

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# Teorema del Viriale e applicazioni astrofisiche

Tesi di Laurea

Presentata da:  
Francesco Campolucci

Relatrice:  
Chiar.ma Prof.ssa  
Marcella Brusa

---

Anno accademico 2022-2023

## Sommario

In questo breve trattato ci poniamo l'obiettivo di derivare nel modo più rigoroso possibile il Teorema del Viriale per poi studiare alcune sue applicazioni astrofisiche.

Nel primo capitolo discutiamo quindi la derivazione del teorema e partiamo da una veloce introduzione del problema degli  $N$ -corpi e della sua non integrabilità. Siccome vogliamo ugualmente ricavare informazioni riguardanti tale problema, introduciamo i sistemi non collisionali per semplificarlo, passando così da un approccio discreto ad uno continuo. Per distinguere se un sistema è collisionale oppure no ricaviamo il tempo di rilassamento a due corpi. Introduciamo la funzione di distribuzione  $f$  e otteniamo l'equazione non collisionale di Boltzmann, che come suggerisce il nome, è fondamentale per la descrizione dei sistemi non collisionali. Tramite l'equazione che abbiamo appena nominato, ricaviamo le equazioni di Jeans che sono molto importanti poiché mettono in relazione quantità osservabili. Infine, usiamo la seconda equazione di Jeans per ottenere il Teorema del Viriale tensoriale e successivamente anche quello scalare.

Nel secondo capitolo discutiamo alcune applicazioni astrofisiche del Teorema del Viriale. Prima applicazione: rappresentiamo graficamente il Teorema del Viriale per sistemi autogravitanti e indaghiamo qualitativamente la loro evoluzione nel caso in cui vengano riscaldati oppure raffreddati. Seconda applicazione: analizziamo l'equilibrio fra raggi cosmici, gas e campo magnetico nella nostra galassia per trarre conclusioni su di essi. Terza applicazione: ricaviamo il Tempo di Kelvin Helmholtz e lo applichiamo al Sole per vedere l'impossibilità che la sua luminosità scaturisca solo dalla contrazione. Quarta ed ultima applicazione: deriviamo il criterio di Jeans per sapere sotto che condizioni una nube in equilibrio idrostatico inizia il collasso gravitazionale per diventare una stella.

# Indice

<b>1</b>	<b>Teorema del Viriale</b>	<b>1</b>
1.1	Il problema degli $N$ -corpi . . . . .	1
1.2	Sistemi non collisionali . . . . .	1
1.3	$t_{2b}$ : tempo di rilassamento a due corpi . . . . .	2
1.4	CBE: equazione non collisionale di Boltzmann . . . . .	4
1.5	Le equazioni di Jeans . . . . .	6
1.6	Teorema del Viriale . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Applicazioni astrofisiche</b>	<b>10</b>
2.1	Piano del Viriale . . . . .	10
2.2	Equilibrio fra raggi cosmici, gas e campo magnetico . . . . .	11
2.3	Tempo di Kelvin Helmholtz . . . . .	13
2.4	Criterio di Jeans . . . . .	14
	<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>16</b>

# 1 Teorema del Viriale

## 1.1 Il problema degli $N$ -corpi

Il problema degli  $N$ -corpi è lo studio del moto di  $N$  masse puntiformi (ad es. stelle) sotto l'influenza reciproca dei loro campi gravitazionali, questo è uno dei problemi centrali della fisica classica.

Se  $m_i$  con  $i = 1, \dots, N$  sono le rispettive masse dei vari punti e  $\bar{x}_i$  sono le posizioni allora  $m_j$  attrae gravitazionalmente  $m_i$  con una forza pari a

$$\bar{F}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j)}{\|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|^3}. \quad (1.1.1)$$

Sommando su tutte le masse si ottiene l'equazione del moto per  $m_i$

$$m_i \frac{d^2 \bar{x}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^N -\frac{Gm_i m_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j)}{\|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|^3} = -\frac{\partial W}{\partial \bar{x}_i}, \quad (1.1.2)$$

dove  $W$  è l'energia potenziale gravitazionale del sistema.

Nel formalismo Hamiltoniano si hanno le seguenti equazioni del moto e Hamiltoniana  $H$  sono

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, \quad \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}_i}, \quad (1.1.3)$$

$$H = K + W = \sum_{i=1}^N \frac{\|\bar{p}_i\|^2}{2m_i} + \sum_{j=1, j \neq i}^N -\frac{Gm_i m_j}{\|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|}, \quad (1.1.4)$$

dove  $K$  è l'energia cinetica totale.

Le equazioni del moto del problema degli  $N$ -corpi formano un sistema di  $6N$  equazioni differenziali del primo ordine, con  $6N$  condizioni iniziali di cui  $3N$  sono posizioni iniziali e  $3N$  sono quantità di moto iniziali.

Se  $N > 2$  allora il problema non è integrabile, ovvero non ci sono abbastanza integrali del moto, nel caso  $N = 3$  ne sono necessari  $6N = 18$  contro i 10 esistenti. Un metodo per ricavare ugualmente informazioni è quello di ridurre il problema ad una particella che viaggia in un potenziale *liscio*, passando quindi da una distribuzione discreta ad una continua.

## 1.2 Sistemi non collisionali

C'è una differenza fondamentale tra le galassie e i sistemi che sono normalmente trattati in meccanica statistica, come molecole in una scatola. Questa differenza riguarda la natura delle forze che agiscono tra le particelle costituenti. L'interazione tra due molecole è a corto raggio, ovvero la forza è debole finché si trovano a grande distanza e diventa molto più repulsiva al loro avvicinarsi. Di conseguenza, le molecole in un gas diffuso sono soggette ad accelerazioni violente e di breve durata quando si scontrano tra loro, intervallate da periodi molto più lunghi dove si muovono a velocità quasi costante. Al contrario, l'interazione gravitazionale, che agisce tra le stelle di una galassia, è a lungo raggio. Allora la forza su una stella non varia rapidamente e si può supporre che ognuna di esse acceleri dolcemente attraverso il campo di forza generato dalla galassia nel suo insieme. In altre parole, possiamo trattare la forza gravitazionale agente su

una stella come se derivasse da una distribuzione di densità *liscia* piuttosto che da un insieme di punti massivi.

Riassumendo diciamo che se il sistema è non collisionale allora per la generica particella  $i$ -esima si può approssimare il potenziale

$$\Phi_{vero}(\bar{x}, t) = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{\|\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t)\|} \quad (1.2.1)$$

nel seguente modo

$$\Phi_{liscio}(\bar{x}, t) = -G \int \frac{\rho(\bar{\xi}, t)}{\|\bar{x}(t) - \bar{\xi}(t)\|} d^3\bar{\xi}, \quad (1.2.2)$$

se questo non è vero allora il sistema è collisionale.

### 1.3 t2b: tempo di rilassamento a due corpi

Indaghiamo ora questa conclusione in modo più quantitativo, chiedendoci quando possiamo approssimare un sistema composto da  $N$  stelle come una liscia distribuzione di densità.

Nel passaggio da approccio discreto a continuo gioca un ruolo fondamentale il **tempo di rilassamento a due corpi t2b**. Diremo che:

- il sistema è collisionale se la sua età è  $> t2b$ ;
- il sistema è non collisionale se la sua età è  $< t2b$ .

Il procedimento di determinazione del  $t2b$  si basa sull'esperimento ideale del lancio di un **pallino di test** di massa  $m_t$  in un sistema costituito da un numero  $N$  di pallini di massa  $m_f$  detti **pallini di campo**.

Valutiamo per ogni  $i = 1, \dots, N$  l'interazione tra il pallino di test e l' $i$ -esimo pallino di campo, cancellando i restanti  $N - 1$  pallini. In questo modo si costruiscono  $N$  problemi a due corpi, per ognuno di essi ci interessa la variazione di energia cinetica della particella di test visto che il  $t2b$  è definito come il tempo per il quale l'energia cinetica iniziale della particella di test è uguale alla somma delle variazioni di energia cinetica dovuta ai vari urti.

Per una singola interazione abbiamo

$$\Delta \bar{V}_t = \frac{\mu}{m_t} \Delta \bar{v}, \quad (1.3.1)$$

dove  $\bar{V}_t$  è la velocità nel generico sistema di riferimento inerziale,  $\mu$  è la massa ridotta e  $\bar{v}$  è la velocità relativa. Per stimare  $\Delta \bar{v}$  utilizziamo l'approssimazione impulsiva

$$\mu(\Delta \bar{v})_{\perp} \sim \frac{2Gm_t m_f}{bv} + O\left(\frac{1}{b^2}\right), \quad (1.3.2)$$

dove  $b$  è il parametro d'impatto, cioè la distanza minima tra i due corpi in assenza di interazione, inoltre questa approssimazione è tanto più verificata quanto più i corpi interagenti sono distanti. Sostituiamo (1.3.2) in (1.3.1) $_{\perp}$  e ne facciamo il modulo quadro

$$\|(\Delta \bar{V}_t)_{\perp}\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 v^2} + O\left(\frac{1}{b}\right). \quad (1.3.3)$$

Con  $\perp$  si fa riferimento alla direzione perpendicolare alla velocità della particella di test prima dell'urto. La transizione da  $(\Delta\bar{V}_t)$  a  $(\Delta\bar{V}_t)_\perp$  è dovuta all'approssimazione impulsiva, nonostante non si stia più tenendo conto della componente parallela, questo non risulta essere un problema siccome è quella perpendicolare che domina.

Questo risultato ci permette di calcolare la componente perpendicolare della variazione dell'energia cinetica.

Come detto in precedenza (definizione del t2b) a noi serve la somma sui vari urti, quindi

$$\frac{m_t}{2} \|\bar{V}_t\|^2 = \sum_{i=1}^N \frac{m_t}{2} \|(\Delta\bar{V}_t)_\perp\|^2. \quad (1.3.4)$$

Per effettuare tale somma necessitiamo della **funzione di distribuzione** che assumiamo essere uniforme nello spazio e isotropa nelle velocità

$$f(\bar{x}_f, \bar{V}_f) = n_f g(\|\bar{V}_f\|). \quad (1.3.5)$$

Fissando  $b$  e  $\bar{V}_f$  il numero di incontri gravitazionali di  $m_t$  è

$$N = 2\pi b db \Delta t \|\bar{V}_t - \bar{V}_f\| n_f g(\|\bar{V}_f\|) d^3 \bar{V}_f, \quad (1.3.6)$$

integrando sia sui parametri d'impatto che sulle velocità si ottiene il numero totale di eventi che poi inserito in (1.3.4) fornisce

$$t2b = \frac{\|\bar{V}_t\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \cdot \ln \Lambda \cdot \psi(\|\bar{V}_t\|)}, \quad (1.3.7)$$

dove  $\ln \Lambda$  è il **logaritmo di Coulomb**, che tipicamente assume valori che si trovano tra 10 e 20 mentre  $\psi(\|\bar{V}_t\|)$  viene chiamato **potenziale di Rosenbluth**

$$\Lambda = \frac{b_{max}}{b_{min}}, \psi(\|\bar{V}_t\|) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\|\bar{V}_f\|)}{\|\bar{V}_t - \bar{V}_f\|} d^3 \bar{V}_f. \quad (1.3.8)$$

La stella di test e le stelle di campo causano una specie di diffusione della velocità della prima, che è distinta da quella costante accelerazione causata dalla distribuzione di massa complessiva del sistema stellare. Questo processo diffusivo è talvolta chiamato rilassamento a due corpi poiché esso nasce dall'effetto cumulativo di una miriade di incontri a due corpi tra la stella di test e le stelle di campo.

Esprimendo il t2b tramite il **tempo di attraversamento**  $t_{cross}$  otteniamo la semplice espressione

$$t2b \simeq \frac{0.1N}{\ln N} t_{cross}. \quad (1.3.9)$$

Dopo un tempo di rilassamento, i piccoli colpi accumulati da molti incontri con le stelle di campo hanno cambiato significativamente l'orbita della stella di test da quella che avrebbe avuto se il campo gravitazionale fosse stato *liscio*. In pratica, dopo un periodo di rilassamento una stella ha perso la memoria delle sue condizioni iniziali. Le galassie hanno tipicamente  $N \approx 10^{11}$  stelle e hanno un'età di poche centinaia di tempi di attraversamento, quindi per questi sistemi gli incontri stellari non sono importanti, se non molto vicino ai loro centri. In un ammasso globulare invece,  $N \approx 10^5$  e il tempo di attraversamento  $t_{cross} \approx 1$  Myr, quindi il rilassamento influisce fortemente sulla struttura dell'ammasso nel corso della sua vita di 10 Gyr.

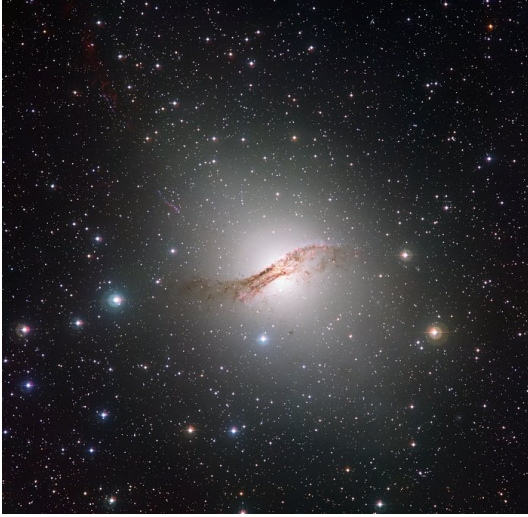


Figura 1: La galassia peculiare Centauro A (NGC 5128) è mostrata in questa immagine ottenuta con il WFI (Wide Field Imager) montato sul telescopio da 2,2 metri dell'MPG/ESO all'Osservatorio di La Silla in Cile.

**Crediti:** ESO



Figura 2: Immagine composta a colori dell'ammasso globulare NGC 3201, ottenuta con lo strumento WFI montato sul telescopio da 2,2 metri dell'ESO/MPG all'Osservatorio di La Silla.

**Crediti:** ESO

In tutti questi sistemi la dinamica su scale temporali  $\lesssim t_2b$  è quella di un sistema non collisionale in cui le particelle costituenti si muovono sotto l'influenza del campo gravitazionale generato da una distribuzione di massa *liscia*, piuttosto che da un insieme di punti.

#### 1.4 CBE: equazione non collisionale di Boltzmann

Quando si modella un sistema non collisionale, come una galassia ellittica, non è né pratico né utile seguire le orbite di ciascuna delle miliardi di stelle.

I sistemi stellari sono costituiti da un gran numero  $N$  di stelle, supponiamo che queste siano identiche con massa  $m$  e che si muovano in un potenziale gravitazionale *liscio*  $\Phi(\bar{x}, t)$ . La maggior parte dei problemi riguarda la probabilità di trovare una stella in una particolare posizione geografica nella galassia, che si muove ad una certa velocità. In altre parole, la probabilità di trovare la stella all'interno del volume 6-dimensionale dello spazio delle fasi, cioè in un volume infinitesimo  $d^3\bar{x}$  centrato in  $\bar{x}$  nel range di velocità  $d^3\bar{v}$  centrato su  $\bar{v}$ . In ogni istante  $t$  la completa descrizione dello stato di questo sistema è data tramite la funzione di distribuzione  $f$  (anche detta "densità dello spazio delle fasi"), quindi specificando il numero di stelle  $f(\bar{x}, \bar{v}, t)d^3\bar{x}d^3\bar{v}$ .  $f \geq 0$  ovunque, perché non ammettiamo densità stellari negative.

Integrando su tutto lo spazio delle fasi

$$\int f(\bar{x}, \bar{v}, t)d^3\bar{x}d^3\bar{v} = N \quad (1.4.1)$$

e normalizzando

$$\int f(\bar{x}, \bar{v}, t)d^3\bar{x}d^3\bar{v} = 1. \quad (1.4.2)$$

Allora  $f(\bar{x}, \bar{v}, t)d^3\bar{x}d^3\bar{v}$  è la probabilità che al tempo  $t$  una stella scelta a caso ha coordinate dello spazio delle fasi nell'intervallo dato.

Se conosciamo coordinate e velocità iniziali di ogni stella, allora possiamo usare le leggi di Newton per valutare le loro posizioni e velocità in qualsiasi altro momento, quindi data  $f(\bar{x}, \bar{v}, t_0)$  dovremmo essere in grado di determinare  $f(\bar{x}, \bar{v}, t)$  per ogni  $t$ . Consideriamo il flusso di punti nello spazio delle fasi, con coordinate  $(\bar{x}, \bar{v})$ , che deriva dal movimento delle stelle lungo le loro orbite. Impostiamo le coordinate dello spazio delle fasi

$$(\bar{x}, \bar{v}) \equiv \bar{w} \equiv (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6), \quad (1.4.3)$$

quindi la velocità del flusso può essere scritta come

$$\dot{\bar{w}} = (\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{v}}) = (\bar{v}, -\nabla\Phi). \quad (1.4.4)$$

Ogni stella si muove attraverso lo spazio delle fasi, quindi la probabilità di trovarla in una data posizione cambia nel tempo. Deriviamo ora l'equazione differenziale che è soddisfatta da  $f$  come conseguenza di questa evoluzione. Man mano che  $f$  evolve, la probabilità deve essere conservata, nello stesso modo con cui lo è la massa di un fluido. Per i fluidi l'**equazione di continuità** (equazione di conservazione della massa) dice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \cdot (\rho \dot{\bar{x}}) = 0, \quad (1.4.5)$$

in modo analogo l'**equazione di conservazione della probabilità** nello spazio delle fasi è

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \cdot (f \dot{\bar{w}}) = 0 \quad (1.4.6)$$

(da ora in poi faremo spesso uso della convenzione della somma).

Si noti che scriverla come un'equazione di continuità porta con sé l'ipotesi che la funzione  $f$  è differenziabile. Ciò significa che incontri stellari ravvicinati, dove una stella può saltare da un punto all'altro nello spazio delle fasi, sono esclusi da questa descrizione. Il secondo termine può essere riscritto nel seguente modo

$$\frac{\partial (f \dot{w}_i)}{\partial w_i} = \dot{w}_i \frac{\partial f}{\partial w_i} + f \frac{\partial \dot{w}_i}{\partial w_i}, \quad (1.4.7)$$

inoltre

$$\frac{\partial \dot{w}_i}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{w}_i}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} = \sum_{i=1}^3 -\frac{\partial}{\partial v_i} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (1.4.8)$$

dove  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$  siccome  $x_i$  e  $v_i$  sono coordinate indipendenti e l'ultimo passaggio deriva dal fatto che  $\Phi$  non dipende dalle velocità. L'equazione di continuità si semplifica

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \dot{w}_i \frac{\partial f}{\partial w_i} = 0, \quad (1.4.9)$$

riscrivibile come

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\bar{w}} \cdot \nabla_{\bar{w}} f = 0, \quad (1.4.10)$$

usando  $x_i$  e  $v_i$  con la convenzione della somma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \quad (1.4.11)$$



che in forma vettoriale diventa

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = 0, \quad (1.4.12)$$

questa è l'**equazione non collisione di Boltzmann** CBE.

Il significato della CBE può essere visto estendendo a sei dimensioni il concetto di derivata lagrangiana. Definiamo

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}, \quad (1.4.13)$$

$\frac{Df}{Dt}$  rappresenta il tasso di variazione della densità di probabilità locale vista da un osservatore che si muove nello spazio delle fasi con una stella. La CBE diventa allora

$$\frac{Df}{Dt} = 0. \quad (1.4.14)$$

Il flusso attraverso lo spazio delle fasi del fluido di probabilità è incomprimibile; la densità dello spazio delle fasi  $f$  del fluido attorno a una data stella rimane sempre la stessa.

## 1.5 Le equazioni di Jeans

La funzione di distribuzione  $f$  è una funzione di sette variabili, di conseguenza risolvere l'equazione non collisionale di Boltzmann è generalmente difficile. Quindi è necessario semplificare le ipotesi (di solito simmetria) o provare a ottenere informazioni tramite i momenti dell'equazione.

Integriamo la CBE (1.4.11) in  $d^3\bar{v}$  per ottenere il momento di ordine zero di questa equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f d^3\bar{v} + \int \int \int_{-\infty}^{\infty} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\bar{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\bar{v} = 0 \quad (1.5.1)$$

dove per il primo termine possiamo portare la derivata rispetto al tempo fuori dall'integrale poiché i limiti sono indipendenti da  $t$  e nel terzo termine  $\Phi$  è indipendente da  $v$  quindi  $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$  esce dall'integrale.

Ora

$$\nu(\bar{x}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f d^3\bar{v} \quad (1.5.2)$$

è la densità numerica di stelle in  $\bar{x}$ , se le stelle hanno tutte la stessa massa  $m$  allora  $\rho(\bar{x}, t) = m\nu(\bar{x}, t)$ . Quindi il primo termine è semplicemente  $\frac{\partial \nu}{\partial t}$ .

Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (v_i f) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} f + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (1.5.3)$$

$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$  siccome  $v_i$  e  $x_i$  sono tra di loro indipendenti, allora

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (v_i f) = v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (1.5.4)$$

Il secondo termine dell'eq. (1.5.1) diventa

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} v_i f d^3\bar{v}, \quad (1.5.5)$$

definiamo la velocità media lungo la componente  $i$ ,  $\bar{v}_i$ , che prende il nome di **velocità di streaming**

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\nu} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} v_i f d^3\bar{v}, \quad (1.5.6)$$

il termine che stiamo considerando si può riscrivere come  $\frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \bar{v}_i)$ .

Per il terzo ed ultimo termine dell'equazione (1.5.1) abbiamo

$$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\bar{v} = [f]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (1.5.7)$$

siccome imponiamo che  $f \rightarrow 0$  per  $\bar{v} \rightarrow \infty$ . Sostituendo i termini, l'equazione del momento di ordine zero diventa

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \bar{v}_i) = 0. \quad (1.5.8)$$

Eq.(1.5.8) differisce da quella di continuità solo nel fatto che descrive la conservazione della probabilità invece che della massa e rimpiazza la velocità del fluido con la velocità di streaming.

Per il momento del primo ordine dell'equazione moltiplichiamo la CBE per  $v_j$  e poi integriamo in  $d^3\bar{v}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f v_j d^3\bar{v} + \int \int \int_{-\infty}^{\infty} v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\bar{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\bar{v} = 0, \quad (1.5.9)$$

dove abbiamo tenuto conto che

$$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} v_j \frac{\partial f}{\partial t} d^3\bar{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f v_j d^3\bar{v}, \quad (1.5.10)$$

in quanto  $\frac{\partial v_j}{\partial t} = 0$ . Il primo termine è per definizione  $\frac{\partial}{\partial t}(\nu \bar{v}_j)$ , il secondo è invece  $\frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \overline{v_i v_j})$  dove

$$\overline{v_i v_j} = \frac{1}{\nu} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} v_i v_j f d^3\bar{v}, \quad (1.5.11)$$

mentre per il terzo abbiamo

$$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\bar{v} = [f v_j]_{-\infty}^{\infty} - \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3\bar{v} = -\delta_{ij} \nu. \quad (1.5.12)$$

L'equazione (1.5.9) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nu \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \overline{v_i v_j}) + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0. \quad (1.5.13)$$

Possiamo manipolarla un po' di più sottraendo  $\bar{v}_j \times \frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu v_i)$ , otteniamo

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \overline{v_i v_j}) = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}. \quad (1.5.14)$$

Definiamo la **dispersione di velocità**

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (1.5.15)$$

e usiamola per riscrivere la precedente equazione

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \nu \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{v}_i = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \sigma_{ij}^2). \quad (1.5.16)$$

Il LHS e il primo termine del RHS di questa equazione differiscono dai termini dell'**equazione ordinaria di Eulero** solo per via della sostituzione della densità di massa con la densità di probabilità e della sostituzione della velocità del fluido con la velocità stellare media. L'ultimo termine del RHS rappresenta qualcosa di simile alla forza di pressione  $-\nabla p$ . Più precisamente  $-\nu \sigma_{ij}^2$  è un tensore dello stress che descrive una pressione anisotropa. Poiché le equazioni (1.5.8) e (1.5.13) furono applicate per la prima volta alla dinamica stellare da Jeans (1919), prendono il nome di **equazioni di Jeans**.

Queste sono importanti perché mettono in relazione quantità osservabili.

## 1.6 Teorema del Viriale

Abbiamo ottenuto la seconda equazione di Jeans (1.5.13) moltiplicando l'equazione non collisionale di Boltzmann per  $v_j$  e integrando sulle velocità. In questo processo l'equazione nelle sei coordinate dello spazio delle fasi per una singola quantità scalare  $f$  è stata ridotta a equazioni alle derivate parziali per  $\nu$  e i momenti della velocità ( $\bar{v}_i$ ,  $\overline{v_i v_j}$  e  $\sigma_{ij}^2$ ) nelle tre coordinate spaziali. Moltiplichiamo ora l'equazione per  $m x_k$  dove  $m$  è la massa della singola stella e integriamo sulle posizioni, convertendo così queste equazioni differenziali in una semplice equazione tensoriale relativa alle proprietà globali della galassia, come l'energia cinetica totale e la velocità quadratica media di streaming

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{-\infty}^{\infty} x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} d^3 \bar{x} = \\ & = - \int \int \int_{-\infty}^{\infty} x_k \frac{\partial(\rho \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} d^3 \bar{x} - \int \int \int_{-\infty}^{\infty} x_k \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \bar{x}. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Per definizione il secondo termine nel RHS è il **tensore dell'energia potenziale** di Chandrasekhar

$$W_{jk} \equiv - \int \int \int_{-\infty}^{\infty} x_k \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \bar{x}. \quad (1.6.2)$$

Il primo termine del RHS può essere riscritto nel seguente modo

$$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} x_k \frac{\partial(\rho \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} d^3 \bar{x} = - \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{ki} \rho \overline{v_i v_j} d^3 \bar{x} = -2K_{kj}, \quad (1.6.3)$$

dove abbiamo assunto che  $\rho$  si annulla a grandi distanze e definito il **tensore dell'energia cinetica**

$$K_{kj} \equiv \frac{1}{2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \rho \overline{v_j v_k} d^3 \bar{x}. \quad (1.6.4)$$

Ricordando che  $\sigma_{ij}^2 \equiv \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$ , dividiamo  $K$  nel contributo dato dal moto randomico  $\Pi$  e quello ordinato  $T$

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2} \Pi_{jk} \quad (1.6.5)$$

$$T_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3 \bar{x}, \quad \Pi_{jk} \equiv \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \rho \sigma_{jk}^2 d^3 \bar{x}.$$

La derivata rispetto al tempo nell'equazione (1.6.1) può essere portata al di fuori del segno di integrale perché  $x_k$  non dipende dal tempo. Facendo la media delle componenti (k, j) e (j, k) otteniamo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3 \bar{x} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk}, \quad (1.6.6)$$

dove abbiamo sfruttato la simmetria di  $T, \Pi, W$  nello scambio di indici. Definiamo il **tensore del momento di inerzia**

$$I_{jk} \equiv \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \rho x_j x_k d^3 \bar{x}. \quad (1.6.7)$$

Derivando rispetto al tempo

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t} x_j x_k d^3 \bar{x}, \quad (1.6.8)$$

sfruttando l'eq (1.5.8) otteniamo

$$- \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} x_j x_k d^3 \bar{x} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \rho \bar{v}_i (x_k \delta_{ji} + x_j \delta_{ki}) d^3 \bar{x}. \quad (1.6.9)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione originaria

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3 \bar{x}, \quad (1.6.10)$$

combinando le due equazioni si ha il **Teorema del Viriale tensoriale**

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk}. \quad (1.6.11)$$

Questa equazione ci permette di mettere in relazione la cinematica generale e le proprietà morfologiche della galassia. In molte applicazioni il lato sinistro è semplicemente zero poiché la galassia è indipendente dal tempo.

La traccia del tensore dell'energia potenziale non è altro che l'energia potenziale totale del sistema  $W$  e  $K \equiv \text{traccia}(T) + \text{traccia}(\Pi)$  è l'energia cinetica del sistema. Allora se il sistema è all'equilibrio,  $\dot{I} = 0$ , la traccia dell'equazione diventa

$$2K + W = 0, \quad (1.6.12)$$

questo è il **Teorema del Viriale scalare**.

Inoltre notiamo che se  $E$  è l'energia totale del sistema, allora usando (1.6.12) otteniamo

$$E = K + W = -K = \frac{1}{2}W. \quad (1.6.13)$$

## 2 Applicazioni astrofisiche

### 2.1 Piano del Viriale

Rappresentiamo graficamente il Teorema del Viriale per un sistema autogravitante tramite uno speciale piano, che lega l'energia potenziale  $W$  a quella cinetica  $K$ , chiamato **piano del Viriale**.

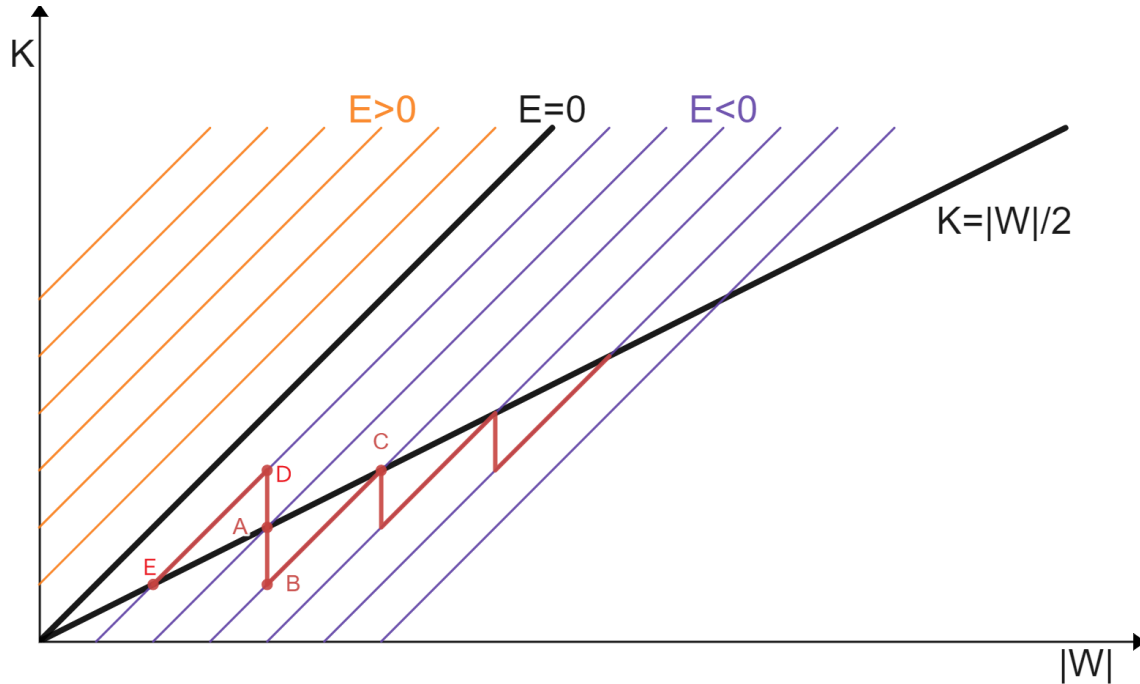


Figura 3: piano del Viriale.

La bisettrice, chiamata retta del Teorema del Viriale, è data da  $K = |W|$  e siccome  $E = K + W = K - |W|$  allora  $K = |W|$  quando  $E = 0$ . I sistemi autogravitanti all'equilibrio si possono trovare solo su questa retta e non possono stare in altre parti del piano (es. punti B e D). Quindi un sistema con  $E \geq 0$  non può in alcun modo essere all'equilibrio.

Prendiamo in considerazione sistemi con diverse  $K$  e  $W$  e collochiamoli nel piano:

- angolo in basso a destra, bassa  $K$  e alta  $|W|$ , si trovano sistemi freddi e molto concentrati;
- angolo in alto a destra, alta  $K$  e alta  $|W|$ , si trovano i sistemi caldi e concentrati;
- angolo in alto a sinistra, alta  $K$  e bassa  $|W|$ , si trovano i sistemi caldi e poco concentrati;
- angolo in basso a sinistra, bassa  $K$  e bassa  $|W|$ , si trovano i sistemi freddi e poco concentrati.

Consideriamo un sistema autogravitante nella posizione A, quindi all'equilibrio. Ipotizziamo che venga raffreddato e che raggiunga la posizione B, se torna all'equilibrio allora può raggiungere solo la posizione C poiché, dovendosi conservare l'energia totale

$E$ , esso può solo muoversi sulla retta  $K = E + |W|$ . Quindi ora il sistema ha meno energia, siccome  $C$  si trova su una retta ad energia più alta rispetto ad  $A$ . In altre parole, raffreddando un sistema autogravitante, esso (se torna all'equilibrio) si riscalda, trovandosi con un contenuto di energia minore.

Invece, ipotizzando che venga riscaldato e che raggiunga la posizione  $D$ , se torna all'equilibrio allora può raggiungere sola la posizione  $E$ , intersezione tra  $K = E + |W|$  e  $2K = |W|$ . Quindi ora il sistema ha più energia, siccome  $E$  si trova su una retta ad energia più alta rispetto ad  $A$ . In altre parole, scaldando un sistema autogravitante, esso (se torna all'equilibrio) si raffredda, trovandosi con un contenuto di energia maggiore.

$C$  è più caldo di  $A$  ma ha meno energia mentre  $E$  è più freddo ma con più energia.

## 2.2 Equilibrio fra raggi cosmici, gas e campo magnetico

Una galassia a disco è un sistema gravitazionale in equilibrio che ha un campo magnetico e contiene raggi cosmici, per il Teorema del Viriale si ha

$$2K + 3(3\Gamma - 1)U + M + W_{RC} + W = 0, \quad (2.2.1)$$

dove  $K$  è l'energia cinetica associata ai moti macroscopici del gas,  $\Gamma = c_p/c_v$  è il rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costante e dipende dalla composizione del gas,  $U$  è l'energia termica del gas,  $M = H^2/8\pi \times volume$  è l'energia associata al campo magnetico,  $W_{RC}$  è il contenuto energetico dei raggi cosmici e  $W < 0$  è l'energia potenziale del sistema dovuta al campo gravitazionale. I primi quattro termini della somma sono positivi, mentre l'energia potenziale gravitazionale è negativa, quindi è il campo di forza attrattivo dovuto alla gravità che rende il sistema stabile (somma = 0). In altre parole, mentre nel Teorema del Viriale tradizionale l'energia potenziale gravitazionale deve contrastare gli effetti di espansione dovuti all'energia cinetica, ora deve far fronte anche alla pressione termica, alla pressione dei raggi cosmici e all'energia magnetica.

Per studiare come questa azione di confinamento si realizza, scriviamo l'equazione barometrica del sistema. Nella galassia il campo magnetico è più o meno uniforme e allineato al piano galattico. Si consideri un gas isoterma con una certa densità  $\rho(z)$  con  $z$  altezza sul piano galattico, la cui pressione è data da  $P_{gas} = \rho u^2$  dove  $u$  è la velocità media in direzione  $z$ , sia termica che dovuta ai moti turbolenti su grande scala e che possiamo assumere, in prima approssimazione, costante. Siano inoltre  $g(z)$  l'accelerazione di gravità e  $P_{RC}$  la pressione esercitata dai raggi cosmici. L'equazione dell'equilibrio barometrico, per un elemento di volume di coordinata  $z$  perpendicolarmente al piano è

$$\frac{d}{dz} \left( \rho u^2 + \frac{H^2}{8\pi} + P_{RC} \right) = -\rho(z) \times g(z). \quad (2.2.2)$$

Non avendo informazioni su come la pressione del campo magnetico e dei raggi cosmici variano in funzione di  $z$  le scriveremo come funzioni della pressione del gas e, in prima approssimazione, proporzionali ad essa. Ossia:

$$\frac{H^2}{8\pi} = \alpha \rho u^2, P_{RC} = \beta \rho u^2, \quad (2.2.3)$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  costanti. L'equazione dell'equilibrio barometrico diventa

$$\frac{d}{dz} [\rho u^2 (1 + \alpha + \beta)] = -\rho(z) \times g(z), \quad (2.2.4)$$

da cui, ordinando, si ha

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{g(z)}{u^2(1 + \alpha + \beta)}, \quad (2.2.5)$$

che integrata da

$$\ln \frac{\rho(z)}{\rho_0} = -\frac{1}{u^2(1 + \alpha + \beta)} \int g(z) dz \approx -\frac{\langle g \rangle z}{u^2(1 + \alpha + \beta)}, \quad (2.2.6)$$

quindi

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-(z/\Lambda)}, \quad (2.2.7)$$

dove  $\Lambda$  è l'altezza caratteristica sul piano galattico, corrispondente all'altezza a cui  $\rho(z) = \rho_0 e^{-1}$ , ed è definita come segue

$$\Lambda = \frac{u^2(1 + \alpha + \beta)}{\langle g \rangle}. \quad (2.2.8)$$

Inoltre  $\langle g \rangle$  è il valore medio dell'accelerazione di gravità nell'intervallo  $[0 - \Lambda]$ . Ponendo i valori sperimentali,  $\Lambda \approx 150$  pc,  $u \approx 6$  km/s e  $\langle g \rangle \approx 1.6 \times 10^{-9}$  cm s<sup>-2</sup> si ottiene  $\alpha + \beta \approx 1$  e quindi la galassia è in equilibrio idrostatico quando la pressione del gas è uguale alla pressione combinata dei raggi cosmici e del campo magnetico

$$P_{gas} = P_{RC} + P_H \Rightarrow \rho u^2 = P_{RC} + \frac{H^2}{8\pi}. \quad (2.2.9)$$

Poiché sul piano della galassia  $\rho_0 \approx 3 \times 10^{-24}$  gr cm<sup>-3</sup>,  $\rho_0 u^2 \approx 10^{-12}$  erg cm<sup>-3</sup>  $\approx 0.6$  eV cm<sup>-3</sup>, si vede che (2.2.9) è approssimativamente verificata nelle vicinanze del sistema solare, dove si ha densità di energia dei raggi cosmici  $\omega_{RC} \approx 1.6 \times 10^{-12}$  erg cm<sup>-3</sup>  $\approx 1$  eV cm<sup>-3</sup> e  $H^2/8\pi \approx 0.2$  eV cm<sup>-3</sup>.

Si vede anche che  $H$  non può essere molto maggiore di  $\approx 5\mu$ G senza porre problemi alla condizione di equilibrio  $\alpha + \beta \approx 1$ . Per una ragione analoga, neppure  $P_{RC}$  può essere molto più grande del valore stimato nelle vicinanze del Sole. Poiché la pressione dei raggi cosmici è dovuta praticamente ai soli protoni, se ne conclude che la densità di protoni è approssimativamente uniforme nella galassia.

Per mantenere il flusso di raggi cosmici costante, è necessario un rifornimento continuo. L'energia per unità di tempo necessaria a compensare quella persa è pari a

$$W_{RC} = \frac{\omega_{RC} V_{gal}}{\tau_{RC}} \approx 2 \times 10^{40} \text{ erg s}^{-1} \quad (2.2.10)$$

dove  $V_{gal} \approx 180$  Kpc<sup>3</sup> è il volume della galassia,  $\tau_{RC} \approx 20$  Myr è il tempo di confinamento dei raggi cosmici nella Via Lattea. Le sorgenti che soddisfano tale requisito energetico sono supernove, pulsar, quasar e radiogalassie (gli ultimi due oggetti sono extragalattici e forniscono la componente di raggi cosmici con  $E > 10^{19}$  eV).

## 2.3 Tempo di Kelvin Helmholtz

Consideriamo una stella in sequenza principale. Le reazioni di fusione sono il suo principale processo di produzione di energia ma non l'unico. In caso di assenza di quest'ultime la stella può produrre energia per contrazione. Come abbiamo già visto il Teorema del Viriale fornisce una relazione generale tra le diverse forme di energia in un sistema di particelle, ovvero eq. (1.6.12) (che vale per tutte le strutture astrofisiche in equilibrio idrostatico), dove l'unica forma di energia potenziale in gioco è quella gravitazionale. Ricordiamoci anche delle relazioni forniteci dall' eq. (1.6.13).

Deriviamo temporalmente queste relazioni (ricordiamo che indichiamo con  $W$  l'energia potenziale gravitazionale, con  $K$  l'energia cinetica e con  $E$  l'energia totale)

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dE}{dt}, \quad \frac{d|W|}{dt} = -2\frac{dE}{dt}. \quad (2.3.1)$$

Possiamo interpretare le relazioni ottenute nel seguente modo: se partendo da una configurazione stabile la stella si contrae,  $\frac{dW}{dt} < 0$ , avremo che metà della variazione di energia potenziale andrà spesa per aumentare l'energia cinetica interna (e dunque la temperatura), mentre l'altra metà andrà spesa in irraggiamento, cioè la struttura stellare mentre si contrae emette e nello stesso tempo si riscalda. Ribaltando il ragionamento: ogni perdita di energia  $E$  per irraggiamento del sistema costringe la configurazione a contrarsi e così facendo essa non solo fornisce l'energia perduta ma si riscalda. Questo è il principale processo con il quale una stella emette energia in assenza di reazioni di fusione nel proprio nucleo, il processo porta la stella a contrarsi e scaldarsi fino a che la temperatura non è sufficientemente alta per innescare la fusione del prossimo elemento o fino a che il gas nel nucleo della stella non degenera arrestando la contrazione.

L'energia emessa per irraggiamento in condizioni di assenza di reazioni termonucleari nel nucleo è quindi data da

$$\begin{aligned} L &= \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \left| \frac{dW}{dt} \right| \Rightarrow Ldt = \frac{1}{2} |dW| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^t Ldt = L \cdot t = \frac{1}{2} |W| = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{R}, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

dove  $M$  è la massa della stella,  $R$  il suo raggio e  $L$  l'energia che irradia nell'unità di tempo. Risolvendo per  $t$  otteniamo il tempo scala termico o **tempo di Kelvin Helmholtz**

$$t = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{RL}. \quad (2.3.3)$$

$t$  in questo caso è detto tempo scala termodinamico e indica per quanto tempo una stella può alimentare la propria luminosità solo tramite la contrazione. Per il Sole  $M = 2 \times 10^{33}$  g,  $R = 7 \times 10^{10}$  cm e  $L = 4 \times 10^{33}$  erg s<sup>-1</sup>, allora  $t = 1.5 \times 10^7$  yr, quindi la sola energia gravitazionale avrebbe potuto alimentare la luminosità del Sole per soli 15 milioni di anni. Non è possibile che il Sole produca la propria energia solo grazie alla contrazione, sono invece le reazioni di fusione nel suo nucleo a produrre la maggior parte dell'energia irradiata.



## 2.4 Criterio di Jeans

Consideriamo una nube sferica in equilibrio idrostatico, con raggio  $R$ , massa  $M$  e densità  $\rho(r)$ . Siccome è in equilibrio deve obbedire al Teorema del Viriale. Se l'energia gravitazionale  $W$  domina l'energia termica  $K$ ,  $-W > 2K$ , la nube sarà instabile e collasserà a causa dell'attrazione gravitazionale.



Figura 4: Questa immagine della zona rosata di formazione stellare Messier 17 è stata ottenuta dal WFI (Wide Field Imager) montato sul telescopio da 2,2 metri dell'MPG/ESO all'Osservatorio dell'ESO di La Silla in Cile.

**Crediti:** ESO

Per ottenere l'energia potenziale totale prendiamo in considerazione la massa contenuta nel guscio di spessore  $dr$  a distanza  $r$  dal centro. Per il primo e il secondo teorema di Newton l'energia potenziale  $dW$  tra il guscio e la massa sferica  $M(r)$  al suo interno è

$$dW = -G \frac{M(r)4\pi r^2 \rho(r) dr}{r}. \quad (2.4.1)$$

Per ottenere l'energia potenziale totale  $W$ , dobbiamo integrare questa espressione su tutti i raggi  $r$  fino al bordo della nube, cioè fino a  $r = R$

$$dW = -4\pi G \int_0^R M(r)\rho(r) dr \quad (2.4.2)$$

In genere avremmo bisogno di conoscere la densità  $\rho(r)$  per ottenere  $M(r)$  e per integrare questa equazione. Lo scopo è quello di ottenere un'espressione approssimata, che ci dia un'idea della dipendenza dell'energia dalla massa e dal raggio e ottenere una stima dell'ordine di grandezza. Per questo motivo, noi supponiamo che la densità sia costante con un valore pari alla densità media della nube,

$$\rho = \frac{M}{4/3\pi R^3}, \quad (2.4.3)$$

quindi  $M(r) = 4/3\pi r^3 \rho$ , ora possiamo integrare l'equazione

$$W = -4\pi G \left( \frac{M}{4/3\pi R^3} \right)^2 4/3\pi \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (2.4.4)$$

L'energia cinetica per una nube isoterma, può essere scritta come

$$K = \frac{3}{2} N k_B T, \quad (2.4.5)$$

dove  $N$  è il numero totale di particelle contenute nella nube,  $k_B$  è la costante di Boltzmann e  $T$  è la temperatura.  $N = M/\mu m_H$ , dove  $\mu$  è il peso molecolare medio e  $m_H$  è la massa dell'atomo di idrogeno.

La condizione di collasso diventa

$$-W > 2K \Rightarrow \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} > 3 \frac{k_B T M}{\mu m_H}, \quad (2.4.6)$$

siccome  $\rho$  costante abbiamo

$$R = \left( \frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3}, \quad (2.4.7)$$

sostituiamo questa espressione nella condizione per far iniziare il collasso così da ottenere il **criterio di Jeans**

$$M > \left( \frac{5k_B T}{\mu m_H G} \right)^{3/2} \left( \frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2} \equiv M_J, \quad (2.4.8)$$

dove abbiamo definito la **massa di Jeans**  $M_J$ . Quindi, affinché una nube possa collassare, la sua massa deve essere maggiore della massa di Jeans:  $M > M_J$ . Ciò stabilisce un criterio quantitativo in base al quale è possibile valutare la stabilità di una nube. Si noti che  $M_J$  è più piccola per le nubi con densità maggiori siccome viene immagazzinata più energia potenziale gravitazionale. Inoltre, le nubi con temperature più elevate hanno  $M_J$  più grandi perché la pressione interna contrasta con maggiore efficacia il collasso gravitazionale.

Allo stesso modo, è possibile trovare un'espressione per la densità di Jeans  $\rho_J$

$$\rho > \rho_J = \left( \frac{5k_B T}{\mu m_H G} \right)^3 \left( \frac{3}{4\pi M^2} \right). \quad (2.4.9)$$

Sostituendo (2.4.8) in (2.4.7), otteniamo una espressione per il raggio di Jeans

$$R_J = \left( \frac{15k_B T}{4\pi G \mu m_H \rho} \right)^{1/2}. \quad (2.4.10)$$

Quando una nube con densità  $\rho$  ha un raggio maggiore di questo valore, il criterio prevede che dovrebbe collassare a causa della propria attrazione gravitazionale.

Una nube molecolare ha tipicamente massa  $M = 10^3 M_\odot$ , temperatura  $T = 10$  k e densità numerica di  $10^3$  molecole di  $H_2$  per  $\text{cm}^3$ , quindi la sua massa di Jeans è  $M_J = 20 M_\odot$ , che è di molto più piccola di  $M$ . Allora il criterio dei Jeans prevede che le nubi molecolari possono collassare e portare alla formazione di stelle. Queste fredde e dense nubi quando collassano aumentano la propria densità, fino a quando anche porzioni più piccole diventano instabili e collassano a loro volta. Questo processo di frammentazione rende possibile la formazione di molte stelle a partire da una singola nube molecolare. Durante la formazione stellare generalmente si formano più stelle piccole che grandi.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Luca Ciotti *Introduction to Stellar Dynamics*, Cambridge University press, 2021.
- [2] Luca Ciotti *Appunti del corso Astrofisica Extragalattica*, A.A. 2022/2023.
- [3] Luca Ciotti *Lecture Notes on Stellar Dynamics*, Scuola Normale Superiore Pisa, 2000.
- [4] James Binney, Scott Tremaine *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, 2008.
- [5] Carla Fanti, Roberto Fanti *Una finestra sull'Universo "Invisibile"*, Lezioni di radioastronomia, 2012.
- [6] Francis Leblanc *An Introduction to Stellar Astrophysics*, Wiley, 2010.
- [7] Vasily Belokurov *Lecture Notes on Stellar Dynamics and Structure of Galaxies*, 2016.
- [8] Francesco Rosario Ferraro *Appunti di Astrofisica Stellare*, A.A. 2022/2023.
- [9] Daniele Dallacasa *Appunti di Processi di Radiazione e MHD*, A.A. 2022/2023.