

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Emissione di sincrotrone e applicazioni astrofisiche

Tesi di Laurea

Presentata da:
Filippo Bucci

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa **Marcella Brusa**

Anno accademico 2022-2023

Indice

1	Introduzione	2
2	Fisica del sincrotrone	2
2.1	Moto di una particella carica in un campo magnetico uniforme e stazionario	2
2.2	Radiazione da una particella carica accelerata	3
2.3	Beaming relativistico	4
2.4	Emissione di sincrotrone	4
2.4.1	Potenza emessa	4
2.4.2	Distribuzione spettrale	5
3	Applicazioni astrofisiche	7
3.1	Emissione da una popolazione di elettroni ultrarelativistici	7
3.2	Autoassorbimento di sincrotrone	8
3.3	Energetica di una radiosorgente	9
3.4	Energia minima della radiosorgente Cygnus A	11
3.5	Evoluzione temporale dello spettro di una radiosorgente	12
3.5.1	Caso senza iniezione di particelle	13
3.5.2	Caso con iniezione costante di particelle	14
3.6	Sincrotrone e Compton inverso	14
3.6.1	Catastrofe Compton	15
3.7	Polarizzazione	16
	Appendice	17
	A Derivazione della formula di Larmor relativistica	17
	Riferimenti bibliografici	19

1 Introduzione

Come risaputo, particelle cariche soggette a un'accelerazione emettono energia sotto forma di radiazione elettromagnetica (EM). Un particolare processo di questo tipo è quello dell'*emissione di sincrotrone*, che è dovuta al moto di particelle cariche *ultra-relativistiche*, cioè con velocità prossime a quella della luce nel vuoto, in un campo magnetico che ne curva la traiettoria. Questo fenomeno è stato osservato per la prima volta nel laboratorio di New York della General Electric (1947) in un acceleratore di particelle detto, appunto, sincrotrone. In seguito, l'emissione di sincrotrone si è rivelata un fenomeno diffuso in molti ambienti astrofisici, quali ad esempio le radiogalassie, i Quasar e i resti di supernovae. La radiazione emessa per sincrotrone da questi oggetti cade tipicamente (ma non sempre) nella banda radio.

Nel seguito, tratterò le principali caratteristiche che delineano le proprietà fisiche dell'emissione di sincrotrone, per poi sviluppare alcuni aspetti più complessi che permettono di ricavare informazioni importanti sulle sorgenti astrofisiche che presentano questo tipo di emissione. In molti casi, eviterò, per brevità, una trattazione completamente rigorosa, facendo tuttavia attenzione a presentare, almeno qualitativamente, i risultati fisicamente interessanti in maniera corretta.

Analizzerò i vari problemi tramite la fisica classica, assumendo che la lunghezza di de Broglie delle particelle sia molto minore della scala lineare dei problemi. In questo limite, le particelle possono essere approssimate come punti materiali ([4], p. 2.7).

Dove non diversamente specificato, il sistema di unità di misura utilizzato è il sistema di Gauss. Infine, indicherò con caratteri in grassetto le grandezze vettoriali e in corsivo le grandezze scalari.

2 Fisica del sincrotrone

2.1 Moto di una particella carica in un campo magnetico uniforme e stazionario

Iniziamo con lo studiare il moto di una particella in un campo magnetico uniforme e costante nel tempo, che è il modello di base per la descrizione dell'emissione di sincrotrone. In generale, in un sistema di riferimento (SdR) inerziale, una particella di carica q e massa a riposo m , in moto con velocità \mathbf{v} in un campo magnetico \mathbf{B} , è sottoposta a una forza

$$\mathbf{F} = \frac{d(\gamma m \mathbf{v})}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto e $\gamma = [1 - (|\mathbf{v}|/c)^2]^{-1/2}$ è il cosiddetto *fattore di Lorentz*. Poiché tale forza è sempre perpendicolare alla velocità (e quindi allo spostamento) della particella, essa non compie lavoro. Di conseguenza, $v \equiv |\mathbf{v}| = \text{cost}$, da cui $\gamma = \text{cost}$. Scrivendo

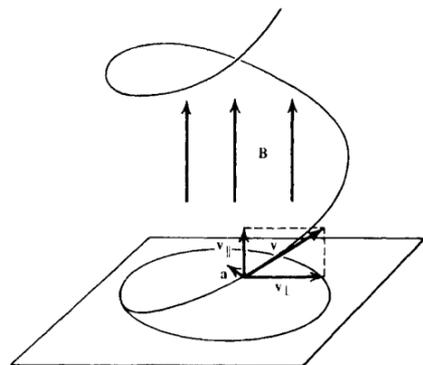


Figura 1: Moto elicoidale di una particella con carica negativa in un campo magnetico uniforme e stazionario ([12], p. 169).

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$, con

$$\mathbf{v}_{\parallel} \equiv \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}}{B^2} \mathbf{B}, \quad \mathbf{v}_{\perp} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}, \quad B \equiv |\mathbf{B}|, \quad (2)$$

possiamo scomporre la (1) come

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}. \quad (3)$$

Notiamo dunque che nella direzione parallela a \mathbf{B} si ha un moto rettilineo uniforme. Inoltre, poiché $v = cost$ e $v_{\parallel} \equiv |\mathbf{v}_{\parallel}| = cost$, si ha $v_{\perp} \equiv |\mathbf{v}_{\perp}| = (v^2 - v_{\parallel}^2)^{1/2} = cost$. Pertanto, la proiezione sul piano perpendicolare a \mathbf{B} del moto della particella è un moto circolare uniforme, poiché abbiamo un'accelerazione costante in modulo e sempre perpendicolare alla velocità. Abbiamo quindi la sovrapposizione di un moto rettilineo uniforme con un moto circolare uniforme, ovvero un moto elicoidale (fig. 1).

In generale, il modulo dell'accelerazione centripeta è $a_{\perp} = v_{\perp}^2/R$, da cui, confrontando con la (3) e ricordando che $\mathbf{v}_{\perp} \perp \mathbf{B}$, otteniamo il raggio dell'elica

$$R = r_{rel} \equiv \frac{\gamma mc}{|q|B} v_{\perp}. \quad (4)$$

2.2 Radiazione da una particella carica accelerata

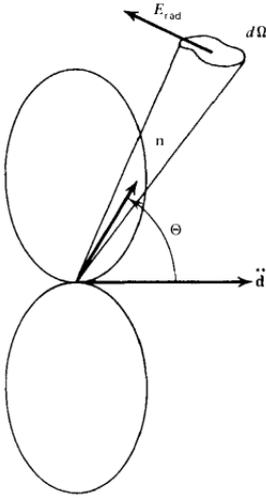


Figura 2: Diagramma polare del power pattern di una carica non relativistica in moto. Il vettore \mathbf{d} è il dipolo elettrico della particella, quindi $\mathbf{d} = qa$ ([12], p. 87).

generalizzazione che sia Lorentz-invariante. Tale espressione risulta essere ([4], p. 2.8)

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2q^2}{3m^2c^3} \gamma^2 \left[\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 - \beta^2 \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \right], \quad (7)$$

Le equazioni che governano l'elettromagnetismo sono le *equazioni di Maxwell*. Risolvendo tali equazioni per il campo EM prodotto da una particella carica in moto, si può dimostrare, come accennato nell'introduzione, che, se essa è accelerata, allora emette radiazione EM (vd. appendice A). La distribuzione angolare della potenza emessa (detta *power pattern*, fig. 2) da una particella di carica q e massa a riposo m che si muove con velocità $v \ll c$ e accelerazione a è

$$P(\Theta) \equiv -\frac{d\varepsilon}{dt d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta, \quad (5)$$

dove $\varepsilon = \gamma mc^2$ è l'energia della particella e Θ è l'angolo tra la linea di vista e il vettore accelerazione.

Per calcolare l'energia totale emessa nell'unità di tempo dobbiamo integrare sull'angolo solido, ottenendo la cosiddetta *formula di Larmor*:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2q^2 a^2}{3c^3}. \quad (6)$$

Nel nostro caso, non potremo usare direttamente questa formula, in quanto l'emissione di sincrotrone è prodotta da particelle ultrarelativistiche (con $\gamma \gtrsim 10^3$), ma ci servirà una sua

dove $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ è la quantità di moto della particella, $p \equiv |\mathbf{p}|$ e $\beta = v/c$.

2.3 Beaming relativistico

Il moto relativo di due osservatori fa sì che essi vedano gli stessi oggetti muoversi con velocità diverse sia in modulo che in direzione. Consideriamo due SdR K e K' , con K' che si muove con velocità \mathbf{V} rispetto a K . Indichiamo con α e α' , rispettivamente in K e K' , l'angolo tra \mathbf{V} e la direzione di propagazione di un'onda EM. Dalla formula di trasformazione delle velocità ([12], p. 110), si ottiene la formula per l'*aberrazione della luce*, che mette in relazione α e α' :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha')\sqrt{1 - (|\mathbf{V}|/c)^2}}{\cos(\alpha') + |\mathbf{V}|/c}. \quad (8)$$

Dalla (8), risulta evidente il cosiddetto effetto di *beaming relativistico*, per il quale la radiazione emessa da una particella carica in movimento viene concentrata lungo la direzione del moto. Infatti, supponiamo che K' sia il SdR di quiete istantanea della particella e consideriamo la radiazione emessa perpendicolarmente a \mathbf{V} , ovvero con $\alpha' = \pi/2$. Allora avremo

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - (|\mathbf{V}|/c)^2}}{|\mathbf{V}|/c} = \frac{c}{|\mathbf{V}|\gamma}, \quad (9)$$

da cui, per particelle ultrarelativistiche, ovvero per $|\mathbf{V}| \rightarrow c$,

$$\alpha \sim \arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) \sim \frac{1}{\gamma}. \quad (10)$$

Pertanto, possiamo considerare $\alpha \ll 1$, poiché $\gamma \gg 1$. Risulta quindi evidente che, con un power pattern, in K' , simmetrico rispetto al piano perpendicolare a \mathbf{V} , la metà dei fotoni, in K , verrà concentrata in un cono di semiapertura $1/\gamma$ con asse parallelo a \mathbf{V} , detto *cono di radiazione*, mentre l'altra metà verrà "spalmata" sui restanti quasi 4π steradiani. Questo non significa però che il cono di radiazione contenga solo metà della potenza emessa perché i fotoni al suo interno sono più energetici di quelli all'esterno ([6], p. 59).

2.4 Emissione di sincrotrone

2.4.1 Potenza emessa

Ora abbiamo tutte le basi per determinare le caratteristiche dell'emissione di radiazione prodotta da una particella che compie il moto studiato nella sezione 2.1. Innanzitutto, dalla (7), possiamo calcolare l'energia totale emessa per unità di tempo, notando che, poiché $v = cost$, $dp/dt = 0$, da cui, utilizzando la (1), si ha

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2q^2}{3m^2c^3}\gamma^2 \left[\left(\frac{q^2}{c^2} \right) v^2 B^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{2q^4}{3m^2c^3} \beta^2 \gamma^2 B^2 \sin^2 \theta, \quad (11)$$

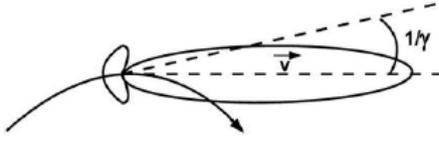


Figura 3: Distribuzione angolare della potenza emessa per sincrotrone ([6], p. 60).

dove θ è l'angolo tra \mathbf{B} e \mathbf{v} , detto *angolo di pitch*. La radiazione di sincrotrone è prodotta da particelle cariche ultrarelativistiche, per cui, ponendo $\beta \rightarrow 1$, otteniamo la potenza emessa per sincrotrone:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} \sim \frac{2q^4}{3m^2c^3} \gamma^2 B^2 \sin^2 \theta = 2c\sigma_T \left(\frac{q}{e}\right)^4 \left(\frac{m_e}{m}\right)^2 \gamma^2 \frac{B^2}{8\pi} \sin^2 \theta, \quad (12)$$

dove m_e è la massa dell'elettrone, $-e$ è la carica dell'elettrone e $\sigma_T = (8\pi/3)[e^2/(m_e c^2)]^2$ è la *sezione d'urto Thomson*. Dalla (12), notiamo che la potenza emessa è $\propto \gamma^2 \propto \varepsilon^2$, per cui le particelle più energetiche emettono più radiazione. Inoltre, $-d\varepsilon/dt \propto m^{-2}$, quindi le particelle più leggere sono quelle che irradiano più energia. Per esempio, a parità di condizioni, il rapporto tra la potenza emessa da un protone e quella emessa da un elettrone è $(m_e/m_p)^2 \simeq 3 \times 10^{-7}$, dove m_p è la massa del protone. Pertanto, nella maggioranza dei processi astrofisici, la radiazione di sincrotrone osservabile è prodotta dagli elettroni (e/o dai positroni) ed è quindi conveniente riscrivere la (12) per un elettrone (o un positrone):

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} \sim 2c\sigma_T \gamma^2 \frac{B^2}{8\pi} \sin^2 \theta = \frac{2e^4}{3m_e^4 c^7} \varepsilon^2 B^2 \sin^2 \theta \equiv b\varepsilon^2 B^2 \sin^2 \theta. \quad (13)$$

Da qui in poi, tranne dove diversamente specificato, supponiamo che la radiazione sia prodotta da elettroni.

2.4.2 Distribuzione spettrale

Come visto nella sezione 2.3, la radiazione emessa da una particella ultrarelativistica si concentra nel suo cono di radiazione. Pertanto, il power pattern di fig. 2, valido nel SdR di quiete istantanea della particella, diventa come quello di fig. 3, in cui l'accelerazione è perpendicolare alla velocità. Quindi, dal punto di vista pratico, un osservatore riceve radiazione sotto forma di impulsi solo quando il cono di semiapertura $1/\gamma$ punta nella sua direzione. Ai fini di determinare le caratteristiche della distribuzione spettrale della radiazione, è utile calcolare la durata di un impulso supponendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp$. Per la derivazione faremo riferimento alla fig. 4. Il tempo Δt che intercorre tra l'emissione (dal punto 1) del primo fotone che raggiunge l'osservatore e l'emissione (dal punto 2) dell'ultimo è dato dal tempo che l'elettrone impiega per percorrere un angolo $\Delta\theta = 2\alpha = 2/\gamma$. La velocità angolare si può ricavare dalla (4) come

$$\omega_{rel} = \frac{v_\perp}{r_{rel}} = \frac{eB}{\gamma m_e c}, \quad (14)$$

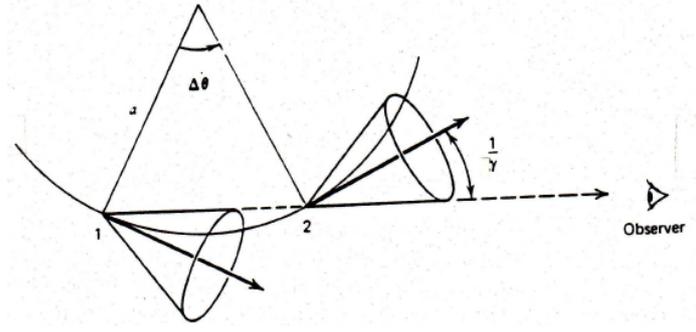


Figura 4: Geometria dell'impulso di radiazione ([4], p. 4.9).

da cui

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega_{rel}} = \frac{2m_e c}{eB}. \quad (15)$$

La durata dell'impulso ricevuto dall'osservatore è uguale a $\Delta\tau = \Delta t_2 - \Delta t_1$, dove Δt_i è il tempo che impiega il segnale emesso nel punto i per arrivare all'osservatore. Si ha

$$\Delta t_1 = \frac{d}{c}, \quad \Delta t_2 = \Delta t + \frac{d-x}{c}, \quad (16)$$

dove d è la distanza tra l'osservatore e il punto 1 e $x = 2r_{rel} \sin \alpha$ è la lunghezza della corda sottesa dall'arco percorso dalla particella nel tempo Δt . Quindi abbiamo

$$\Delta\tau = \Delta t - \frac{2r_{rel} \sin \alpha}{c} \sim \Delta t - \frac{r_{rel} \Delta\theta}{c} = \Delta t - \frac{r_{rel} \omega_{rel} \Delta\theta}{c} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \Delta t, \quad (17)$$

dove ho considerato $\sin \alpha \sim \alpha$ perché $\alpha \ll 1$. Scriviamo la (17) in funzione di γ , notando che, per $\gamma \gg 1$,

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \sim 1 - \frac{1}{2\gamma^2}, \quad (18)$$

da cui

$$\Delta\tau \sim \frac{\Delta t}{2\gamma^2} = \frac{m_e c}{eB\gamma^2}. \quad (19)$$

Utilizzando la (19), possiamo definire la frequenza caratteristica dell'emissione di sincrotrone ([4], p. 4.10)

$$\nu_s \equiv \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\Delta\tau} = \frac{3}{4\pi} \frac{eB\gamma^2}{m_e c} = \frac{3}{4\pi} \frac{eB\varepsilon^2}{m_e^3 c^5} \simeq (4.2 \times 10^{-9}) \gamma^2 \left(\frac{B}{\mu\text{G}}\right) \text{ GHz} \quad (20)$$

che è utile per stimare alcune quantità anche senza un formalismo rigoroso. Tramite un'analisi di Fourier dell'impulso ricevuto, si può derivare la distribuzione spettrale della potenza emessa $P(\nu)$, che presenta due andamenti (fig. 5). Per $\nu \ll \nu_s$, $P \propto (\nu/\nu_s)^{1/3}$, mentre per $\nu \gg \nu_s$, $P \propto e^{-\nu/\nu_s}$, per cui l'energia irradiata diventa velocemente trascurabile a grandi frequenze. Il picco dell'emissione è $\nu_m \simeq 0.29\nu_s$.

Per valori tipici in condizioni astrofisiche, possiamo porre $\gamma \approx 10^4$ e $B \approx 1 \mu\text{G}$, da cui $\nu_s \approx 0.4 \text{ GHz}$. Vediamo dunque che l'emissione di sincrotrone, in ambienti astrofisici, viene solitamente emessa in banda radio.

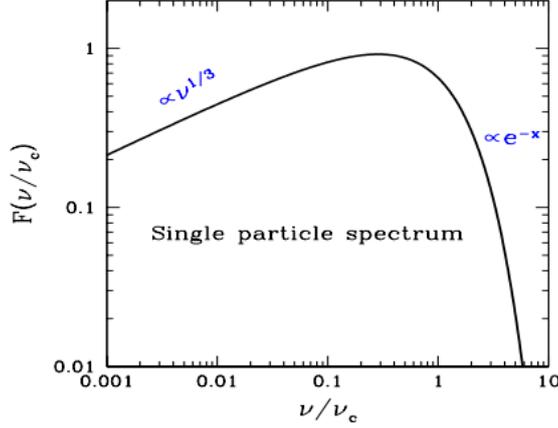


Figura 5: Distribuzione spettrale, in scala logaritmica, dell'emissione di sincrotrone di un singolo elettrone in funzione di ν/ν_s . In figura, ν_s è indicato come ν_c e $x = \nu/\nu_s$ ([6], p. 62).

In questo paragrafo, le formule sono state ricavate nell'ipotesi $\theta = \pi/2$. Per un angolo di pitch generico, è sufficiente fare la sostituzione $B \rightarrow B_{\perp} \equiv B \sin \theta$ ([4], p. 4.10).

3 Applicazioni astrofisiche

3.1 Emissione da una popolazione di elettroni ultrarelativistici

Nei casi astrofisici, non si osserva mai la radiazione di un singolo elettrone isolato, ma di insiemi di elettroni con energie e angoli di pitch molto diversi tra loro. Nelle ipotesi che ciascun elettrone emetta radiazione in maniera indipendente dagli altri e che non vi sia autoassorbimento, possiamo calcolare l'emissione totale sommando i singoli contributi.

Data una distribuzione $N(\varepsilon)$ tale che $N(\varepsilon)d\varepsilon$ rappresenti gli elettroni per unità di volume con energia compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$, l'emissività specifica, cioè la potenza monocromatica emessa per unità di volume, vale

$$J_s(\nu) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} P(\nu, \varepsilon) N(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (21)$$

dove ε_1 e ε_2 sono gli estremi dello spettro di energia della popolazione. Per semplicità, effettuiamo il calcolo supponendo che ogni elettrone emetta tutta l'energia alla frequenza caratteristica. I risultati che si ottengono sono molto simili a quelli rigorosi ([4], p. 4.14). La potenza per unità di volume emessa con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ è data dal prodotto della potenza emessa da un singolo elettrone per la densità numerica di elettroni con energia ε tale che $\nu = \nu_s$, ovvero con energia

$$\varepsilon(\nu) = A^{-1/2} \nu^{1/2}, \quad A \equiv \frac{3eB_{\perp}}{4\pi m_e^3 c^5}. \quad (22)$$

Quindi si ha

$$J_s(\nu) d\nu = -\frac{d\varepsilon}{dt} N(\varepsilon) d\varepsilon \Rightarrow J_s(\nu) = -\frac{d\varepsilon}{dt} N(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{d\nu}. \quad (23)$$

Per esplicitare $N(\varepsilon)$, supponiamo che si abbia una distribuzione a legge di potenza del tipo

$$N(\varepsilon) = N_0 \varepsilon^{-\delta}. \quad (24)$$

Tale scelta è giustificata per diverse ragioni ([4], p. 4.11). Infatti, le previsioni che si ottengono con questo modello sono in buon accordo con gli spettri osservati delle radiosorgenti. Inoltre, diversi meccanismi teorici per l'accelerazione di elettroni ultrarelativistici prevedono una distribuzione di energia a legge di potenza.

A questo punto, calcolando $d\varepsilon/d\nu$, e sostituendo la (22), la (24) e la (13) nella (23), si ottiene una stima, nelle approssimazioni fatte, dell'emissività specifica di una popolazione di elettroni ultrarelativistici che emette per sincrotrone:

$$J_s(\nu) = f(\alpha) N_0 B_{\perp}^{\frac{\delta+1}{2}} \nu^{-\alpha}, \quad f(\alpha) \equiv \frac{1}{9} \left(\frac{4\pi e^3}{m_e c^2} \right) \left(\frac{4\pi m_e^3 c^5}{3e} \right)^{-\alpha}. \quad (25)$$

Anche lo spettro, come la distribuzione di energia, è una legge di potenza. Il coefficiente $\alpha \equiv (\delta - 1)/2$ è detto *indice spettrale* e dipende solo da δ . Questo significa che dall'osservazione degli spettri delle radiosorgenti si possono ricavare informazioni sull'energia degli elettroni che le popolano. Valori tipici dell'indice spettrale in sorgenti extragalattiche sono dell'ordine di 0.75 [9], che corrispondono a $\delta \approx 2.5$.

In questo paragrafo abbiamo supposto, per semplicità, che gli elettroni avessero tutti lo stesso angolo di pitch. Nel caso, più realistico, di una distribuzione isotropa di angoli di pitch, dovremmo modificare opportunamente la (25) mediando su θ .

3.2 Autoassorbimento di sincrotrone

Nella sezione precedente, abbiamo trascurato il fenomeno dell'autoassorbimento, per cui la trattazione era valida per nubi "trasparenti" alla propria radiazione. Questo non è più vero quando la temperatura di brillanza T_b della sorgente, cioè la temperatura di un corpo nero che ha la stessa intensità specifica di tale sorgente, si avvicina alla sua temperatura cinetica T_{cin} . Quando ciò avviene, poiché, per motivi termodinamici, non si può mai avere $T_b > T_{cin}$, l'assorbimento interno non è più trascurabile e riduce la luminosità della sorgente.

L'intensità specifica di una sorgente autoassorbita con emissività specifica $J_s(\nu)$ è

$$I_s(\nu) = \frac{J_s(\nu)}{4\pi\mu_s(\nu)} (1 - e^{-\mu_s(\nu)l_0}), \quad (26)$$

dove l_0 è lo spessore della sorgente, $\mu_s(\nu)$ è il *coefficiente di assorbimento* (supposto costante su tutta la sorgente) e $\tau_s(\nu) \equiv \mu_s(\nu)l_0$ è il suo *spessore ottico*. Il coefficiente di assorbimento si può calcolare facendo uso dei coefficienti di Einstein ([12], pp. 186-190) e risulta essere

$$\mu_s(\nu) \propto N_0 \nu^{-(\delta+4)/2} B_{\perp}^{(\delta+2)/2}, \quad (27)$$

da cui vediamo che il plasma ultrarelativistico è più opaco per basse frequenze. Met-

tendo la (25) e la (27) nella (26), si ottiene:

$$\begin{aligned} I_s(\nu) &\propto \nu^{5/2} B_{\perp}^{-1/2}, & \text{per } \tau_s \gg 1; \\ I_s(\nu) &\propto \nu^{-\alpha} B_{\perp}^{(\delta+1)/2}, & \text{per } \tau_s \ll 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Pertanto, lo spettro di una sorgente autoassorbita presenta due regimi. A frequenze basse (regime *otticamente spesso*), c'è una pendenza positiva di 2.5 (nel grafico $\log I_s - \log \nu$), mentre ad elevate frequenze (regime *otticamente sottile*), si ritrova lo spettro con pendenza $-\alpha$. Tra i due regimi avremo quindi un massimo, che si può calcolare essere in corrispondenza di ([4], p. 4.15)

$$\nu_{max} = C S_{max}^{2/5} \theta^{-4/5} B_{\perp}^{1/5} (1+z)^{1/5}, \quad (29)$$

dove C è una costante, S_{max} è il picco del flusso di radiazione, θ è il diametro angolare della sorgente (supposta sferica) e z è il redshift. Dunque, dallo spettro di sorgenti autoassorbite, invertendo la (29), si può stimare l'intensità del campo magnetico.

Il fenomeno dell'autoassorbimento è di solito visibile in radiosorgenti compatte ($\mu_s \propto N_0$). Spesso, tuttavia, tali sorgenti sono formate da più sottostrutture non risolte con ν_{max} diversi, dando origine a spettri più complicati, a volte quasi piatti ([4], p. 21.5).

3.3 Energetica di una radiosorgente

Una radiosorgente che emette per sincrotrone è costituita da un plasma ultrarelativistico immerso in un campo magnetico. La sua energia totale è data quindi dalla somma dell'energia delle particelle con l'energia del campo magnetico:

$$U = U_{el} + U_{pr} + U_m = (1+k)U_{el} + U_m, \quad (30)$$

dove U_{el} è l'energia totale degli elettroni, U_{pr} è quella dei protoni e U_m è quella del campo magnetico. Abbiamo supposto $U_{pr} = kU_{el}$, dove la costante $k \geq 0$ non può essere determinata dalle osservazioni, in quanto la radiazione emessa dai protoni non è misurabile (vd. sezione 2.4.1).

Possiamo mettere in relazione l'energia totale con dei parametri osservativi e con il campo magnetico, supponendo una distribuzione di energia come la (24). Per farlo, calcoliamo innanzitutto l'energia degli elettroni come

$$U_{el} = V \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varepsilon N(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{N_0 V}{2-\delta} (\varepsilon_2^{2-\delta} - \varepsilon_1^{2-\delta}), \quad \text{per } \delta \neq 2, \quad (31)$$

dove V è il volume in cui sono contenuti gli elettroni e ε_1 e ε_2 sono le energie minima e massima della distribuzione. La luminosità bolometrica L può essere calcolata a partire dal flusso monocromatico misurato $S(\nu)$, se è nota la distanza d dalla sorgente, come

$$L = 4\pi d^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} S(\nu) d\nu, \quad (32)$$

dove ν_1 e ν_2 sono legate a ε_1 e ε_2 dalla (20). Possiamo calcolare la luminosità bolometrica anche utilizzando la (13) come

$$L = V \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} N(\varepsilon) \left(-\frac{d\varepsilon}{dt} \right) d\varepsilon = b \frac{N_0 V B_{\perp}^2}{3 - \delta} (\varepsilon_2^{3-\delta} - \varepsilon_1^{3-\delta}), \quad \text{per } \delta \neq 3. \quad (33)$$

Quindi, isolando $N_0 V$ da quest'ultima equazione e inserendo l'espressione nella (31), otteniamo

$$U_{el} = \frac{1}{b} \frac{(3 - \delta)(\varepsilon_2^{2-\delta} - \varepsilon_1^{2-\delta})}{(2 - \delta)(\varepsilon_2^{3-\delta} - \varepsilon_1^{3-\delta})} \frac{L}{B_{\perp}^2}. \quad (34)$$

Per sviluppare i prossimi risultati, supponiamo che l'intervallo di frequenze sia tutta la banda radio osservabile, per cui $\nu_1 = 10$ MHz e $\nu_2 = 100$ GHz ([4], p. 4.19). Utilizzando la (20) e ponendo $a \equiv \frac{3}{4\pi} \frac{e}{m_e^2 c^5}$, riscriviamo la (34) come

$$U_{el} = \frac{a^{1/2}}{b} \frac{(3 - \delta)(\nu_2^{(2-\delta)/2} - \nu_1^{(2-\delta)/2})}{(2 - \delta)(\nu_2^{(3-\delta)/2} - \nu_1^{(3-\delta)/2})} \frac{L}{B_{\perp}^{3/2}} \equiv C_{el} L B^{-3/2}, \quad (35)$$

dove abbiamo inglobato in C_{el} tutte le costanti (compreso un eventuale termine correttivo che tiene conto della distribuzione degli angoli di pitch).

L'energia del campo magnetico, supposto uniforme, vale

$$U_m = \int \frac{B^2}{8\pi} dV \equiv C_m B^2 V, \quad (36)$$

da cui

$$U_{el} = (1 + k) C_{el} L B^{-3/2} + C_m B^2 V. \quad (37)$$

Vediamo che l'energia delle particelle dipende dalla luminosità e dal campo magnetico, mentre quella del campo magnetico dal campo magnetico stesso e dal volume.

Si può valutare l'energia minima necessaria affinché venga prodotta la radiazione osservata ponendo $\partial U / \partial B = 0$. In questo modo, si ottiene il cosiddetto *campo magnetico di equipartizione*

$$B_{eq} = \left[\frac{3}{4} \frac{C_{el}}{C_m} (1 + k) \frac{L}{V} \right]^{2/7}. \quad (38)$$

Il campo magnetico è difficilmente misurabile in una radiosorgente. Tramite B_{eq} , sotto l'assunzione (non sempre verificata) di equipartizione, possiamo stimare il campo magnetico dalla luminosità bolometrica e dalle dimensioni della sorgente (ipotizzando un opportuno valore di k). Tale stima deve essere considerata come indicativa poiché ci sono diverse incertezze legate alla valutazione di B_{eq} ([4], p. 4.21).

Per questo valore di B , l'energia delle particelle è simile a quella magnetica, in quanto $(1 + k)U_{el} = (4/3)U_m$, motivo per cui questa condizione è detta *equipartizione dell'energia*.

La quantità

$$U_{min} = \frac{7}{4} (1 + k) C_{el} L B_{eq}^{-3/2} \simeq 1.98 \cdot [(1 + k) C_{el} L]^{4/7} [C_m V]^{3/7} \quad (39)$$

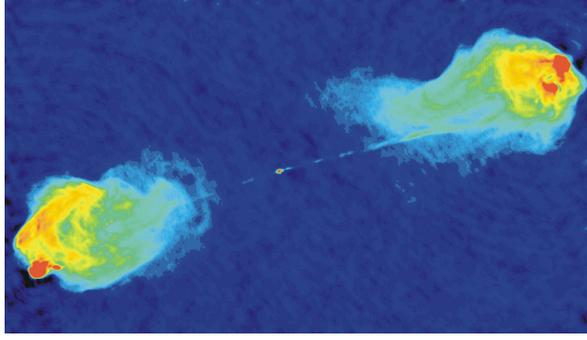


Figura 6: Immagine in falsi colori della radiogalassia Cygnus A ottenuta a 5 GHz. Le regioni rosse sono quelle con la maggiore brillantezza radio, mentre quelle blu sono più deboli (Legacy Astronomical Images, “Cygnus A”, NRAO/AUI Archives, accessed September 4, 2023, <https://www.nrao.edu/archives/items/show/33385>).

rappresenta quindi una valutazione dell’energia minima che può avere la radiosorgente per emettere la radiazione osservata.

3.4 Energia minima della radiosorgente Cygnus A

Applichiamo questi risultati alla radiogalassia Cygnus A (fig. 6) per calcolare l’energia minima contenuta nei suoi lobi, cioè nelle due strutture estese poste simmetricamente all’oggetto centrale. Assumiamo che ciascun lobo abbia una struttura sferica con un raggio $R \approx 30$ kpc, da cui $V \simeq 3.34 \times 10^{69}$ cm³. La luminosità totale della sorgente (nell’intervallo 10 MHz - 100 GHz) è $L \simeq 1.33 \times 10^{45}$ erg/s e l’indice spettrale vale $\alpha \simeq 0.8$ ([2], sezione 5.4.3). Trascurando il fattore correttivo in C_{el} dovuto alla distribuzione di angoli di pitch, si ottiene

$$C_{el} \simeq 3.96 \times 10^7 \text{ cm}^{-3/4} \text{ g}^{3/4} \text{ s}^{-1/2}. \quad (40)$$

Per essere conservativi, poniamo $k = 0$, il che sarebbe valido per un gas composto solo da elettroni e positroni. Ora, usando la (39), possiamo stimare l’energia minima della sorgente come il doppio dell’energia minima di ciascun lobo:

$$U_{min} \simeq 2 \cdot 1.98 \cdot C_{el}^{4/7} C_m^{3/7} \left(\frac{L}{2}\right)^{4/7} V^{3/7} \simeq 5.60 \times 10^{59} \text{ erg}. \quad (41)$$

Troviamo un’energia elevatissima,¹ che fornisce anche un limite inferiore alla massa dell’oggetto centrale che alimenta la sorgente radio. Infatti, l’efficienza con cui la massa viene convertita in energia tramite la più efficiente reazione termonucleare nelle stelle è circa 7×10^{-3} . Per cui, se il nucleo di Cygnus A fosse composto da stelle, avremmo

$$M \gtrsim \frac{U_{min}}{(7 \times 10^{-3})c^2} \simeq 4.44 \times 10^7 M_{\odot}. \quad (42)$$

Questo limite, combinato con le piccole dimensioni stimate per il nucleo di Cygnus A ([2], sezione 5.4.3), rende difficile evitare la conclusione che l’oggetto che fornisce

¹Per confronto, l’energia emessa da una supernova è dell’ordine dei 10^{51} erg.

energia alla sorgente radio sia un buco nero supermassiccio.

3.5 Evoluzione temporale dello spettro di una radiosorgente

Lo spettro di una radiosorgente non rimane costante nel tempo, ma si modifica, sia a causa delle varie perdite energetiche, sia in conseguenza di eventuali processi di ri-accelerazione delle particelle. Ci sono diversi fenomeni che possono modificare l'energetica delle radiosorgenti. Nel nostro caso, ci concentreremo sulle perdite di energia dovute all'emissione di sincrotrone, che hanno spesso effetti molto evidenti sull'evoluzione dello spettro di radiazione.

Indichiamo con $N(\varepsilon, t)$ la distribuzione di energia degli elettroni. Supponiamo che, all'istante iniziale, si abbia

$$N(\varepsilon, 0) = N_0 \varepsilon^{-\delta}. \quad (43)$$

L'evoluzione temporale di $N(\varepsilon, t)$ è determinata dall'equazione di continuità ([4], p. 6.6)

$$\frac{\partial N(\varepsilon, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} N(\varepsilon, t) \right) + \frac{N(\varepsilon, t)}{T_{conf}} = Q(\varepsilon, t). \quad (44)$$

Nella (44), T_{conf} è il *tempo di confinamento* e rappresenta il tempo medio per cui una particella resta all'interno della sorgente, mentre $Q(\varepsilon, t)$ è il tasso di iniezione di nuove particelle relativistiche.

Concentriamoci innanzitutto sull'evoluzione temporale dell'energia di un singolo elettrone. Dalla (13), ponendo $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, si ottiene

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_0}{1 + t/t^*}, \quad t^* \equiv \frac{1}{bB_{\perp}^2 \varepsilon_0}. \quad (45)$$

La costante t^* è detta *tempo di cooling* e rappresenta il tempo di vita di un elettrone con energia ε_0 . Dopo un tempo $t = t^*$, l'energia dell'elettrone si è dimezzata. Notiamo che $t^* \propto \varepsilon_0^{-1}$, per cui gli elettroni più energetici hanno tempi di vita inferiori, in accordo col fatto che hanno maggiori perdite energetiche. Leggendo la (45) al contrario, possiamo definire l'*energia di taglio* (o *di break*) come

$$\varepsilon^* \equiv \frac{1}{bB_{\perp}^2 t}. \quad (46)$$

Al tempo $t > 0$, gli elettroni che, a $t = 0$, avevano energia $\varepsilon_0 > \varepsilon^*$ hanno subito forti perdite di energia, quelli con $\varepsilon_0 < \varepsilon^*$, hanno mantenuto la loro energia pressoché invariata. Il risultato di queste considerazioni sulla distribuzione di energia sarà un progressivo spopolamento dei livelli con energia più elevata.

Utilizzando la (20), possiamo trovare il tempo di cooling di un elettrone che emette alla frequenza $\nu \approx \nu_s$:

$$t^* \simeq (3.37 \times 10^4) B_{\perp}^{-3/2} \nu_s^{-1/2} \text{ anni}. \quad (47)$$

Molte radiosorgenti estese presentano degli *hot spot* nei lobi, ovvero piccole regioni di elevata brillantezza. In tali regioni, in diverse radiogalassie, è stata osservata radiazione ottica di sincrotrone ($\nu_s \approx 10^{15}$) [11]. Con campi magnetici tipici dell'ordine dei 10 μG ([1], p. 22), questo corrisponde a tempi di cooling $t^* \approx 3 \times 10^4$ anni. In questo

tempo, un elettrone è in grado di percorrere al più una distanza $d = ct^* \approx 9$ kpc, ma l'estensione di questi oggetti va dalle decine di kpc fino a diversi Mpc ([10], p. 663). Ne consegue che, in corrispondenza degli hot spot, devono avvenire meccanismi che riaccelerano gli elettroni provenienti dal nucleo centrale.

3.5.1 Caso senza iniezione di particelle

Supponiamo che gli elettroni vengano prodotti tutti in un unico evento iniziale ($Q(\varepsilon, t) = 0$ per $t \neq 0$) e che rimangano confinati nella sorgente per tempi molto elevati ($T_{conf} \rightarrow +\infty$). Supponiamo, inoltre, che la distribuzione rispetto agli angoli di pitch sia isotropa $\forall t \geq 0$ ([4], nota a p. 6.2). Per calcolare la distribuzione di energia per l'intera popolazione di elettroni, nella (44), dobbiamo sostituire a $d\varepsilon/dt$ il suo valor medio $\langle d\varepsilon/dt \rangle = -(2/3)bB^2\varepsilon^2 \equiv -aB^2\varepsilon^2$. Il tempo di cooling e l'energia di break diventano

$$t^* \equiv \frac{1}{aB^2\varepsilon_0}, \quad \varepsilon^* \equiv \frac{1}{aB^2t}. \quad (48)$$

La soluzione della (44), con la condizione iniziale (43), è ([4], p. 6.7)

$$N(\varepsilon, t) = \begin{cases} \frac{N_0\varepsilon^{-\delta}}{(1-\varepsilon/\varepsilon^*)^{2-\delta}} & \text{per } \varepsilon \leq \varepsilon^*, \\ 0 & \text{per } \varepsilon > \varepsilon^*. \end{cases} \quad (49)$$

Si nota quindi che i livelli con energia superiore a quella di break si spopolano completamente e si ha un cosiddetto *cut-off* (o *taglio*) in corrispondenza di ε^* , che si sposta a energie inferiori col passare del tempo. Inoltre, per $\varepsilon \ll \varepsilon^*$, la distribuzione resta quella iniziale per qualsiasi valore di δ . Per $\varepsilon \lesssim \varepsilon^*$, si hanno diversi casi illustrati in fig. 7 a seconda del valore di δ (indicato con γ nella figura).

A seguito dell'evoluzione temporale della distribuzione energetica degli elettroni, vi sarà anche una modifica dello spettro della radiazione emessa. Avremo una *frequenza di taglio* (o *di break*) legata a ε^* dalla (20):

$$\nu^* = \frac{3}{4\pi} \frac{eB(\varepsilon^*)^2}{m_e^3c^5} = \frac{3}{4\pi} \frac{e}{a^2m_e^3c^5} \frac{1}{B^3t^2}. \quad (50)$$

Lo spettro, per $\nu \ll \nu^*$, rimane praticamente immutato. Per $\nu > \nu^*$, al contrario di quanto avviene nello spettro di energie, non si ha un taglio netto perché la radiazione di sincrotrone non è perfettamente monocromatica, ma si ha approssimativamente una caduta esponenziale ([4], p. 6.8). Invertendo la (50), se è noto B , dalla frequenza di taglio, è possibile stimare l'*età radiativa* della sorgente:

$$t_{rad} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{e}{a^2m_e^3c^5} \right)^{1/2} B^{-3/2} (\nu^*)^{-1/2}. \quad (51)$$

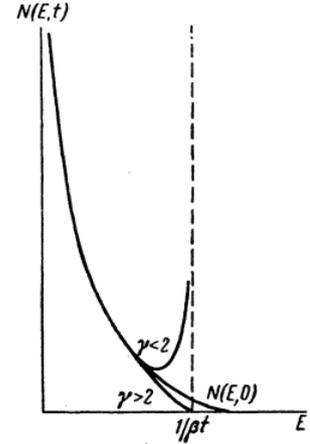


Figura 7: Distribuzione di energia al tempo $t > 0$ in assenza di iniezione. Nella figura, γ è l'esponente della distribuzione iniziale e $1/bt$ è l'energia di break ([8], p. 321).

3.5.2 Caso con iniezione costante di particelle

Supponiamo ora che ci sia un'iniezione costante di particelle $Q(\varepsilon, t) = A\varepsilon^{-\delta}$, con $A = \text{cost}$, e poniamo anche in questo caso $T_{conf} \rightarrow +\infty$. Con queste assunzioni, la soluzione della (44) è ([4], p. 6.9)

$$N(\varepsilon, t) = \begin{cases} \frac{A\varepsilon^{-(\delta+1)}}{(\delta-1)aB^2} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \right)^{\delta-1} \right] & \text{per } \varepsilon \leq \varepsilon^*, \\ \frac{A}{\delta-1} \frac{\varepsilon^{-(\delta+1)}}{aB^2} & \text{per } \varepsilon > \varepsilon^*. \end{cases} \quad (52)$$

Per $\varepsilon \ll \varepsilon^*$, $N(\varepsilon, t) \sim A\varepsilon^{-\delta}t$, pertanto la distribuzione aumenta nel tempo mantenendo la forma di $Q(\varepsilon, t)$ perché le perdite radiative sono trascurabili. Per $\varepsilon > \varepsilon^*$, invece, le perdite radiative diventano dominanti rispetto all'iniezione di nuove particelle. Tuttavia, non si ha più un taglio netto come nel caso precedente, ma un irripidimento della distribuzione con la pendenza che passa da $-\delta$ a $-(\delta+1)$. Analogamente, avremo due andamenti diversi anche nello spettro:

$$\begin{aligned} J(\nu) &\propto \nu^{-(\delta-1)/2} = \nu^{-\alpha} && \text{per } \nu \ll \nu^*; \\ J(\nu) &\propto \nu^{-\delta/2} = \nu^{-\alpha-0.5} && \text{per } \nu > \nu^*. \end{aligned} \quad (53)$$

Dunque, oltre la frequenza di taglio, si ha un aumento di 0.5 dell'indice spettrale.

Attraverso simili modelli, è stato possibile ricavare informazioni sull'evoluzione delle radiosorgenti. Per esempio, in Feretti et al. [5], viene studiato, in diverse radiogalassie di tipo *testa-coda*, come cambia l'indice spettrale in funzione della distanza dal nucleo. Combinando le osservazioni con i modelli teorici, si è potuta stimare la frequenza di break in vari punti delle sorgenti, mostrando che gli elettroni più "vecchi" si trovano a distanza maggiore dal nucleo.

3.6 Sincrotrone e Compton inverso

L'effetto Compton inverso è un fenomeno di interazione tra un elettrone di energia cinetica $K = (\gamma - 1)m_e c^2$ e un fotone di energia $h\nu$, con $K \gg h\nu$. In questo processo, si ha uno scambio di energia tra le due particelle che dipende dagli angoli di incidenza e di emissione del fotone rispetto alla velocità dell'elettrone. Tuttavia, il processo è piuttosto efficiente in favore dei fotoni e, mediamente, la loro energia viene incrementata di un fattore dell'ordine di γ^2 ([4], p. 5.4). Per fare una stima, se un elettrone con $\gamma \approx 10^4$ interagisce con un fotone radio con $\nu \approx 10$ GHz, il fotone diffuso avrà frequenza $\nu' \approx 10^{18}$ Hz e apparterrà dunque al regime dei raggi X.

Supponiamo di avere una regione che contiene una distribuzione isotropa di elettroni ultrarelativistici (con $\beta \rightarrow 1$) immersi in un campo di radiazione con densità di energia U_{rad} . La perdita di energia media per Compton inverso per un elettrone singolo vale ([4], p. 5.5)

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{4}{3}c\sigma_T\gamma^2 U_{rad}. \quad (54)$$

Se in tale regione è presente anche un campo magnetico non trascurabile, allora gli

elettroni emettono anche radiazione di sincrotrone, con una perdita media di energia

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{4}{3}c\sigma_T\gamma^2\frac{B^2}{8\pi}. \quad (55)$$

In tali sorgenti, l'evoluzione dell'energetica deve tenere conto anche delle perdite per Compton inverso. La trattazione resta analoga a quella della sezione 3.5, ma il tempo di cooling e l'energia di break si riducono a causa delle maggiori perdite energetiche.

Notiamo che, dalle (54) e (55), possiamo calcolare il rapporto tra la luminosità X di una sorgente (prodotta dall'effetto Compton inverso) e la sua luminosità radio (prodotta dalla radiazione di sincrotrone) come

$$\frac{L_{IC}}{L_s} = \frac{U_{rad}}{B^2/8\pi}, \quad (56)$$

da cui, misurando L_{IC} e L_s , se U_{rad} è nota, si può stimare l'intensità del campo magnetico. Questo è possibile, per esempio, nei lobi delle radiogalassie più estese, dove il campo di radiazione è dominato dai fotoni della radiazione cosmica di fondo (CMB) ([4], p. 19.27). La densità di energia della CMB vale $U_{rad} = B_{CMB}^2/8\pi$, dove $B_{CMB} \simeq 3.28(1+z)^2 \mu\text{G}$ [3] è il cosiddetto *campo magnetico equivalente*, per cui è facile calcolarla se è noto il redshift z .

3.6.1 Catastrofe Compton

In alcuni casi, la radiazione di sincrotrone è quella dominante e la sorgente diventa autoassorbita a causa dei processi di diffusione per Compton inverso. Quando ciò avviene, si parla di *Synchrotron self-Compton*. Facendo una stima, come ordine di grandezza, del rapporto tra la densità di energia della radiazione di sincrotrone e quella del campo magnetico, si ottiene ([13], p. 186)

$$\frac{L_{IC}}{L_s} \approx \left(\frac{T_{b,max}}{10^{12} \text{ K}}\right)^5 \left(\frac{\nu_{max}}{10^{8.5} \text{ Hz}}\right), \quad (57)$$

dove $T_{b,max} = (1/2k)(S_{max}/\Omega)(c/\nu_{max})^2$ è la temperatura di brillantezza della sorgente in corrispondenza di ν_{max} , con k che è la costante di Boltzmann e Ω l'angolo solido sotteso dalla sorgente. Dalla (57), risulta evidente che le perdite radiative per Compton inverso diventano dominanti quando $T_{b,max} \gtrsim 10^{12} \text{ K}$ e aumentano molto velocemente con $T_{b,max}$. Pertanto, nessuna sorgente può avere $T_{b,max} \gtrsim 10^{12} \text{ K}$ senza subire enormi perdite di energia per Compton inverso che la raffredderebbero rapidamente (da qui il nome di *catastrofe Compton*).

In diversi casi, nelle radiosorgenti più compatte, si misurano temperature di brillantezza superiori a 10^{12} K , ma con un'emissione X meno elevata di quanto previsto ([4], p. 21.9). Probabilmente, il motivo di questa discrepanza è legato a effetti di beaming relativistico dovuti al moto complessivo della sorgente ([10], pp. 263-264).

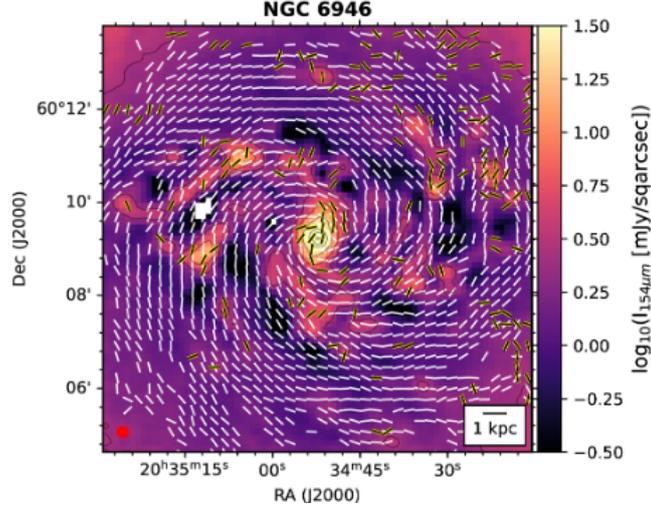


Figura 8: Orientazione del campo magnetico della galassia a spirale NGC 6946 ottenuta misurando la polarizzazione della radiazione di sincrotrone a 5 GHz (linee bianche) e della radiazione termica della polvere a $154 \mu\text{m}$ (linee nere). La scala di colore mostra l'intensità totale a $154 \mu\text{m}$ ([14], fig. 3).

3.7 Polarizzazione

La radiazione di sincrotrone presenta anche una rilevante componente polarizzata linearmente. Come abbiamo visto, viene osservata una quantità significativa di radiazione solo quando la linea di vista dell'osservatore è all'interno del cono di radiazione dell'elettrone. La radiazione di un elettrone singolo è polarizzata linearmente se la linea di vista giace sul piano dell'orbita, altrimenti si ha una polarizzazione ellittica ([4], pp. 4.16-4.17). Se consideriamo una popolazione di elettroni, tutti quelli che hanno il cono di radiazione entro un angolo di $1/\gamma$ dalla linea di vista contribuiscono alla radiazione osservata. Le polarizzazioni ellittiche di questi elettroni saranno opposte (sinistrorse o destrorse) in parti opposte del cono di radiazione, per cui si cancellano e la polarizzazione risultante è lineare, col campo elettrico che oscilla perpendicolarmente alla proiezione del campo magnetico sul piano del cielo ([10], p. 214). Tuttavia, ci sarà comunque una componente di radiazione non polarizzata. Il rapporto tra l'intensità della radiazione polarizzata e la radiazione totale è detto *grado di polarizzazione* e, per una popolazione di elettroni che emette per sincrotrone con distribuzione energetica data dalla (24), esso vale

$$\Pi = \frac{\delta + 1}{\delta + 7/3}. \quad (58)$$

Per esempio, con il valore tipico di $\delta \approx 2.5$ per le radiosorgenti extragalattiche, si ha un grado di polarizzazione circa del 72%. In situazioni reali, si misurano polarizzazioni inferiori a questa previsione teorica a causa di diversi effetti, come un campo magnetico non uniforme o la rotazione di Faraday.

Come accennato sopra, il vettore campo elettrico che costituisce la componente di radiazione polarizzata è perpendicolare alla proiezione del campo magnetico sul piano del cielo, per cui, da misure polarimetriche, si può mappare la componente del campo magnetico perpendicolare alla linea di vista nelle radiosorgenti (fig. 8).

Appendice

A Derivazione della formula di Larmor relativistica

Risolvendo direttamente le equazioni di Maxwell per una particella di carica q in moto con una traiettoria $\mathbf{z}(t)$, si trovano il campo elettrico e il campo magnetico da essa generati nel punto dello spazio-tempo (\mathbf{x}, t) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = q \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{k^3 R^2} \right\}_{t'} + \frac{q}{c} \left\{ \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{k^3 R} \right\}_{t'}, \quad (59a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}(t') \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \quad (59b)$$

dove:

- $\mathbf{R}(t) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{z}(t)$, $R \equiv |\mathbf{R}|$, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{R}/R$;
- $\boldsymbol{\beta}(t) \equiv \mathbf{v}(t)/c$, $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{z}}$, $\beta \equiv |\boldsymbol{\beta}|$;
- $k(t) \equiv 1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n}(t)$;
- $t' = t - R(t)/c$.

Si noti che i campi nel punto (\mathbf{x}, t) sono generati dallo stato della carica al cosiddetto *tempo ritardato* $t' < t$, in accordo col fatto che i segnali EM si propagano a velocità c nel vuoto. Dall'equazione (59a), si può scomporre il campo elettrico in due addendi. Il primo è detto *campo di velocità*, in quanto dipende solo dalla velocità della particella e non dalla sua accelerazione. Il campo di velocità è $\propto R^{-2}$ e rappresenta una generalizzazione del campo coulombiano per una carica in movimento. Infatti, per $\beta = 0$, ritroviamo i campi EM di una carica in quiete:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{vel}(\mathbf{x}, t) &= \left[\frac{q}{R^2} \mathbf{n} \right]_{t'}, \\ \mathbf{B}_{vel}(\mathbf{x}, t) &\equiv \mathbf{n}(t') \times \mathbf{E}_{vel}(\mathbf{x}, t) = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Il secondo termine della (59a) è invece detto *campo di accelerazione*, poiché dipende da $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Il campo di accelerazione è $\propto R^{-1}$, per cui è il termine che sopravvive a grandi distanze. Per questo motivo, è anche chiamato *campo di radiazione*. Per velocità non relativistiche ($\beta \rightarrow 0$), esso diventa

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{x}, t) \sim \left\{ \frac{q}{cR} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})] \right\}_{t'}. \quad (61)$$

Supponendo $|\mathbf{v}| \ll c$, possiamo usare la (61) per calcolare l'energia emessa da una carica in moto non relativistico sotto forma di radiazione. Possiamo trascurare il campo di velocità in quanto la potenza emessa sotto forma di radiazione è definita come ([7], p. 443)

$$P_{rad} \equiv \lim_{r \rightarrow +\infty} \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}, \quad (62)$$

dove $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ è il *vettore di Poynting* e l'integrale è fatto su una sfera di raggio r centrata nella carica. Pertanto, poiché l'area della sfera è $\propto r^2$, le componenti di \mathbf{S} che contengono il campo di velocità non danno contributo quando si fa il limite perché sono $\propto r^{-3}$ o $\propto r^{-4}$. Sviluppando i calcoli, si ottiene

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_{rad}|^2 \mathbf{n} = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \Theta}{4\pi c^3 R^2} \mathbf{n}, \quad (63)$$

dove $a \equiv |\mathbf{a}| \equiv |\dot{\mathbf{v}}|$ e Θ è l'angolo tra \mathbf{n} e $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. La potenza emessa nell'angolo solido $d\Omega$ vale $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} R^2 d\Omega$, da cui

$$P(\Theta) \equiv -\frac{d\varepsilon}{dt d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta. \quad (5)$$

Vediamo che il power pattern ha simmetria cilindrica rispetto alla direzione individuata da \mathbf{a} , è massimo per $\mathbf{n} \parallel \mathbf{a}$ e nullo per $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}$. Inoltre, $P(\Theta)$ è indipendente da \mathbf{v} sia in modulo che in direzione.

Per calcolare l'energia totale emessa nell'unità di tempo dobbiamo integrare sull'angolo solido, ottenendo la formula di Larmor

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2q^2 a^2}{3c^3}. \quad (6)$$

Cerchiamo una generalizzazione della (6) che sia Lorentz-invariante. Si può dimostrare che $d\varepsilon/dt$ è uno scalare, ovvero è invariante per trasformazioni di Lorentz ([10], p. 154). Ci basterà dunque trovare un'espressione Lorentz-invariante che si riduca alla (6) nel SdR K' di quiete istantanea della particella, nel quale la formula di Larmor è valida poiché la velocità è nulla. Tale espressione sarà allora valida in ogni SdR inerziale K . Nel seguito, le quantità primarie sono riferite al SdR K' , mentre quelle non primarie a K . Introduciamo la quadri-accelerazione

$$a^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}, \quad (64)$$

dove $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ e τ è il tempo proprio. In K' , si può calcolare che $a'^\mu = (0, \mathbf{a}'/c^2)$, da cui $a'^\mu a'_\mu = -a'^2/c^4$. Poiché $a^\mu a_\mu$ è uno scalare, possiamo riscrivere la (6) come

$$-\frac{d\varepsilon'}{dt'} = -\frac{2}{3} q^2 c (a'^\mu a'_\mu) = -\frac{2}{3} q^2 c (a^\mu a_\mu) = -\frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (65)$$

Manipolando la (65), si può ottenere l'espressione (7) in termini dell'impulso.

Riferimenti bibliografici

- [1] R. D. Blandford et al. *Active Galactic Nuclei*. Advanced Course of the Swiss Society for Astrophysics and Astronomy. Springer-Verlag, 1990. ISBN: 9783540532859. URL: <https://books.google.it/books?id=i5XvAAAAMAAJ>.
- [2] James J. Condon e Scott M. Ransom. *Essential Radio Astronomy*. 2016. URL: <https://www.cv.nrao.edu/~sransom/web/Ch5.html#S4.SS3> (visitato il 04/09/2023).
- [3] D. Dallacasa. *Processi di radiazione e MHD*. Appunti e slide del corso. 2022.
- [4] Carla Fanti e Roberto Fanti. “Una finestra sull’Universo «Invisibile»”. 2012. URL: <https://www.ira.inaf.it/Library/e-books/Fanti&Fanti-Papers.pdf>.
- [5] L. Feretti et al. “Electron ageing and polarization in tailed radio galaxies”. In: *Aap* 331 (mar. 1998), pp. 475–484. DOI: 10.48550/arXiv.astro-ph/9712041. arXiv: astro-ph/9712041 [astro-ph].
- [6] Gabriele Ghisellini. *Radiative Processes in High Energy Astrophysics*. Springer International Publishing, 2013. DOI: 10.1007/978-3-319-00612-3. URL: <https://doi.org/10.1007%2F978-3-319-00612-3>.
- [7] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999. ISBN: 9780138053260. URL: <https://books.google.it/books?id=M8XvAAAAMAAJ>.
- [8] N. S. Kardashev. “Nonstationarity of Spectra of Young Sources of Nonthermal Radio Emission”. In: *Sovast* 6 (dic. 1962), p. 317.
- [9] K. I. Kellermann. “On the Interpretation of Radio-Source Spectra and the Evolution of Radio Galaxies and Quasi-Stellar Sources”. In: *Apj* 146 (dic. 1966), p. 621. DOI: 10.1086/148940.
- [10] Malcolm S. Longair. *High Energy Astrophysics*. 3^a ed. Cambridge University Press, 2011. DOI: 10.1017/CB09780511778346.
- [11] K. Meisenheimer et al. “The synchrotron spectra of radio hot spots.” In: *Aap* 219 (lug. 1989), pp. 63–86.
- [12] George B. Rybicki e Alan P. Lightman. *Radiative processes in astrophysics*. John Wiley & Sons, Ltd, 1979.
- [13] F. H. Shu. *The Physics of Astrophysics. Volume I: Radiation*. Series of books in astronomy. University Science Books, 1991. ISBN: 9780935702644. URL: <https://books.google.it/books?id=Ec7vAAAAMAAJ>.
- [14] William Jeffrey Sargent, Enrique Lopez-Rodriguez e Susan E. Clark. “The Structure of Magnetic Fields in Spiral Galaxies: A Radio and Far-infrared Polarimetric Analysis”. In: *Apj* 954.1, 53 (set. 2023), p. 53. DOI: 10.3847/1538-4357/ace4c0. arXiv: 2302.07278 [astro-ph.GA].