus E$ *è* $\mathcal{L}^n$*−trascurabile.*

Dimostrazione. Iniziamo con il dimostrare che E_* è boreliano. Per ogni $r > 0$ e $\xi, x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|\mathcal{L}^n(B(\xi, r) \setminus E) - \mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)| \leq$$
$$\leq \mathcal{L}^n(B(\xi, r) \setminus B(x, r)) + \mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus B(\xi, r)).$$

Dunque la funzione che a $x \in \mathbb{R}^n$ associa $\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)$ è continua. Allora per ogni $\varepsilon, r > 0$, l'insieme

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon \right\}$$

è chiuso in $\mathbb{R}^n$. Da questo segue che anche l'insieme

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sup_{0 \leq r \leq \delta} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon \right\} = \bigcap_{0 \leq r \leq \delta} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon \right\}$$

è chiuso in $\mathbb{R}^n$. Dunque si ha che per $\varepsilon, \delta \in \mathbb{Q}$

$$E_* = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\delta > 0} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sup_{0 \leq r \leq \delta} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon \right\}$$

è un insieme boreliano.

Ora mostriamo che $E_* \setminus E$ è $\mathcal{L}^n-$ trascurabile. Poniamo

$$E_h = E \ \cup \ (\mathbb{R}^n \setminus B(0, h+1)).$$

Da questa definizione segue che

$$E_* \setminus E = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} ((E_h)_* \setminus E_h).$$

Quindi è sufficente provare che $(E_h)_* \setminus E_h$ è $\mathcal{L}^n-$trascurabile per ogni $h \in \mathbb{N}$. Possiamo limitarci al caso in cui $\mathbb{R}^n \setminus E$ è limitato. Sia $G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mathbb{R}^n \setminus E \subseteq G$ e $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) = \mathcal{L}^n(G)$. Posto $F = \mathbb{R}^n \setminus G$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ risulta

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus E) + \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus (E \cup B(x,r))) = \\
&= \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) = \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus F) = \\
&= \mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus F) + \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus (F \cup B(x,r))).
\end{aligned}$$

Per ipotesi abbiamo che $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) < +\infty$, quindi $\mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus E) = \mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus F)$. Dunque $E_* = F_*$. Ora usando il Corollario 2.8 si ha che

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap F)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n - \text{q.o. } x \in F.$$

Risulta quindi $\mathcal{L}^n(F_* \setminus F) = 0$, da cui $\mathcal{L}^n(E_* \setminus E) = 0$. □

Definizione 3.5 (Frontiera approssimata). *Per ogni* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *poniamo*

$$\partial_* E := \mathbb{R}^n \setminus (E_* \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)_*).$$

Osservazione 3.6. $\partial_* E$ è un insieme boreliano e $\partial_* E \subseteq \partial E$.

Lemma 3.7. *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$. *Allora sono equivalenti:*

1. E *è* $\mathcal{L}^n-$*misurabile;*
2. $\partial_* E$ *è* $\mathcal{L}^n-$*trascurabile;*
3. $(E \setminus E_*)$ *è* $\mathcal{L}^n-$*trascurabile;*
4. $(E \setminus E_*)$ *è* $\mathcal{L}^n-$*misurabile.*

Dimostrazione. (1) implica (2): Dal Teorema 3.4 si ha che $(E \setminus E_*)$ e $((\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)_*)$ sono entrambi $\mathcal{L}^n-$trascurabili. Basta osservare che

$$\partial_* E \subseteq (E \setminus E_*) \cup ((\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)_*).$$

(2) implica (3): Si ha che

$$E \setminus E_* \subseteq \partial_* E \cup ((\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)_*).$$

Applicando il Teorema 3.4 si ha la tesi.

(3) implica (4): Ovvio.

(4) implica (1): Poiché

$$E = (E_* \cup (E \setminus E_*)) \setminus (E_* \setminus E),$$

la tesi è una diretta conseguenza del Teorema 3.4. □

3.2 Limite approssimato e punti di Lebesgue

Definizione 3.8 (**Limite approssimato**). *Siano (Y, d) uno spazio metrico, $f : \mathbb{R}^n \to Y$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\ell \in Y$. Diciamo che ℓ è limite approssimato di f in x, se per ogni intorno V di ℓ in Y si ha che x è approssimativamente interno a $f^{-1}(V)$.*

Inoltre, se f ammette limite approssimato ℓ in x, poniamo

$$\operatorname*{ap\,lim}_{\xi \to x} f(\xi) := \ell.$$

Osservazione 3.9. Si può provare facilmente che sostituendo f con una funzione ad essa uguale quasi dappertutto (rispetto a $\mathcal{L}^n$), l'eventuale limite approssimato non cambia.

Osservazione 3.10. Ovviamente, se ℓ è il limite di f in x, allora ℓ è anche limite approssimato di f in x.

Proposizione 3.11 (**Unicità del limite approssimato**). *Nelle notazioni precedenti, se ℓ, ℓ' sono entrambi limiti approssimati di f in x, allora si ha $\ell = \ell'$.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che si abbia $\ell \neq \ell'$. Siano V e V' due intorni rispettivamente di ℓ e ℓ' tali che $V \cap V' = \varnothing$. Poiché $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V') = \varnothing$, si ha

$$\mathcal{L}^n(B(x,r)) \leq \mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus f^{-1}(V)) + \mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus f^{-1}(V')).$$

Quindi

$$1 = \lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \lim_{r \to 0^+} \left(\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus f^{-1}(V)) + \mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus f^{-1}(V'))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \right) = 0 + 0,$$

il che è assurdo. □

Definizione 3.12 (**Applicazione approssimativamente continua**). *Siano Y uno spazio metrico, $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione e $x \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che f è approssimativamente continua in x, se*

$$\operatorname*{ap\,lim}_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)$$

Teorema 3.13 (**Relazione tra punti di Lebesgue e limite approssimato. 1**). *Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ e sia $x \in \mathbb{R}^n$ un punto di Lebesgue per f. Allora*

$$\operatorname*{ap\,lim}_{\xi\to x} f(\xi) = \widetilde{f}(x).$$

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \mathbb{R}^n$ punto di Lebesgue di f. Per ogni $\delta > 0$ si ha

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}\int_{B(x,r)} \left|f(\xi) - \widetilde{f}(x)\right| \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) \geq$$

(minoriamo l'integrale considerando solo l'insieme di integrazione degli $\xi \in B(x,r)$ tali che $|f(\xi) - \widetilde{f}(x)| \geq \delta$)

$$\geq \delta\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}\mathcal{L}^n\Big(\Big\{\xi \in B(x,r)\ :\ \left|f(\xi) - \widetilde{f}(x)\right| \geq \delta\Big\}\Big) =$$

$$= \delta\frac{\mathcal{L}^n\Big(B(x,r)\setminus f^{-1}\Big(B(\widetilde{f}(x),\delta)\Big)\Big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}.$$

Passando al limite per $r \to 0^+$ si ha

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\mathcal{L}^n\Big(B(x,r)\setminus f^{-1}\Big(B(\widetilde{f}(x),\delta)\Big)\Big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0.$$

Dunque x è approssivamente interno a $f^{-1}\Big(B(\widetilde{f}(x),\delta)\Big)$.

Sia V un intorno di $\widetilde{f}(x)$. Allora V contiene una palla del tipo $B(\widetilde{f}(x),\delta)$, quindi si ha che $\operatorname{ap\,lim}_{\xi\to x} f(\xi) = \widetilde{f}(x)$. □

Si può dare anche un viceversa del teorema precedente rinforzando però l'ipotesi, richiedendo che f sia localmente limitata.

Teorema 3.14 (**Relazione tra punti di Lebesgue e limite approssimato. 2**). *Sia $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ e sia $x \in \mathbb{R}^n$ un punto in cui f ammette limite approssimato. Allora x è un punto di Lebesgue per f e*

$$\widetilde{f}(x) = \operatorname*{ap\,lim}_{\xi\to x} f(\xi).$$

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ un punto in cui f ammette limite approssimato, che denotiamo $\ell := \operatorname{ap\,lim}_{\xi \to x} f(\xi)$; sia poi $r_0 > 0$ tale che $\overline{B(x, r_0)} \subseteq \Omega$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(\xi) - \ell| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) \\
&= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{\{\xi \in B(x,r) \,:\, |f(\xi)-\ell| < \varepsilon\}} |f(\xi) - \ell| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{\{\xi \in B(x,r) \,:\, |f(\xi)-\ell| \geq \varepsilon\}} |f(\xi) - \ell| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) \leq \\
&\leq \varepsilon + \left(\operatorname*{ess\,sup}_{\overline{B(x,r_0)}} |f| + |\ell| \right) \frac{\mathcal{L}^n\Big(B(x,r) \setminus f^{-1}\Big(B(\ell, \varepsilon)\Big)\Big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}.
\end{aligned}$$

Ne segue (per definizione di limite approssimato)

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(\xi) - \ell| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n(\xi) \leq \varepsilon,$$

da cui, per l'arbitarietà di ε, x è un punto di Lebesgue per f con valore ℓ. □

L'ipotesi di locale limitatezza di f nel teorema precedente non è rimovibile, come mostra il seguente esempio:

Esempio 3.15. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{per } \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} < x < \frac{1}{n},\ n \geq 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha

$$\operatorname*{ap\,lim}_{\xi \to 0} f(\xi) = 0,$$

anche se 0 non è un punto di Lebesgue per f.

Capitolo 4

Una applicazione: derivazione delle funzioni monotone

4.1 La misura di una funzione monotona

La differenziabilità quasi dappertutto delle funzioni monotone su un intervallo reale è uno dei risultati piú noti di Analisi Reale. Vediamone un cenno di dimostrazione che passa per il Teorema dei punti di Lebesgue.

Sia allora $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona (per fissare le idee) crescente. Dal Teorema della Rappresentazione di Riesz per i funzionali lineari e monotoni (si veda Rudin [1]) esiste una ed una sola misura (regolare) di Radon μ su (a, b) tale che[1]

$$-\int_a^b \varphi'(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{(a,b)} \varphi \, \mathrm{d}\mu, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(a, b). \tag{4.1}$$

Questa identità ci dice che, nel senso delle distribuzioni, f' è la misura μ, ed è dunque una versione debole del teorema di differenziazione delle funzioni monotone.

Una traccia di dimostrazione di (4.1) è la seguente: consideriamo il funzionale lineare

$$\Lambda : C_c^\infty(a, b) \to \mathbb{C}, \quad \Lambda(\varphi) := -\int_a^b \varphi'(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

Dimostriamo che *è un funzionale positivo.* Sia dunque $\varphi \in C_c^\infty(a, b)$ a valori reali con $\varphi \geq 0$. Possiamo pensare a f prolungata con $f(a)$ su $(-\infty, a)$ e con $f(b)$ su $(b, +\infty)$ e

[1] Qui e nel seguito $\mathrm{d}x$ indica la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$.

analogamente φ prolungata con 0 fuori da $[a,b]$. Allora, per ogni $h>0$ si ha

$$-\int_a^b \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x+h)\,f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

(cambiamento di variabile $x+h=t$ nel I integrale e rinotazione $x=t$ nel II)

$$= -\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,f(t-h)\,dt + \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi(t)\,\frac{f(t-h)-f(t)}{-h}\,\mathrm{d}t.$$

L'ultimo membro è ≥ 0 poiché $\varphi \geq 0$, $-h \leq 0$ e $f(t-h)\leq f(t)$ (giacché f è crescente). Quindi, per le φ come sopra si ha

$$-\int_a^b \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Mandando $h \to 0+$ (con un semplice argomento di convergenza dominata poiché f è limitata e così pure i rapporti incrementali di φ, essendo quest'ultima C_c^∞), si ha

$$\Lambda(\varphi) = -\int_a^b \varphi'(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Prima di poter applicare il classico Teorema di Riesz sui funzionali lineari e positivi, dobbiamo avere a che fare con un funzionale lineare positivo su $C_c(a,b)$ anziché $C_c^\infty(a,b)$. Per fare questo usiamo un risultato molto generale, basato sulla continuità dalla positività.

Lemma 4.1 (Prolungamento di funzionali definiti su $C_c^\infty(\Omega)$ a $C_c(\Omega)$). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $\Lambda : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare e positivo. Allora esiste un funzionale lineare positivo $\overline{\Lambda} : C_c(\Omega) \to \mathbb{C}$ che prolunga Λ.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C_c(\Omega)$ e sia $K \subset \Omega$ il suo supporto. Consideriamo una successione φ_{ε_n} di mollificate di φ (con $0<\varepsilon_n \to 0$ se $n\to\infty$). Allora è ben noto che (essendo φ continua) $\varphi_{\varepsilon_n} \to \varphi$ uniformemente su Ω (quando $n\to\infty$); inoltre sappiamo che il supporto di φ_{ε_n} è contenuto in

$$K_{\varepsilon_n} = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x,K) \leq \varepsilon_n\},$$

e dunque (presi gli ε_n opportunamente piccoli), esiste un compatto $K' \subset \Omega$ tale che i supporti delle φ_{ε_n} sono tutti contenuti in K'.

Fissiamo allora $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $\psi \equiv 1$ su K'. Dimostriamo che la successione $(\Lambda(\varphi_{\varepsilon_n}))$ è di Cauchy. Dal limite uniforme $\varphi_{\varepsilon_n} \rightrightarrows \varphi$, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che

$$\varepsilon < \varphi_{\varepsilon_n} - \varphi_{\varepsilon_m} < -\varepsilon, \quad \forall\, n,m \geq \overline{n}.$$

Visto che $\psi \equiv 1$ su un compatto che contiene tutti i supporti delle φ_{ε_n}, ne segue facilmente che, per gli stessi n,m, si ha anche

$$\varepsilon\,\psi < \varphi_{\varepsilon_n} - \varphi_{\varepsilon_m} < -\varepsilon\,\psi.$$

Dalla linearità e monotonia di Λ ne segue

$$\varepsilon\,\Lambda(\psi) < \Lambda(\varphi_{\varepsilon_n}) - \Lambda(\varphi_{\varepsilon_m}) < -\varepsilon\,\Lambda(\psi),$$

ossia $|\Lambda(\varphi_{\varepsilon_n}) - \Lambda(\varphi_{\varepsilon_m})| \leq \varepsilon\,|\Lambda(\psi)|$, per $n, m \geq \overline{n}$, e quindi $(\Lambda(\varphi_{\varepsilon_n}))$ è di Cauchy. Poniamo

$$\overline{\Lambda}(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \Lambda(\varphi_{\varepsilon_n}), \quad \forall\, \varphi \in C_c(\Omega).$$

Visto che la mollificazione preserva la positività, se $\varphi \geq 0$ allora $\varphi_{\varepsilon_n} \geq 0$ e quindi (essendo Λ positivo) $\Lambda(\varphi_{\varepsilon_n}) \geq 0$. Ne segue che $\overline{\Lambda}$ è un funzionale positivo. La sua linearità è altrettanto banale.

Proviamo infine che $\overline{\Lambda}$ prolunga Λ. Sia $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. La costruzione sopra dipende solo dal fatto che φ_{ε_n} tende uniformemente a φ su Ω (oltre alla proprietà dei supporti). Quindi possiamo sostituire alla successione $(\varphi_{\varepsilon_n})$ la nuova successione $(\varphi^*_{\varepsilon_n})$ definita da

$$\varphi_{\varepsilon_1}, \varphi, \varphi_{\varepsilon_2}, \varphi, \varphi_{\varepsilon_3}, \varphi, \ldots;$$

lo stesso argomento di cui sopra prova che $(\Lambda(\varphi^*_{\varepsilon_n}))$ è di Cauchy, quindi convergente. Visto che tale successione contiene come sottosuccessioni sia $(\Lambda(\varphi_{\varepsilon_n}))$ che la successione costante $(\Lambda(\varphi))$, segue che

$$\Lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(\varphi_{\varepsilon_n}).$$

L'arbitrarietàï¿½ di $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ prova che $\overline{\Lambda}$ prolunga Λ. □

Torniamo allora al funzionale Λ definito in (4.2). Grazie al Lemma 4.1, esso si prolunga a un funzionale lineare positivo $\overline{\Lambda} : C_c(a,b) \to \mathbb{C}$; a quest'ultimo applichiamo il classico Teorema di Rappresentazione di Riesz: esiste dunque una unica misura di Radon μ su (a,b) che rappresenta $\overline{\Lambda}$. In particolare μ rappresenta anche Λ su $C_c^\infty(a,b)$, ossia vale (4.1).

4.2 Derivabilità q.o. delle funzioni monotone

Per dimostrare che la funzione monotona f è derivabile quasi dappertutto, si applica la decomposizione di Lebesgue a μ; questo è lecito poiché, con un po' di lavoro, si prova che μ è finita giacché verifica

$$\mu(a,b) \leq f(b) - f(a).$$

Dai Teoremi 1.8 e 1.11 di Lebesgue e Radon-Nikodym, esiste una $h \in L^1(\mathrm{d}x)$ tale che

$$\mu = h\,\mathrm{d}x + \mu_s,$$

dove μ_s è la misura singolare della decomposizione di μ rispetto alla misura di Lebesgue dx. Grazie alla teoria dei punti di Lebesgue sviluppata in questa tesi, si riesce a provare che f è derivabile quasi dappertutto e che $h = f'$. Vediamo uno sketch di questa parte della dimostrazione.

1. Essendo f monotona, è semplice provare che i suoi punti di discontinuità sono numerabili, quindi f è continua quasi dappertutto;

2. dal Teorema 2.7 sappiamo che $\mathcal{L}^1$-quasi ogni punto di (a, b) è di Lebesgue per h, poiché h è sommabile;

3. infine sappiamo dal punto 2 del Teorema 2.12 che

$$(\bigstar) \qquad \lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_s((x-r, x+r))}{\mathcal{L}^1((x-r, x+r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^1 - \text{q.o. } x \in (a, b).$$

Mettendo assieme queste tre cose, $\mathcal{L}^1$-quasi ogni punto di (a, b) è di continuità per f, è punto di Lebesgue per h e verifica $(\bigstar)$. Dimostriamo che in tale x risulta che f è derivabile e vale $f'(x) = \widetilde{h}(x)$.

Sfruttando la continuità di f fuori da un insieme numerabile, non è difficile provare che, per ogni $\xi \in (a, b)$ con $\xi \neq x$ vale

$$\begin{cases} \text{se } \xi < x \text{ vale} & \mu((\xi, x)) \leq f(x) - f(\xi) \leq \mu([\xi, x]) \\ \text{se } \xi > x \text{ vale} & \mu((x, \xi)) \leq f(\xi) - f(x) \leq \mu([x, \xi]). \end{cases}$$

Per finire, se x_h è una qualunque successione in $(a, b) \setminus \{x\}$ convergente a x, denotato con E_h il segmento di estremi x e x_h, dal punto 3 del Teorema 2.12 (e dalle stime di cui sopra) segue che

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{f(x_h) - f(x)}{x_h - x} = \lim_{h\to+\infty} \frac{\mu(E_h)}{\mathcal{L}^1(E_h)} = \widetilde{h}(x),$$

e quindi $f'(x) = \widetilde{h}(x)$ come volevasi.

Bibliografia

[1] W. Rudin: *Analisi Reale e Complessa*, Bollati Boringhieri, 1974.

[2] M. Degiovanni: *Teoria della Misura*, Dispensa, Anno Accademico 2011/2012. Disponibile all'url `http://www.dmf.unicatt.it/~degiova/download/dispense.html`