

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**POTENZIALE EFFICACE PER LE  
GEODETICHE NELLA METRICA DI  
SCHWARZSCHILD**

**Relatore:**  
**Prof. Roberto Balbinot**

**Presentata da:**  
**Michele Marchini**

Anno Accademico 2022/2023

# SOMMARIO

Mentre era dispiegato al fronte durante la prima guerra mondiale, Karl Schwarzschild trovò una soluzione particolarmente interessante alle equazioni di campo, cuore della nuova teoria della gravitazione formulata da Einstein pochi mesi prima. Questa soluzione, che prende il nome di metrica di Schwarzschild, si deriva assumendo che l'unica sorgente del campo gravitazionale sia statica e a simmetria sferica, cioè assumendo proprietà che in prima approssimazione descrivono una stella, e presenta inoltre una lunghezza caratteristica, detta raggio di Schwarzschild. Per le stelle, questo raggio è ben inferiore a quello della sorgente, dove la soluzione non è più valida, ma si può ipotizzare esistano oggetti il cui raggio coincida con questa particolare lunghezza. Questi oggetti sono detti buchi neri e, nati da pure speculazioni matematiche come conseguenza del lavoro di Schwarzschild, si sono rivelati essere entità fisiche di grandissima importanza, che hanno dominato una considerevole parte della ricerca fisica dell'ultima metà di secolo e la cui esistenza è stata dimostrata dopo lunghi anni di ricerche attraverso il cosmo.

Nel seguente lavoro si intende analizzare la metrica di Schwarzschild e le sue proprietà attraverso lo studio delle geodetiche di particelle massive e non massive, che risultano essere soggette a un potenziale efficace, il quale si differenzia dal caso newtoniano per la presenza di un pozzo di potenziale intorno al raggio di Schwarzschild. Vengono espone inoltre due famose conseguenze di queste osservazioni, poiché rappresentano storicamente i primi due test passati con successo dalla teoria della Relatività Generale: l'"anomala" precessione del perielio di Mercurio e la deflessione della luce.

# INDICE

<b>1 Elementi di Relatività Generale.....</b>	<b>4</b>
1.1 – Il Principio di Equivalenza .....	4
1.2 – Perché la Geometria? .....	6
1.3 – Il Tensore Metrico.....	7
1.4 – La Connessione Affine .....	9
1.5 – La Curva Geodetica .....	10
1.6 – Il Sistema Normale .....	10
1.7 – La Connessione Metrica.....	11
1.8 – La Particella di Test.....	12
1.9 – Il Tensore di Curvatura .....	14
1.10 – La Deviazione Geodetica .....	15
1.11 – Le Equazioni di Einstein .....	17
<b>2 Lo Spazio-Tempo di Schwarzschild .....</b>	<b>19</b>
2.1 – Il Problema di Schwarzschild.....	19
2.2 – L'Isometria.....	20
2.3 – Le Coordinate di Schwarzschild .....	21
2.4 – La Soluzione Esterna .....	24
2.5 – Il Raggio di Schwarzschild .....	26
<b>3 Studio delle Orbite nella metrica di Schwarzschild.....</b>	<b>29</b>
3.1 – Le Geodetiche Time-like per Schwarzschild .....	29
3.2 – Il Potenziale Efficace Time-like.....	32
3.3 – Le Orbite Ellittiche Precedono .....	36

3.4 – Le Geodetiche Null-like per Schwarzschild .....	40
3.5 – Il Potenziale Efficace Null-like .....	41
3.6 – La Deflessione della Luce .....	42
<b>4 Bibliografia .....</b>	<b>47</b>

# CAPITOLO 1

## ELEMENTI DI TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE

### 1.1: Il Principio di Equivalenza

Formulata da Einstein nel 1916, la teoria della Relatività Generale gli permise di ampliare la sua teoria della Relatività dal caso particolare di soli osservatori inerziali (*Spezielle Relativitätstheorie*, 1905) a quello generale con osservatori accelerati dalla presenza di un campo gravitazionale (*Allgemeine Relativitätstheorie*). Il principio fisico che permise questo salto è il Principio di Equivalenza, che ha un diretto corrispondente nel teorema di Gauss della geometria differenziale, la quale diventa perciò il linguaggio matematico della teoria e promuove una nuova concezione geometrica della gravità.

Esistono diverse formulazioni per lo stesso Principio di Equivalenza, come sono diversi gli esempi, o meglio, gli esperimenti mentali (*Gedankenexperimente*) formulati per visualizzarne il significato fisico. Un primo Principio di Equivalenza, nella sua cosiddetta versione “debole”, era già noto ai tempi di Newton e Galileo e stabilisce che la massa inerziale  $m_i$  di un qualsiasi corpo sia identica alla sua massa gravitazionale  $m_g$ . Questi due concetti nascono separatamente: il primo tipo di massa compare nella seconda legge di Newton e descrive l'inerzia, cioè la resistenza di un oggetto ad esser accelerato; il secondo tipo di massa si può anche interpretare come “carica gravitazionale” del corpo. Secondo la leggenda, Galileo verificò questo principio facendo cadere gravi diversi dalla Torre di Pisa. In ogni caso, il Principio di Equivalenza Debole porta ad uguagliare queste due diverse grandezze fisiche:

$$m_i = m_g \quad [1.1]$$

Un'importante conseguenza di ciò è l'impossibilità di distinguere il moto accelerato da quello dovuto alla presenza di un campo gravitazionale, presa una particella che risenta solo della forza di gravità. Una particella del genere è detta particella di test, cioè una particella di massa puntiforme, che risente del campo gravitazionale intorno a lei ma non influisce su di esso e non è soggetta ad altre forze oltre che a questa, poiché di carica neutra (rispetto alle altre tre interazioni fondamentali: elettrica, debole e forte).

Immaginando quindi di costruire un laboratorio senza finestre e insonorizzato, non è possibile per lo scienziato, che effettua all'interno una misura della dinamica di queste particelle di test, distinguere tra l'accelerazione dovuta alla gravità e quella dovuta a un'accelerazione di eguale magnitudine dell'intero sistema del laboratorio. In verità però, questa affermazione è solo parzialmente corretta, poiché vera finché si considerano

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

---

piccole regioni di spazio, quindi una stanza di laboratorio molto piccola. Questo punto verrà approfondito a breve.

Tale versione del Principio di Equivalenza prende il nome di “debole” perché, per come è formulata, riguarda solo la dinamica dei corpi. All’inizio della sua ricerca di generalizzazione dei risultati trovati in Relatività Speciale per soli osservatori inerziali, cioè osservatori per definizione non accelerati e quindi in assenza di gravità, Einstein intuì che questo Principio poteva esser ampliato includendo tutte le leggi della Fisica.

Riprendendo l’esempio precedente del laboratorio “senza finestre”, se si immagina che invece sia lo stesso laboratorio a risentire del campo gravitazionale e cadere liberamente lungo le sue linee di forza, cioè muoversi nel campo senza opporre resistenza, allora le particelle di test appariranno allo scienziato libere da qualsiasi forza e quindi in moto rettilineo uniforme. Nelle coordinate in caduta libera  $\{\xi^\alpha\}$ , il moto della particella è descritto dall’equazione:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad [1.2]$$

Dove  $\tau$  è il suo tempo proprio. Questo però è vero già secondo la versione debole del Principio di Equivalenza. La (prima) intuizione di Einstein fu quella di realizzare che la generalizzazione di questo Principio, così da comprendere tutte le leggi della Fisica, comporta che lo scienziato dentro al (piccolo) laboratorio in “caduta libera” ritrovi lo spazio-tempo di Minkowski e tutte le leggi fisiche note nel formalismo tensoriale definito secondo le trasformazioni di Lorentz, cioè il modo in cui la teoria della Relatività Speciale viene recuperata in presenza di un campo gravitazionale.

Il tempo proprio dell’eq. [1.2] in teoria della Relatività Speciale è espresso nel seguente modo:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad [1.3]$$

Dove  $\eta_{\alpha\beta}$  è la nota metrica di Minkowski che ha la forma diagonale:

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1,1,1,1) \quad [1.4]$$

Pertanto, la riformulazione del Principio di Equivalenza da parte di Einstein permette anche di dare finalmente la definizione fisica di cosa sia un osservatore inerziale, che già era stato usato da Newton, Galileo e lo stesso Einstein (per la Relatività Speciale) senza mai spiegare chi fisicamente potesse rappresentarlo, ma descrivendolo genericamente come un osservatore non accelerato. L’osservatore inerziale è in realtà un osservatore in caduta libera, cioè in libero movimento all’interno di una regione di spazio permeata da un campo gravitazionale, spazio che deve essere perciò considerato come spazio-tempo.

È stato anticipato prima, però, che le dimensioni del laboratorio devono essere piccole. Il motivo di questa osservazione risiede nel fatto che il Principio di Equivalenza è valido finché si considera un campo gravitazionale uniforme. Se l’uniformità non è verificata, allora anche lo scienziato all’oscuro del mondo esterno potrebbe rilevare un’accelerazione

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

---

relativa tra le particelle di test, poiché queste cadono liberamente verso il centro della sorgente del campo, cioè la Terra, e devono necessariamente avvicinarsi mentre vanno incontro alla superficie terrestre. Si dice allora che le particelle sono soggette a forze di marea di natura gravitazionale. In natura, non si osserva un campo gravitazionale uniforme globalmente, cioè su una regione estesa di spazio(-tempo), ma solo localmente. Di conseguenza, anche la definizione data dell'osservatore inerziale vale solo localmente all'interno della teoria della Relatività Generale, differenziandosi così dalla definizione globale che avevano gli osservatori di questa speciale classe in teoria della Relatività Speciale.

Riassumendo, il Principio di Equivalenza si può allora enunciare nel seguente modo:

*“Per ogni punto dello spazio-tempo si può sempre scegliere un sistema coordinato locale, il sistema in caduta libera, per il quale si ritrovano le leggi della Fisica scritte nel formalismo quadri-vettoriale della Relatività Speciale”.*

## 1.2: Perché la Geometria?

Einstein intuì la potenza del Principio di Equivalenza molto presto nel suo decennale lavoro necessario per completare il passaggio dalla teoria della Relatività Speciale a quella Generale. La vera difficoltà fu tradurre questo principio in termini matematici, come poi riuscì a fare dopo la sua vera intuizione geniale, ovvero di pensare alla gravitazione in termini geometrici. La giustificazione di questo salto è già stata anticipata nel precedente paragrafo citando il collegamento che si può stabilire tra il Principio di Equivalenza, di natura fisica, e il teorema di Gauss, di natura geometrica.

Gauss, Bólay e Lobachevski furono i primi che contemporaneamente iniziarono a esplorare la possibilità di una geometria non-euclidea come oggetto di interesse puramente matematico. A Gauss si devono i primi risultati riguardanti uno spazio infinito bidimensionale curvo, descritto attraverso le sue caratteristiche intrinseche come la curvatura gaussiana, piuttosto che considerarlo immerso in spazi di dimensione maggiore. Tra questi, il teorema di Gauss-Bonnet tratta la curvatura di una superficie e crea un collegamento tra proprietà geometriche locali e proprietà topologiche globali. Gauss trovò infatti una classe di spazi che localmente potevano essere descritti da coordinate euclidee, ma solo localmente poiché falliscono nel descrivere lo spazio curvo globalmente.

I lavori di Riemann generalizzarono questi concetti a spazi di dimensione arbitraria che, insieme ai successivi studi degli italiani Levi-Civita e Ricci Curbastro, portarono alla formalizzazione di queste idee nell'attuale branca della geometria differenziale. Questa tratta di spazi topologici che localmente sono descrivibili da coordinate cartesiane, cioè appaiono localmente piatti, e prendono il nome di varietà. Su queste varietà, vengono definite quantità tensoriali in modo indipendente dalla scelta del sistema coordinato. Finché le varietà hanno una natura fisica, si assume che queste siano sempre

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

---

differenziabili, cioè che le componenti degli oggetti matematici definite in un generico sistema coordinato siano funzioni differenziabili nel loro dominio sulla varietà.

Da una parte, quella fisica, si ha allora il Principio di Equivalenza che stabilisce come per ogni punto dello spazio-tempo si possa scegliere un sistema coordinato locale in caduta libera che ritrovi le leggi della Fisica come note in Relatività Speciale in assenza di gravità, quindi definendo le grandezze fisiche attraverso oggetti matematici (tensori) che si trasformano in un modo particolare sotto le trasformazioni di Lorentz; dall'altra parte, quella geometrica, si ha il teorema di Gauss e la trattazione delle varietà come spazi curvi localmente piatti, su cui sono definiti oggetti in maniera indipendente dalla scelta delle coordinate, che possono essere cartesiane solo localmente. Il legame fra questi due enunciati diventa ancor più evidente durante la trattazione del tensore metrico nel paragrafo (1.3).

Il risultato straordinario della teoria della Relatività Generale è quello allora di cogliere questo parallelismo tra due campi così differenti e intuire che la gravità si può trattare solamente in termini geometrici come curvatura dello spazio-tempo, il quale è descrivibile da una varietà differenziabile. Allora le grandezze fisicamente rilevanti sono oggetti tensoriali nel senso della geometria differenziale, cioè indipendenti dal sistema coordinato, che in Relatività Generale identifica un particolare osservatore. Questo perciò garantisce che le leggi della Fisica siano uguali (in forma) per tutti gli osservatori, inerziali e non. Per l'osservatore locale in caduta libera, che è un osservatore inerziale, le grandezze tensoriali si riducono al caso particolare di tensori secondo le trasformazioni di Lorentz, poiché per lui la varietà spazio-temporale appare piatta, quindi i suoi esperimenti di fisica non risentono del campo gravitazionale e ritrova la teoria della Relatività Speciale (eq. [1.2]-[1.3]).

Come possa concretamente esser descritta la curvatura dello spazio-tempo, quale sia la sorgente del campo che la genera e come la curvatura influisca sul moto dei corpi, in particolare dei più semplici che si possano immaginare, cioè le particelle di test, sono argomenti affrontati nel dettaglio nei paragrafi (1.8 – 1.11). Dato che il linguaggio della teoria della Relatività Generale è la geometria differenziale, le prossime sezioni (1.3 – 1.7) sono dedicate a introdurre e discutere i principali oggetti matematici necessari per la discussione della teoria fisica.

## 1.3: Il Tensore Metrico

Uno dei concetti cardine della geometria differenziale e della Relatività Generale è il tensore metrico. Come discusso, nell'eq. [1.3] compare la metrica di Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$ , nota dalla teoria della Relatività Speciale. Questa equazione però è valida solo per un osservatore inerziale locale, per cui la varietà spazio-temporale appare piatta. Allora la metrica della varietà globalmente curva deve ridursi a quella di Minkowski localmente (o globalmente se non sono presenti campi gravitazionali), ma deve essere definita in maniera indipendente dalle coordinate per essere un valido oggetto della geometria.

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

---

Per questo, il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  è definito come un particolare tipo di tensore (0,2) che permette di realizzare il prodotto scalare sulla varietà, quindi di definire i concetti geometrici di lunghezza di una curva e di angolo fra vettori. L'eq. [1.2] in un sistema di coordinate generico  $\{x^\mu\}$  assume la forma:

$$d\tau^2 = dx \cdot dx = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad [1.5]$$

Con:

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad [1.6]$$

Dove  $\xi^\alpha$  sono le coordinate in caduta libera precedentemente definite in (1.1). L'espressione [1.5] è così indipendente dalle coordinate ed è inoltre la forma in cui viene solitamente presentata la metrica in esame.

Quando esiste un campo tensoriale metrico, ovvero un'applicazione che associa ad ogni punto della varietà il tensore metrico, la varietà differenziabile è detta metrica e questa assume una certa "rigidità", dovuta al fatto che viene implicitamente definita la sua forma. Questo dettaglio verrà approfondito nella sezione (1.9) introducendo il tensore di curvatura.

La classe di varietà metriche si distingue ancora una volta in Riemanniana o pseudo-Riemanniana a seconda che la metrica sia definita positiva (negativa) o di segno misto. Questa caratteristica è messa in evidenza costruendo la matrice di trasformazione  $\Lambda$  delle sue componenti in un punto  $P$  dello spazio in questione. Il tensore metrico, che perciò si trasforma nel seguente modo:

$$g' = \Lambda^T g \Lambda \quad [1.7]$$

Assume la forma canonica:

$$g_{\mu\nu} = \pm \delta_{\mu\nu} \quad [1.8]$$

La metrica è definita positiva (negativa) se gli elementi sulla diagonale sono tutti +1 (-1).

La base vettoriale implicitamente definita da questa scelta di componenti per il tensore metrico è detta base ortonormale. Nel caso di una varietà Riemanniana, questa base appartiene a un sistema coordinato definito su una regione estesa della varietà, ma su uno spazio generico non è una base coordinata, quindi è ortonormale solo localmente intorno al punto. In altre parole, si ritrova per una varietà generica quanto Gauss aveva affermato per uno spazio bidimensionale curvo, ovvero che le coordinate euclidee non valgono più globalmente. Espandendo in serie di Taylor, il tensore metrico intorno a un generico punto  $P$  della varietà diventa:

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x_P) + \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^k} \right|_{x=x_P} \delta x^k + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^k \partial x^l} \right|_{x=x_P} \delta x^k \delta x^l + \dots \quad [1.9]$$

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

Per via delle proprietà del tensore metrico di essere simmetrico e non degenerare, è sempre possibile trovare una trasformazione  $\Lambda$  che metta il tensore nella forma [1.8] nel punto  $P$ , per cui l'eq. [1.9] si riscrive come:

$$g_{\mu\nu}(x) = \pm\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^k \partial x^l} \Big|_{x=x_P} \delta x^k \delta x^l + \dots \quad [1.10]$$

In quanto si trova che, solo in  $P$ :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^k} \Big|_{x=x_P} = 0 \quad [1.11]$$

Nel caso dello spazio-tempo, la metrica in forma canonica è come visto quella di Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$  e l'equazione [1.10] diventa:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^k \partial x^l} \Big|_{x=x_P} \delta x^k \delta x^l + \dots \quad [1.12]$$

Di conseguenza, in un qualsiasi punto (cioè “evento” nell’accezione della Relatività Speciale) della varietà spazio-temporale si può scegliere un sistema di coordinate per cui localmente la metrica appaia piatta fino al secondo ordine, ritrovando la metrica di Minkowski e il formalismo di Lorentz propri del punto di vista degli osservatori inerziali locali in caduta libera. Questa osservazione si può riassumere in una frase che rende esplicito il legame tra fisica e geometria, già discusso in (1.2):

*“Lo spazio-tempo è una varietà  $M$  sulla quale è definita una metrica  $g_{\mu\nu}$  con segnatura lorentziana”.*

## 1.4: La Connessione Affine

Nel formalismo covariante della geometria differenziale, l’operazione di derivazione è svolta dalla derivata covariante  $\nabla_\mu$ . Questa si definisce attraverso la nozione di trasporto parallelo, il quale è specificato dalla connessione affine. Poiché per ogni punto della varietà è possibile definire una base vettoriale  $\vec{e}_i$  dello spazio tangente alla varietà in quel punto, la connessione affine descrive la derivata covariante dei vettori della base rispetto alla base stessa:

$$\nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j = \Gamma_{ji}^k \vec{e}_k \quad [1.13]$$

Dato che il risultato è ancora un vettore, questo è espresso come combinazione lineare dei vettori della base attraverso l’indice  $k$ . I  $\Gamma_{ji}^k$  sono detti simboli di Christoffel, non rappresentano un tensore e la definizione di queste componenti definisce una particolare connessione affine, quindi un determinato modo di trasportare parallelamente i vettori lungo una curva. All’interno della teoria della Relatività Generale, da considerazioni fisiche si richiedono certe proprietà al trasporto parallelo, che definiscono un tipo di connessione

e di conseguenza una particolare espressione per i simboli di Christoffel. Questo argomento viene affrontato nella sezione (1.7), introducendo la connessione metrica.

## 1.5: La Curva Geodetica

Una curva definita sulla varietà è una geodetica se il vettore tangente alla curva è trasportato parallelo a sé lungo la curva stessa. Pertanto, una geodetica è una curva che “non cambia direzione”. Formalmente, la derivata covariante del vettore  $\vec{V}$  tangente rispetto a se stesso è nulla:

$$\nabla_{\vec{V}}\vec{V} = 0 \quad [1.14]$$

Il parametro  $\lambda$  della curva è detto parametro affine, definito a meno di una riparametrizzazione lineare:

$$\lambda = a\tau + b \quad [1.15]$$

In un sistema coordinato locale generico  $\{x^\alpha\}$ , la definizione [1.14] si riscrive nell'equazione covariante:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad [1.16]$$

Scegliendo come una delle coordinate il parametro affine stesso, per esempio  $\lambda = x^1$ , la definizione [1.14] si riscrive come:

$$\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1 = 0 \quad [1.17]$$

Prendendo i restanti vettori della base in modo che vengano trasportati parallelamente lungo la curva di vettore tangente  $\vec{e}_1$ , si trova che lungo la geodetica:

$$\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_j = 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad [1.18]$$

Pertanto:

$$\Gamma_{1j}^\alpha = 0 \quad [1.19]$$

La curva geodetica è la generalizzazione in geometria differenziale, quindi su uno spazio generico, del concetto di retta in geometria euclidea, ed è la traiettoria che seguono i corpi soggetti al solo campo gravitazionale, come approfondito in (1.8).

## 1.6: Il Sistema Normale

Il sistema normale, detto anche sistema gaussiano, è un particolare sistema di riferimento il quale, definito in  $P$  punto della varietà, ha come coordinata  $i$ -esima  $x^i = \lambda_i$ ,

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

---

con  $\lambda_i$  parametro affine della  $i$ -esima geodetica passante per  $P$ . Data una generica base  $\{\vec{e}_i^0\}$  dello spazio tangente  $T_P$ , si possono infatti impostare  $n$  problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_i = 0 \\ \vec{e}_i(P) = 0 \end{cases} \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad [1.20]$$

Per cui è noto dai teoremi della matematica che per ogni problema di Cauchy, almeno localmente, esiste ed è unica la soluzione, in questo caso la geodetica passante per  $P$ .

Dato che lungo ogni geodetica vale la relazione [1.19], nel punto  $P$ , dove si incrociano le  $n$  geodetiche, devono valere contemporaneamente tutte le  $n$  relazioni, perciò:

$$\Gamma_{ij}^\alpha|_P = 0 \quad \text{con } i, j = 1, \dots, n \quad [1.21]$$

Ovvero:

$$\nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j|_P = 0 \quad \text{con } i, j = 1, \dots, n \quad [1.22]$$

Di conseguenza, in  $P$  la derivata covariante  $\nabla_{\vec{e}_i}$  si riduce alla derivata parziale nota in geometria euclidea  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ . Questo è verificato in  $P$ , punto rispetto al quale definiamo il sistema normale, preso invece un punto  $Q \neq P$ ,  $\Gamma_{ij}^\alpha \neq 0$ . In altre parole, vale:

$$\left. \frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^k} \right|_P \neq 0 \quad [1.23]$$

## 1.7: La Connessione Metrica

Come anticipato in (1.4), la connessione affine utilizzata nella teoria della Relatività Generale è determinata da esigenze fisiche e prende il nome di connessione metrica. Infatti, dati due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  identici alle rispettive versioni trasportate parallelamente lungo la curva di vettore tangente  $\vec{V}$ :

$$\nabla_{\vec{V}} \vec{A} = \nabla_{\vec{V}} \vec{B} = 0 \quad [1.24]$$

Si richiede per un varietà metrica che lungo il trasporto parallelo si conservi anche il prodotto scalare, cioè il modulo e l'angolo fra i vettori. Formalmente:

$$\nabla_{\vec{V}} g(\vec{A}, \vec{B}) = 0 \quad [1.25]$$

Quindi il trasporto parallelo deve essere tale che:

$$\nabla_{\vec{V}} g = 0 \quad \forall \vec{V} \quad \text{espresso anche come: } \nabla g = 0 \quad [1.26]$$

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

In un generico sistema di riferimento locale, la definizione [1.26] di connessione metrica si può riformulare con l'espressione che specifica i simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{ji}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha l} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \quad [1.27]$$

Scegliendo la trasformazione di coordinate che mette  $g$  in forma canonica (eq. [1.8]) in un generico punto  $P$ , per via dell'eq. [1.11] risulta che:

$$\Gamma_{ij}^{\alpha} \Big|_P = 0 \quad [1.28]$$

Di conseguenza, finché il tipo di connessione scelta è quella metrica, come avviene in Relatività Generale, porre il tensore metrico in forma canonica o definire un sistema normale è equivalente nel punto stesso. Avendo già osservato che nel caso dello spazio-tempo la forma canonica è la metrica di Minkowski, che è la metrica vista da un sistema inerziale locale, questo da un punto di vista matematico deve esser descritto come un sistema normale.

## 1.8: La Particella di Test

Il concetto di particella di test, introdotto già in (1.1), è estremamente utile vista la semplicità dell'oggetto per studiare la dinamica dei corpi in presenza di un campo gravitazionale. Questa particella ideale è stata definita come una particella massiva neutra soggetta solo alla forza di gravità, per cui, dal Principio di Equivalenza, il sistema di riferimento locale che in caduta libera incrocia in un intorno infinitesimo del punto  $P$  della varietà la traiettoria ("world line") della particella, la vede muoversi localmente lunga una retta poiché non soggetta a forze esterne (eq. [1.2]).

Come il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ , elemento della geometria differenziale, è stato definito a partire dalla metrica di Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  attraverso un cambio di coordinate, lo stesso si prova a fare per l'eq. [1.2] così da trovarne l'espressione valida per ogni osservatore fisico.

Allora, in un generico sistema di riferimento locale  $\{x^{\mu}\}$ , l'equazione della retta diventa:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\xi^{\beta}}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\xi^{\beta}}{d\tau} \right) \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad [1.29]$$

Dato che:

$$\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}} = \delta_{\mu}^{\alpha} \quad [1.30]$$

E, sostituendo la definizione [1.6] di tensore metrico nell'eq. [1.27], è verificato che:

$$\frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \quad [1.31]$$

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

Si ottiene infine che, nel generico sistema coordinato, la traiettoria della particella di test è:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0 \quad [1.32]$$

Con  $u^\mu$  che è la quadri-velocità della particella, vettore tangente alla sua traiettoria. Questa però è l'equazione delle geodetiche [1.16] ed essendo un'equazione covariante è valida in ogni sistema di riferimento. Perciò, le particelle di test si muovono sempre lungo geodetiche, che localmente si presentano come curve rette agli osservatori inerziali, che si muovono a loro volta lungo geodetiche, in quanto si possono studiare come particelle di test a riposo con se stesse.

Una visione alternativa dei risultati [1.27]-[1.32] e quindi una giustificazione alternativa della connessione metrica (nonostante l'eq. [1.26] sia ben posta per la sua indipendenza dal sistema coordinato) si può proporre nel contesto di uno spazio-tempo la cui struttura è definita dalle geodetiche ma privo di metrica, che viene introdotta in un secondo tempo. Richiedere infatti che le traiettorie (“*world lines*”) delle particelle di test siano compatibili con il fatto che un sistema lorentziano locale le osservi percorrere delle curve dritte, cioè rette, impone che sia verificato  $\Gamma_{ij}^\alpha|_p = 0$  in un qualsiasi sistema di riferimento lorentziano. Questo è avvalorato dalla seguente giustificazione fisica: una particella di test si muove lungo una geodetica, la quale è descritta dall'equazione covariante [1.32] valida in ogni sistema di riferimento, ma allo stesso tempo essendo di test è soggetta al solo campo gravitazionale, quindi per un osservatore in caduta libera questa si deve muovere lungo una retta (eq. [1.2]), in osservanza al Principio di Equivalenza. Perciò localmente una geodetica deve essere necessariamente una retta.

Dato che nell'eq. [1.32] compare il quadri-vettore velocità, tangente alla traiettoria fisica, questa ha tra gli infiniti possibili parametri affini (legati da trasformazioni lineari) il tempo proprio, nel caso di una particella di test massiva. La luce, d'altro canto, rappresenta un caso particolare in quanto le sue particelle (i fotoni) non sono massive e quindi, pur muovendosi lungo geodetiche di tipo luce nello spazio-tempo, non si può trovare un significato fisico equivalente per nessuno dei suoi parametri affini.

Si conclude osservando che, all'interno della teoria della Relatività Speciale, la curva retta che congiunge due eventi (punti dello spazio-tempo di Minkowski) è la curva di lunghezza massima, cioè che massimizza l'intervallo temporale o spaziale (nel caso sia *time-like* o *space-like*):

$$s = \int_A^B ds = \int_A^B -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad [1.33]$$

Dato che le particelle di test percorrono geodetiche nello spazio-tempo e queste localmente si comportano come rette, ogni porzione infinitesima di una curva geodetica massimizza la distanza spazio-temporale tra due eventi, secondo un osservatore inerziale locale che adotta coordinate lorentziane. Su una regione più estesa però, la geodetica, essendo il risultato della composizione di porzioni infinitesime con questa proprietà, è ancora una curva di lunghezza estemale sullo spazio curvo, però non ha

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

---

necessariamente lunghezza massima, piuttosto ha generalmente lunghezza minima. In particolare, si dimostra che una qualsiasi curva, la quale estremizzi:

$$s = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad \text{per cui } \delta s = 0 \quad [1.34]$$

Scritto nelle generiche coordinate curvilinee, risolve l'equazione delle geodetiche. Vale a dire, la traiettoria che estremizza la lunghezza dipende solo dai punti sulla varietà spaziotemporale ed è indipendente dalla parametrizzazione. Con una scelta però "adeguata" del parametro, quella stessa curva si può scrivere nella forma [1.16], cioè come geodetica, e il parametro è il parametro affine, unico a meno di trasformazioni lineari (eq. [1.15]). Di nuovo, questo si può vedere come una conseguenza della connessione fra geodetiche e curve rette locali.

## 1.9: Il Tensore di Curvatura

La presenza di un campo gravitazionale non si osserva però né dallo studio del tensore metrico, per cui possiamo sempre scegliere una base ortonormale locale che lo metta in forma canonica (eq. [1.8]), né dai simboli di Christoffel, che in quella base risultano addirittura nulli (eq. [1.21]). Questa informazione è invece contenuta nel tensore di curvatura  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ , detto anche tensore di Riemann, che definisce il concetto di curvatura intrinseca di una varietà. Come accennato in (1.2), già Gauss aveva iniziato a pensare alla curvatura intrinseca dello spazio che, a differenza di quella estrinseca, è una caratteristica propria della varietà in esame e non richiede che questa venga immersa in una varietà di dimensione  $n + 1$  per esser studiata. Un classico esempio di questa differenza è il notare che foglio piano, cilindro e toro hanno tutti la stessa curvatura intrinseca nulla, mentre la loro topologia appare piuttosto differente quando visualizzati nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ .

La curvatura intrinseca viene definita osservando il risultato del trasporto parallelo di un generico vettore lungo un circuito infinitesimo chiuso. Dato un vettore  $\vec{A}$  definito nel punto  $P$  della varietà, questo viene trasportato parallelamente di una quantità infinitesima  $\varepsilon$  prima lungo la curva tangente al campo vettoriale  $\vec{V}$ , poi lungo quella tangente a  $\vec{W}$ , ottenendo  $\vec{A}''_{\vec{V}\vec{W}}$ . Il procedimento si ripete al contrario trovando  $\vec{A}''_{\vec{W}\vec{V}}$ . La differenza tra le due versioni trasportate risulta esser proporzionale al tensore di Riemann, opportunamente contratto nel modo seguente:

$$\vec{A}''_{\vec{V}\vec{W}} - \vec{A}''_{\vec{W}\vec{V}} = \varepsilon^2 R(\vec{V}, \vec{W})\vec{A} + O(\varepsilon^3) \quad [1.35]$$

Con:

$$R(\vec{V}, \vec{W})\vec{A} \equiv [R(\vec{V}, \vec{W})^i_{\ j} A^j] \vec{e}_i = [\nabla_{\vec{V}}, \nabla_{\vec{W}}]\vec{A} - \nabla_{[\vec{V}, \vec{W}]}\vec{A} \quad [1.36]$$

$$R^i_{\ jk} \tilde{e}^j \otimes \tilde{e}^k = R(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k)^i_{\ l} \tilde{e}^l \otimes \tilde{e}^i \quad [1.37]$$

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

---

Dall'eq. [1.36], scegliendo  $\vec{V} = \vec{e}_i$ ,  $\vec{W} = \vec{e}_j$  e  $\vec{A} = \vec{e}_k$  si trova per le componenti del tensore di curvatura in alternativa l'espressione:

$$R^i{}_{jkl} = \Gamma^i{}_{jl,k} - \Gamma^i{}_{jk,l} + \Gamma^m{}_{jl}\Gamma^i{}_{mk} - \Gamma^m{}_{jk}\Gamma^i{}_{ml} \quad [1.38]$$

In un sistema normale, i simboli di Christoffel assumono l'espressione nota dalla connessione metrica (eq. [1.27]), pertanto:

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha}R^\alpha{}_{jkl} = \frac{1}{2}(g_{il,jk} - g_{ik,jl} + g_{jk,il} - g_{jl,ik}) \quad [1.39]$$

La particolarità del tensore di Riemann appena definito è di essere l'unico tensore che si può costruire usando come componenti il solo tensore metrico e di essere lineare nelle sue derivate seconde, proprietà evidente usando la definizione [1.39]. L'unicità di  $R_{ijkl}$  e delle sue contrazioni, definite qui di seguito, è necessaria per determinare le equazioni di campo di Einstein. È utile notare inoltre che, per le proprietà di simmetria e antisimmetria di cui gode, il numero di componenti del tensore di curvatura si riduce da 256 (= 4 \* 4 \* 4 \* 4) a solo 20.

Tornando all'esempio illustrativo [1.35], se lo spazio è piatto, come nel caso euclideo, esiste una definizione globale di parallelismo in quanto, indipendentemente dalla curva lungo la quale è trasportato, un vettore coincide sempre con la sua versione trasportata parallelamente in quel punto. Di conseguenza:

$$R^i{}_{ljk} = 0 \Leftrightarrow \text{varietà piatta} \quad [1.40]$$

Per un generico spazio curvo, invece,  $R^i{}_{ljk} \neq 0$  e i due vettori non coincidono. Si può per l'appunto costruire un discorso organico che comprenda tensore di curvatura, metrica, geodetiche e gravitazione introducendo il concetto di deviazione geodetica. Prima di fare questo però, si definiscono una serie di particolari contrazioni del tensore di Riemann, che risultano estremamente importanti per la teoria della Relatività Generale:

- $R_{\mu\nu} = R^\beta{}_{\mu\beta\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}$  *Tensore di Ricci* [1.41]

- $R = R^\nu{}_\nu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  *Scalare di Curvatura* [1.42]

- $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  *Tensore di Einstein* [1.43]

In particolare il tensore di Einstein soddisfa l'identità di Bianchi:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad [1.44]$$

## 1.10: La Deviazione Geodetica

Un osservatore fisico indaga la struttura dello spazio-tempo studiando le geodetiche, ovvero le traiettorie delle particelle soggette al solo campo gravitazionale. Infatti tutti i corpi sono attratti allo stesso modo dal campo come espresso dal Principio di

# 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

---

Equivalenza Debole, quindi le traiettorie percorse sono le stesse e formano un set di curve (geodetiche) caratteristiche dello spazio-tempo. Poiché la gravità è la manifestazione della sua curvatura, l'effetto netto che un osservatore misura è la deviazione geodetica, come accelerazione relativa fra particelle di test, che descrive quanto due geodetiche inizialmente parallele deviano su una regione estesa curva. Difatti, se lo spazio è intrinsecamente piatto, esiste un sistema coordinato per il quale le geodetiche sono rette globalmente e pertanto due rette parallele in un intorno del punto  $P$  lo rimangono su tutta la varietà (in questo caso la base ortonormale appartiene ad un sistema coordinato, per cui la metrica è in tutti i punti in forma canonica). Fisicamente, l'accelerazione fra le particelle di test che percorrono le due geodetiche è sempre nulla, perciò è nulla la deviazione geodetica.

Questo non è più vero nel caso di uno spazio-tempo curvo. Presa una famiglia di geodetiche di parametri  $\lambda, n$  ( $\lambda$  che parametrizza i punti lungo una geodetica e  $n$  identifica la geodetica della famiglia in esame), si definiscono il vettore tangente  $u = \frac{\partial}{\partial \lambda}$  e il vettore di separazione  $n = \frac{\partial}{\partial n}$ . Considerando due particelle di test sulle curve  $n = 0, 1$ , la velocità relativa è  $\nabla_u n$ , che dipende dalle condizioni iniziali arbitrarie, mentre l'accelerazione relativa  $\nabla_u \nabla_u n$  rispetto all'osservatore sulla geodetica  $n = 0$  non è arbitraria e soddisfa l'equazione:

$$\nabla_u \nabla_u n + \text{Riemann}(\dots, u, n, u) = 0 \quad [1.45]$$

In componenti:

$$\frac{d^2 n^\alpha}{d\lambda^2} + R^\alpha_{\beta\gamma\delta} u^\beta n^\gamma u^\delta = 0 \quad [1.46]$$

Si dimostra così che l'origine dell'accelerazione relativa tra le particelle di test, anticipata in sezione (1.1) per giustificare la località degli osservatori inerziali, è dovuta alle forze gravitazionali di marea ("forze mareali"), che sono a loro volta la manifestazione della curvatura dello spazio. La dimostrazione dell'eq. [1.45] segue inizialmente un procedimento analogo al caso newtoniano, trovando l'equazione:

$$\nabla_u \nabla_u n + [\nabla_n, \nabla_u]u = 0 \quad [1.47]$$

In cui il termine  $[\nabla_n, \nabla_u]u$  descrive la presenza di forze mareali. Questo risultato però è viziato, poiché l'accelerazione relativa dipende solo dai valori di  $n$  e  $u$  nel punto in esame, mentre il secondo termine dipende da come variano da punto a punto, vista la presenza di derivate parziali. Questa equazione deve essere quindi corretta, sostituendo a  $[\nabla_n, \nabla_u]u$  il termine:

$$\text{Riemann}(\dots, u, n, u) \equiv \mathcal{R}(u, n)u = ([\nabla_n, \nabla_u] - \nabla_{[n, u]})u \quad [1.48]$$

Ottenendo l'eq. [1.45] che esprime la deviazione geodetica. Naturalmente, si ritrova la definizione del tensore di curvatura [1.36], perciò lo studio delle forze mareali fornisce una strada alternativa per derivare l'espressione della stessa quantità tensoriale.

Il termine in più,  $\nabla_{[n,u]}$ , è invisibile alla deviazione geodetica e alle forze di marea poiché  $[n, u] = 0$  per costruzione, ma garantisce che l'equazione non dipenda da derivate e sia un'equazione di vettori definiti in un punto.

## 1.11: Le Equazioni Di Einstein

Le equazioni di campo, formulate da Einstein nel 1916, rappresentano il cuore della sua teoria geometrica della gravità:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \quad [1.49]$$

Queste equazioni vengono solitamente riassunte nella celebre frase: “la materia dice allo spazio-tempo come curvarsi, lo spazio-tempo curvo dice alla materia come muoversi”.

La parte sinistra di queste equazioni descrive la geometria dello spazio attraverso il tensore di Einstein, l'unico tensore lineare nelle derivate seconde del tensore metrico come osservato nella sezione (1.9), ed è composto dal tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$  (eq. [1.41]), dal tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  e dallo scalare di curvatura  $R$  (eq. [1.42]). La parte destra invece descrive il contenuto di “materia” (nel senso della Relatività Speciale, comprendendo sia la componente non relativistica che quella relativistica) attraverso il tensore di energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ . La costante  $8\pi G_N$  presente permette invece di ritrovare la legge di gravitazione di Newton nel limite di campo debole ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ ) e velocità non relativistiche ( $v \ll c$ ). In particolare  $G_N$  è la costante di gravitazione universale introdotta già a suo tempo da Newton.

Le equazioni di campo [1.49] sono un sistema di 10 equazioni non lineari, dato che sia il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$  che quello di energia impulso  $T_{\mu\nu}$  sono simmetrici e quindi aventi solo 10 componenti indipendenti, a partire dalle 20 iniziali. In realtà queste 10 equazioni non sono completamente indipendenti fra di loro, per via dell'identità di Bianchi [1.44] che entrambi i tensori soddisfano. Quest'identità ha una natura matematica per  $G_{\mu\nu}$  mentre la si può interpretare fisicamente per  $T_{\mu\nu}$  come un'equazione di continuità, conseguenza della conservazione dell'energia e dell'impulso. Questa legge di conservazione in teoria della Relatività Generale viene riscritta in maniera indipendente dal sistema di riferimento scelto:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad [1.50]$$

Pertanto, il numero di componenti indipendenti si riduce a  $10 - 4 = 6$ .

Le equazioni di campo si risolvono trovando le componenti del tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ , nota la sorgente  $T^{\mu\nu}$ . La metrica di Minkowski  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  è un esempio di soluzione quando la sorgente del campo gravitazionale è nulla globalmente, perché allora la varietà spazio-temporale è proprio lo spazio-tempo piatto di Minkowski. Invece, il fatto che  $T^{\mu\nu}$  sia nullo

## 1 – Elementi di Teoria della Relatività Generale

---

su una regione anche estesa dello spazio, non implica necessariamente che  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , come è approfondito nel capitolo 2. Risulta ancora una volta chiaro che è la presenza di un campo gravitazionale non uniforme che ha come effetto la rottura della globalità del sistema di riferimento inerziale e della connessa base ortonormale, che possono essere ritrovati solo localmente poiché solo localmente il campo è uniforme e allora la caduta libera porta ad un “riscaldamento” a zero del campo stesso.

La non linearità delle equazioni rende inoltre la risoluzione delle stesse molto complessa, perché in presenza di diverse sorgenti gli effetti di deformazione dello spazio non si sommano linearmente, come invece avviene per esempio per le onde del campo in elettromagnetismo. Per questo motivo è frequente l'utilizzo di semplici modelli ideali per affrontare problemi altrimenti irrisolvibili, come il moto dei pianeti intorno al Sole approssimato a quello di una particella di test. Un altro esempio è il caso di una singola sorgente del campo gravitazionale perfettamente sferica, la cui soluzione delle eq. [1.49] è anch'essa studiata nei capitoli successivi.

È da sottolineare però che le equazioni di Einstein, a differenza di quelle di Maxwell per il campo elettromagnetico, contengono già l'equazione delle geodetiche, mentre è necessario aggiungere la Forza di Lorentz per completare il quadro dell'elettromagnetismo classico. Inoltre, se le equazioni di Maxwell possono esser affrontate partendo dalla definizione delle sorgenti e studiando poi il campo generato, nel caso delle equazioni di Einstein non è possibile risolverle separatamente per la metrica  $g_{\mu\nu}$  dopo aver specificato la sorgente  $T^{\mu\nu}$ , poiché il significato fisico di questa si ottiene dalla metrica stessa, che compare solitamente nella definizione del particolare tensore energia-impulso. Bisogna pertanto risolvere contemporaneamente le equazioni di campo per la distribuzione di materia e per la metrica dello spazio-tempo, rendendo ancor più difficile la risoluzione del sistema di equazioni.

# CAPITOLO 2

## LO SPAZIO-TEMPO DI SCHWARZSCHILD

### 2.1: Il Problema di Schwarzschild

Pochi mesi dopo la pubblicazione da parte di Einstein della sua teoria della gravitazione, Karl Schwarzschild propose una particolare soluzione delle equazioni di campo. Il problema si formula considerando una sorgente del campo statica e di simmetria sferica, per cui il tensore di energia-impulso  $T^{\mu\nu}$  è non nullo all'interno e uguale a 0 in tutti gli altri punti dello spazio-tempo. Di conseguenza si trovano due soluzioni, una interna e una esterna alla sorgente.

Il problema risulta particolarmente interessante in quanto le stelle, in prima approssimazione, rispecchiano questo modello di sorgente del campo e, essendo molto massive, il moto orbitante dei pianeti intorno ad esse può essere approssimato al moto di una particella di test nello spazio curvato dalla presenza della sorgente sferica. Questa soluzione porta a piccole variazioni nelle orbite dei pianeti rispetto alla teoria newtoniana, che permisero di spiegare l'anomala precessione del perielio di Mercurio, diventando il primo banco di prova della teoria. In aggiunta, si possono predire altri fenomeni sperimentalmente verificabili come la deflessione della luce, il redshift gravitazionale ed effetti di dilatazione dei tempi. Alcuni di questi fenomeni fisici sono esposti nel capitolo 3.

La soluzione di Schwarzschild continua ad esser valida dopo il collasso della stella, se questo avviene radialmente preservando la simmetria sferica. Esiste infatti in teoria della Relatività Generale un particolare teorema, che prende il nome di teorema di Birkhoff, il cui enunciato è il seguente:

*“Data la geometria di una regione di spazio-tempo essere sfericamente simmetrica e soluzione delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto, allora quella geometria è necessariamente un pezzo della geometria di Schwarzschild”.*

Fisicamente, questo significa che il campo gravitazionale esterno con geometria di Schwarzschild, prodotto da una sorgente inizialmente in equilibrio, rimane inalterato dalla perturbazione e dal conseguente collasso della sorgente, se questa è perturbata in modo da collassare su se stessa radialmente così da conservare la simmetria sferica. La dimostrazione di questo teorema esula dallo scopo di questa trattazione, ma vale la pena osservare che una semplice conseguenza di ciò è che le leggi di Einstein proibiscono monopoli che generino onde gravitazionali, in modo del tutto analogo a come le leggi di Maxwell proibiscono monopoli in grado di generare onde elettromagnetiche.

## 2 – Lo Spazio-Tempo di Schwarzschild

---

Il teorema di Birkhoff permette quindi di studiare il comportamento di forti campi gravitazionali in teoria della Relatività Generale, poiché la soluzione che viene esaminata qui di seguito è quella esterna, di vuoto, nel contesto di stelle massive collassate in particolari corpi celesti, detti buchi neri.

Al di fuori della sorgente, le equazioni di campo di Einstein [1.49] nel vuoto diventano:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad [2.1]$$

Contraendole con il tensore metrico inverso  $g^{\mu\nu}$ :

$$-R = 0 \quad [2.2]$$

Solitamente riscritte nella forma:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad [2.3]$$

Come anticipato nel paragrafo (1.11), il verificarsi di  $T_{\mu\nu} = 0$  su una regione spazio-temporale non implica che la metrica sia di Minkowski. Questo fatto è meglio illustrato considerando l'eq. [2.3]: le dieci componenti del tensore di Ricci sono nulle poiché lo è il tensore energia-impulso nel vuoto, ma ciò non implica che il tensore di Riemann si annulli, dato che ha venti componenti indipendenti come evidenziato in (1.9). Essendo questo l'unico strumento matematico che descrive la presenza di un campo gravitazionale, è solo  $R_{\alpha\mu\beta\nu} = 0$  che implica  $R_{\mu\nu} = 0$ ,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  e uno spazio-tempo piatto.

L'ansatz della soluzione di queste equazioni, che prende il nome di metrica di Schwarzschild o spazio-tempo di Schwarzschild, si ottiene da considerazioni sulle coordinate in relazione alle proprietà stabilite per la sorgente. È infatti utile tradurre nel formalismo matematico della geometria differenziale la proprietà di staticità e la simmetria sferica della sorgente, così da ridurre le componenti indipendenti della metrica  $g_{\mu\nu}$ , con segnatura lorentziana e per la quale il tensore di Ricci sia nullo (eq. [2.3]).

### 2.2: L'Isometria

È noto ormai da tempo che le proprietà di simmetria ricoprono un ruolo assai importante in fisica e gran parte dei successi scientifici degli ultimi cento anni sono dovuti all'aver riconosciuto particolari e profonde simmetrie (o violazioni di simmetria) nelle leggi fondamentali dell'Universo.

In geometria differenziale, il concetto di simmetria non è una caratteristica della varietà in esame, bensì delle quantità tensoriali fisicamente rilevanti che sono definite su di essa e mostrano un'invarianza rispetto ad una trasformazione (in altre parole, spostamento) dei punti della varietà. In particolare, questo studio è condotto con l'ausilio della derivata di Lie, ovvero di un modo alternativo alla derivata covariante di compiere l'operazione di

## 2 – Lo Spazio-Tempo di Schwarzschild

derivazione, che si fonda sul Lie dragging, laddove la derivata covariante si fonda sulla nozione di trasporto parallelo.

Il Lie dragging è l'operazione di mappare punti della varietà in punti diversi della stessa varietà. È perciò realizzato da una famiglia ad un parametro  $\lambda$  di automorfismi  $\phi_\lambda$ . Data la congruenza del campo vettoriale  $\vec{V}$ , cioè la collezione di curve di vettore tangente appartenente al campo  $\vec{V}$  punto per punto, allora  $\vec{V}$  è un'invarianza del tensore  $T$  se la sua derivata di Lie rispetto al campo stesso è nulla:

$$\mathcal{L}_{\vec{V}}T = 0 \quad [2.4]$$

Quindi  $T$  coincide con la sua versione Lie-dragged lungo le curve di vettore tangente  $\vec{V}$ . Si individua in questo modo una sottovarietà, cioè un sottoinsieme di punti della varietà sui quali l'operazione di trasporto lascia  $T$  invariato, costante.

Se a rimanere invariato rispetto ad un campo vettoriale  $\vec{V}$  è il tensore metrico  $g$ , la sua simmetria prende il nome di isometria e  $\vec{V}$  è detto campo vettoriale di Killing. Le sottovarietà, o ipersuperfici, definite con questi vettori di Killing possono formare un particolare sistema di riferimento, nel caso in cui siano di tipo *space-like*, e il loro studio è particolarmente utile per semplificare il problema di trovare le componenti del tensore metrico che risolvano le equazioni di Einstein in esame. Difatti, da un punto di vista fisico, l'importanza dell'isometria risiede nel fatto che un qualsiasi osservatore che si muove sotto l'azione del gruppo, cioè la cui traiettoria è una curva con il vettore di Killing come tangente, non percepisce questo moto poiché per lui la geometria della varietà non cambia.

### 2.3: Le Coordinate di Schwarzschild

La metrica viene generalmente espressa attraverso l'elemento di linea definito in [1.5], che nel caso di uno spazio piatto, privo di sorgenti e quindi di Minkowski è:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad [2.5]$$

Scritto in questa forma così da evidenziarne la simmetria sferica. Si vuole poi modificare questa metrica mantenendo questa simmetria anche in presenza della sorgente ipotizzata dal problema di Schwarzschild. Prendendo in considerazione orbite a  $r, t = \text{const}$ , queste appartengono a una 2-sfera sulla quale la lunghezza infinitesima si calcola come:

$$dl^2 = r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \equiv r^2 d\Omega^2 \quad [2.6]$$

Infatti, una varietà spazio-temporale è sfericamente simmetrica se il suo gruppo di isometrie contiene un sottogruppo isomorfo al gruppo  $SO(3)$ , cioè la cui azione è equivalente al gruppo delle rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ . Definendo le orbite come le collezioni di punti immagine, ancora appartenenti alla varietà, che sono il risultato dell'applicazione delle trasformazioni di un (sotto)gruppo ai punti di partenza, le orbite del sottogruppo in

## 2 – Lo Spazio-Tempo di Schwarzschild

questione sono 2-sfere, ossia sfere di dimensione pari a 2, in modo analogo a quanto accade per il gruppo  $SO(3)$  in  $\mathbb{R}^3$ .

Dato che è un sottogruppo del gruppo di isometrie dello spazio-tempo in esame, la metrica deve esser invariante per queste rotazioni, quindi deve essere solo un multiplo di quella definita sulla 2-sfera unitaria.

Pertanto, queste 2-sfere possono essere caratterizzate o distinte completamente con la sola area  $A(r)$ :

$$A = \int (rd\vartheta)(r\sin\vartheta d\varphi) = 4\pi r^2 \quad [2.7]$$

Questa relazione, invertita, può esser usata per definire la coordinata  $r$  come “coordinata di curvatura” o “coordinata areale”:

$$r = \left( \frac{\text{area della 2-sfera}}{4\pi} \right)^{1/2} \quad [2.8]$$

Che ha lo stesso valore  $r(P)$  per tutti i punti rotazionalmente equivalenti al punto  $P$ , giustificando inoltre l’espressione [2.6] e la scelta di  $\vartheta, \varphi$  come coordinate. È da notare infatti che i nomi (e i corrispondenti simboli) scelti per le coordinate non hanno un significato intrinseco se non quello di facilitare la comprensione e comunicazione per chi le utilizza. La coordinata  $r$  prende anche il nome di “coordinata radiale” ma, su un generico spazio curvo, non c’è alcun motivo per cui debba corrispondere alla distanza propria dal centro, dato che il centro potrebbe non appartenere alla 2-sfera, come mostrato nell’esempio in Fig. 2.1.

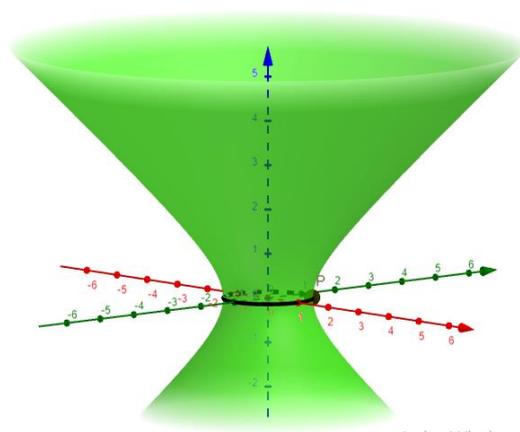


Figura 2.1: Nel caso dell’iperboloide, visto come collegamento fra due piani, abbiamo una simmetria assiale circolare intorno all’asse  $z$  ma i centri delle circonferenze non appartengono alla varietà.

Considerando ora due 2-sfere di coordinate  $r$  e  $r + dr$ , ha senso richiedere che i rispettivi poli degli angoli  $\vartheta, \varphi$  coincidano, ovvero che le orbite a  $\vartheta, \varphi = \text{const}$  siano ortogonali alle 2-

## 2 – Lo Spazio-Tempo di Schwarzschild

---

sfere. Per definizione, il vettore tangente a quelle orbite è  $\vec{e}_\vartheta$  e poiché  $\vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$  sono definiti sulla sfera, si verifica:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \quad [2.9]$$

Ottenendo:

$$g_{r\vartheta} = g_{r\varphi} = 0 \quad [2.10]$$

Cosicché per la proprietà di simmetria sferica, la metrica assume la forma:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dtdr + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2 + 2g_{t\vartheta}dtd\vartheta + 2g_{t\varphi}dtd\varphi \quad [2.11]$$

Si prende ora in considerazione la staticità della sorgente. Questa proprietà è descritta da 2 vincoli che la soluzione al problema di Schwarzschild deve soddisfare:

- 1) Le componenti della metrica devono essere indipendenti dal tempo ( $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$ )
- 2) La geometria deve essere simmetrica rispetto alla riflessione temporale ( $t \rightarrow -t$ )

La condizione 1) comporta che le distanze tra le orbite a  $r, \vartheta, \varphi = \text{cost}$  devono essere indipendenti dal tempo. La condizione 2) garantisce che queste siano ortogonali alle ipersuperfici  $\Sigma$  di punti a  $t = \text{const}$ , cioè:

$$g_{tr} = g_{t\vartheta} = g_{t\varphi} = 0 \quad [2.12]$$

Inoltre, la condizione 2) distingue il problema di una sorgente statica da quello di una sorgente stazionaria, che soddisfa solamente 1) (e per la quale dovrebbero comparire i termini misti con  $dt$ ). Un esempio di sorgente stazionaria non statica è quello di una sorgente sferica rotante che, pur avendo le componenti della metrica indipendenti dal tempo, non può essere simmetrica rispetto all'inversione temporale (cioè il "guardare il filmato all'indietro") poiché si inverte il senso di rotazione.

Ancora una volta, questa proprietà della sorgente nel modello di Schwarzschild si può formalizzare sfruttando gli strumenti della geometria differenziale. Una varietà spazio-temporale è stazionaria se il gruppo di isometrie contiene un sottogruppo a un parametro  $\phi_t$  le cui orbite sono *time-like*, realizzando la simmetria rispetto a traslazioni temporali  $t \rightarrow t + \text{const}$ . Equivalentemente, uno spazio-tempo è stazionario se esiste un vettore di Killing  $\vec{e}_t = \frac{\partial}{\partial t}$ . La varietà è statica se è stazionaria ed esiste una ipersuperficie *space-like*  $\Sigma$  che è ortogonale alle orbite dell'isometria. Infatti, assumendo  $\vec{e}_t \neq 0$  su tutto  $\Sigma$  (il sistema coordinato che si va costruendo fallirà pertanto quando questa assunzione non è più verificata), per ogni punto  $P \in \Sigma$  passa un'unica traiettoria di vettore tangente  $\vec{e}_t$ . Si può usare allora il parametro stesso dell'orbita,  $t$ , come coordinata per identificare i punti in un intorno di  $\Sigma$ , mentre le restanti coordinate  $x^1, x^2, x^3$  identificano i punti su  $\Sigma$ . Dato che il sistema coordinato usa un parametro di Killing, le componenti della metrica in queste coordinate saranno indipendenti dallo stesso per via dell'isometria, ritrovando la condizione 1) nel formalismo di Lie:  $\mathcal{L}_{\vec{e}_t}g = 0$ . In altri termini, applicando al presente caso il

## 2 – Lo Spazio-Tempo di Schwarzschild

---

ragionamento formulato nella sezione (2.2) sul significato fisico dell'isometria per gli osservatori, un osservatore statico si muove su una curva di vettore tangente  $\vec{e}_t$  e non rileva lo scorrere del tempo studiando la geometria esterna alla sorgente in esame.

Presa  $\Sigma_t$  ipersuperficie dei punti di coordinata  $t$  perché immagine di  $\Sigma$  sotto l'azione del gruppo  $\phi_t$ , le orbite di  $\vec{e}_t$  devono ancora essere ortogonali per costruzione, ottenendo nuovamente l'eq. [2.12]. La metrica ha quindi l'espressione:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad [2.13]$$

Ritrovando inoltre che la riflessione  $t \rightarrow -t$  è un'isometria legata alla staticità della sorgente.

L'espressione [2.13] si può riscrivere nel seguente modo:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad [2.14]$$

Mettendo in evidenza il fatto che i coefficienti della metrica possono dipendere solo dalla coordinata areale per le proprietà descritte della sorgente. Si impone infine che presa l'ipersuperficie di raggio infinito, la metrica si deve ridurre a quella di Minkowski, cioè di un osservatore inerziale, poiché si è a distanza infinita dall'unica sorgente del campo gravitazionale:

$$\begin{aligned} A(\infty) &= 1 \\ B(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad [2.15]$$

Questa caratteristica prende il nome di asintotica piatezza ed è uno dei tratti più importanti della soluzione di Schwarzschild nelle omonime coordinate.

### 2.4: La Soluzione Esterna

Come osservato già nella sezione (2.1), si trovano due soluzioni per il problema in questione, una che riguarda la struttura interna della stella/sorgente e una che riguarda lo spazio vuoto al di fuori di essa. Poiché il seguente studio si concentrerà sulle orbite intorno a una particolare classe di oggetti celesti, i buchi neri, ovvero stelle molto massive già collassate su se stesse, la soluzione interna verrà ignorata.

Lo studio delle coordinate in (2.3) ha ridotto il problema di trovare le 10 componenti incognite del tensore metrico di quattro variabili, cioè le quattro coordinate, a sole due funzioni incognite ( $A, B$ ) dipendenti da una sola variabile ( $r$ ). Computando i termini del tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$  in funzione dei simboli di Christoffel, attraverso l'opportuna contrazione dell'eq. [1.38], ed esprimendo questi a loro volta in funzione del tensore metrico secondo [1.27], si riscrive infine l'eq. [2.3] in termini di  $A(r)$  e  $B(r)$ .

## 2 – Lo Spazio-Tempo di Schwarzschild

---

Si trovano allora le soluzioni finali di Einstein del vuoto nel caso di sorgente statica e sfericamente simmetrica:

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{r} = (B(r))^{-1} \quad [2.16]$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad [2.17]$$

L'eq. [2.17] è la forma finale della metrica di Schwarzschild valida per  $r > r_s$ , con  $r_s$  "raggio" della sorgente. Si definisce la lunghezza caratteristica o "raggio gravitazionale" della sorgente:

$$R_H = 2GM \quad [2.18]$$

Che prende anche il nome di raggio di Schwarzschild.  $M$  è la massa totale (in senso relativistico, massa-energia) della sorgente, mentre  $G$  è la costante di gravitazione universale, infatti il secondo termine in [2.16] si trova studiando la metrica nel limite di campo debole, cioè quando  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ , poiché:

$$g_{00} = \eta_{00} + \varepsilon h_{00} \xrightarrow{\varepsilon=1, h_{00}=-2V_N} g_{00} = 1 - 2V_N \quad [2.19]$$

Con  $V_N$  potenziale newtoniano.  $R_H$  svolge un ruolo molto importante nello spazio-tempo di Schwarzschild, come sarà approfondito nella sezione (2.5) e nel capitolo successivo. Si nota intanto che se  $r \rightarrow \infty$ , allora il tensore metrico tende a quello di Minkowski, realizzando la proprietà richiesta di asintotica piatezza [2.15]. Perciò, un osservatore statico a cui associamo il set di coordinate  $\{t, r, \vartheta, \varphi\}$  è asintoticamente inerziale se posto a una distanza spaziale infinita dalla sorgente.

Preso una sfera concentrica alla sorgente di area  $4\pi r^2$ , la sua distanza propria dal raggio gravitazionale è:

$$R(r) = \int_{R_H}^r \sqrt{|g_{rr}|} dx = \int_{R_H}^r \sqrt{|B(x)|} dx \quad [2.20]$$

$$R(r) = \begin{cases} r \sqrt{1 - \frac{R_H}{r}} + \frac{R_H}{2} \ln \left[ 2 \frac{r}{R_H} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{R_H}{r}} \right) - 1 \right] & r > R_H \\ -\frac{R_H}{\cot\left(\sqrt{\frac{r}{R_H - r}}\right)} - \sqrt{r(R_H - r)} & r < R_H \end{cases} \quad [2.21]$$

Per cui  $R(R_H) = 0$  e  $R(r) > r$  per  $r \gtrsim 6R_H$ . Si nota però che, se  $r < R_H$ , si ha  $g_{rr} < 0$  e la coordinata  $r$  diventa *time-like*, come discusso in maniera più approfondita in (2.5). Pertanto la distanza propria suscita poco interesse fisico, se non quello di mostrare che il suo risultato è finito per ogni  $0 < r < \infty$ . In Fig. 2.2 è riportato il raggio proprio in unità di  $R_H$  per  $r > R_H$ .

## 2 – Lo Spazio-Tempo di Schwarzschild

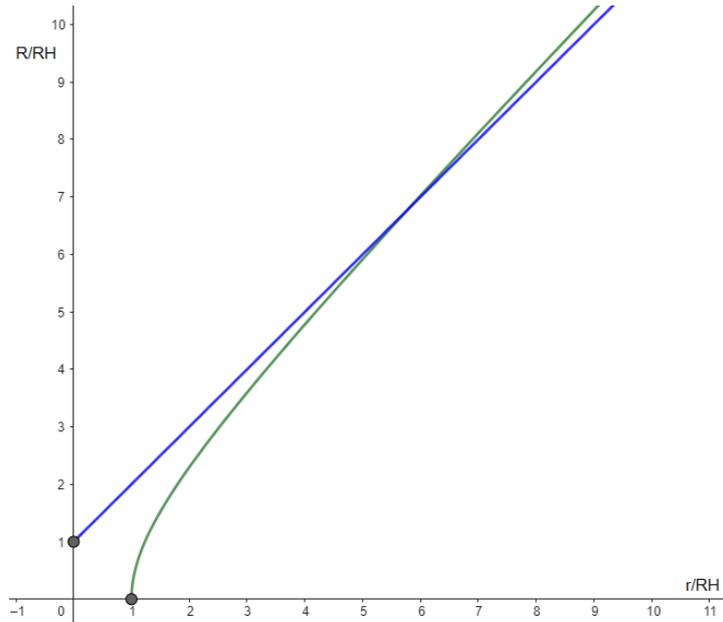


Figura 2.2: In verde il grafico del raggio proprio  $R(r)$  in unità di  $R_H$  per  $r > R_H$ , in blu il grafico della coordinata radiale  $r$  in unità di  $R_H$ .

### 2.5: Il Raggio di Schwarzschild

Come osservato discutendo l'eq. [2.17], esiste una lunghezza caratteristica per la metrica di Schwarzschild che dipende unicamente dalla sorgente del campo e prende il nome di raggio di Schwarzschild  $R_H$ . In base alla sua definizione [2.18], questo raggio è stimato intorno a:

$$R_H \approx 3 \left( \frac{M}{M_\odot} \right) km \quad [2.22]$$

Con  $M_\odot \approx 2 * 10^{33} g$  massa del Sole. Per una “sorgente (stellare) ordinaria”, cioè una sorgente mantenuta in equilibrio idrostatico dall’attività termonucleare interna, questo raggio è molto piccolo rispetto alle dimensioni della sorgente stessa, quindi interno al corpo celeste dove la soluzione esterna ottenuta non è più valida. Diventa invece di particolare interesse nello studio delle stelle che collassano in buchi neri, oggetti celesti estremamente compatti con masse che variano dalle decine ai milioni di masse solari. Per definizione, il raggio del buco nero è uguale al suo raggio  $R_H$  e prende comunemente il nome di “orizzonte degli eventi”.

## 2 – Lo Spazio-Tempo di Schwarzschild

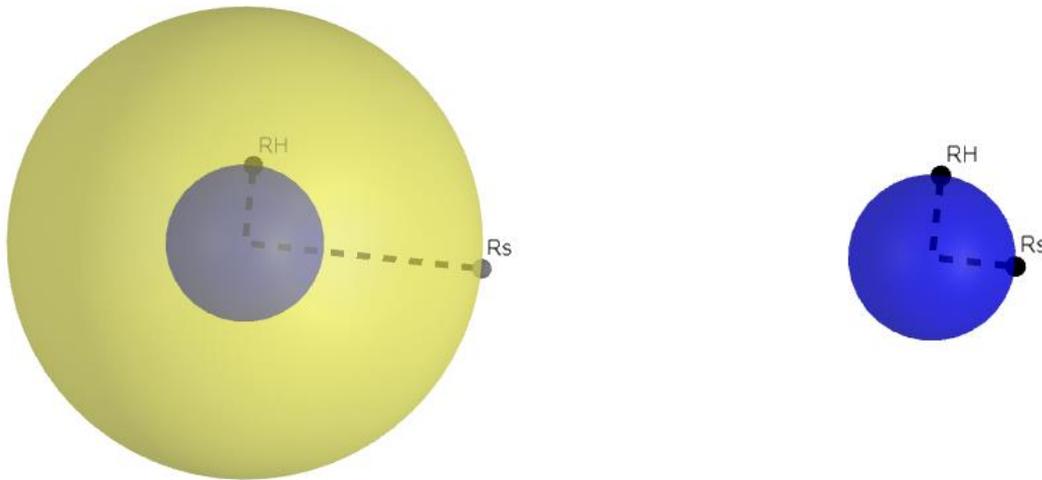


Figura 2.3: A destra, la stella è "in vita": la fusione nucleare nel core impedisce il collasso gravitazionale e il raggio  $R_H$  è interno; a sinistra, la stella al termine del suo ciclo di reazioni termonucleari è collassata fino a  $r_s = R_H$ .

Tornando allo studio del raggio gravitazionale, insieme a  $r = 0$ ,  $r = R_H$  è un punto di singolarità della metrica in questione. Questo fatto risulta evidente studiando il comportamento delle componenti  $g_{tt}$  e  $g_{rr}$  nell'intorno di  $r = R_H$ . Si osserva che nei limiti  $r \rightarrow R_H^\pm$ ,  $g_{rr} \rightarrow \pm\infty$  e  $g_{tt} = 0$ . Inoltre, per  $r > R_H$ , questa è una coordinata *space-like* e  $t$  invece è *time-like*, come atteso; per  $r < R_H$  le due coordinate hanno i ruoli scambiati. Ciò comporta che, finché si è al di fuori dell'orizzonte degli eventi è possibile, a bordo di una navicella spaziale, diminuire o aumentare il valore della coordinata  $r$  avvicinandosi o allontanandosi dal buco nero. Oltrepassato l'orizzonte, però, questo diventa impossibile perché la navicella si muove da  $r = R_H$  a  $r = 0$  inevitabilmente, come è inevitabile lo scorrere del tempo nella vita quotidiana, rappresentato all'interno del buco nero per l'appunto dalla diminuzione del valore di  $r$ . Non si può pertanto definire un osservatore statico all'interno del raggio di Schwarzschild.

Rimane da discutere cosa accada all'ipotetica navicella quando raggiunge  $r = R_H$ . Quando le componenti della metrica in una base coordinata mostrano punti singolari, le cause possono essere di due tipi:

- i. La geometria dello spazio-tempo è singolare.
- ii. La geometria dello spazio-tempo non è singolare, ma le coordinate falliscono nel ricoprire in modo completo la varietà in esame.

La singolarità a  $r = 0$  è del primo tipo, cioè ha una natura fisica legata alla varietà stessa, poiché le componenti del tensore di curvatura  $\mathcal{R}$  divergono all'infinito. La singolarità a  $r = R_H$  invece è del secondo tipo, quindi dovuto alla scelta del set di coordinate  $\{t, r, \vartheta, \varphi\}$ , dove  $t$  è la coordinata temporale che coincide con il tempo di Minkowski per un osservatore asintoticamente inerziale all'infinito spaziale. Dovrebbe perciò essere possibile trovare un buon set di coordinate che ricopra anche questa regione

## 2 – Lo Spazio-Tempo di Schwarzschild

---

apparentemente singolare e in più che non sia un ostacolo fisico per eventuali particelle di test che dovessero attraversarla. Infatti, esistono diversi set di coordinate per le quali la singolarità in  $r = R_H$  scompare, come ad esempio le coordinate di Eddington-Finkelstein, mentre il comportamento della particella di test che si avvicina all'orizzonte degli eventi è verificato che non incontri ostacoli studiando il moto lungo geodetiche radiali.

Si conclude osservando che la superficie a  $r = R_H$ , dove  $g_{tt}$  è nulla e  $g_{rr}$  è infinita, che appare essere una ipersuperficie tridimensionale, luogo dei punti di coordinate di Schwarzschild  $-\infty < t < +\infty$ ,  $0 < \vartheta < \pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ , ha in realtà volume nullo (poiché  $g_{tt} = 0$ ) quindi è una superficie bidimensionale, cioè di tipo luce (*null-like*).

Nonostante il fatto che  $g_{rr}$  sia infinito quando  $r = R_H$ , la superficie non è infinitamente distante, poiché la distanza propria è sempre finita, come mostrato nell'eq. [2.21].

# CAPITOLO 3

## STUDIO DELLE ORBITE NELLA METRICA DI SCHWARZSCHILD

### 3.1: Le Geodetiche Time-like per Schwarzschild

Il modo migliore per descrivere la geometria dello spazio-tempo di Schwarzschild è attraverso lo studio delle geodetiche. In un sistema coordinato generico, la definizione di geodetica ha la forma [1.16]:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad \text{con } \alpha = 0,1,2,3$$

Dove  $\lambda$  è il parametro affine che per una geodetica *time-like* è comunemente scelto essere il tempo proprio  $\tau$ . Utilizzando le coordinate di Schwarzschild  $\{x^\alpha\} = \{t, r, \vartheta, \varphi\}$ , la curva è descritta da quattro equazioni differenziali di secondo grado per le quattro coordinate, funzioni del tempo proprio:  $t(\tau)$ ,  $r(\tau)$ ,  $\vartheta(\tau)$ ,  $\varphi(\tau)$ .

Questo studio si può semplificare se vengono sfruttate le simmetrie di cui dispone il problema in esame, in particolare utilizzando i vettori di Killing introdotti nelle sezioni (2.2 – 2.3). Ad ogni simmetria corrisponde una quantità conservata, infatti si dimostra che la contrazione di un generico vettore di Killing  $\xi^\alpha$  con il vettore tangente  $u^\beta$  alla geodetica è conservata lungo tutta la geodetica stessa:

$$g_{\alpha\beta} \xi^\alpha u^\beta = \xi^\alpha u_\alpha = \xi_\alpha u^\alpha \quad [3.1]$$

$$u^\beta \nabla_\beta (\xi_\alpha u^\alpha) = u^\beta u^\alpha \nabla_\beta \xi_\alpha + \xi_\alpha u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0 \quad [3.2]$$

Il secondo membro è nullo poiché il termine  $u^\beta \nabla_\beta u^\alpha$  è la nota definizione della curva geodetica, mentre il primo termine è pari a zero dato che è la contrazione di un tensore simmetrico ( $u^\beta u^\alpha$ ) con uno antisimmetrico ( $\nabla_\beta \xi_\alpha$ ). In particolare,  $\nabla_\beta \xi_\alpha$  è un tensore antisimmetrico perché  $\xi_\alpha$ , in quanto vettore di Killing, risolve la corrispondente equazione di Killing:

$$\nabla_\beta \xi_\alpha + \nabla_\alpha \xi_\beta = \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 \quad [3.3]$$

Tornando alle simmetrie del problema in esame, senza perdita di generalità si possono studiare direttamente le geodetiche equatoriali, cioè per le quali  $\vartheta(\tau) = \vartheta = \frac{\pi}{2}$ , poiché per l'isometria rotazionale, derivante dalla simmetria sferica della sorgente e discussa in (2.3), si può sempre porre il punto iniziale e il vettore tangente sul piano dell'equatore e questa

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

condizione rimane valida per l'intera geodetica, dato che la metrica di Schwarzschild dispone di una simmetria di riflessione di parità  $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ .

Legato alla simmetria sferica si può anche definire il vettore di Killing, che nel sistema coordinato scelto è  $\xi^\alpha = \vec{e}_\varphi = (0,0,0,1)$ , la cui contrazione con  $u^\alpha$ , il vettore tangente della geodetica che è il quadri-vettore velocità della particella, è definita come:

$$\tilde{L} = u_3 \quad [3.4]$$

Da cui:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = u^3 = g^{33}u_3 \quad [3.5]$$

Poiché  $g^{33}$  è un elemento della matrice inversa del tensore metrico, che ha la forma diagonale di Schwarzschild, si trova l'equazione che descrive la coordinata angolare  $\varphi$  in funzione del parametro affine, in questo caso il tempo proprio:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \dot{\varphi} = \frac{\tilde{L}}{r^2} \quad [3.6]$$

Per quanto riguarda la staticità della sorgente, per cui si hanno le simmetrie di traslazione e riflessione temporale, questa è realizzata dal vettore di Killing  $\xi^\alpha = \vec{e}_t = (1,0,0,0)$  al quale è associata la quantità conservata:

$$\tilde{E} = -u_0 \quad [3.7]$$

Segue che:

$$\frac{dt}{d\tau} = u^0 = g^{00}u_0 \quad [3.8]$$

Trovando l'equazione per la coordinata temporale  $t$ :

$$\frac{dt}{d\tau} = \dot{t} = \frac{\tilde{E}}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} \quad [3.9]$$

Entrambe le costanti [3.4] e [3.7] sono espresse in unità di massa a riposo  $m$  della particella di test e prendono il nome di integrali primi del moto. La prima costante  $\tilde{L}$  ha un'espressione identica al caso classico, nonostante il significato delle coordinate sia diverso rispetto a quello per una varietà euclidea, ed è definito come il momento angolare per unità di massa. Invece, considerando  $r \rightarrow \infty$ , la seconda costante  $\tilde{E}$  si riduce all'energia totale per unità di massa (quindi  $\tilde{E} = -1$  se la massa è a riposo) misurata da un osservatore statico asintoticamente inerziale, ritrovando la forma nota in relatività speciale. Ad un generico  $r$ , pertanto, questa grandezza per una geodetica di tipo tempo si può interpretare fisicamente come l'energia totale per unità di massa, comprendendo il contributo negativo dell'energia potenziale gravitazionale, necessaria all'osservatore statico per metterla in quell'orbita.

Sfruttando correttamente le simmetrie offerte dalla sorgente del modello, le quattro equazioni che descrivono l'orbita di una particella di test si riducono quindi a un problema

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

---

uni-dimensionale per una particella puntiforme soggetta a un particolare potenziale, detto potenziale efficace. Infatti, per trovare l'ultima equazione nella variabile  $r$ , si utilizza il fatto che anche il modulo del vettore tangente è conservato lungo tutta la traiettoria, in base a quanto discusso sulla connessione metrica nel paragrafo (1.7). Poiché il vettore tangente è il quadri-vettore velocità, per una traiettoria *time-like* il suo modulo è noto:

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1 \quad [3.10]$$

Allora:

$$g_{00}u^0u^0 + g_{11}u^1u^1 + g_{33}u^3u^3 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = -1 \quad [3.11]$$

Sostituendo l'eq. [3.6] e [3.9]:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r} + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{\tilde{L}^2}{2r^2} = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{2} \quad [3.12]$$

Facilmente confrontabile con il caso newtoniano, per il quale  $\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt}$ :

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} = E \quad [3.13]$$

Solitamente, l'eq. [3.12] è proposta nella forma equivalente:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \quad [3.14]$$

Si nota che in Relatività Generale, oltre alla differente definizione della costante di energia, momento angolare e massa totale della sorgente sono accoppiati. Questa differenza si può riformulare definendo il secondo termine del membro di destra come il potenziale efficace, oggetto di studio del prossimo paragrafo.

Come accade in meccanica classica, l'eq. [3.12] viene solitamente riscritta in funzione dell'angolo  $\varphi$  dopo aver effettuato un conveniente cambio di variabile  $r \rightarrow u = \frac{1}{r}$ :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - \frac{GM}{\tilde{L}^2}u + (1 - 2GMu)\frac{u^2}{2} = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{2\tilde{L}^2} \quad [3.15]$$

Dove  $-\frac{1}{r^2}dr = du$  e  $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{\dot{r}}{\tilde{L}}$ .

Per confronto, l'equazione delle orbite per il problema di Keplero è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - \frac{GM}{\tilde{L}^2}u + \frac{u^2}{2} = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{2\tilde{L}^2} = E \quad [3.16]$$

### 3.2: Il Potenziale Efficace Time-like

Dallo studio dell'equazione delle orbite relativistiche [3.14] (o equivalentemente [3.15]) si può definire il potenziale efficace per il moto geodetico *time-like* nella metrica di Schwarzschild come:

$$\tilde{V}^2(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) = \left(1 - \frac{R_H}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \quad [3.17]$$

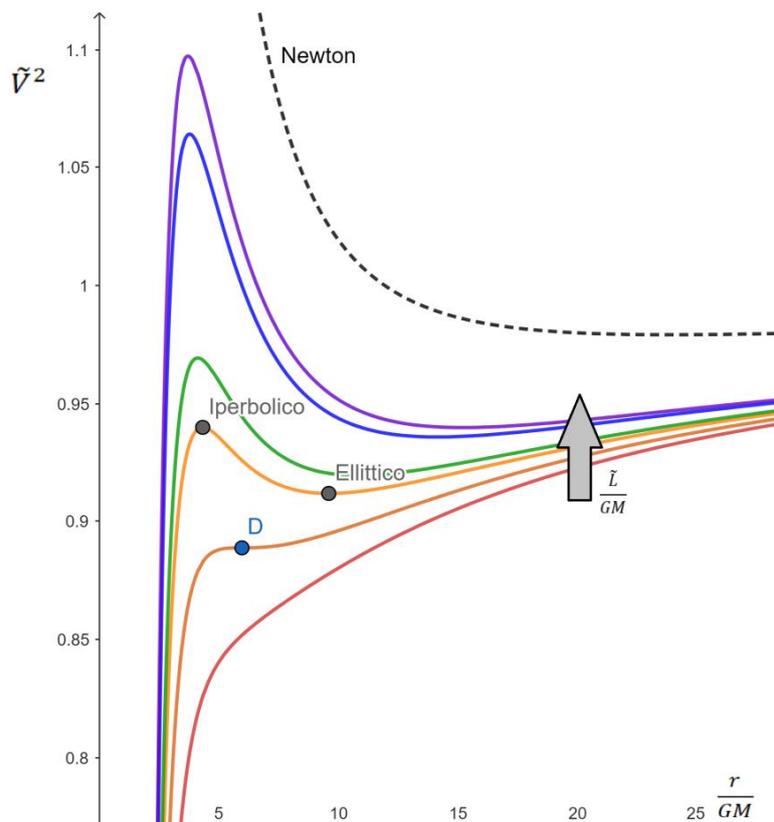


Figura 3.1: È rappresentato il potenziale efficace relativistico  $\tilde{V}^2$  a diversi valori di  $\frac{\tilde{L}}{GM}$  e per una particolare curva sono evidenziati i punti critici. Il punto D rappresenta l'ultima orbita stabile. La curva tratteggiata riporta il potenziale non relativistico per confronto.

I termini  $-\frac{2GM}{r}$  e  $+\frac{\tilde{L}^2}{r^2}$  sono già noti dalla trattazione classica rispettivamente come il potenziale newtoniano attrattivo e il termine centrifugo repulsivo (moltiplicati per  $\frac{1}{2}$ ), la cui presenza porta ad una barriera di potenziale vicino a  $r = 0$ . In teoria della Relatività Generale compare un ulteriore termine attrattivo  $-\frac{GM\tilde{L}^2}{r^3}$ , in cui  $\tilde{L}^2$  e  $M$  sono accoppiati, che diventa rilevante per  $r \rightarrow 0$ . La sua presenza modifica la forma del potenziale effettivo, come riportato in Fig. 3.1, che si annulla in  $r = R_H$ , tende all'infinito a  $\tilde{V}^2(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1^-$  e

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

presenta un cosiddetto “pozzo del potenziale”. Di conseguenza, esiste un certo valore di  $\frac{\tilde{L}^2}{(GM)^2}$  minore del quale non esistono orbite stabili e le particelle di test vengono attratte fino alla singolarità in  $r = 0$ . Nel caso di buchi neri, questo pozzo porta a definire una distanza critica, oltre la quale nessuna particella riesce a sfuggire l’attrazione gravitazionale che esercita la stella collassata. Lo stesso accade per particelle molto energetiche, per cui  $\tilde{E}^2 > \max \tilde{V}^2$ , dato che non esiste una barriera centrifuga che le respinga come nel caso newtoniano. Per rendere quantitativo questo discorso si studia la coordinata radiale delle orbite, soggetta al potenziale efficace, utilizzando gli strumenti della meccanica analitica classica.

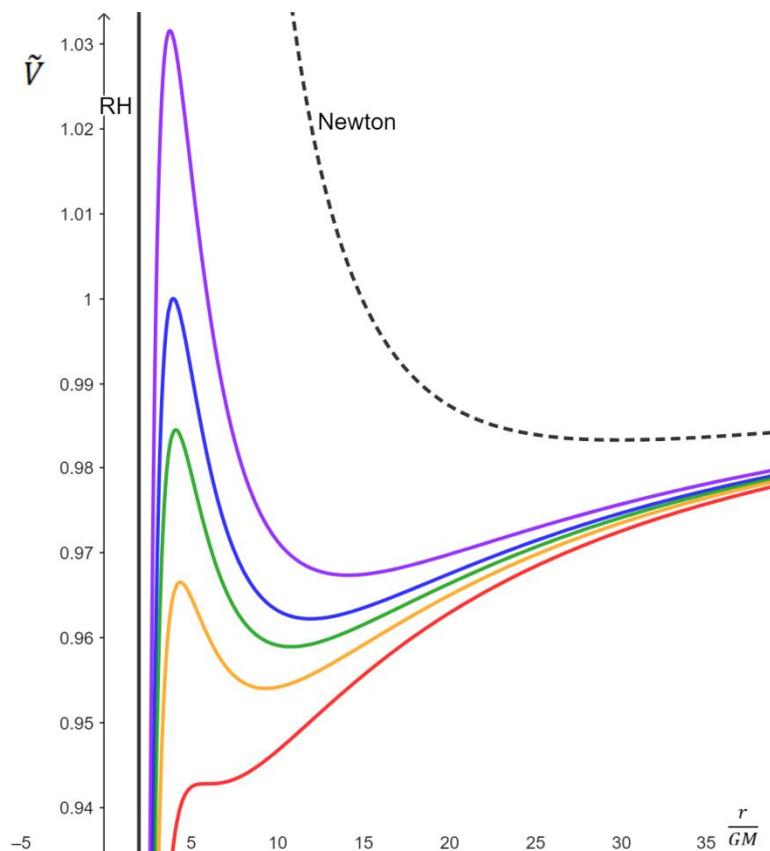


Figura 3.2: È rappresentato il potenziale efficace relativistico  $\tilde{V}$  a diversi valori di  $\frac{\tilde{L}}{GM}$ . La retta verticale rappresenta il raggio di Schwarzschild  $R_H$ , valore per il quale il potenziale si annulla. La curva tratteggiata riporta il potenziale non relativistico per confronto.

Innanzitutto, il potenziale efficace approssima quello newtoniano nel limite classico che si realizza, come noto dallo studio della metrica di Schwarzschild condotto nel capitolo 2, quando  $r \rightarrow \infty$  (di conseguenza  $\frac{M}{r}, \frac{\tilde{L}}{r} \ll 1$ ).

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

---

L'energia all'infinito per unità di massa ( $\tilde{E} \cong -\sqrt{1 + v_\infty^2}$ ) si riduce all'energia non-relativistica per unità di massa:

$$\tilde{\epsilon} \equiv \frac{\tilde{E}^2 - 1}{2} \cong \frac{1}{2} v_\infty^2 \quad [3.18]$$

Il potenziale efficace relativistico si riduce anch'esso al potenziale kepleriano (più la massa a riposo), quindi:

$$\tilde{V}_N(\tilde{L}, r) \equiv \frac{\tilde{V}^2 - 1}{2} \cong -\frac{GM}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2} \quad [3.19]$$

Ritrovando l'espressione dell'orbita radiale classica [3.13]:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2} = \tilde{\epsilon} \quad [3.20]$$

In questo caso, la presenza del termine centrifugo è sufficiente a formare una barriera di potenziale per  $r = 0$ , mentre  $r \rightarrow \infty$  il potenziale efficace classico va a zero. Poiché  $\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2$  può al minimo esser nullo, ne segue che orbite con  $\tilde{\epsilon} < 0$  ( $\tilde{E}^2 < 1$ ) sono limitate tra due valori della coordinata radiale  $r$ , detti punti di inversione. Questi punti prendono i nomi di periapside e di apoapside, cioè rispettivamente il punto di maggior avvicinamento e maggior allontanamento dalla sorgente. In meccanica newtoniana, come verrà approfondito successivamente in (3.3), le orbite newtoniane limitate sono sempre chiuse, quindi dopo un numero finito di rivoluzioni la particella ritorna nel punto di partenza. Le orbite invece che hanno  $\tilde{\epsilon} \geq 0$  ( $\tilde{E}^2 \geq 1$ ) provengono dall'infinito e hanno solo un punto di inversione, sono quindi non limitate e hanno forma parabolica o iperbolica.

Finché si considerano orbite con periapside  $r \gg R_H$ , queste sono approssimabili alle orbite kepleriane con l'aggiunta di una piccola perturbazione dovuta ad effetti relativistici, che ha come conseguenza uno spostamento della posizione del periapside stesso. L'effetto verrà studiato in maniera più approfondita nel prossimo paragrafo, in quanto il calcolo della precessione del perielio di Mercurio fu il primo test, passato con successo, della teoria della Relatività Generale. Quando invece le dimensioni della coordinata radiale del periapside sono circa  $r \cong 10R_H$ , le orbite differiscono in maniera considerevole dalla forma kepleriana.

Per discutere in maggior dettaglio il potenziale efficace, conviene partire dai suoi punti speciali. Si definiscono in prima istanza i punti critici, come i punti per i quali  $\frac{\partial \tilde{V}^2}{\partial r} = 0$ . Si trova che:

$$r_\pm = \frac{\tilde{L}^2 \pm \tilde{L}^2 \sqrt{1 - \frac{12(GM)^2}{\tilde{L}^2}}}{2GM} \quad [3.21]$$

$r_+$  è il punto critico di equilibrio stabile, che prende anche il nome di punto ellittico, poiché piccole deviazioni del moto portano a compiere un'orbita ellittica, con la sorgente posta in uno dei due fuochi.  $r_-$  è invece il punto di massimo per cui l'equilibrio è instabile, cioè una

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

piccola perturbazione al moto allontana la particella dall'equilibrio. Questo è comunemente indicato come punto iperbolico. Nell'eq. [3.21], la radice si annulla quando  $\frac{\tilde{L}^2}{(GM)^2} = 12$ , pertanto è sempre verificato che  $r_+ > 6GM$  e  $r_+ = 6GM = 3R_H$  precisamente per l'ultima orbita stabile, rappresentata in Fig. 3.1 dal punto  $D$ . Trovandosi ad una distanza inferiore dalla sorgente del campo gravitazionale, qualsiasi particella di test è inevitabilmente destinata a caderci dentro. Si nota infatti che questo raggio non dipende da caratteristiche della particella, bensì è un tratto peculiare della geometria di Schwarzschild.

Il range di valori di  $r_-$  è invece più ristretto, poiché  $r_-$  è necessariamente inferiore a  $6GM$  e, se  $\tilde{L} \rightarrow \infty$ , per Taylor la radice è espansa in modo da ottenere la seguente espressione:

$$r_- \cong \frac{\tilde{L}^2 - \tilde{L}^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{12(GM)^2}{\tilde{L}^2}\right)}{2GM} = 3GM = \frac{3}{2}R_H \quad [3.22]$$

Quindi il punto iperbolico, se esiste, è compreso nella regione  $\frac{3}{2}R_H < r_- < 3R_H$ .

Considerare il limite  $\tilde{L} \rightarrow \infty$  rappresenta quindi una strada alternativa a  $r \gg R_H$  per ottenere un'orbita classica, kepleriana. Infatti, come si osserva in Fig. 3.2, considerare il rapporto  $\frac{\tilde{L}}{GM} \gg 1$  cambia la forma del potenziale efficace allontanando il punto di minimo dall'orizzonte degli eventi  $r = R_H$ , poiché in questo limite  $r_+ \cong \frac{\tilde{L}}{GM}$ , che si dimostra essere proprio il raggio di un'orbita circolare newtoniana in sezione (3.3); il punto di massimo invece viene avvicinato e la sua energia aumenta fino ad ottenere la nota barriera centrifuga, che cancella il pozzo di potenziale.

Per definizione, l'orbita di equilibrio stabile o instabile è circolare, la forza effettiva è nulla ( $F = -\frac{\partial \tilde{V}^2}{\partial r} = 0$ ) e l'energia della particella è naturalmente pari al potenziale efficace ( $\frac{dr}{dt} = 0$ ):

$$\tilde{E}^2 = \tilde{E}^2(r_{\pm}) = \frac{(r_{\pm} - 2GM)^2}{r_{\pm}(r_{\pm} - 3GM)} \quad [3.23]$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}(r_{\pm}) = \frac{r_{\pm} - 2GM}{\sqrt{r_{\pm}(r_{\pm} - 3GM)}} \quad [3.24]$$

Dove si è riscritto  $\tilde{L}^2$  in funzione dei punti critici:

$$\tilde{L}^2 = \frac{GM r_{\pm}^2}{(r_{\pm} - 3GM)} \quad [3.25]$$

Per l'ultima orbita circolare stabile  $r_+ = 6GM$  ( $\frac{\tilde{L}}{GM} = 2\sqrt{3}$ ), risulta  $\tilde{E}^2 = \frac{4}{9}$ . Per  $r_+ \rightarrow +\infty$ , invece, l'energia per unità di massa diventa  $\tilde{E}^2 = 1$  come atteso per un osservatore asintoticamente inerziale.

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

---

Nel range  $4GM = 2R_H < r_- < 3R_H = 6GM$  ( $2\sqrt{3} < \frac{\tilde{L}}{GM} < 4$ ) sono possibili orbite limitate ma, se la particella proviene dall'infinito, ha  $\tilde{E}^2 \geq 1$  (poiché  $\tilde{V}^2(\infty) \leq 1$ ) e quindi è inevitabilmente attirata dentro la sorgente, visto che in questo range si ha che  $\max \tilde{V}^2 = \tilde{V}^2(r_-) \leq 1$ . Se invece  $\frac{3}{2}R_H < r_- < 2R_H$  ( $\frac{\tilde{L}}{GM} > 4$ ), oltre ad aver orbite limitate, le particelle provenienti dall'infinito con un energia  $\tilde{E}^2 \leq \max \tilde{V}^2$  hanno un punto di inversione e pertanto non cadono sull'orizzonte degli eventi, ma tornano all'infinito percorrendo un'orbita parabolica o iperbolica.

Quando la particella si trova esattamente in un punto iperbolico, se perturbata verso l'interno cadrà su  $r = R_H$ , se perturbata verso l'esterno può invece andare all'infinito se  $\tilde{E}^2 > 1$  e spiraleggiare cadendo sull'orizzonte o entrare in un orbita limitata se  $\tilde{E}^2 < 1$  (a seconda che la variazione di energia sia positiva o negativa).

Finché si lavora all'interno della cornice della teoria della Relatività Generale, la dinamica relativistica è classica, nel senso che non vengono trattati gli effetti quantistici. Pertanto non si considera un possibile effetto tunnel che potrebbe portare la particella di test con  $\tilde{E}^2 < \max \tilde{V}^2$  a cadere lo stesso dentro il buco nero.

### 3.3: Le Orbite Ellittiche Precedono

Le orbite percorse dalle particelle di test che presentano punti di inversione possono essere sia limitate (circolari o ellittiche) sia aperte (paraboliche o iperboliche). Esse vengono trattate in modo analogo al caso classico aggiungendo le opportune perturbazioni relativistiche all'equazioni del moto, che portano a lievi discostamenti dal comportamento newtoniano. Inizialmente, si deriva in modo ulteriore l'eq. [3.15], ottenendo:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{GM}{\tilde{L}^2} + u - 3GMu^2 = 0 \quad [3.26]$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{\tilde{L}^2} + 3GMu^2 \quad [3.27]$$

Trascurando il termine non classico  $\propto u^2$ , si trova il limite newtoniano:

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 = \frac{GM}{\tilde{L}^2} \quad [3.28]$$

La cui soluzione risulta essere:

$$u_0(\varphi) = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{p} \quad [3.29]$$

Con:

$$\frac{1}{p} \equiv \frac{GM}{\tilde{L}^2} \quad [3.30]$$

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

$$\varphi_0 = \text{angolo iniziale} \quad [3.31]$$

$$A = \sqrt{\frac{\tilde{E}^2 + \left(\frac{GM}{\tilde{L}}\right)^2 - 1}{\tilde{L}^2}} \quad [3.32]$$

Si nota dall'eq. [3.30] che la grandezza fisica  $p$  rappresenta il raggio circolare per l'orbita newtoniana, come già trovato per  $r_+$  nel limite  $\tilde{L} \rightarrow +\infty$  durante lo studio del potenziale efficace in sezione (3.2).

Si definisce l'eccentricità  $\varepsilon \equiv A \cdot p$ , di modo che l'espressione per l'orbita newtoniana diventi:

$$u_0(\varphi) = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}{p} \quad [3.33]$$

$$r_0(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad [3.34]$$

Con i limiti:

$$r_{0(p)}(\varphi) \cong \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad \varphi \rightarrow \varphi_0 \quad [3.35]$$

$$r_{0(a)}(\varphi) \cong \frac{p}{1 - \varepsilon} \quad \varphi \rightarrow \varphi_0 + \pi \quad [3.36]$$

Dove  $r_{0(p)}$  e  $r_{0(a)}$  sono rispettivamente il periapside e l'apoapside. La forma dell'orbita è allora discussa in termini del parametro di eccentricità:

- $\varepsilon = 0 \rightarrow$  circolare
- $0 < \varepsilon < 1 \rightarrow$  ellittica
- $\varepsilon = 1 \rightarrow$  parabolica
- $\varepsilon > 1 \rightarrow$  iperbolica

A partire dal limite newtoniano, si può passare a trattare in maniera approssimata l'equazione relativistica [3.27], definendo la nuova variabile  $m = u - \frac{1}{p}$  che descrive la deviazione dall'orbita circolare classica. Si riscrive l'equazione differenziale nella forma:

$$\frac{d^2 m}{d\varphi^2} + m = 3GM \left(m + \frac{1}{p}\right)^2 \quad [3.37]$$

Considerando un'orbita quasi circolare, il termine  $\propto m^2$  diventa trascurabile e l'equazione si semplifica in:

$$\frac{d^2 m}{d\varphi^2} + m = 6 \frac{GM}{p} m + 3 \frac{GM}{p^2} \quad [3.38]$$

$$\frac{d^2 m}{d\varphi^2} + \left(1 - 6 \frac{GM}{p}\right) m = 3 \frac{(GM)^2}{\tilde{L}^4} \quad [3.39]$$

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

---

Definendo  $k^2 \equiv 1 - \frac{6GM}{p}$  e  $m_0 = 3 \frac{(GM)^2}{k^2 \bar{L}^4}$ :

$$\frac{1}{k^2} \frac{d^2 m}{d\varphi^2} + m = m_0 \quad [3.40]$$

Ottenendo infine la soluzione nel caso della perturbazione relativistica:

$$m(\varphi) = A' \cos[k(\varphi - \varphi_0)] + m_0 \quad [3.41]$$

$$u(\varphi) = A' \cos[k(\varphi - \varphi_0)] + m_0 + \frac{1}{p} \quad [3.42]$$

Con:

$$A' = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\bar{E}^2 + \left(\frac{GM}{\bar{L}}\right)^2 - 1}{\bar{L}^2} + \frac{2(GM)^4}{\bar{L}^6} - m_0^2} \quad [3.43]$$

A differenza del risultato classico, si nota che la perturbazione di natura relativistica modifica il valore del raggio dell'orbita circolare rispetto a [3.30] e l'orbita oscilla intorno a  $m = m_0$  invece che  $m = 0$ . Anche l'ampiezza dell'oscillazione differisce da quella classica, ma il risultato di interesse è il fatto che sia  $k \neq 1$ .

Un'orbita limitata è considerata chiusa se la variazione della variabile angolare, in questo caso  $\varphi$ , tra periapside e apoapside è  $\Delta\varphi = \pi \frac{n}{m}$  con  $n, m \in \mathbb{Z}$ , così dopo  $m$  giri l'orbita ha di nuovo lo stesso valore per la coppia  $(r, \varphi)$ . Nel caso del potenziale newtoniano, le orbite limitate sono sempre chiuse. Poiché  $k \neq 1$ , si ha di conseguenza in teoria della Relatività Generale che un'orbita limitata non è chiusa ma ha generalmente una forma molto complessa, perché l'orbita riempie densamente la corona compresa tra le due circonferenze di raggi  $r_-$  e  $r_+$ .

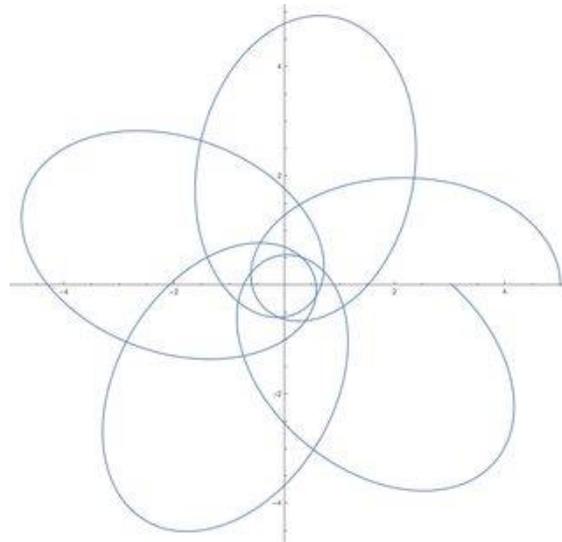


Figura 3.3: Esempio di orbita limitata ma non chiusa che in un tempo infinito riempie densamente l'intera corona circolare.

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

La trattazione si semplifica quando l'orbita è quasi circolare, la particella di test allora torna allo stesso valore della coordinata  $r$  dopo un angolo pari a  $(k\varphi + 2\pi)$ . La variazione dell'angolo è quindi:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{6(GM)^2}{\tilde{L}^2}}} \cong 2\pi \left(1 + \frac{3(GM)^2}{\tilde{L}^2}\right) \quad [3.44]$$

Scegliendo come punto il periapside, il punto di maggior avvicinamento al fuoco geometrico in cui è posta la sorgente del campo gravitazionale, dopo un'orbita completa questo punto risulta esser spostato di un angolo:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi(GM)^2}{\tilde{L}^2} \quad [3.45]$$

Dato che  $\tilde{L}^2$  si può scrivere in funzione dei punti critici come espresso in eq. [3.25], qui usando l'approssimazione di un'orbita quasi circolare di raggio  $r$ :

$$\tilde{L}^2 = \frac{GMr^2}{(r-3GM)} \cong GMr \quad [3.46]$$

Nel caso di una stella non-relativistica:

$$\Delta\varphi \cong \frac{6\pi GM}{r} \quad [3.47]$$

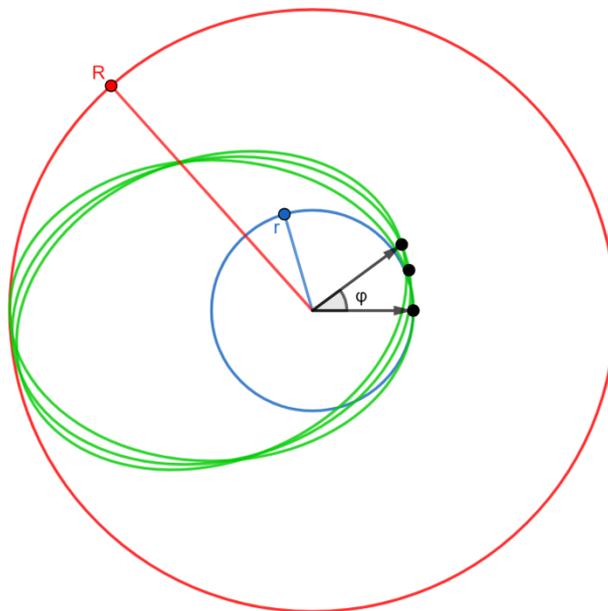


Figura 3.4: È schematizzata la precessione del periapside ( $r$ ) di un angolo  $\varphi$ .

Questo effetto è noto con il nome di precessione del periapside e un calcolo del genere venne compiuto dallo stesso Einstein per spiegare l'anomala precessione del periapside di

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

Mercurio, che non poteva essere spiegata classicamente con la teoria della gravitazione di Newton e fu il primo test di successo della nuova teoria geometrica della gravità. La precessione osservata è circa di  $5600''/\text{secolo}$  e, attraverso la legge di gravitazione di Newton, la perturbazione all'orbita dovuto dalla presenza degli altri pianeti del Sistema Solare porta ad un risultato che differisce di  $43''/\text{secolo}$ . Questo esatto valore viene spiegato in teoria della Relatività Generale, considerando l'ulteriore perturbazione dovuta agli effetti relativistici. Considerando per l'orbita di Mercurio ( $r = 5.55 * 10^7 \text{ km}$ ,  $GM = 1.476 \text{ km}$ ), dall'eq. [3.47] si ottiene:

$$\Delta\varphi = 5.059 * 10^{-7} \text{ radianti/orbita} \quad [3.48]$$

L'orbita di Mercurio dura 88 giorni terrestri, quindi in un anno terrestre compie 4.15 rivoluzioni. Lo spostamento angolare diventa allora misurabile dopo un lungo periodo di tempo, in particolare dopo un secolo si trova proprio:

$$\Delta\varphi = 43''/\text{secolo} \quad [3.49]$$

#### 3.4: Le Geodetiche Null-like per Schwarzschild

Come anticipato in (1.5), le particelle che costituiscono un fascio di luce, i fotoni, non sono massivi a differenze delle particelle di test, che pur avendo un effetto nullo sul campo gravitazionale si considerano avere una massa positiva. Di conseguenza, per la luce non esiste un parametro affine che possa esser interpretato fisicamente come il tempo proprio  $\tau$  nel caso di geodetiche di tipo tempo. Inoltre, a differenza di quest'ultime, le geodetiche di tipo luce, sul quale viaggia la luce poiché ciò è verificato in Relatività Speciale e quindi localmente per un osservatore in caduta libera, conservano lungo tutta la traiettoria il modulo nullo del vettore tangente. In questo caso il vettore tangente è il quadri-momento, che in coordinate sferiche diventa  $p^\mu = (p^0, p^r, p^\vartheta, p^\varphi)$ . Pertanto:

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \quad [3.50]$$

Ovvero:

$$g_{00}p^0p^0 + g_{rr}p^r p^r + g_{\varphi\varphi}p^\varphi p^\varphi = 0 \quad [3.51]$$

Dove ancora una volta si è usato il fatto che, per la simmetria sferica della geometria dello spazio-tempo, la geodetica appartiene ad un piano ( $p^\vartheta = 0$ ), in questo caso quello equatoriale scelto per semplicità. Ripetendo ora il ragionamento sviluppato nel caso delle geodetiche *time-like*, si ridefiniscono gli integrali primi del moto [3.4] e [3.7], che non sono più espressi per unità di massa:

$$E = -p_0 \quad [3.52]$$

$$L = p_\varphi \quad [3.53]$$

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

Da cui:

$$p^0 = g^{00}p_0 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} E \quad [3.54]$$

$$p^r = \frac{dr}{d\lambda} \quad [3.55]$$

$$p^\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = g^{\varphi\varphi}p_\varphi = \frac{L}{r^2} \quad [3.56]$$

Con  $\lambda$  generico parametro affine. Sostituendo allora [3.54]-[3.56] nell'eq. [3.51], si trova un'equazione delle geodetiche *null-like* analoga a quella per particelle di test [3.14]:

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} E^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = 0 \quad [3.57]$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \quad [3.58]$$

Anche nel caso della luce, quindi di particelle non massive, si può semplificare lo studio della curva geodetica *null-like* in un problema uni-dimensionale governato da un potenziale efficace per la coordinata radiale.

#### 3.5: Il Potenziale Efficace Null-like

Dall'equazione relativistica per la coordinata radiale della geodetica *null-like* [3.58], è conveniente definire un potenziale efficace della forma:

$$V^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} = \left(1 - \frac{R_H}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \quad [3.59]$$

A differenza del potenziale efficace per particelle massive, non ha senso prendere la sua radice quadrata in quanto non si trova un corrispondente classico a cui si riduce nel limite newtoniano (cosa che invece si verifica per  $\tilde{V}$ ). A grandi valori di  $r$ , il potenziale si annulla e l'osservatore asintoticamente inerziale vede effettivamente il fascio propagarsi in linea retta lungo il bordo del suo cono di luce.

L'integrale primo del moto  $L^2$  compare solo come costante moltiplicativa, pertanto la forma del potenziale efficace per la luce non dipende dal suo valore. Questa caratteristica si spiega facilmente considerando il fatto che la velocità dei fotoni che costituiscono il fascio luminoso non dipende dall'energia o dal momento angolare, che influiscono solamente sulla loro lunghezza d'onda, quindi la dinamica è indipendente da questi integrali primi del moto. Un esempio di curve del potenziale [3.59] sono riportate in Fig. 3.5 e, nonostante i diversi valori di  $L^2$ , mantengono la stessa forma.

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

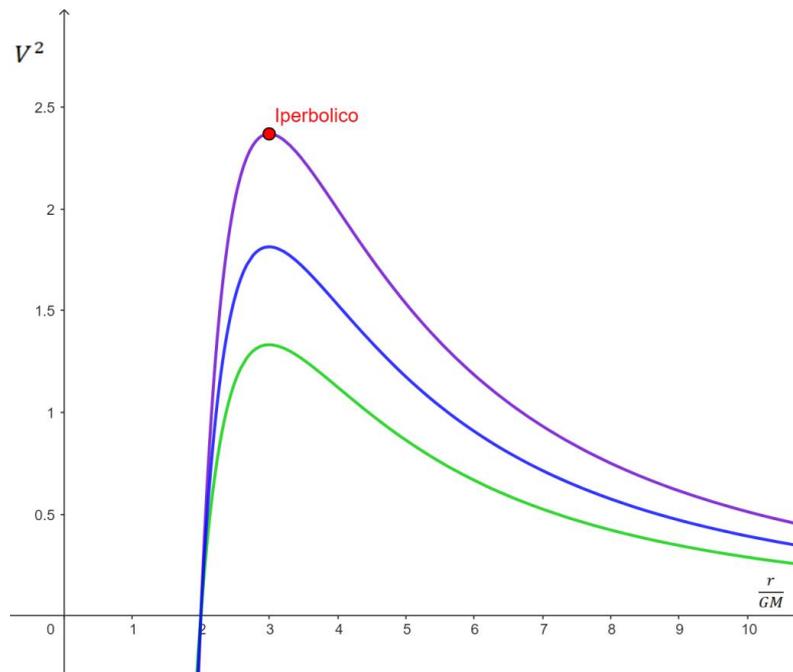


Figura 3.5: È rappresentato il potenziale efficace  $V^2$  per particelle non massive a diversi valori di  $L^2$ . In rosso, è messo in evidenza il punto di massimo per una delle curve di potenziale, ma hanno tutti ugualmente coordinata radiale pari a  $\frac{r}{GM} = 3$ . Il potenziale si annulla in  $r = R_H$ .

Una conseguenza interessante di ciò è che il punto di massimo, l'unico punto critico per un potenziale di questa forma, ha sempre lo stesso valore per la coordinata radiale, ovvero  $r = 3GM = \frac{3}{2}R_H$ . A questa distanza, quindi, esiste un'orbita circolare instabile per il raggio luminoso che risente dell'attrazione gravitazionale della sorgente, orbita che sarebbe inesistente dal punto di vista newtoniano. Oltre quest'orbita di energia  $E^2 = \frac{L^2}{27(GM)^2}$ , non esistono altre orbite limitate.

Da quanto osservato, all'interno della teoria della Relatività Generale in regime di campo forte, la gravità ha un ruolo fisicamente rilevante nella dinamica di un fascio di luce. Un noto esempio di questo effetto è approfondito nel prossimo paragrafo.

#### 3.6: La Deflessione della Luce

L'effetto di deflessione della luce fu anch'esso predetto poco dopo la formulazione completa della Relatività Generale e la prima verifica sperimentale, che avvenne nel 1919 ad opera di Eddington durante un'eclissi solare, diede immediata fama mondiale alla nuova teoria e allo stesso Einstein.

Per valutare l'effetto di deflessione nella geometria di Schwarzschild bisogna studiare la parte spaziale dell'orbita, in particolare derivare l'equazione per  $\frac{dr}{d\varphi}$ , così da valutare la

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

---

variazione dell'angolo  $\Delta\varphi = \varphi|_{+\infty} - \varphi|_{-\infty}$  tra la direzione iniziale e quella all'infinito dopo aver superato la sorgente. A questo scopo si definisce allora il "parametro di impatto apparente"  $b$ :

$$b \equiv \frac{L}{E} \quad [3.60]$$

In uno spazio-tempo piatto, di Minkowski, questo parametro rappresenta la distanza di minimo avvicinamento al punto  $r = 0$ , poiché non c'è deflessione. Dato che questo è il punto di vista, nella geometria di Schwarzschild, di un osservatore asintoticamente inerziale posto in  $r = \infty$ ,  $b$  prende il nome di *apparente* parametro di impatto, nonostante non rappresenti più la minima distanza di avvicinamento. Per quanto discusso in (3.5), esiste un valore critico di  $b$  sotto al quale un raggio di luce cade direttamente sull'origine  $r = 0$ , ovvero il valore che il parametro di impatto assume per il punto di massimo del potenziale:

$$b_{crit} = 3\sqrt{3}GM \quad [3.61]$$

Questo sarà più ampiamente discusso successivamente. Tornando alla deflessione, si ricava dalle eq. [3.56] e [3.58] la forma di  $\frac{d\varphi}{dr}$ :

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{1}{r^2} \right)^{-1/2} \quad [3.62]$$

Conviene ancora una volta definire la variabile  $u = \frac{1}{r}$  e riscrivere con questa l'eq. [3.62]:

$$\frac{d\varphi}{du} = \left( \frac{1}{b^2} - (1 - 2GMu)u^2 \right)^{-1/2} \quad [3.63]$$

$$\left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 = \left( \frac{1}{b^2} - (1 - 2GMu)u^2 \right)^{-1} \quad [3.64]$$

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - (1 - 2GMu)u^2 \quad [3.65]$$

In maniera analoga a quanto fatto in sezione (3.3) per derivare la precessione delle orbite quasi circolari perturbate da piccoli effetti relativistici, si deriva ulteriormente l'equazione:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3GMu^2 \quad [3.66]$$

Che richiama l'eq. [3.27]. Considerando il parametro di impatto molto grande o  $u$  molto piccolo ( $r \gg R_H$ ), si trascura il termine  $\propto u^2$  trovando:

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 = 0 \quad [3.67]$$

La cui soluzione è:

$$u_0(\varphi) = \frac{1}{b} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) \quad [3.68]$$

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

$$r_0(\varphi) = \frac{b}{\cos(\varphi - \varphi_0)} \quad [3.69]$$

Quindi in questa approssimazione “newtoniana” si ha semplicemente:

$$b = r \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) \quad [3.70]$$

Cioè un moto rettilineo lungo una curva non deflessa.

Nel caso della precessione del periapside, la perturbazione relativistica all'orbita kepleriana è stata computata praticamente aggiungendo il termine  $\alpha u^2$  all'equazione differenziale di secondo ordine, sostituendoci però direttamente la soluzione classica per via dell'approssimazione scelta. Allo stesso modo ora:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3GMu_0^2 \quad [3.71]$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3GM \left( \frac{1}{b} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) \right)^2 \quad [3.72]$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3GM}{b^2} (\cos(\varphi - \varphi_0))^2 \quad [3.73]$$

Definendo  $\alpha = \frac{3GM}{b^2}$ :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \alpha (\cos(\varphi - \varphi_0))^2 \quad [3.74]$$

La cui soluzione è:

$$u(\varphi) = \frac{1}{b} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{\alpha}{3} (\cos(\varphi - \varphi_0))^2 + \frac{2\alpha}{3} \quad [3.75]$$

$$u(\varphi) = \frac{1}{b} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{GM}{b^2} (\cos(\varphi - \varphi_0))^2 + \frac{2GM}{b^2} \quad [3.76]$$

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{b \cos(\varphi - \varphi_0) - GM(\cos(\varphi - \varphi_0))^2 + 2GM} \quad [3.77]$$

Poiché in coordinate cartesiane  $x = r \cos(\varphi - \varphi_0)$  e  $y = r \sin(\varphi - \varphi_0)$ , moltiplicando la seconda soluzione per  $r$  si ottiene:

$$1 = \frac{x}{b} + \frac{GM}{b^2} r [2 - (\cos(\varphi - \varphi_0))^2] = \frac{x}{b} + \frac{GM}{b^2} r [(\cos(\varphi - \varphi_0))^2 + 2(\sin(\varphi - \varphi_0))^2] \quad [3.78]$$

Da cui:

$$1 = \frac{x}{b} + \frac{GM}{b^2} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad [3.79]$$

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

Prendendo gli asintoti ( $y \gg x$ ), cioè considerando l'orbita quando infinitamente lontana dalla sorgente prima e dopo il passaggio nelle sue vicinanze, si trova:

$$x = \begin{cases} b + \frac{2GM}{b}y & y < 0 \\ b - \frac{2GM}{b}y & y > 0 \end{cases} \quad [3.80]$$

Quindi l'angolo di deflessione tra le due rette è:

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{b} \quad [3.81]$$

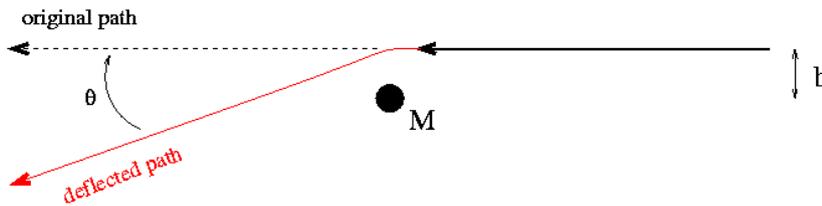


Figura 3.6: La deflessione della luce per effetto della presenza di una sorgente statica e a simmetria sferica.

In realtà, la deflessione è un fenomeno che era già stato teorizzato all'interno della teoria della gravitazione di Newton. In quel caso, però, il risultato è la metà di quello riportato in eq. [3.81], ovvero  $\Delta\varphi = \frac{2GM}{b}$ . Quindi, questo secondo storico test della teoria di Einstein non fu l'osservazione, o la spiegazione, di un nuovo fenomeno fisico come nel caso della precessione del perielio di Mercurio di  $43''/\text{secolo}$ , bensì la derivazione del valore corretto di un effetto già noto almeno teoricamente.

Per le approssimazioni fatte, si può prendere per  $b$  il valore di minima distanza da  $r = 0$ , piuttosto che usare la definizione [3.60], e nel caso del Sole ( $b = R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^5 \text{ km}$ ,  $GM = 1.476 \text{ km}$ ) si ottiene una deflessione massima pari a:

$$\Delta\varphi_{\odot} = 1''.75 \quad [3.82]$$

Come anticipato, nel caso dell'equazione radiale delle geodetiche *null-like*, si può riscrivere l'eq. [3.58] facendo uso della definizione data di parametro di impatto apparente. Poiché si è visto che l'integrale primo del moto  $L$  non influisce sulla dinamica, è possibile ridefinire il parametro affine, anche perché a differenza del caso *time-like* non gli si può dare un significato fisico. Allora:

$$\tau = L\lambda \quad [3.83]$$

Dove  $\tau$  indica semplicemente il nuovo parametro e non il tempo proprio, che non è definito per un fotone.

### 3 – Studio delle Orbite nella Metrica di Schwarzschild

---

Segue che l'eq. [3.58] ha la forma alternativa:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{1}{r^2} \quad [3.84]$$

Per cui si può definire alternativamente il potenziale efficace:

$$B^{-2}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{1}{r^2} \quad [3.85]$$

$$B^{-2}(r) = \frac{V(r)}{L^2} \quad [3.86]$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{B^2} \quad [3.87]$$

Il valore di  $b$  determina la scelta dell'orbita, mentre  $B^2$  dipende solo dalla geometria di Schwarzschild.

In questo caso si può parlare di “potenziale di parametro di impatto apparente”  $B(r)$  e un raggio luminoso per arrivare ad un valore  $r$  della coordinata radiale deve soddisfare la condizione di accessibilità:

$$b \leq B(r) \quad [3.88]$$

Si chiarisce pertanto quanto anticipato definendo in [3.61] il parametro di impatto critico  $b_{crit}$ :

- Se  $b \gg b_{crit}$ , allora l'orbita è quasi retta se non per una piccola deflessione di un angolo  $\Delta\varphi = \frac{4GM}{b}$ .
- Se  $b \gtrsim b_{crit}$ , allora il fascio compie diverse orbite intorno alla sorgente prima di tornare all'infinito.
- Se  $b < b_{crit}$ , allora il fascio cade direttamente dentro l'orizzonte degli eventi  $r = R_H$  poiché non ha punti di inversione.
- Se un fascio luminoso viene emesso vicino in  $r \approx R_H$ , allora può scappare all'infinito se e solo se  $b < b_{crit}$ , altrimenti ha un punto di apoapside e poi ricade su  $r = R_H$ .

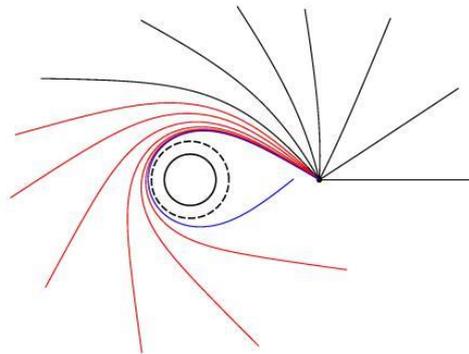


Figura 3.7: Rappresentazione di geodetiche *null-like* percorse da diversi fasci luminosi (per differenti valori di  $b$ ) nella geometria di Schwarzschild.

# BIBLIOGRAFIA

Misner, C., Thorne, K. and Wheeler, J., *Gravitation*, New York, W. H. Freeman and Company, 1973

Schutz B., *A First Course in General Relativity*, Cambridge, Cambridge University Press, 2022, III° edizione

Wald R. M., *General Relativity*, Chicago, The University of Chicago Press, 1984

Weinberg S., *Gravitation and Cosmology*, New York and Toronto, John Wiley and Sons, Inc., 1972

Barone V., *Relatività – Principi e Applicazioni*, Torino, Bollati Boringhieri, 2004

Casadio R., *Elements of General Relativity*, Bologna, Note del corso di “*Elementi della Teoria della Relatività Generale*”, 2022