

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

## Determinazione della massa in astrofisica

Tesi di Laurea

Presentata da:  
**Giulia Congera**

Relatrice:  
Chiar.ma Prof.ssa **Marcella Brusa**

---

Anno accademico 2022-2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Leggi di Keplero</b>	<b>2</b>
2.1	Massa di Sagittarius A* . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Stelle binarie</b>	<b>4</b>
3.1	Binarie visuali . . . . .	4
3.2	Binarie spettroscopiche . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Relazione L-M per le stelle in sequenza principale</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Pianeti extrasolari</b>	<b>8</b>
5.1	Metodi astrometrici . . . . .	8
5.2	Metodi spettroscopici . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Masse limite</b>	<b>9</b>
6.1	Nane bianche e massa di Chandrasekhar . . . . .	10
6.2	Luminosità di Eddington e massa massima delle stelle . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Curve di rotazione delle galassie a spirale e materia oscura</b>	<b>13</b>
<b>8</b>	<b>Teorema del viriale e massa degli ammassi di galassie</b>	<b>15</b>
<b>9</b>	<b>Conclusione</b>	<b>16</b>
<b>10</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>17</b>

# 1 Introduzione

In fisica, la massa è una proprietà intrinseca degli oggetti e descrive la quantità di materia contenuta in un corpo. Più precisamente, possiamo distinguere tra due tipi di masse: la *massa inerziale* e la *massa gravitazionale*.

La massa inerziale esprime l'inerzia di un corpo, cioè la sua resistenza a variare il proprio stato di moto, ossia a modificare la sua velocità. Questa è la massa presente all'interno della seconda legge di Newton

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a} \quad (1)$$

in cui vediamo che fissata una forza  $\mathbf{F}$  agente su un corpo, la variazione della sua velocità nel tempo, cioè l'accelerazione  $\mathbf{a}$ , è tanto maggiore quanto minore è la sua massa.

La massa gravitazionale è la capacità di un corpo di essere sorgente e di subire l'influsso di un campo gravitazionale ed è la massa presente nella legge di gravitazione universale

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_g M_g}{r^3} \mathbf{r} \quad (2)$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale pari a  $6,67 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$ ,  $M_g$  e  $m_g$  sono le masse dei due oggetti che interagiscono gravitazionalmente e  $r$  è la loro distanza reciproca.

Uno dei principi fondamentali della fisica afferma che la massa inerziale e la massa gravitazionale sono equivalenti. Questo principio è chiamato *principio di equivalenza*. Se non valesse, allora l'accelerazione gravitazionale di un oggetto attratto da una massa  $M_g$  sarebbe

$$\mathbf{a} = -\frac{GM_g}{r^3} \mathbf{r} \left( \frac{m_g}{m_i} \right) \quad (3)$$

con  $m_g/m_i$  che varia da oggetto a oggetto. Tuttavia, le moderne verifiche del principio di equivalenza hanno dimostrato che le due masse sono equivalenti a meno di una parte per  $10^{13}$ , perciò, in questo elaborato, indicheremo la massa con il simbolo  $m$ , dove  $m = m_i = m_g$ .

Il fatto che la massa sia presente in queste due fondamentali equazioni e di conseguenza in quasi tutte le equazioni della fisica rende la determinazione della massa dei corpi estremamente importante.

Vedremo quindi come calcolare, con alcune semplificazioni, la massa di corpi come stelle, pianeti e buchi neri, come stimare il valore massimo della massa delle nane bianche e delle stelle in sequenza principale e quali sono le importanti conseguenze di queste stime. Infine, vedremo come la determinazione della massa delle galassie e degli ammassi di galassie abbia portato alla scoperta della materia oscura.

## 2 Leggi di Keplero

Nei primi anni del '600, l'astronomo tedesco Keplero, studiando le osservazioni di Tycho Brahe, derivò tre leggi che permettono di descrivere il moto dei pianeti intorno al Sole. In seguito, Newton fu in grado di dare una spiegazione dinamica delle leggi di Keplero, introducendo la forza di gravitazione universale.

Le tre leggi formulate da Keplero sono le seguenti:

1. i pianeti si muovono su orbite ellittiche di cui il Sole è uno dei due fuochi;
2. il raggio vettore che congiunge il Sole con il pianeta spazza aree uguali in tempi uguali;
3. il quadrato del periodo orbitale  $P$  è proporzionale al cubo del semiasse maggiore  $a$  dell'orbita.

La costante di proporzionalità della terza legge di Keplero si può ricavare dalle equazioni del moto ed è pari a  $4\pi^2/G(M + m)$ , per cui, se  $M \gg m$ , caso in cui la posizione del centro di massa del sistema può essere approssimata alla posizione del corpo più massivo, possiamo riscrivere la terza legge come

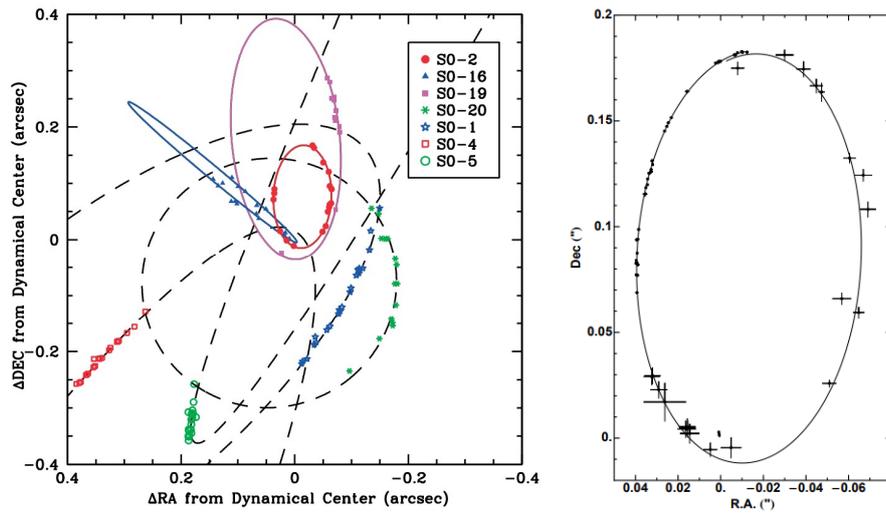
$$P^2 \approx \frac{4\pi^2}{GM} a^3. \quad (4)$$

Questa equazione permette, conoscendo il semiasse maggiore dell'orbita di un corpo e il suo periodo orbitale, di determinare la massa dell'oggetto attorno a cui orbita. Possiamo usarla, ad esempio, per calcolare la massa del Sole, sapendo che la Terra dista in media 1 AU dal Sole e il suo periodo di rivoluzione è di 1 anno:

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

## 2.1 Massa di Sagittarius A\*

Un metodo analogo a quello per misurare la massa del Sole visto al paragrafo precedente può essere utilizzato per misurare la massa di Sagittarius A\*, il buco nero al centro della nostra galassia. Infatti, tramite osservazioni ad alta risoluzione nell'infrarosso, nel corso di una decina d'anni, sono state ottenute le posizioni di alcune stelle attorno al centro galattico. I dati ottenuti descrivono quasi interamente l'orbita di una di queste stelle (la stella indicata con S02).



**Figura 1:** A sinistra: dati e rispettive orbite di sette stelle vicine al centro galattico [A. Ghez et al. ApJ 620, 744 (2005)]. A destra: orbita di S02 [S. Gillessen et al. ApJ 692, 1075 (2009)].

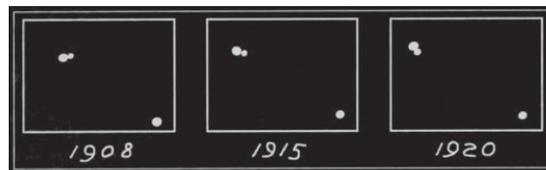
Il semiasse maggiore della stella S02 si può ricavare dall'orbita della figura 1 a destra e il periodo si ottiene sfruttando la seconda legge di Keplero. In seguito, tramite la terza legge di Keplero, si può ricavare la massa del buco nero attorno a cui orbita la stella. Si noti che l'orbita osservata è la proiezione sulla sfera celeste dell'orbita vera della stella, perciò la massa che si calcola con questo procedimento è la massa minima del buco nero. Il valore che si ottiene è  $M_{BH} \approx 4 \times 10^6 M_{\odot}$ .

### 3 Stelle binarie

Più della metà delle stelle si trova in sistemi binari. Esistono vari tipi di stelle binarie che distinguiamo in base al modo in cui queste vengono scoperte. Ci sono le *binarie visuali*, le *binarie spettroscopiche* e le *binarie fotometriche* o *binarie a eclisse*. Nei primi due casi è possibile sfruttare il moto delle due stelle attorno al centro di massa del sistema per ricavare la loro massa. Il terzo caso, invece, permette di conoscere la dimensione relativa delle due stelle, ma non dà informazioni sulla loro massa, perciò non verrà approfondito all'interno di questo elaborato.

#### 3.1 Binarie visuali

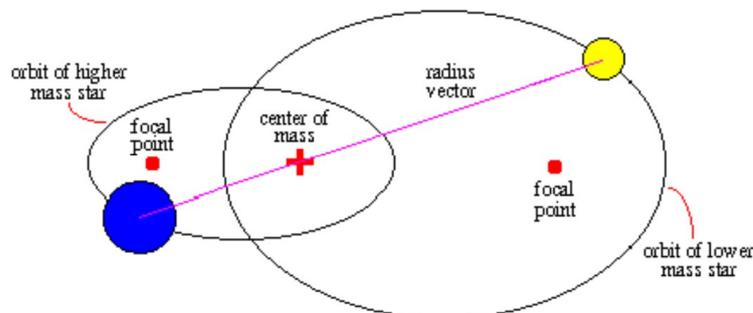
Le binarie visuali sono sistemi risolvibili ad occhio nudo o con un telescopio. Questo è possibile quando la separazione angolare delle due stelle è sufficientemente grande.



**Figura 2:** Immagini di una binaria visuale (Kruger 60, Yerkes Observatory).

Per calcolare la massa delle stelle del sistema binario, date le masse delle due stelle  $m_1$  e  $m_2$ , e i semiassi maggiori delle due orbite  $a_1$  e  $a_2$ , dalla definizione del centro di massa si ottiene l'equazione

$$m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}. \quad (5)$$



**Figura 3:** Schema di un sistema binario.

Chiamiamo  $a = a_1 + a_2$  il semiasse maggiore dell'orbita relativa.

Dopo aver ricavato  $a$  e  $P$  dell'orbita relativa, grazie alle osservazioni, inserendoli nella terza legge di Keplero (vd. cap. 2), si può calcolare la somma delle masse delle stelle:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{P^2}. \quad (6)$$

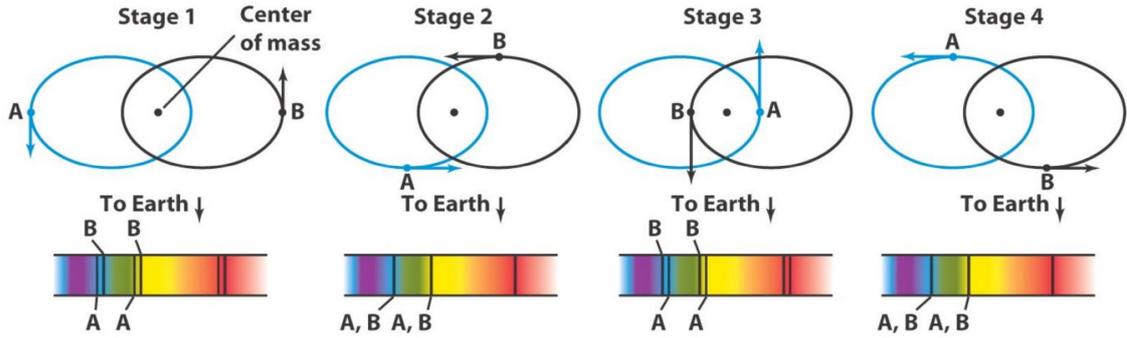
Sostituendo l'equazione (5) nella (6) otteniamo

$$m_1 = \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right)^{-1} \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{P^2}. \quad (7)$$

Analogamente si può ricavare  $m_2$ .

### 3.2 Binarie spettroscopiche

Nel caso delle binarie spettroscopiche, la natura binaria del sistema può essere identificata tramite il rilevamento di uno spostamento Doppler periodico delle righe spettrali di una o di entrambe le stelle. Lo spostamento Doppler è dovuto al moto delle stelle attorno al centro di massa del sistema.



**Figura 4:** Spostamento Doppler delle righe spettrali delle stelle binarie spettroscopiche.

Consideriamo, per semplicità, un sistema binario in cui le orbite sono circolari e le righe di cui osserviamo effetto Doppler sono quelle di una sola stella.

Dall'equazione (5) e dato  $a = a_1 + a_2$ , si ricava

$$a_1 = \frac{am_2}{m_1 + m_2}. \quad (8)$$

Indicando con  $v$  la velocità radiale osservata, con  $v_0$  la velocità orbitale vera e con  $i$  l'inclinazione del piano dell'orbita rispetto alla linea di vista, si ha che

$$v = v_0 \sin i. \quad (9)$$

Essendo l'orbita circolare, si ha

$$v_{0,1} = \frac{2\pi a_1}{P} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P}. \quad (10)$$

Sostituendo l'equazione (8) nella (10) si ottiene

$$v_1 = \frac{2\pi a}{P} \frac{m_2 \sin i}{m_1 + m_2}, \quad (11)$$

da cui ricaviamo

$$a = \frac{v_1 P}{2\pi} \frac{m_1 + m_2}{m_2 \sin i}. \quad (12)$$

Infine, sostituendo  $a$  nella terza legge di Keplero (vd. cap. 2), si ottiene

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{v_1^3 P}{2\pi G}. \quad (13)$$

Il termine a sinistra è chiamato *funzione di massa*. Nel caso in cui si riescano ad osservare le righe spettrali di una sola stella, è possibile ricavare solo la funzione di massa e non le singole masse. Se, invece, si osservano anche le righe della seconda stella si possono derivare le masse delle due stelle, mantenendo però l'incertezza sull'inclinazione. Infatti, per la seconda stella, si ha

$$v_2 = \frac{2\pi a_2 \sin i}{P}. \quad (14)$$

Confrontando (10) e (14) vediamo che

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (15)$$

Esplicitando  $m_1$  e sostituendola in (13) si ricava

$$m_2 \sin^3 i = \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^3 P}{2\pi G}. \quad (16)$$

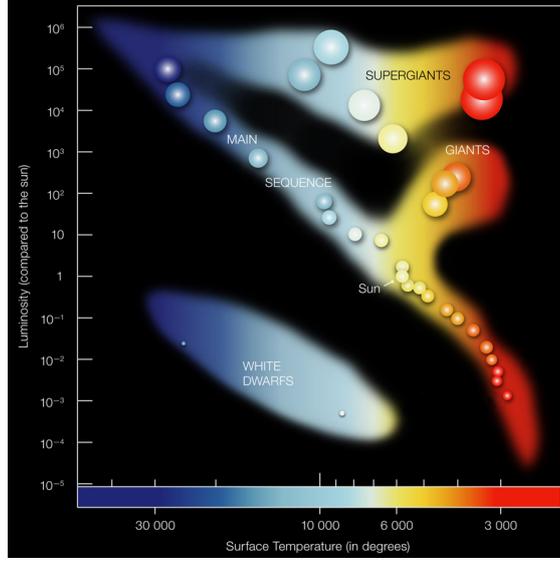
Una relazione analoga può essere ottenuta per  $m_1 \sin^3 i$ .

## 4 Relazione L-M per le stelle in sequenza principale

Nel capitolo precedente abbiamo visto come è possibile calcolare la massa delle stelle binarie sfruttando la dinamica dei sistemi binari. Per le stelle singole, invece, questo non è possibile e per conoscerne la massa si sfrutta la posizione delle stelle all'interno del diagramma di Hertzsprung-Russell (H-R).

Il diagramma H-R è un grafico Temperatura-Luminosità (vd. fig. 5), in cui la temperatura aumenta da destra a sinistra sull'asse delle ascisse e la luminosità cresce salendo lungo le ordinate. In questo grafico, le stelle tendono a posizionarsi in alcune zone ben distinte: in alto a destra si posizionano le stelle giganti e supergiganti, in basso a sinistra le nane bianche e, sulla diagonale, detta *sequenza principale*, che parte dall'angolo in alto a sinistra, verso l'angolo in basso a destra, si posizionano le stelle il cui nucleo è ancora nella fase di bruciamento dell'idrogeno.

Il diagramma H-R è fondamentale per la determinazione delle caratteristiche di una stella. Infatti, conoscendo la posizione della stella nel diagramma H-R (cioè conoscendo



**Figura 5:** Diagramma di Hertzsprung-Russell.

la sua luminosità e la sua temperatura), possiamo determinare, per esempio, il suo raggio e la sua massa.

Per calcolare il raggio si utilizza la legge di Stefan-Boltzmann,

$$L = 4\pi R_*^2 \sigma T^4, \quad (17)$$

dove  $R_*$  è il raggio della stella,  $L$  è la luminosità,  $T$  la temperatura e  $\sigma$  la costante di Stefan-Boltzmann.

Per la determinazione della massa si utilizza una relazione in cui lo studio dei sistemi binari ha avuto un ruolo cruciale. Infatti, sfruttando i sistemi binari, è stata calcolata la massa di un gran numero di stelle che, confrontata con la loro luminosità assoluta, per le stelle sulla sequenza principale, dà la relazione empirica

$$L \propto M^\alpha, \quad (18)$$

con  $\alpha$  che varia lungo la sequenza principale e i cui valori sono compresi tra 3 e 5. Questa relazione può essere riscritta, prendendo un valore medio di  $\alpha$ , nel modo seguente:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{3.2}. \quad (19)$$

Questa relazione non solo è utile per la determinazione della massa delle stelle singole, ma permette anche di fare alcune considerazioni sulla massa massima delle stelle (vd. cap. 6) e di stimare il tempo di vita di una stella sulla sequenza principale. Infatti, sappiamo che la luminosità della stella, moltiplicata per il tempo in cui la stella sta in sequenza principale ( $t_{MS}$ ), equivale all'energia prodotta dalla stella in quel lasso di tempo, che a sua volta è proporzionale alla massa della stella,

$$Lt_{MS} \propto M. \quad (20)$$

Dall'equazione (18) otteniamo, dunque,

$$t_{MS} \propto M^{1-\alpha}. \quad (21)$$

Perciò più la stella è massiva, più sarà breve la sua vita in sequenza principale.

## 5 Pianeti extrasolari

Dopo la scoperta del primo pianeta extrasolare nel 1995, molti astrofisici iniziarono ad occuparsi dell'individuazione di altri pianeti extrasolari e del successivo calcolo della loro massa. Infatti, ottenere informazioni sulle caratteristiche di altri sistemi planetari, non solo è utile per ampliare la nostra conoscenza in merito agli esopianeti, ma è anche essenziale per comprendere meglio il nostro sistema planetario e formulare teorie migliori sulla sua formazione.

I metodi di individuazione dei pianeti extrasolari si possono suddividere in metodi diretti e metodi indiretti. I metodi diretti hanno come risultato quello di ottenere un'immagine del pianeta e sono i più difficili da attuare. Le principali difficoltà riguardano il contrasto tra la stella e il pianeta e la loro separazione angolare. In alcuni casi, invece che osservare direttamente il pianeta, è possibile rilevarlo osservando gli effetti che questo ha sulla stella. Questo principio è alla base dei metodi indiretti. I concetti che vengono utilizzati per applicare questi metodi sono gli stessi del capitolo 3 sulle stelle binarie. Si dice spesso, infatti, che un pianeta orbita intorno a una stella, ma questo è vero solo se si trascura la massa del pianeta rispetto a quella della stella. In realtà, sia la stella sia il pianeta (o i pianeti) orbitano attorno al centro di massa del sistema. Di conseguenza, è possibile rilevare la presenza di un pianeta osservando una variazione della posizione della stella sul piano del cielo (metodi astrometrici) o misurando una variazione della velocità della stella lungo la linea di vista (metodi spettroscopici). Entrambi i metodi non solo indicano la presenza di un pianeta, ma permettono anche di calcolarne la massa entro certi limiti.

### 5.1 Metodi astrometrici

Mentre i pianeti orbitano attorno al centro di massa, anche la stella al centro descrive un'orbita, la cui complessità dipende dal numero di pianeti nel sistema. Nel caso del Sistema Solare, il moto del Sole è dovuto principalmente alla presenza di Giove, ma risente anche in piccola parte della presenza degli altri pianeti meno massivi.

Per rilevare la presenza di un pianeta extrasolare è quindi necessario essere in grado di rilevare una deviazione o oscillazione periodica nella posizione della stella rispetto alle stelle di sfondo lontane. Nell'approssimazione in cui il moto della stella sul piano del cielo è un moto circolare, l'ampiezza angolare della sua orbita è

$$\delta\theta = \frac{a_*}{D},$$

dove  $a_*$  è il raggio dell'orbita della stella e  $D$  è la distanza del sistema dalla Terra. Assumendo che ci sia solo un pianeta nel sistema (oppure che ci sia un pianeta i cui effetti dinamici sulla stella siano tali da mascherare quelli degli altri pianeti), usando l'equazione (5), otteniamo

$$\delta\theta = \frac{m_p a_p}{m_* D}, \quad (22)$$

dove  $m_p$  è la massa del pianeta,  $m_*$  la massa della stella e  $a_p$  il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta. Questa equazione mostra come il metodo astrometrico sia tanto

più sensibile quanto più il pianeta è massivo e tanto più è lontano dalla sua stella. Ciò nonostante, dalla terza legge di Keplero, abbiamo che, più il pianeta è lontano dalla stella, più è grande il suo periodo orbitale (quindi anche quello della stella). Ciò rende necessario un maggior tempo di osservazione per rilevare il moto della stella.

Una volta rilevata la presenza di un pianeta, avendo  $\delta\theta$ , l'equazione (22) mostra che, conoscendo  $D$ , stimando  $m_*$  per esempio tramite la luminosità della stella (vd. cap. 4) e calcolando  $a_p$ , ottenibile conoscendo il periodo orbitale del pianeta (che è uguale al periodo orbitale della stella) e sostituendolo nella terza legge di Keplero, possiamo avere una stima della massa del pianeta.

## 5.2 Metodi spettroscopici

I metodi astrometrici trascurano totalmente il moto della stella lungo la linea di vista perché i moti radiali delle stelle, per definizione, non hanno una proiezione sul piano del cielo. Tuttavia è possibile misurare la velocità radiale utilizzando la spettroscopia, come spiegato nel capitolo 3.2 sui sistemi di stelle binarie. La differenza rispetto alle stelle binarie è che nel caso dei sistemi planetari si osserva solo lo spostamento Doppler delle righe della stella, essendo il pianeta molto debole in termini di luminosità.

Quindi, con assunzioni analoghe a quelle fatte nel paragrafo precedente, cioè, assumendo che ci sia un solo pianeta nel sistema o trascurando l'effetto degli altri pianeti e assumendo che le orbite siano circolari, si ottiene nuovamente l'equazione (13):

$$\frac{m_p^3 \sin^3 i}{(m_p + m_*)^2} = \frac{v_*^3 P}{2\pi G}, \quad (23)$$

dove, in questo caso,  $m_p$  è la massa del pianeta,  $m_*$  la massa della stella e  $v_*$  la velocità della stella.

Essendo la massa della stella sempre molto maggiore della massa del pianeta, possiamo riscrivere l'equazione nel seguente modo:

$$m_p^3 \sin^3 i \approx \frac{m_*^2 v_*^3 P}{2\pi G}. \quad (24)$$

Per un sistema come quello Terra-Sole ci aspettiamo una velocità pari a

$$v_* \approx 9 \sin i \text{ cm/s}$$

che, per essere rilevata, richiede una precisione molto maggiore rispetto a quella attuale, che è al massimo dell'ordine del m/s. Questo è uno dei motivi per cui al momento è così difficile trovare sistemi planetari simili al nostro.

## 6 Masse limite

In astrofisica, la determinazione della massa non riguarda solo l'utilizzo di metodi diretti o indiretti per stimare la massa di un oggetto specifico come una stella, un pianeta o un buco nero. In alcuni casi è utile studiare anche il limite di massa che una certa tipologia di oggetti può avere. Ciò permette di capire meglio la natura dei corpi celesti che osserviamo e di comprenderne l'evoluzione.

## 6.1 Nane bianche e massa di Chandrasekhar

Una nana bianca è lo stadio finale di una stella che ha massa simile alla massa del Sole. Queste stelle hanno un raggio confrontabile con quello della Terra, per cui la densità delle nane bianche è all'incirca  $10^6$  volte quella del Sole. Densità così elevate costringono gli elettroni in una condizione di materia degenerare non relativistica, la quale esercita una pressione  $P \propto \rho^{5/3}$ . A un certo grado di compressione, la pressione degli elettroni diventa sufficiente per contrastare l'attrazione gravitazionale che tende a comprimere la stella e questa si stabilizza nel suo stato di nana bianca.

La dimensione della stella, in funzione della massa, a cui ciò avviene può essere ottenuta tramite l'equazione di stato della materia degenerare non relativistica e l'equazione dell'equilibrio idrostatico. La prima fornisce la pressione degli elettroni a una certa densità, mentre la seconda permette di stimare la pressione al centro della stella  $P_c$ , che è la massima pressione da bilanciare per stabilizzare la stella. Si può stimare che  $P_c \propto M^2/R^4$ , dove  $M$  e  $R$  sono rispettivamente la massa e il raggio della stella. Essendo  $\rho \propto M/R^3$ , dall'uguaglianza otteniamo

$$R \propto M^{-1/3}. \quad (25)$$

Quindi, più la massa della stella aumenta, più il suo raggio diminuisce.

Questa equazione mostra, inoltre, che l'equilibrio della stella è un equilibrio stabile. Infatti  $P \propto R^{-5}$ , mentre  $P_c \propto R^{-4}$ , per cui, se la dimensione della stella diminuisce, la pressione degli elettroni degeneri aumenta più velocemente della pressione gravitazionale.

Se la nana bianca si trova in un sistema binario e accresce materia dalla stella compagna, la sua massa aumenta gradualmente, perciò, in accordo con l'equazione (25), le sue dimensioni diminuiscono e la sua densità aumenta come  $M^2$ . Con l'aumento della densità, gli elettroni degeneri si avvicinano ad un regime relativistico, in cui  $P \propto \rho^{4/3} \propto M^{4/3}/R^4$ . Vediamo perciò che, in un regime relativistico, la pressione degli elettroni degeneri non è più in grado di bilanciare la pressione di gravità ( $P \propto M^{4/3}/R^4$ ,  $P_c \propto M^2/R^4$ ) e la stella collassa per poi esplodere diventando una supernova detta di tipo Ia. La massa a cui ciò avviene è circa  $1.4 M_\odot$  ed è detta *massa di Chandrasekhar*. Ci aspettiamo quindi che non esistano nane bianche con una massa superiore a questo valore e infatti finora non ne è stata osservata nessuna.

Siccome queste stelle esplodono al raggiungimento di una massa critica che ha sempre all'incirca lo stesso valore, anche l'energia rilasciata a seguito dell'esplosione è all'incirca sempre la stessa. Questo rende le supernove di tipo Ia delle candele standard, cioè oggetti che hanno sempre la stessa magnitudine assoluta, la quale è nota, e questo permette di calcolarne la distanza. Infatti, conoscendo la magnitudine assoluta  $M$  e misurando quella apparente  $m$ , possiamo ricavare la distanza  $D$  sapendo che la differenza tra le due, detta *modulo di distanza* è

$$m - M = 5 \log D - 5, \quad (26)$$

da cui otteniamo che

$$D = 10^{\frac{m-M+5}{5}}. \quad (27)$$

## 6.2 Luminosità di Eddington e massa massima delle stelle

Come accennato nel capitolo 4, la relazione luminosità-massa per le stelle sulla sequenza principale permette di stimare la massa massima delle stelle. A questo scopo occorre introdurre la luminosità di Eddington.

La luminosità di Eddington è la luminosità di un corpo nel limite in cui la forza di gravità che tende a far contrarre l'oggetto eguaglia la forza dovuta alla pressione di radiazione che tende a espanderlo.

Supponiamo, per semplicità, che il gas di una fotosfera stellare sia un plasma di idrogeno ionizzato, formato, perciò, solo da elettroni e protoni. La gravità tende a spingere verso l'interno gli elettroni e i protoni con una forza proporzionale alla loro massa e, poiché la massa del protone è 1836 volte maggiore di quella dell'elettrone, possiamo trascurare la forza di gravità che agisce sugli elettroni.

Quindi la forza gravitazionale per unità di volume che agisce sul plasma è

$$F_{grav} = -\frac{GMm_p n_e(r)}{r^2} \quad (28)$$

dove  $M$  è la massa della stella,  $m_p$  è la massa del protone e  $n_e(r)$  è la densità numerica degli elettroni a distanza  $r$  dal centro della stella, che è uguale alla densità numerica dei protoni, siccome stiamo considerando un plasma, il quale è complessivamente neutro.

Per calcolare la forza dovuta alla pressione di radiazione dobbiamo calcolare quanto impulso viene trasferito alle particelle, da parte dei fotoni, a distanza  $r$  dal centro della stella. L'impulso per unità di frequenza, tempo e superficie trasportato dai fotoni di frequenza  $\nu$  a distanza  $r$  dal centro è il numero di fotoni a distanza  $r$  (sempre per unità di frequenza, tempo e superficie) moltiplicato per l'impulso del singolo fotone, cioè

$$\frac{L(\nu)}{4\pi r^2 h\nu} \frac{h\nu}{c} = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c}. \quad (29)$$

Assumendo che il plasma sia otticamente sottile, la sezione d'urto per unità di volume delle particelle è

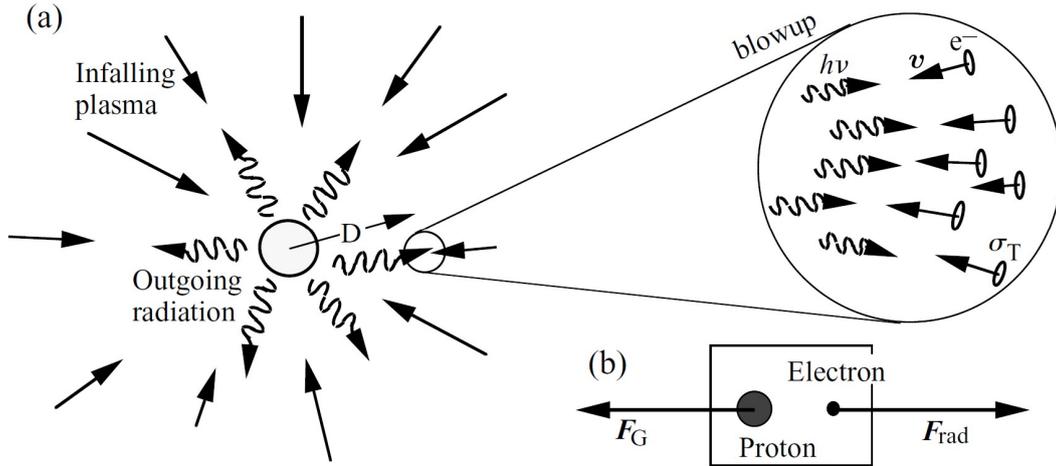
$$n_e(r)\sigma_T + n_e(r)\sigma_p, \quad (30)$$

dove  $\sigma_T$  è la sezione d'urto elettromagnetica dell'elettrone, detta sezione d'urto Thomson, pari a  $6,65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$  e  $\sigma_p$  è la sezione d'urto elettromagnetica del protone. Siccome la sezione d'urto di una particella carica è proporzionale all'inverso del quadrato della sua massa,  $\sigma_p$  è circa un milione di volte minore rispetto a  $\sigma_T$ , perciò il secondo termine della (30) può essere trascurato.

La forza per unità di volume che agisce sulle particelle a distanza  $r$  su tutte le frequenze è, quindi,

$$F_{rad} = \frac{Ln_e(r)\sigma_T}{4\pi r^2 c}. \quad (31)$$

Questa forza e la forza di gravità tenderebbero a separare elettroni e protoni, ma la forza elettrostatica che li tiene vicini è molto maggiore, perciò possiamo considerare elettroni e protoni come un sistema unico su cui agiscono sia la forza di gravità sia la forza esercitata dalla radiazione.



**Figura 6:** Schema della Luminosità di Eddington nel caso idealizzato di un plasma di idrogeno ionizzato. (a) I fotoni escono dalla stella e trasferiscono il loro impulso alle particelle del plasma. (b) Sul "sistema" protone-elettrone agiscono sia la forza di gravità sia la forza esercitata dalla radiazione (Bradt H. *Astrophysics processes*, Cambridge University Press, 2008, p. 74).

La forza totale che agisce sul plasma è

$$F_{tot}(r) = \frac{n_e(r)}{r^2} \left( -GMm_p + \frac{L\sigma_T}{4\pi c} \right) \quad (32)$$

Definiamo luminosità di Eddington la luminosità alla quale  $F_{tot}(r) = 0$ , cioè

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c G m_p M}{\sigma_T}. \quad (33)$$

Quando la luminosità è maggiore della luminosità di Eddington, la gravità non è più in grado di bilanciare la pressione di radiazione e la stella si autodistrugge. Per il Sole  $L_{Edd} \approx 10^{38}$  erg/s e, siccome  $L_{\odot} \approx 10^{33}$  erg/s, il Sole è estremamente sub-Eddington. Notiamo che la luminosità di Eddington è proporzionale alla massa della stella, perciò, per quanto spiegato nel capitolo 4, abbiamo che, per una stella in sequenza principale,

$$\frac{L}{L_{Edd}} \propto \frac{M^\alpha}{M}. \quad (34)$$

Considerando un valore medio di  $\alpha$ , dall'equazione (19) possiamo scrivere che

$$\frac{L}{L_{Edd}} \approx 10^{-5} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2.2}. \quad (35)$$

Se questo rapporto è maggiore di 1, la stella si autodistrugge per pressione di radiazione. Otteniamo quindi un valore limite per la massa delle stelle:

$$M_{max} \approx 190M_{\odot}. \quad (36)$$

In realtà, per un calcolo più accurato, dovremmo considerare il fatto che la fotosfera delle stelle non è totalmente ionizzata, per cui dovremmo sostituire la sezione d'urto

Thomson con quella degli atomi, che è molto più grande e tende perciò a far diminuire la luminosità di Eddington. Di conseguenza anche il valore massimo della massa diminuisce. In generale, più una stella è ricca di metalli più la sua massa limite è bassa. Le stelle di popolazione III sono quelle che più si avvicinano al valore che abbiamo ottenuto.

Il calcolo della massa massima delle stelle non solo ci permette di capire perché non osserviamo stelle con masse arbitrariamente grandi, ma solleva anche una domanda: siccome le stelle possono al massimo essere di qualche centinaio di masse solari e l'unico processo di formazione di buchi neri che conosciamo è il collasso stellare, come si sono formati i buchi neri supermassicci di miliardi di masse solari che osserviamo al centro di alcune galassie? Supponendo che siano il risultato di buchi neri stellari che con il tempo hanno aumentato la loro massa tramite accrescimento, il tempo trascorso tra il collasso delle prime stelle e la formazione dei primi buchi neri supermassicci è sufficiente per l'accrescimento di così tanto materiale? Nonostante non siano ancora stati osservati buchi neri la cui massa sia incompatibile con una crescita tramite accrescimento, gli strumenti moderni ci permettono di misurare le masse di buchi neri supermassicci sempre più vecchi, per cui attualmente questi quesiti sono ancora aperti.

## 7 Curve di rotazione delle galassie a spirale e materia oscura

Negli anni '70, alcune considerazioni sulla velocità di rotazione delle stelle nelle galassie a disco portarono per la prima volta a ipotizzare che la massa delle galassie non sia solamente quella che possiamo stimare dalla loro luminosità. Ciò portò alla scoperta di quella che oggi chiamiamo *materia oscura*.

Queste considerazioni si basavano sul concetto di curva di rotazione. La curva di rotazione è una proprietà del campo gravitazionale di un oggetto. È la velocità delle orbite circolari in funzione della distanza dal centro dell'oggetto. Per un oggetto puntiforme di massa  $M$  possiamo calcolare la curva di rotazione uguagliando l'accelerazione centripeta di un corpo che gli orbita attorno a distanza  $R$  alla sua accelerazione di gravità, ottenendo

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \quad (37)$$

Questa è detta "curva di rotazione Kepleriana", in quanto segue lo stesso andamento delle orbite del Sistema Solare, descritte dalle leggi di Keplero.

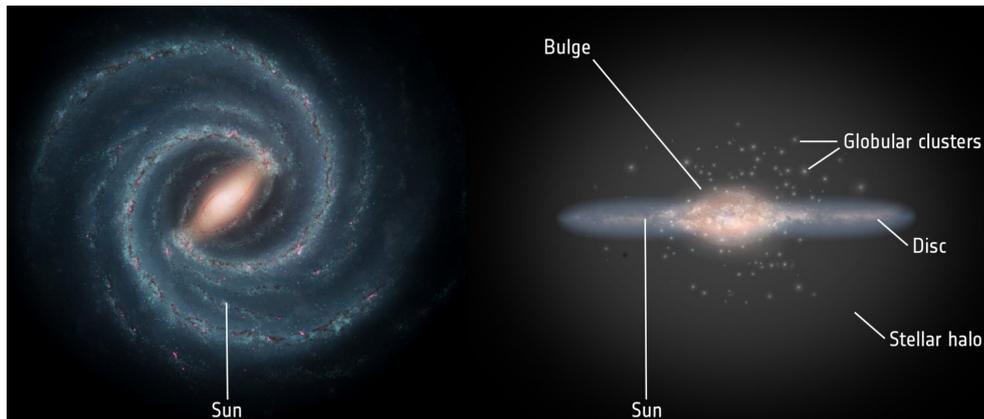
Per calcolare la curva di rotazione di una distribuzione sferica si usano, invece, il primo e secondo teorema di Newton che affermano rispettivamente che il campo gravitazionale all'interno di una superficie sferica di materia è nullo e che, se siamo fuori dalla superficie sferica, il campo gravitazionale è uguale al caso in cui tutta la massa della superficie sia concentrata al centro della sfera. Perciò, a distanza  $R$  dal centro della distribuzione sferica, contribuisce al campo gravitazionale solo la massa contenuta all'interno della sfera di raggio  $R$  e la curva di rotazione sarà

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}, \quad (38)$$

dove  $M(R)$  è la massa contenuta fino al raggio  $R$  che, se assumiamo densità uniforme  $\rho$ , è pari a

$$M(R) = \frac{4}{3}\rho\pi R^3, \quad (39)$$

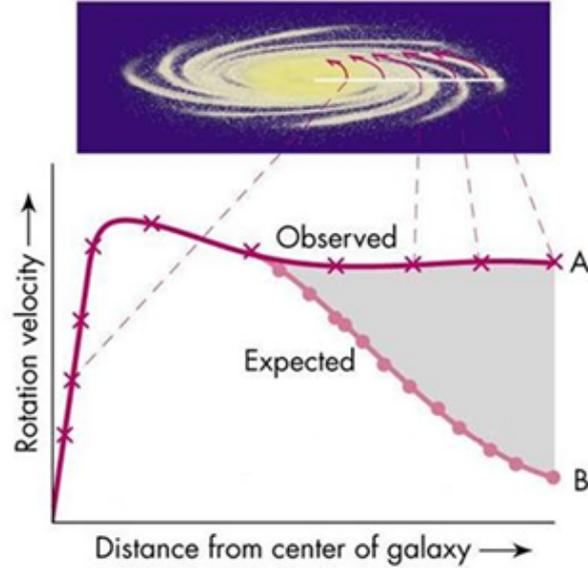
per cui  $v(R) \propto R$ . Una curva di rotazione di questo tipo è detta "curva di rotazione armonica". Questa è approssimativamente la curva di rotazione del bulge delle galassie a disco, che è la zona centrale, come è raffigurato in fig. 7.



**Figura 7:** Struttura della Via Lattea, un esempio di galassia a disco (ESA, *Anatomy of the Milky Way*).

Inizialmente si pensava che fuori dal bulge le stelle si muovessero seguendo una curva di rotazione kepleriana. Ciò fu smentito dalle osservazioni, in cui si vide che fuori dal bulge le stelle seguono all'incirca una curva di rotazione piatta ( $v(R) = \text{costante}$ ). Si pensò, quindi, che ci dovesse essere dell'altra materia, che non si riusciva ad osservare, che venne chiamata *materia oscura*. In realtà si scoprì poi, con un calcolo preciso, che la curva di rotazione di un disco galattico è proprio una curva di rotazione piatta. Tuttavia, l'ipotesi della presenza di materia in più rispetto a quella osservabile non era da scartare. Infatti, successivamente, alcuni astronomi osservarono le galassie in banda radio, sfruttando la riga a 21 cm, dovuta alla transizione tra due stati iperfini dell'idrogeno, e videro che il disco delle galassie si estende ben oltre le stelle che vediamo nell'ottico ed è formato in buona parte da gas di idrogeno neutro. Sfruttando lo spostamento Doppler della riga a 21 cm si può calcolare la velocità di rotazione del gas. In questo modo, si vide che, oltre il disco di stelle, il gas di idrogeno continua a seguire una curva di rotazione piatta anche se ci si aspetterebbe una caduta kepleriana, essendo la quasi totalità della massa della galassia contenuta all'interno del disco visibile (la massa del gas di idrogeno è trascurabile rispetto alla massa del disco di stelle). Nella figura 8 è raffigurato il confronto tra la curva di rotazione teorica e quella osservata.

Per spiegare una curva di rotazione piatta anche al di fuori del disco di stelle è necessario assumere che la galassia si trovi all'interno di un alone di materia oscura. Oggi sappiamo che tutte le galassie sono immerse in un alone di materia oscura e che questa costituisce circa l'85% della materia nell'universo, mentre la materia ordinaria, detta *barionica*, costituisce solamente il restante 15%. Il termine "oscura" è dovuto al fatto che questa materia non interagisce con la radiazione elettromagnetica e sappiamo che esiste solo perché ne osserviamo gli effetti gravitazionali. Nonostante siano state



**Figura 8:** Confronto tra la curva di rotazione teorica e la curva di rotazione osservata sfruttando la riga a 21 cm.

avanzate numerose ipotesi sulla natura della materia oscura, attualmente non sappiamo ancora cosa sia esattamente, ma la sua scoperta è stata ed è tuttora estremamente utile in particolare per la cosmologia e per le teorie di formazione ed evoluzione delle galassie.

## 8 Teorema del viriale e massa degli ammassi di galassie

Le galassie non sono disposte uniformemente nell'universo, ma sono raggruppate in ammassi che contengono dalle decine alle centinaia, in alcuni casi anche migliaia di galassie. In questo capitolo vediamo come calcolare la massa che un ammasso di galassie deve necessariamente avere per essere all'equilibrio, utilizzando un teorema estremamente importante per le sue numerose applicazioni in fisica: il teorema del viriale.

Per un sistema autogravitante, all'equilibrio e in cui la forza gravitazionale è proporzionale all'inverso della distanza al quadrato, il teorema del viriale afferma che, se  $T$  è l'energia cinetica totale del sistema e  $U$  è la sua energia potenziale, queste due grandezze sono legate dall'equazione

$$2T + U = 0. \quad (40)$$

Per un sistema di  $N$  oggetti, avente le caratteristiche elencate sopra, il teorema del viriale può essere espresso nel seguente modo:

$$2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \sum_{i>j=1}^N \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} = 0, \quad (41)$$

dove  $m_i$  e  $m_j$  sono le masse rispettivamente degli oggetti  $i$  e  $j$ ,  $v_i$  è la velocità dell' $i$ -esimo oggetto e  $r_{ij}$  è la distanza tra l'oggetto  $i$  e l'oggetto  $j$ .

Consideriamo il caso semplice in cui gli  $N$  oggetti siano le galassie di un ammasso, tutte aventi massa  $m$ . Moltiplicando il primo termine per  $N/N$  e il secondo per  $N^2/N^2$  otteniamo

$$Nm \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 - \frac{G(Nm)^2}{2} \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_{i \neq j} \frac{1}{r_{ij}} = 0, \quad (42)$$

dove nel secondo termine abbiamo diviso per  $1/2$  per evitare di contare due volte le stesse coppie.

Il primo termine ha  $N$  elementi, il secondo ne ha  $N(N-1)$  perché escludiamo i casi in cui  $i = j$ . La massa totale dell'ammasso è pari a  $M = Nm$ . Inoltre, per grandi  $N$  abbiamo che  $N(N-1) \approx N^2$ . Scriviamo quindi le somme in termini dei valori medi,

$$M \langle v_i^2 \rangle - \frac{GM^2}{2} \langle r_{ij}^{-1} \rangle = 0. \quad (43)$$

Ricaviamo, così, che la massa totale necessaria a tenere l'ammasso in equilibrio, detta *massa viriale*, è

$$M = \frac{2 \langle v_i^2 \rangle}{G \langle r_{ij}^{-1} \rangle}. \quad (44)$$

Le velocità lungo la linea di vista,  $v_{i,los}$ , possono essere ottenute sfruttando lo spostamento Doppler delle righe spettrali delle galassie, che devono essere corrette per lo spostamento dell'intero ammasso. Se tutte le direzioni del moto sono ugualmente probabili, le altre due componenti avranno, in media, lo stesso valore, per cui  $\langle v_i^2 \rangle = 3 \langle v_{i,los}^2 \rangle$ .

Tipicamente, la massa ottenuta utilizzando l'equazione (44) è molto maggiore della massa stimata tramite la luminosità. Ciò indica, come nel capitolo precedente, la presenza di materia oscura.

## 9 Conclusioni

In questo elaborato, abbiamo esaminato i principali approcci utilizzati per determinare la massa degli oggetti astrofisici e calcolato alcune masse limite. Data la natura astronomicamente remota degli oggetti in questione, la misurazione diretta delle loro masse è spesso irrealizzabile, pertanto, i metodi descritti sono spesso soggetti a numerose semplificazioni. Tuttavia, è evidente come la stima della massa, anche se approssimativa, rivesta una profonda importanza nell'ambito dell'astrofisica e rappresenti un tassello fondamentale per un'analisi più approfondita dei fenomeni osservati. Inoltre, è emerso come, in alcune circostanze, l'abilità di calcolare la massa o il limite della massa di un corpo possa sollevare interrogativi di grande rilevanza per l'avanzamento della fisica.

## 10 Bibliografia

1. Bradt H. *Astrophysics processes*, Cambridge University Press, 2008.
2. Kartunnen H. *Fundamental Astronomy*, Springer, 2016.
3. Ollivier M. *Planetary Systems*, Springer, 2009.
4. Cimatti A. Appunti del corso di *Astronomia*, 2021.
5. Ciotti L. Appunti del corso di *Astrofisica extragalattica*, 2023.
6. Testi L. Appunti del corso di *Atmosfere planetarie*, 2023.
7. Ferraro F. Appunti del corso di *Astrofisica stellare*, 2023.
8. S. Gillessen et al. *Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic centre*, ApJ 692, 1075, 2009.