

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# Materia degenera: fisica e applicazioni astrofisiche

Tesi di Laurea

Presentata da:  
Giorgia Zullo

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
Marcella Brusa

Anno Accademico 2022/2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Fisica della materia degenere</b>	<b>1</b>
1.1	Il principio di esclusione di Pauli . . . . .	1
1.2	Meccanica statistica . . . . .	2
1.2.1	Caso classico . . . . .	2
1.2.2	Caso quantistico . . . . .	3
1.2.3	Leggi di distribuzione statistiche . . . . .	3
1.3	Principio di indeterminazione . . . . .	3
1.4	Degenerazione . . . . .	4
1.4.1	Condizione di non degenerazione . . . . .	4
1.4.2	Parametro di degenerazione . . . . .	4
1.5	Distribuzione di Fermi-Dirac e Energia di Fermi . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Applicazioni astrofisiche</b>	<b>7</b>
2.1	Pressione degenere negli interni stellari . . . . .	7
2.1.1	Equazioni di stato . . . . .	7
2.2	Evoluzione stellare . . . . .	10
2.3	Nane Bianche . . . . .	11
2.3.1	Relazione massa-raggio . . . . .	11
2.3.2	Massa limite di Chandrasekhar . . . . .	12
2.3.3	Cooling delle nane bianche . . . . .	12
2.4	Stelle di Neutroni . . . . .	14
2.4.1	Relazione massa-raggio . . . . .	14
2.4.2	Cooling delle stelle di neutroni . . . . .	14
2.4.3	Conservazione del momento angolare . . . . .	15

# Introduzione

Nella storia della ricerca fisica e astrofisica ci si è spesso scontrati con sistemi e situazioni che non rientrano nella concezione classica della scienza o non risultano intuitivi se analizzati con le categorie cognitive tradizionali. Il campo astrofisico ha nell'Universo un infinito banco di prova per analizzare il comportamento della materia nelle situazioni più remote e diverse da quelle a cui si è abituati sul suolo terrestre.

La materia degenere è un particolare stato della materia che si verifica in condizioni estreme di temperatura e densità. Si tratta di una conseguenza della meccanica quantistica, la cui scoperta ha contribuito a solidificare i suoi principi teorici (come il principio di esclusione di Pauli e il principio di indeterminazione) fornendo un'evidenza sperimentale consistente con essi. L'astrofisica ha contribuito in modo fondamentale a questo campo poiché la materia degenere è stata teorizzata in seguito all'osservazione di oggetti precedentemente impensabili come le stelle nane bianche. Da questo punto di partenza le scoperte relative alla materia degenere hanno avuto importanti conseguenze in diversi ambiti, dalla fisica dei materiali alla meccanica statistica.

In questa tesi sono esplorate sia le basi teoriche della materia degenere, le cui radici affondano nei principi della meccanica quantistica, sia le sue applicazioni in campo astrofisico. Di particolare rilevanza sono, a questo proposito, gli studi sulle nane bianche e sulle stelle di neutroni, i cosiddetti "compact object", la cui fisica, soprattutto legata alla loro stabilità, è dominata dalle caratteristiche della materia degenere e dalle conseguenze che i suoi comportamenti hanno in un sistema.

Proprio perché rappresenta un legame diretto tra la fisica microscopica e fenomeni macroscopici di interesse astrofisico, tra cui si annoverano anche le supernovae, la materia degenere può essere considerata un argomento di vastissimo interesse fisico.

# Capitolo 1

## Fisica della materia degenere

### 1.1 Il principio di esclusione di Pauli

L'avvento della meccanica quantistica ha portato, da un secolo a questa parte, ad una rivoluzione nella concezione della fisica microscopica, costringendoci a rimettere in discussione concetti che stavano alla base del nostro modo di studiare e comprendere i fenomeni. Il passaggio da una visione deterministica della realtà ad una probabilistica ha avuto effetti non solo epistemologici, ma anche e soprattutto pratici.

In campo quantistico è necessario abbandonare l'idea classica di traiettoria, sostituita da quella di una *funzione d'onda*  $\Psi(r, t)$  che descrive la probabilità di un sistema di trovarsi in un certo punto ad un certo tempo.

In fisica classica, due particelle identiche potevano essere distinte seguendone le traiettorie differenti, mentre per la meccanica quantistica due particelle identiche sono assolutamente *indistinguibili*: non è infatti possibile misurarne le diverse traiettorie o etichettarle senza causare perturbazioni. In un sistema di questo tipo, la funzione d'onda deve avere come proprietà intrinseca l'invarianza per la permutazione tra le due particelle 1 e 2 che si trovano negli stati descritti dalle funzioni d'onda  $\psi_a$  e  $\psi_b$ : lo stato fisico ottenuto scambiandole deve essere identico a quello di partenza. Definendo quindi l'operatore di permutazione  $P_{12}$ , il quale commuta con l'hamiltoniana del sistema  $H$ , possiamo dire:

$$P_{12}\psi(r_1, r_2) = \lambda\psi(r_2, r_1) \quad (1.1)$$

Dove  $\lambda$  è l'autovalore dell'operatore  $P_{12}$  corrispondente. Applicando  $P_{12}$  due volte si riottiene necessariamente lo stato di partenza (e quindi  $\lambda^2 = 1$ ): questo implica che i possibili valori di  $\lambda$  siano necessariamente  $\pm 1$ . Il *postulato di simmetrizzazione* afferma quindi che le funzioni d'onda di sistemi di particelle identiche devono essere totalmente simmetriche o antisimmetriche alla permutazione:

$$\psi_{\pm}(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \pm \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)] = \pm\psi_{\pm}(r_2, r_1) \quad (1.2)$$

Questo risultato è stato confermato anche sperimentalmente, infatti le particelle in natura sembrano rispettare il postulato dividendosi in due categorie: i **fermioni**, che si trovano sempre in stati antisimmetrici (elettroni, protoni, neutroni), e i **bosoni**, che si trovano sempre in stati simmetrici (fotoni, pioni).

Una diretta conseguenza di ciò è che nel caso di un sistema di fermioni non è possibile avere due particelle con stessi numeri quantici, ovvero nello stesso stato: varrebbe  $\psi_a = \psi_b$  che nel caso di  $\psi_-$  (1.2) darebbe funzione d'onda nulla. Si tratta del **principio**

**di esclusione di Pauli**, che ha conseguenze importantissime per la fisica degli atomi e, come vedremo, sta alla base della degenerazione.

## 1.2 Meccanica statistica

La distinzione tra bosoni e fermioni ha conseguenze fondamentali in *meccanica statistica quantistica*. Per meccanica statistica si intende la stima delle proprietà macroscopiche (e.g. temperatura, pressione) e dello stato dinamico di sistemi a molte particelle. L'oggetto di studio sono le probabilità di una distribuzione, vale a dire la probabilità che le particelle si trovino in una particolare distribuzione tra i tanti possibili stati dinamici in cui esse possono trovarsi. Si distinguono le **leggi di distribuzione**:

- Statistica di Maxwell-Boltzmann (classica)
- Statistica di Bose-Einstein (bosoni)
- Statistica di Fermi-Dirac (fermioni)

### 1.2.1 Caso classico

Dato  $\Gamma$ , spazio delle fasi di una particella, è possibile dividerlo in celle con un indice  $i \in [1, K]$ . Si identifica poi con  $G_i$  il numero di stati possibili e con  $\epsilon_i$  l'energia media di singola particella relativi alla  $i$ -esima cella. Uno stato microscopico o *microstato* corrisponde ad una particolare distribuzione delle particelle nelle celle e negli stati, identificando il numero di occupazione per ogni cella con  $N_i$ .

Nel caso classico, che corrisponde al caso della **statistica di Maxwell-Boltzmann**, avendo particelle identiche ma distinguibili il numero di modi  $W_{MB}$  per distribuire  $N_i$  particelle nei  $G_i$  stati è dato da:

$$W_{MB}(n) = N! \prod_{i=1}^K \frac{G_i^{N_i}}{N_i!} \quad (1.3)$$

Il numero medio di occupazione di ogni cella per Maxwell-Boltzmann è definito:

$$n_i = \frac{N_i}{G_i} \quad (1.4)$$

Per ottenerne l'equazione si cerca quella che massimizza il valore di  $W_{MB}$  compatibilmente con le seguenti condizioni per energia e numero totale ( $E, N$ ), che si traducono in un problema con estremo vincolato risolvibile con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K N_i &= \sum_{i=1}^K G_i n_i = N \\ \sum_{i=1}^K N_i \epsilon_i &= \sum_{i=1}^K G_i n_i \epsilon_i = E \end{aligned} \quad (1.5)$$

Indicando i moltiplicatori con  $\alpha$  e  $\beta$  la soluzione può essere scritta come:

$$n_i = e^{-\alpha} e^{-\beta \epsilon_i} \quad (1.6)$$

Usando il modello fisico del gas perfetto è possibile ottenere che  $\beta = 1/k_b T$  dove  $T$  è la temperatura e  $k_b$  è la costante di Boltzmann<sup>1</sup>. Il valore di  $\alpha$  è invece definito tramite il potenziale chimico denotato come  $\mu$  ed è  $\alpha = \frac{-\mu}{k_b T}$ .

---

<sup>1</sup> $k_b = 1.38 \times 10^{-16} \text{erg K}^{-1}$

## 1.2.2 Caso quantistico

Si è già esplorato il modo in cui le particelle quantistiche differiscono da quelle classiche poichè sono indistinguibili. Nel caso dei bosoni, non soggetti ad altre limitazioni, si ricalcola il numero di modi di distribuzione in questo modo:

$$W_{BE}(n) = \prod_{i=1}^K \frac{(G_i - 1 + N_i)!}{N_i!(G_i - 1)!} \quad (1.7)$$

Si noti come la formula precedente nel limite classico, ovvero nel caso fisico a bassa pressione ed alta temperatura, che equivale a considerare un numero basso di particelle rispetto al numero di stati ( $N_i \ll G_i$ ), restituisce la formula (1.3).

La funzione di distribuzione corrispondente è la **Bose-Einstein**:

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_i + \alpha} - 1} \quad (1.8)$$

Nel caso dei fermioni invece deve essere tenuto in considerazione il principio di esclusione di Pauli, per cui due particelle non possono occupare lo stesso stato, ovvero  $N_i \leq G_i$ , il numero di particelle deve essere minore di quello degli stati:

$$W_{FD}(n) = \prod_{i=1}^K \frac{G_i!}{N_i!(G_i - N_i)!} \quad (1.9)$$

Anche in questo caso il limite in condizioni classiche restituisce la distribuzione di Maxwell-Boltzmann. La distribuzione nel caso quantistico è invece nota come **Fermi-Dirac**:

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_i + \alpha} + 1} \quad (1.10)$$

## 1.2.3 Leggi di distribuzione statistiche

Sostituendo i valori dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene che le tre distribuzioni sono date dalle formule:

$$n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-(\epsilon - \mu)/k_b T} & \text{Maxwell-Boltzmann} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/k_b T} + 1} & \text{Fermi-Dirac} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/k_b T} - 1} & \text{Bose-Einstein} \end{cases} \quad (1.11)$$

## 1.3 Principio di indeterminazione

Oltre al principio di esclusione di Pauli, l'altro grande principio alla base della meccanica quantistica fondamentale per lo studio della materia degenere è il **principio di indeterminazione di Heisenberg**. Applicato al caso esempio di elettroni o particelle, esso ci dice che date le incertezze nelle posizioni e nei momenti (coordinate dello spazio delle fasi) vale sempre (per ognuna delle tre direzioni):

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim \frac{h}{2\pi} \quad (1.12)$$

Di conseguenza, questo determina un volume minimo nello spazio delle fasi dato da  $h^3$ .

## 1.4 Degenerazione

La condizione di **materia degenera** equivale ad un caso fisico in cui non è possibile trascurare il comportamento quantistico, ovvero il caso in cui il numero di particelle è alto rispetto al numero degli stati:

- $N_i \ll G_i$  (Caso classico): il gas si comporta come un gas perfetto, seguendo la statistica di Maxwell-Boltzmann
- $N_i \sim G_i$  (Caso quantistico): il gas è detto **degenera**, sorge la necessità di utilizzare le distribuzioni di Fermi-Dirac o Bose-Einstein per tener conto degli effetti quantistici

### 1.4.1 Condizione di non degenerazione

Un primo metodo per valutare in quali condizioni sia necessario tener conto degli effetti quantistici è confrontare la lunghezza d'onda associata alla particella secondo la teoria di de Broglie ( $\lambda$ ) e la distanza media tra le particelle ( $r$ ). In meccanica quantistica infatti ad ogni particella è associata un'onda in analogia con quanto scoperto per il dualismo onda-corpuscolo della luce. Rimane da verificare se essa è trascurabile rispetto alla distanza tra le particelle interagenti. Si definisce tale lunghezza d'onda come:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mkT}} \quad (1.13)$$

Dove  $h$  è la costante di Planck<sup>2</sup>. A questo punto la *condizione di non degenerazione* risulta:

$$r > \frac{h}{\sqrt{2mkT}} \quad (1.14)$$

Considerando il numero di particelle per unità di volume  $N$ , che sarà legato a  $r$  da una relazione  $r \propto N^{-1/3}$  e in condizioni di gas perfetto, vale:

$$PV = nRT = NkT \quad ; \quad N = \frac{\rho}{\mu H} \quad (1.15)$$

dove  $\rho$  è la densità,  $\mu$  la massa molecolare media e  $H$  la massa dell'idrogeno. Inserendo questo valore nella formula (1.14), si ottiene che la condizione di non degenerazione può essere scritta:

$$T > 2.4 \times 10^{-22} \frac{\rho^{2/3}}{m} \quad (1.16)$$

Si tratta quindi del limite entro il quale vale la statistica di Maxwell-Boltzmann che a parità di massa delle particelle dipende solo da temperatura e densità. La dipendenza dalla massa, invece, fa sì che a parità di temperatura e densità particelle meno massive siano più facilmente degeneri di quelle più massive.

### 1.4.2 Parametro di degenerazione

Un altro modo per studiare in quali condizioni il gas deve essere trattato come degenera è attraverso il *parametro di degenerazione*  $\Psi$ :

$$\Psi \propto \frac{1}{kT} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (1.17)$$

---

<sup>2</sup> $h = 6.63 \times 10^{-27} \text{ erg s}$

Risulta evidente come  $\Psi$  dipenda da temperatura e densità  $n$  delle particelle. È possibile riscrivere l'indice di occupazione degli stati delle diverse distribuzioni in funzione di  $\Psi$ :

$$n(E) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\frac{E}{k_b T} - \Psi}} & \text{Maxwell-Boltzmann} \\ \frac{1}{e^{\frac{E}{k_b T} - \Psi} + 1} & \text{Fermi-Dirac} \end{cases} \quad (1.18)$$

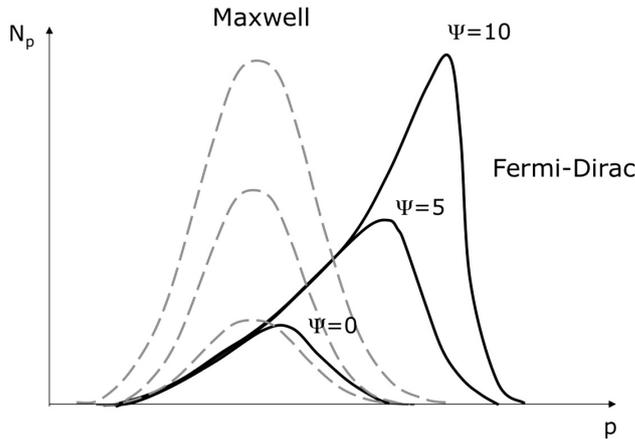


Figura 1.1: Distribuzione di Fermi-Dirac e Maxwell-Boltzmann confrontate al variare del parametro di degenerazione

Il parametro di degenerazione discrimina tra i due casi, per cui se  $\Psi \gg 0$  vale la statistica di Fermi-Dirac, mentre se  $\Psi \ll 0$  è necessario utilizzare la legge di Maxwell-Boltzmann. In particolare, come valori di riferimento per l'assenza di degenerazione si prendono numeri  $\Psi \leq -4$ , mentre per la degenerazione totale è necessario  $\Psi \geq 10$ . Questo ci dice che la distribuzione di Maxwell-Boltzmann non è altro che il limite inferiore della distribuzione di Fermi-Dirac rispetto al parametro di degenerazione, comportamento in accordo con i limiti dei modi di occupazione (1.7) e (1.9).

Da questo andamento risulta evidente che un gas diventa degenere in condizioni di alta densità e/o bassissima temperatura, ovvero quando il numero di particelle è alto rispetto a quello degli stati. Nel momento in cui si passa dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann a quella di Fermi-Dirac l'effetto è una perdita di dipendenza dalla temperatura, poichè ci sono limitazioni dovute alla meccanica quantistica che prevalgono.

## 1.5 Distribuzione di Fermi-Dirac e Energia di Fermi

Si consideri ora la degenerazione di un gas di elettroni poichè può essere considerato il caso più rilevante in astrofisica: si tratta di fermioni che necessariamente rispettano la distribuzione di Fermi-Dirac. Tenendo conto dell'effetto totale di principio di indeterminazione e principio di esclusione (si hanno massimo due elettroni di spin opposto nel minimo volume  $h^3$ ) si ottiene che il numero di elettroni con quantità di moto compresa tra  $p$  e  $p + dp$  è data da:

$$n(p)dp = \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp \quad (1.19)$$

Usando il parametro di degenerazione è possibile scrivere una distribuzione generica che tenderà all'equazione precedente se  $\Psi \gg 0$ :

$$n(p)dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p^2}{e^{\frac{p^2}{2mkT} - \Psi} + 1} dp \quad (1.20)$$

Integrando la (1.19) su tutti i momenti fino ad un momento massimo possibile  $p_0$  si ottiene che il numero di particelle per unità di volume sarà dato da:

$$N_e = \frac{8\pi}{3h^3} p_0^3 \quad (1.21)$$

In condizioni di *completa degenerazione* a  $T = 0$  K, la massima energia è nota come **energia di Fermi**: tutti i livelli energetici inferiori risultano occupati, mentre quelli maggiori sono necessariamente vuoti. Considerando la (1.11) per la distribuzione di Fermi-Dirac, è evidente che a  $T = 0$  K il *potenziale chimico*  $\mu$  tende a  $\epsilon_f$ .

$$n(\epsilon) \simeq \begin{cases} 1 & \epsilon_i < \mu \\ 0 & \epsilon_i > \mu \end{cases} \quad (1.22)$$

Questo differisce in modo sostanziale dal caso di gas perfetto, per cui a  $T = 0$  K tutte le particelle occuperebbero lo stesso stato a  $\epsilon = 0$ : per effetto del principio di esclusione, i fermioni occupano stati di energia successiva fino a  $\epsilon_f$ .

Siccome l'energia cinetica di una particella può essere scritta  $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$  con  $m$  massa del fermione, è possibile ricavare il valore di questa energia dal momento massimo  $p_0$ . Dalla (1.21)  $p_0 = \sqrt[3]{\frac{3h^3 n}{8\pi}}$ , si ottiene quindi la formulazione dell'**energia di Fermi**, dipendente dalla massa e dalla densità:

$$\epsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \quad (1.23)$$

In un gas di elettroni liberi gli stati all'energia di Fermi corrispondono alla *superficie di Fermi*, una superficie nello spazio degli impulsi di forma sferica che separa la regione di stati totalmente occupati da quella vuota. Dal valore dell'energia di Fermi è possibile definire un'ulteriore formulazione per la condizione di degenerazione. Prendendo in considerazione un gas di elettroni dove  $A$  e  $Z$  sono il numero di massa e il numero atomico,  $\rho$  la densità, risulta  $n = \frac{Z\rho}{Am_H}$ . La condizione di degenerazione completa può essere definita dicendo che qualunque livello energetico deve essere inferiore a  $\epsilon_f$ , il che, considerando l'energia media classica di un gas di elettroni ad una certa temperatura ( $E = \frac{3}{2}k_bT$ ), equivale a dire<sup>3</sup>:

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < \frac{\hbar^2}{3m_e k} \left( \frac{3\pi^2 Z}{m_H A} \right)^{2/3} \quad (1.24)$$

Si nota che considerando  $Z/A = 0.5$  i termini al lato destro sono tutti costanti e il valore totale del prodotto è  $1.261 \cdot 10^5 K cm^2 g^{-2/3}$ .

<sup>3</sup> $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

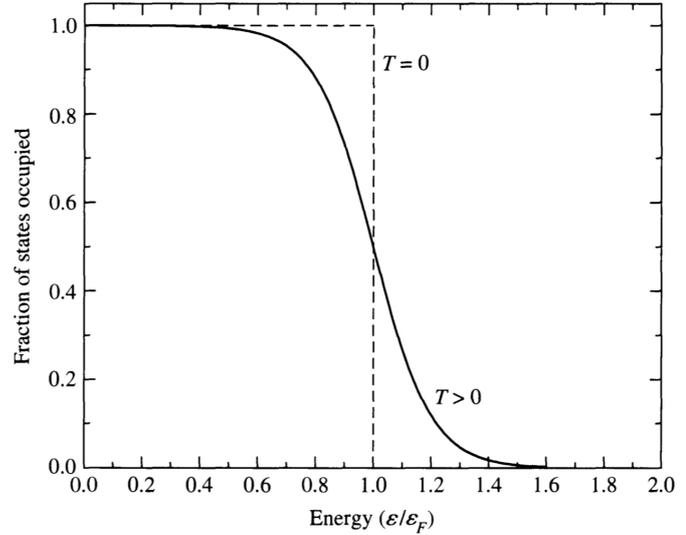


Figura 1.2: Frazione di stati di energia occupati dai fermioni. Si noti che a  $T=0$ K la frazione di stati occupati è 1 fino a  $\epsilon_f$

# Capitolo 2

## Applicazioni astrofisiche

### 2.1 Pressione degenera negli interni stellari

È stata quindi definita la condizione di materia degenera che caratterizza sistemi ad alte densità e basse temperature, in cui la distribuzione delle particelle è determinata dalla meccanica quantistica: le implicazioni di questo nuovo stato della materia sono notevoli per il loro effetto sulle *equazioni di stato* e di conseguenza sulla pressione prodotta da un gas. In particolare il caso rilevante dal punto di vista astrofisico è quello di elevata densità.

Lo studio della materia degenera è di notevole importanza nell'ambito dell'astrofisica stellare, poichè è alla base della fisica di oggetti come le **stelle di neutroni** e le **nane bianche**, e di processi come le **supernovae**. Con la scoperta della nana bianca Sirio B ad opera di A. G. Clark nel 1862, della quale fu possibile stimare la massa e successivamente il raggio, sorse infatti il problema dell'esistenza di oggetti a così alta densità da costituire un problema teorico per quanto riguarda il contrasto della gravità elevatissima che porterebbe inevitabilmente al collasso. La risposta è contenuta proprio nel concetto di degenerazione e nel fatto che in tali condizioni la materia si comporta in modo diverso da quanto precedentemente teorizzato, portando a pressioni molto più alte di quelle che produrrebbe un gas perfetto.

#### 2.1.1 Equazioni di stato

Le stelle sono masse autogravitanti i cui stati di equilibrio ed evoluzione dipendono dal continuo confronto e bilanciamento tra forze di pressione e la forza di gravità. La pressione totale negli interni stellari deve tener conto sia della pressione dovuta alla radiazione elettromagnetica che a quella dovuta al gas. Le stelle si trovano a temperature così elevate da poter considerare il gas un plasma di ioni ed elettroni, che in condizioni quantistiche seguono la statistica di Fermi-Dirac.

$$P_{tot} = P_{rad} + P_{gas} = P_{rad} + P_{ioni} + P_{elettroni} \quad (2.1)$$

Dallo studio della fisica degli interni stellari è noto che la *pressione di radiazione* si scrive:

$$P_{rad} = \frac{a}{3}T^4 = \frac{\sigma}{3c}T^4 \quad (2.2)$$

Dove  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann<sup>1</sup>,  $c$  è la velocità della luce e  $a$  la costante di densità di radiazione<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> $\sigma = 5.6 \cdot 10^{-5} \text{ erg/s cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$

<sup>2</sup> $a = 7.56 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$

In condizioni di gas perfetto, ovvero di statistica Maxwelliana, la pressione del gas data dall'equazione di stato è semplicemente:

$$P_{gas,p} = \frac{\rho kT}{\mu H} \quad (2.3)$$

Nella quale risulta evidente la dipendenza lineare dalla temperatura e dalla densità. Negli interni stellari si può verificare la degenerazione, principalmente degli elettroni, il che ha delle conseguenze sull'equazione di stato in quanto non si tratta più di un gas perfetto: è possibile ricavare le nuove dipendenze della pressione. Per calcolarla è necessario integrare:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n(p) p v dp \quad (2.4)$$

Sostituendo la  $n(p)$  data dalla distribuzione di Fermi-Dirac (1.19) e integrando fino al massimo  $p_0$ :

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_0} \frac{8\pi}{h^3} p^3 v dp \quad (2.5)$$

A questo punto è fondamentale distinguere tra *regime classico e relativistico* per la valutazione dell'impulso  $p$ .

In caso classico, riconducibile ad una condizione nella quale  $p_0 \ll m_e c$ , l'impulso può essere scritto  $p = mv$ . Si ottiene quindi:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3 m} \frac{p_0^5}{5} \quad (2.6)$$

Sostituendo il momento di Fermi dalla (1.21), si ottiene l'equazione per la pressione di gas degenerare non relativistico:

$$P = k_1 \rho^{5/3} \quad (2.7)$$

Dove  $k_1 = 10^{13} \mu_e^{-5/3}$  e  $\mu_e$  è il peso molecolare medio del gas di elettroni. Come ci si aspettava dalle considerazioni sulle distribuzioni statistiche, questa formula non dipende dalla temperatura ma solo dalla densità. Le conseguenze che ne derivano sono estremamente significative: a parità di temperatura, aumentando la densità la pressione sarà molto maggiore di quella che ci si aspetterebbe in condizioni di gas perfetto.

Se invece viene considerato il caso relativistico  $p_0 \sim m_e c$  è dimostrabile che, siccome  $p = m_e v \gamma$ , dove  $\gamma$  è il fattore di Lorentz, la pressione avrà equazione:

$$P = k_2 \rho^{4/3} \quad (2.8)$$

Dove  $k_2 = 1.2 \cdot 10^{15} \mu_e^{-4/3}$ .

Tenendo conto del fatto che gli ioni hanno massa superiore agli elettroni e quindi sono più difficilmente degeneri, la pressione negli interni stellari può essere riscritta come:

$$P_{tot} = \frac{a}{3} T^4 + \frac{\rho kT}{\mu_i H} + \begin{cases} \frac{\rho kT}{\mu_e H} & \text{gas perfetto} \\ k_1 \rho^{5/3} & \text{gas degenerare non relativistico} \\ k_2 \rho^{4/3} & \text{gas degenerare relativistico} \end{cases} \quad (2.9)$$

Confrontando i vari contributi alla pressione e le condizioni nelle quali uno prevale rispetto agli altri, è possibile costruire il cosiddetto **diagramma LogT-Logρ**, utile per studiare queste quantità macroscopiche negli interni stellari. Le rette che delimitano le varie sezioni sono ottenute equivalendo i diversi contributi per trovare le relazioni tra  $T$  e  $\rho$  corrispondenti ai cambiamenti di regime.

Le rette in figura 2.1 hanno equazione:

1.  $P_{rad} = P_{g,p} \rightarrow \text{Log}T = \frac{1}{3}\text{Log}\rho + 7.57$
2.  $P_{g,p} = P_{g,deg} \rightarrow \text{Log}T = \frac{2}{3}\text{Log}\rho + 4.88$  o  $\text{Log}T = \frac{2}{3}\text{Log}\rho + 5.11$
3.  $P_{g,deg} = P_{g,deg,rel} \rightarrow \text{Log}\rho = 6.6$
4.  $P_{g,deg,rel} = P_{g,p} \rightarrow \text{Log}T = \frac{1}{3}\text{Log}\rho + 7.07$

I diversi valori nella retta 2 dipendono dal metodo usato per ricavare la condizione di degenerazione.

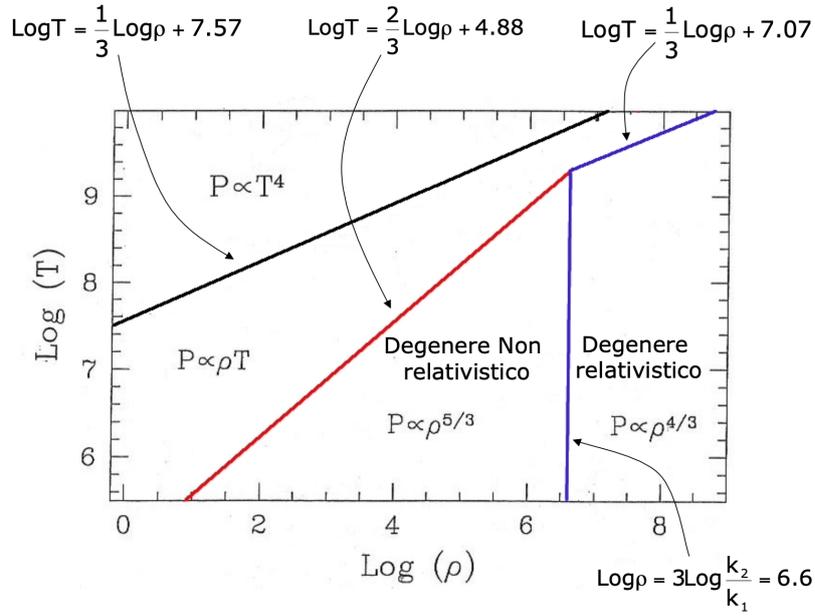


Figura 2.1: Diagramma  $\text{Log}T\text{-Log}\rho$

Diversi sistemi a seconda delle loro caratteristiche e fasi evolutive possono posizionarsi in zone diverse del grafico, il che comporta dipendenze diverse della pressione che ne possono variare le proprietà fisiche fino a creare alcuni degli oggetti più peculiari dell'Universo.

Inserendo ad esempio i parametri del Sole nella (1.24) si otterrà che esso non è costituito da materia degenerare, ma si trova in regime di gas perfetto. Nonostante questo, tutte le stelle sono soggette ad una evoluzione che porterà il Sole a trovarsi in condizioni da sviluppare un nucleo di elio degenerare durante la fase di gigante rossa.

Ripetendo il calcolo con Sirio B si ottiene un regime altamente degenerare. Le nane bianche si posizionano infatti tra il regime degenerare e quello degenerare relativistico, mentre le giganti rosse sono tipicamente tra il gas perfetto e il gas degenerare non relativistico. La materia degenerare è quindi fondamentale nello studio dell'evoluzione stellare: si tratta di un caso esemplare di fisica microscopica che influenza enormemente le caratteristiche di oggetti e fenomeni di grandi dimensioni come le stelle e le supernovae, a loro volta determinanti per la morfologia ed evoluzione delle galassie e dell'Universo stesso.

## 2.2 Evoluzione stellare

L'evoluzione stellare è caratterizzata dalle variazioni e conseguenti controbilanciamenti delle forze di gravità e quelle di pressione, fortemente influenzate dalle reazioni termonucleari e dalla composizione chimica della stella.

Le fusioni termonucleari guidano le stelle attraverso diverse fasi evolutive. Lo stadio più lungo della vita delle stelle prende il nome di *sequenza principale*: si tratta della fase di bruciamento dell'idrogeno in elio caratterizzato dalle reazioni termonucleari come la protone-protone e il ciclo CNO, le quali hanno tempi scala dell'ordine di  $10^9$  anni. La massa iniziale delle stelle ne determina fortemente l'evoluzione, influenzando in primo luogo il tempo per il bruciamento dell'idrogeno. Man mano che l'idrogeno è consumato, la composizione chimica della parte interna della stella varia significativamente: il nucleo non ha pressione sufficiente per sorreggere gli strati esterni, generando una compressione che, grazie all'aumento della temperatura interna, può innescare la combustione dell'elio.

I processi successivi a quelli di sequenza principale coinvolgono una separazione tra le reazioni termonucleari nei nuclei e quelle nei gusci sferici esterni: ad esempio può esserci combustione dell'elio nel nucleo ma nella parti esterne continuano le reazioni che hanno come protagonista l'idrogeno. In stelle simili al Sole la variazione della chimica nucleare e l'attivazione dei gusci portano ad un'espansione dell'envelope della stella e ad un raffreddamento delle temperature superficiali, facendo spostare la stella verso il *ramo delle giganti rosse*.

Le fasi finali dell'evoluzione stellare possono coinvolgere la materia degenerare (principalmente si parla di nuclei degeneri) in modo diverso a seconda della massa della stella.

- Nelle stelle con  $0.08M_{\odot} < M < 0.5M_{\odot}$  il nucleo è completamente degenerare e il valore basso della massa fa sì che non si riesca a uscire dalle condizioni degeneri per innescare la produzione di carbonio, portando alla formazione di *nane bianche di elio*.
- Nelle stelle con  $0.5M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$  avviene degenerazione del core che dopo la fase di bruciamento dell'elio arresta tutte le reazioni termonucleari. Si tratta di un caso di degenerazione completa che porta alla formazione di *nane bianche di carbonio e ossigeno*.
- Nelle stelle con  $M > 8M_{\odot}$  la massa è sufficiente per innescare la reazione di bruciamento del carbonio, non c'è degenerazione del nucleo.

Stelle più massive possono quindi arrivare, attraverso l'innescamento successivo di diverse reazioni, alla formazione di un nucleo di ferro, elemento estremamente stabile la cui fusione sarebbe endoterma: le reazioni termonucleari si esauriscono in questa fase.

Quando le fusioni termonucleari non riescono più a supportare la stella contro il collasso gravitazionale, sia nel caso dei nuclei di ferro che nel caso di stelle non abbastanza massive, si ha la morte della stella e la formazione dei *compact object*.

## 2.3 Nane Bianche

L'equilibrio idrostatico delle nane bianche è sostenuto dalla pressione dovuta alla materia degenera. Come sopracitato, questa pressione non ha dipendenze dalla temperatura e per questo motivo è possibile trattarne separatamente le proprietà meccaniche e quelle termiche.

Le nane bianche fanno parte dei cosiddetti *compact object* proprio per le elevate densità che portano allo sviluppo di pressione non termica, e sono stelle con massa confrontabile con quella del Sole ( $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} \text{g}$ ) concentrata in un raggio confrontabile con quello della Terra ( $R_t = 6.3 \cdot 10^8 \text{cm}$ ), con conseguente gravità superficiale molto elevata ( $\text{Log } g = 8.4$ ). Si tratta di oggetti risultanti dall'evoluzione di stelle con masse comprese tra  $0.08M_{\odot}$  e  $8M_{\odot}$  che, dopo aver completato la loro evoluzione in sequenza principale, subiscono dei processi di espulsione del materiale più esterno, lasciando come "fossile" della loro esistenza la nana bianca. All'interno delle nane bianche non si verificano reazioni termonucleari e non c'è contrazione poiché la struttura è sostenuta dalla pressione degenera: questo significa che la luminosità di queste particolari stelle non è dovuta a energia termonucleare o gravitazionale. Secondo i modelli attuali, le nane bianche emettono radiazione dalla perdita di energia interna degli ioni.

La formula per la pressione di un gas di elettroni degeneri in regime non relativistico può essere riscritta derivandola dalle considerazioni sui limiti della meccanica quantistica applicati agli elettroni:

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5 m_e} \left[ \frac{Z}{A} \frac{\rho}{m_H} \right]^{5/3} \quad (2.10)$$

Da questa espressione possono essere derivate diverse relazioni riguardanti le nane bianche, tra cui la **relazione massa-raggio**.

### 2.3.1 Relazione massa-raggio

Partendo dall'equazione per la pressione (2.10) e supponendo l'equilibrio con la pressione gravitazionale è possibile trovare una relazione tra la massa ( $M$ ) e il raggio ( $R$ ) di una nana bianca in regime non relativistico. Essa risulterà essere:

$$\frac{2}{3} \pi G \rho^2 R^2 = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5 m_e} \left[ \frac{Z}{A} \frac{\rho}{m_H} \right]^{5/3} \quad (2.11)$$

Dove  $G$  è la costante di gravitazione universale<sup>3</sup>. Assumendo densità costante con equazione  $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , sostituendo i valori delle costanti in sistema cgs e i valori medi delle nane bianche, la relazione massa-raggio risulta essere:

$$M^{1/3} R \sim 3 \cdot 10^{19} \quad (2.12)$$

Questo implica che le nane bianche più massive tendono ad avere raggi minori. La relazione può anche essere vista come massa-volume, per cui si può affermare che  $MV \sim \text{cost}$ : si tratta di una diretta conseguenza della pressione di degenerazione degli elettroni, per cui più essi sono confinati in un piccolo spazio più la pressione aumenta e può quindi sostenere una massa maggiore.

Questa relazione vale per  $\text{Log } \rho < 6.6$ : ponendosi invece in regime relativistico (gli elettroni hanno velocità prossime a quella della luce) si dice che questa relazione diventa una relazione di *massa limite*, settando un *upper limit* alla massa che la pressione elettronica può sostenere.

---

<sup>3</sup> $G = 6.7 \times 10^{-8} \text{g}^{-1} \text{cm}^3 \text{s}^{-2}$

### 2.3.2 Massa limite di Chandrasekhar

Ripetendo quindi il calcolo precedente ma tenendo conto degli effetti relativistici ( $P \propto \rho^{4/3}$ ) e considerando sempre densità costante, il raggio sparisce dalla relazione e rimane:

$$M_{Ch} = \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 1.459M_{\odot} \quad (2.13)$$

Una precisa derivazione risulta nel noto valore della **Massa di Chandrasekhar**:

$$M_{Ch} \simeq 1.44M_{\odot} \quad (2.14)$$

Ne consegue che una nana bianca è in equilibrio idrostatico solo se la massa totale è inferiore a quella di Chandrasekhar. Questo è supportato dai dati osservativi in quanto nessuna nana bianca è stata individuata che violi questa relazione. La massa limite di Chandrasekhar non è ristretta al caso delle nane bianche ma può valere per un qualsiasi oggetto sostenuto da pressione di gas degeneri. Essa ha un ruolo importantissimo anche nella fisica delle supernovae di tipo Ia.

Questi effetti sono validi anche tenendo conto di un sottile strato di envelope non degenerato, che cambia di poco il valore della massa limite.

### 2.3.3 Cooling delle nane bianche

A differenza delle altre stelle dove i fotoni hanno libero cammino medio maggiore delle altre particelle e quindi sono fondamentali nel trasporto di energia, nelle nane bianche il trasporto energetico è a opera della *conduzione elettronica*. Questo effetto è dovuto alla degenerazione: gli elettroni possono spostarsi a maggiori distanze prima di perdere energia nelle collisioni poichè tutti i livelli energetici inferiori sono già occupati. Questo trasporto è tendenzialmente molto efficiente e rende l'interno della nana bianca (fatta eccezione per gli strati esterni non degeneri) approssimabile a isoterma. L'envelope non degeneri trasporta il calore meno efficientemente e questo causa perdite di energia.

La luminosità della nana bianca ( $L$ ) può essere legata alla temperatura dell'interno isoterma ( $T_c$ ) imponendo la condizione di degenerazione per il passaggio dal nucleo degeneri al guscio esterno non degeneri. Ponendo uguali i membri della (1.24) e considerando condizione di gas perfetto nella parte esterna si ottiene:

$$L = \left[7.3 \cdot 10^5 \frac{M}{M_{\odot}} \frac{\mu}{Z(1+X)}\right] T_c^{7/2} = CT_c^{7/2} \quad (2.15)$$

Questa equazione può essere usata per stimare la temperatura interna di una nana bianca con data luminosità.

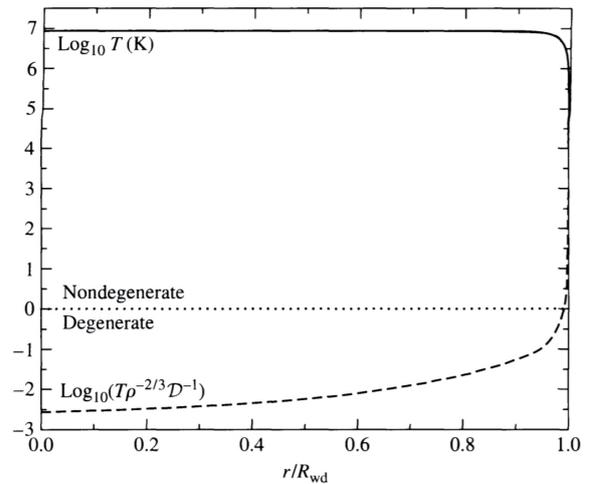


Figura 2.2: Modello di nana bianca per la temperatura e la degenerazione dei diversi strati

Sempre a causa dell'impossibilità degli elettroni di perdere energia a causa dell'occupazione degli stati inferiori, l'energia interna  $U$  delle nane bianche è data dall'energia termica degli ioni:

$$U = \frac{M}{Am_H} \frac{3}{2} k T_c \quad (2.16)$$

È possibile studiare in modo approssimato l'andamento della temperatura interna nel tempo per effetto del cooling sapendo che:

$$L = -\frac{dU}{dt} \quad (2.17)$$

Risolvendo l'equazione differenziale si ottiene:

$$T_c(t) = T_c(0) \left[ 1 + \frac{5}{2} \frac{t}{\tau_o} \right]^{-2/5} \quad (2.18)$$

Dove  $\tau_o$  è il *tempo scala di cooling* (solitamente dell'ordine di  $10^8 - 10^9$  anni) definito alla temperatura iniziale  $T_0$  come:

$$\tau_o = \frac{U}{L} = \frac{3Mk}{2m_H A} \frac{1}{C T_0^{5/2}} \quad (2.19)$$

Essendo la temperatura legata alla luminosità dalla (2.15) si arriva a scrivere la **legge di Mestel** per la variazione della luminosità:

$$L(t) = L(0) \left[ 1 + \frac{5}{2} \frac{t}{\tau_o} \right]^{-7/5} \quad (2.20)$$

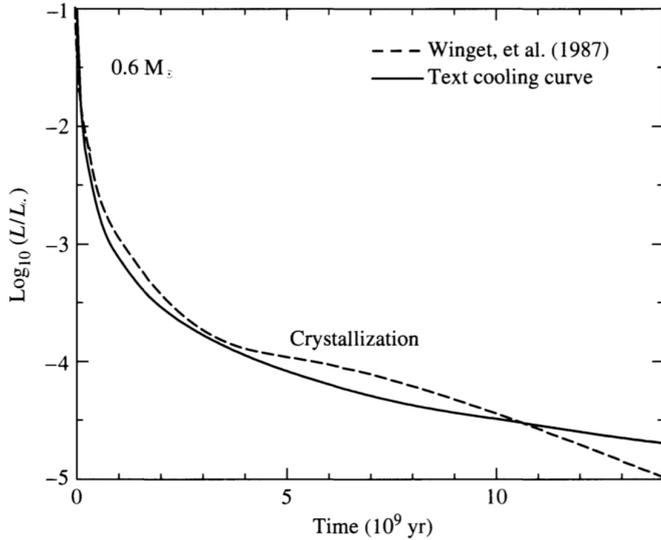


Figura 2.3: Andamento della luminosità di una nana bianca secondo la Mestel confrontata con un modello più dettagliato che tiene conto anche dell'effetto di cristallizzazione

La Mestel è una buona approssimazione del comportamento effettivo delle nane bianche: esse subiscono una diminuzione iniziale molto rapida di luminosità e poi una decrescita più lenta che le porta ad essere sostanzialmente statiche nei tempi scala dell'universo.

Come teorizzato da Hugh Van Horn, man mano che la nana bianca si raffredda le interazioni elettrostatiche tra gli ioni causano un fenomeno di *cristallizzazione*, il quale causa il rilascio di calore latente che rallenta il rate di cooling, come mostrato dalla

deviazione a  $\text{Log}(L/L_\odot) = -4$  del grafico, creando la discrepanza tra la curva Mestel e il modello effettivo. La cristallizzazione parte dalle regioni centrali della nana bianca e si espande verso l'esterno, formando una struttura a reticolo cristallino detta lattice che minimizza l'energia totale.

Il destino finale di molte stelle è quindi racchiuso in questi oggetti scuri, freddi e cristallizzati, la cui esistenza è conseguenza di una delle più straordinarie applicazioni della meccanica quantistica in campo astrofisico.

## 2.4 Stelle di Neutroni

Le stelle di neutroni fanno parte dei *compact object* formati da materia degenera, in particolare da neutroni. Le masse delle stelle di neutroni sono generalmente comprese tra  $1.2M_\odot$  e  $2.5 M_\odot$ , con massa tipica di circa  $1.4 M_\odot$ , ovvero intorno alla massa limite di Chandrasekhar, racchiuse in un raggio di 10-15km.

Le stelle di neutroni non sono altro che le fasi finali di stelle con massa tra  $11M_\odot$  e  $25 M_\odot$ , caratterizzate da una supernova detta *core collapse*, o di tipo II, proprio per il collasso gravitazionale del nucleo di ferro quando esso supera la massa di Chandrasekhar. Durante questo processo diventa energeticamente favorita la produzione di neutroni e neutrini tramite catture elettroniche da parte dei protoni.

La densità della struttura risultante è quindi elevatissima: nelle zone centrali arriva a  $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ , superiore a quelle del nucleo atomico, mentre la gravità superficiale raggiunge valori intorno a  $\text{Log } g = 12.2$ . Come nel caso delle nane bianche la forza gravitazionale è bilanciata dalla pressione degenera, questa volta principalmente dei neutroni. Si stima che la parte esterna di queste strutture sia un envelope non degenera con spessore relativamente piccolo, dell'ordine di 1 metro.

### 2.4.1 Relazione massa-raggio

Similmente alle nane bianche, anche le stelle di neutroni seguono una relazione massa-raggio esprimibile in diversi modi:

$$R \simeq \frac{(18\pi)^{2/3} \hbar^2}{10GM^{1/3}} m_H^{-8/3} \quad M = \left( \frac{15.2km}{R} \right)^3 M_\odot \quad (2.21)$$

Analogamente al caso delle nane bianche, esiste un limite superiore alla massa che può essere supportata dalla pressione data dai neutroni degeneri chiamato **limite di Oppenheimer-Volkov** e corrisponde a  $2.5-3M_\odot$ . Il superamento di questo limite causerebbe il collasso e la formazione di un Buco Nero.

### 2.4.2 Cooling delle stelle di neutroni

Già a densità dell'ordine di  $10^9 \text{ g cm}^{-3}$  e temperature tipiche di nuclei di ferro la reazione di formazione dei neutroni ( $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$ ) è favorita e questo determina la creazione di questi oggetti *neutron-rich*. In condizioni ordinarie i neutroni in più subirebbero un decadimento  $\beta$  ( $n \rightarrow p^+ + e^- + \nu_e$ ) ma nella situazione di completa degenerazione gli elettroni che verrebbero emessi non hanno stati liberi da occupare, di conseguenza questo non si verifica. Questo insieme di fattori contribuisce all'aumento della presenza di neutroni, alcuni anche esterni ai nuclei: i componenti principali della stella di neutroni sono un lattice di nuclei ricchi di neutroni, i neutroni liberi degeneri non relativistici e gli elettroni degeneri e relativistici.

Similmente alle nane bianche, le stelle di neutroni hanno un interno praticamente isotermo a causa della conduzione dovuta al materiale degenere e sono caratterizzate da un processo di cooling. Una grande perdita energetica iniziale (e quindi diminuzione di temperatura) è dovuta al processo URCA e quindi all'emissione di neutrini che sottraggono alla stella il 99 % dell'energia gravitazionale. L'evoluzione energetica della stella di neutroni dovrà allora tener conto della luminosità dei neutrini in aggiunta a quella dei fotoni, secondo l'equazione:

$$L_\gamma + L_\nu = -\frac{dE}{dt} \quad (2.22)$$

Dove l'energia termica  $E$  appartiene agli elettroni degeneri relativistici e ai neutroni degeneri non relativistici. Questo è però valido solo per un arco temporale di  $10^5$  anni, dopo i quali le perdite dovute ai neutrini sono trascurabili. Le stelle di neutroni si raffreddano su scale temporali inferiori a quelli delle nane bianche ( $10^7$  anni).

### 2.4.3 Conservazione del momento angolare

Una proprietà predetta dalla teoria e poi confermata dalle osservazioni delle stelle di neutroni è la loro rapida rotazione su se stesse. Questo è dovuto alla *conservazione del momento angolare*: nel passare dal nucleo di ferro della supergigante, caratterizzato da una minima rotazione, ad una stella di neutroni, si riduce drasticamente il raggio ed a questo consegue un aumento significativo della velocità di rotazione. In particolare, considerando le quantità tipiche delle stelle di neutroni e delle supergiganti, si ottiene una relazione approssimata tra i rispettivi periodi:

$$P_{ns} \sim 3.8 \times 10^{-6} P_{core} \quad (2.23)$$

Un'altra caratteristica delle stelle di neutroni è il loro fortissimo campo magnetico che raggiunge valori di  $10^{12} - 10^{13}$  Gauss. Queste proprietà fanno sì che le stelle di neutroni emettano un segnale pulsato lungo i poli magnetici. Questa radiazione osservata da Terra per la prima volta da Jocelyn Bell come segnali radio con periodo molto regolare, ha fatto sì che le stelle di neutroni fossero anche conosciute come **Pulsar** proprio per questa emissione di sincrotrone osservabile periodicamente.

# Bibliografia

- [1] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*, Pleum Press (1994)
- [2] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Cambridge University Press (2016)
- [3] F. Ravanini, *Istituzioni di Fisica Teorica, Dispense* (2022)
- [4] L. Pasquini, *Struttura della Materia, Dispense* (2023)
- [5] R. Raimondi , *Elementi di Meccanica Statistica, Dispense* (2008)
- [6] B. W. Carroll, D. A. Ostlie, *An introduction to modern astrophysics*, Addison Wesley (2007)
- [7] M. Salaris, S. Cassisi, *Evolution of stars and stellar populations* , John Wiley & Sons, Ltd (2005)
- [8] F.R. Ferraro, *Astrofisica Stellare, Dispense* (2022)
- [9] F.R. Ferraro, *Stellar Evolution, Dispense* (2022)
- [10] J. Taruna, *Physics of compact stars*, Dissertation, Florida State University (2008)
- [11] F. Sandin, *Exotic phases of matter in compact stars*, Thesis, Luleå University of Technology (2005)