

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Studio di alcuni modelli di catene di spin esattamente solubili

Relatore:
Prof. Francesco Ravanini

Presentata da:
Katja Brunelli

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

In questa tesi verranno presentati alcuni modelli elementari di catene di spin. Nei primi due capitoli saranno discusse le catene XY, XXX e XXZ; in particolare si scriverà l'Hamiltoniana che le rappresenta e verranno raffigurati i rispettivi diagrammi di fase. Nell'ultimo capitolo verranno introdotti l'algebra di Yang-Baxter, gli operatori Lax e la Transfer Matrix, elementi necessari per la diagonalizzazione dell'Hamiltoniana tramite il metodo dell'Algebraic Bethe Ansatz.

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | 1 |
| 1 Catena XY | 4 |
| 1.1 Hamiltoniana della catena XY | 4 |
| 1.2 Diagonalizzazione dell'Hamiltoniana | 5 |
| 1.3 Diagramma di fase e termodinamica del modello | 7 |
| 2 Catena XXZ | 10 |
| 2.1 Catena XXX | 10 |
| 2.1.1 Due siti | 10 |
| 2.1.2 N siti | 12 |
| 2.2 Catena XXZ | 15 |
| 2.2.1 Esempio: due siti | 16 |
| 2.2.2 Limiti di Ising | 17 |
| 2.2.3 Diagramma di fase | 17 |
| 3 Algebraic Bethe Ansatz | 19 |
| 3.1 Equazione di Yang-Baxter | 19 |
| 3.2 Operatori Lax | 21 |
| 3.3 Transfer Matrix | 22 |
| 3.4 Algebraic Bethe Ansatz | 25 |
| Conclusioni | 29 |
| A Elementi di Calcolo Tensoriale | 30 |
| B Equazione di Yang-Baxter e Braid Group | 32 |
| Bibliografia | 36 |

Introduzione

In fisica, non è così scontato che i sistemi che si studiano siano integrabili, soprattutto quando essi presentano un grande numero di gradi di libertà. Le catene di spin rappresentano in molti casi un ottimo esempio di un sistema unidimensionale integrabile non banale composto da N elementi.

Le catene di spin furono introdotte per la prima volta da Heisenberg in un articolo del 1928 [1], in cui venne presentata quella che oggi è nota come "catena di Heisenberg" o catena XXX. Questo modello consiste in un reticolo unidimensionale che presenta su ogni sito una variabile di spin, che interagisce solo col suo prossimo vicino ("nearest neighbour interaction") in modo isotropo nello spazio tridimensionale. L'idea originale di Heisenberg era di considerare un reticolo unidimensionale con N siti, su ognuno dei quali è posto un ago magnetico quantistico libero di ruotare nello spazio, con spin $1/2$. Successivamente, sono stati sviluppati diversi modelli di catene di spin, come la catena XY e la catena XXZ. Quest'ultima, a differenza della catena di Heisenberg, presenta spin che interagiscono in modo anisotropo su uno dei tre assi. Invece, la catena XY presenta spin che interagiscono solamente sul piano $x - y$. I modelli XY e XXX, come si è trovato in seguito, sono integrabili anche in presenza di un campo magnetico esterno, a differenza della catena XXZ.

Il problema che si pone per risolvere i diversi modelli di catene di spin e ottenere informazioni fisiche sul sistema, è quello di diagonalizzare l'Hamiltoniana che descrive il modello. Per risolvere questo problema, poco dopo la pubblicazione dell'articolo di Heisenberg, Hans Bethe propose in un articolo del 1931 un metodo oggi noto come *Bethe Ansatz* [2]. In questa tesi verrà presentata una variante del metodo originale, l'*Algebraic Bethe Ansatz* [3][4][5][6], ideato a San Pietroburgo tra gli anni '80 e '90, che fa uso dell'algebra di Yang-Baxter della Transfer Matrix per generare funzioni d'onda attraverso l'applicazione di determinati operatori. Questo approccio può essere considerato la versione quantistica del Metodo dello Scattering Inverso.

Capitolo 1

Catena XY

1.1 Hamiltoniana della catena XY

Il modello integrabile più semplice di catena di spin è la catena XY immersa in un campo magnetico [7]. Tale catena consiste in un reticolo unidimensionale che presenta su ognuno degli N siti una variabile di spin ed è descritta dall'Hamiltoniana:

$$H = \frac{J}{2} \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + h \sigma_j^z \right], \quad (1.1)$$

dove h è il campo magnetico diretto lungo l'asse z e σ_j^α sono osservabili che si possono scrivere come¹:

$$\sigma_j^\alpha = \overset{1}{\downarrow} \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I} \otimes \overset{j}{\downarrow} \sigma^\alpha \otimes \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \overset{N}{\downarrow} \mathbb{I}, \quad (1.2)$$

dove σ^α con $\alpha = x, y, z$ sono le matrici di Pauli:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

che rappresentano operatori di spin-1/2 sul j -esimo sito. σ_j^α sono operatori che agiscono sullo spazio:

$$\overset{1}{\downarrow} \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \overset{j}{\downarrow} \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \overset{N}{\downarrow} \mathbb{C}^2 \quad (1.4)$$

di dimensione 2^N ed agiscono in modo non banale solo sul j -esimo spazio.

Gli spin interagiscono solo col loro vicino attraverso un'interazione detta "nearest neighbour interaction" e lo fanno in modo anisotropo, così che l'interazione tra le componenti z sia trascurabile. L'anisotropia dell'interazione tra le componenti x e y è parametrizzata

¹Per una definizione del prodotto tensoriale e delle sue proprietà si veda l'Appendice A.

dal *parametro di anisotropia* γ . h e γ saranno considerati adimensionali e l'energia di scala fissata a $J = -1$.

Non è necessario studiare il problema per ogni valore di h e γ in quanto il modello presenta delle simmetrie. In particolare, una rotazione di $\pi/2$ lungo l'asse z equivale a un cambio di segno a γ ; e una riflessione sul piano $x - y$ equivale a cambiare segno al campo magnetico.

1.2 Diagonalizzazione dell'Hamiltoniana

Una volta scritta l'Hamiltoniana, ci si pone il problema di diagonalizzarla. Come prima cosa, si impongono le condizioni al contorno periodiche $\sigma_{j+N}^\alpha = \sigma_j^\alpha$ che stanno ad indicare che il primo sito interagisce con l' N -esimo sito come se fosse suo vicino.

Non è conveniente lavorare direttamente con gli operatori di spin, quindi si riscrive l'Hamiltoniana in funzione di fermioni con spin non definito ψ_j attraverso una trasformata di Jordan-Wigner [8]. Come prima cosa, si definiscono gli operatori che agiscono su un sito nel seguente modo:

$$\sigma_j^+ = \frac{\sigma_j^x + i\sigma_j^y}{2} \equiv f_j^\dagger, \quad \sigma_j^- = \frac{\sigma_j^x - i\sigma_j^y}{2} \equiv f_j, \quad \sigma_j^z = \mathbb{I} - 2f_j^\dagger f_j. \quad (1.5)$$

In questo modo si ottengono le corrette relazioni di anti-commutazione fermioniche sullo stesso sito $\{f_j^\dagger, f_j\} = \mathbb{I}$, ma considerando siti diversi si trovano delle relazioni di commutazione non fermioniche $[f_j^\dagger, f_k] = 0$. Visto che si vuole scrivere un'Hamiltoniana completamente fermionica, bisogna fare delle ulteriori sostituzioni. In particolare, si definiscono gli operatori di creazione e distruzione:

$$\psi_j^\dagger = e^{(+i\pi \sum_{k=1}^{j-1} f_k^\dagger f_k)} \cdot f_j^\dagger, \quad \psi_j = e^{(-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} f_k^\dagger f_k)} \cdot f_j, \quad \psi_j^\dagger \psi_j = f_j^\dagger f_j. \quad (1.6)$$

Questi differiscono dai (1.5) solo di una fase $e^{(\pm i\pi \sum_{k=1}^{j-1} f_k^\dagger f_k)}$ determinata dal numero di modi fermionici occupati $k = 1, \dots, j-1$. Se la fase è $+1$ il numero di modi occupati è pari, mentre se è -1 i modi occupati sono dispari. Dagli operatori così trasformati si ottengono le corrette relazioni di anti-commutazione fermioniche:

$$\{\psi_i^\dagger, \psi_i\} = \mathbb{I}, \quad \{\psi_i^\dagger, \psi_j^\dagger\} = 0, \quad \{\psi_i, \psi_j\} = 0. \quad (1.7)$$

Utilizzando la trasformazione inversa:

$$\begin{aligned} \sigma_j^+ &= e^{(+i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \psi_k^\dagger \psi_k)} \cdot \psi_j = \prod_{k=1}^{j-1} (1 - 2\psi_k^\dagger \psi_k) \psi_j, \\ \sigma_j^- &= e^{(-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \psi_k^\dagger \psi_k)} \cdot \psi_j = \prod_{k=1}^{j-1} (1 - 2\psi_k^\dagger \psi_k) \psi_j^\dagger, \\ \sigma_j^z &= \mathbb{I} - 2f_j^\dagger f_j, \end{aligned} \quad (1.8)$$

si può scrivere la nuova Hamiltoniana come:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\psi_j^\dagger \psi_{j+1} + \psi_{j+1}^\dagger \psi_j + \gamma \psi_j^\dagger \psi_{j+1}^\dagger + \gamma \psi_{j+1} \psi_j \right) + h \sum_{j=1}^N \psi_j^\dagger \psi_j - \frac{hN}{2} + \frac{\mu_N^x}{2} \left(\psi_N^\dagger \psi_1 + \psi_1^\dagger \psi_N + \gamma \psi_N^\dagger \psi_1^\dagger + \gamma \psi_1 \psi_N \right), \quad (1.9)$$

dove

$$\mu_N^x \equiv \prod_{j=1}^N \left(1 - 2\psi_j^\dagger \psi_j \right) = \prod_{j=1}^N \sigma_j^z \quad (1.10)$$

è l'operatore di parità. Scritta in questo modo, l'Hamiltoniana descrive dei fermioni che si propagano sul reticolo e che sono creati e distrutti in coppie. Per valori non nulli di γ , l'Hamiltoniana (1.1) non commuta con $\sum_j \sigma_j^z$, quindi nella (1.9) il numero di fermioni non è conservato. Al contrario, viene conservata la loro parità in quanto vengono creati e distrutti in coppie, infatti:

$$[\mu_N^x, H] = 0. \quad (1.11)$$

I valori che può assumere μ_N^x sono $\mu_N^x = \pm 1$. $\mu_N^x = +1$ indica un numero pari di particelle e richiede che si impongano condizioni al contorno anti-periodiche, mentre $\mu_N^x = -1$ indica un numero dispari di particelle e richiede condizioni al contorno periodiche. In questo modo, l'Hamiltoniana si può dividere nella somma di due termini corrispondenti ai due diversi casi:

$$H = \frac{1 + \mu_N^x}{2} H^+ + \frac{1 - \mu_N^x}{2} H^-. \quad (1.12)$$

Le Hamiltoniane che governano i due casi si possono scrivere nella forma compatta:

$$H^\pm = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\psi_j^{(\pm)\dagger} \psi_{j+1}^{(\pm)} + \psi_{j+1}^{(\pm)\dagger} \psi_j^{(\pm)} + \gamma \psi_j^{(\pm)\dagger} \psi_{j+1}^{(\pm)\dagger} + \gamma \psi_{j+1}^{(\pm)} \psi_j^{(\pm)} - 2h \psi_j^{(\pm)\dagger} \psi_{j+1}^{(\pm)} \right) - \frac{hN}{2}, \quad (1.13)$$

dove l'apice (+) indica un numero pari di particelle, mentre (-) indica un numero dispari di particelle. In questo modo si evidenzia che i due settori sono descritti dalla stessa Hamiltoniana, ma a causa delle diverse condizioni al contorno, a ognuno corrisponde un diverso spazio di Fock.

Per proseguire è necessario spostarsi nello spazio di Fourier, definendo:

$$\psi_j^{(\pm)} = \frac{e^{i\pi/4}}{N} \sum_{q \in \Gamma_\pm} e^{i\frac{2\pi}{N} qj} \psi_q, \quad \psi_q \equiv e^{-i\pi/4} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N} qj} \psi_j^{(\pm)}, \quad (1.14)$$

dove $\Gamma_{\nu_N^x}$ è il range a cui appartiene q , che è:

$$q \in \mathbb{N} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, N - \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad \nu_N^x = +1 \quad (\text{Numero pari di particelle}) \quad (1.15)$$

$$q \in \mathbb{N} = 0, 1, \dots, N - 1 \quad \text{per} \quad \nu_N^x = -1 \quad (\text{Numero dispari di particelle}). \quad (1.16)$$

Utilizzando queste definizioni si può scrivere l'Hamiltoniana nello spazio di Fourier, che è esprimibile come somma di matrici 2×2 :

$$H^\pm = \frac{1}{2N} \sum_{q \in \Gamma_\pm} (\psi_q^\dagger \quad \psi_{-q}) \begin{pmatrix} h - \cos\left(\frac{2\pi}{N}q\right) & -\gamma \sin\left(\frac{2\pi}{N}q\right) \\ -\gamma \sin\left(\frac{2\pi}{N}q\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{N}q\right) - h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_q \\ \psi_{-q}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Per diagonalizzare l'Hamiltoniana è sufficiente diagonalizzare le matrici 2×2 e questo è possibile attraverso una trasformazione di Bogoliubov, che corrisponde a una rotazione $O(2)$ nello spazio di Fourier:

$$\begin{pmatrix} \psi_q \\ \psi_{-q}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_q & \sin \theta_q \\ -\sin \theta_q & \cos \theta_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_q \\ \chi_{-q}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

dove θ_q è l'angolo di Bogoliubov ed è definito da:

$$\tan(2\theta_q) = \frac{\gamma \sin\left(\frac{2\pi}{N}q\right)}{h - \cos\left(\frac{2\pi}{N}q\right)}. \quad (1.19)$$

L'Hamiltoniana si può ora riscrivere in funzione di quasi-particelle di Bogoliubov. In questa forma, l'Hamiltoniana descrive fermioni liberi:

$$H^\pm = \frac{1}{N} \sum_{q \in \Gamma_\pm} \varepsilon\left(\frac{2\pi}{N}q\right) \left\{ \chi_q^\dagger \chi_q - \frac{N}{2} \right\}, \quad (1.20)$$

e ha come spettro

$$\varepsilon(\alpha) \equiv \sqrt{(h - \cos \alpha)^2 + \gamma^2 \sin^2 \alpha}. \quad (1.21)$$

1.3 Diagramma di fase e termodinamica del modello

Attraverso uno studio più approfondito delle due situazioni presentate nel paragrafo precedente, si può ricavare il diagramma di fase a temperatura zero, mostrato in Fig.1.1. Di tale approfondimento verranno riportati soltanto i risultati.

Il modello presenta due transizioni di fase quantistiche, che corrispondono ai luoghi nel piano (γ, h) dove il minimo dello spettro (1.21) risulta essere zero. In particolare, la prima transizione di fase si trova per i valori $\gamma = 0$ e $|h| < 1$ e corrisponde al modello isotropo XX, descrivibile da una teoria di campo conforme con $c = 1$. La seconda transizione di fase si trova per il valore $|h| = 1$ ed è descrivibile da una teoria di campo conforme con $c = 1/2$. La retta $h = 1$ separa una fase doppiamente degenere da una non degenere, mentre la retta $\gamma = 1$ corrisponde al modello di Ising. Infine, lungo la curva $\gamma^2 + h^2 = 1$ la funzione d'onda del ground state è fattorizzata in prodotti di stati a singolo spin. Si noti che le transizioni di fase si osservano soltanto nel limite termodinamico.

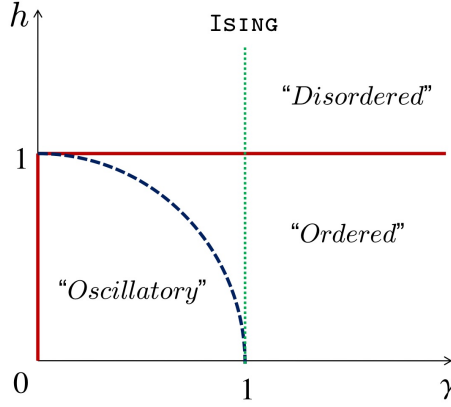


Figura 1.1: Diagramma di fase a temperatura zero della catena XY.

È possibile scrivere la funzione di partizione, grazie alla quale si può ricavare la termodinamica del modello, che è essenzialmente quella di fermioni liberi.

Per $h < 1$ si ha la funzione di partizione:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \sum e^{-\beta E_i} = & 2^{N-1} \left\{ \prod_{q=0}^{N-1} \cosh \left[\frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\frac{2\pi}{N} q + \frac{\pi}{N} \right) \right] + \prod_{q=0}^{N-1} \sinh \left[\frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\frac{2\pi}{N} q + \frac{\pi}{N} \right) \right] \right\} \\ & + 2^{N-1} \left\{ \prod_{q=0}^{N-1} \cosh \left[\frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\frac{2\pi}{N} q \right) \right] + \prod_{q=0}^{N-1} \sinh \left[\frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\frac{2\pi}{N} q \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

e l'energia libera per sito:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \mathcal{Z} \\ = & -\frac{1}{\beta} \ln 2 - \frac{1}{\pi \beta} \int_0^\pi \ln \cosh \left[\frac{\beta}{2} \varepsilon(\omega) \right] d\omega - \frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left[1 + \prod_{q=0}^{N-1} \tanh \frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\frac{2\pi}{N} q \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Mentre nel caso $h > 1$ si ha la funzione di partizione:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \sum e^{-\beta E_i} = & 2^{N-1} \left\{ \prod_{q=0}^{N-1} \cosh \left[\frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\frac{2\pi}{N} q + \frac{\pi}{N} \right) \right] + \prod_{q=0}^{N-1} \sinh \left[\frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\frac{2\pi}{N} q + \frac{\pi}{N} \right) \right] \right\} \\ & + 2^{N-1} \left\{ \prod_{q=0}^{N-1} \cosh \left[\frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\frac{2\pi}{N} q \right) \right] - \prod_{q=0}^{N-1} \sinh \left[\frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\frac{2\pi}{N} q \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

e l'energia libera per sito:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{\beta} \ln 2 - \frac{1}{\pi\beta} \int_0^\pi \ln \cosh \left[\frac{\beta}{2} \varepsilon(\omega) \right] d\omega. \quad (1.25)$$

Conoscendo l'energia libera è possibile calcolare la magnetizzazione attraverso la relazione:

$$m = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}. \quad (1.26)$$

In particolare, se questa derivata viene calcolata nel valore $h = 0$ si ottiene la magnetizzazione residua, detta anche parametro d'ordine. Se quest'ultima risulta essere non nulla si trova il sistema in una fase ordinata, ovvero gli spin tendono a ordinarsi in una direzione e si ha che il numero di spin up è diverso dal numero di spin down. Al contrario, se la magnetizzazione residua è nulla, il sistema si trova in uno stato disordinato, con un numero uguale di spin up e down.

Capitolo 2

Catena XXZ

2.1 Catena XXX

Per semplicità, verrà prima analizzato il caso in cui il reticolo della catena XXX consiste solamente di due siti [9].

2.1.1 Due siti

Com'è noto, gli osservabili su ogni sito devono essere descritti dall'identità \mathbb{I} e dalle matrici di Pauli $\vec{\sigma}$ (1.3)¹.

L'Hamiltoniana di una catena XXX a due siti si può esprimere in funzione delle matrici di Pauli e della matrice di permutazione (A.4):

$$\begin{aligned} H_{12} &= \frac{J}{4}(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) = \frac{J}{4}(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y + \sigma_1^z \sigma_2^z - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \\ &= \frac{J}{4}(\sigma^x \otimes \sigma^x + \sigma^y \otimes \sigma^y + \sigma^z \otimes \sigma^z - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \\ &= \frac{J}{2}(\mathcal{P} - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Una volta scritta l'Hamiltoniana, ci si pone il problema della diagonalizzazione:

$$H_{12} |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \tag{2.2}$$

¹In seguito si userà talvolta la notazione $\vec{\sigma}$ per indicare il vettore 3D di componenti $(\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$.

È facile verificare che la soluzione è data da:

$$\begin{aligned}
|\psi_{(1,1)}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \quad \text{con } E = 0, \\
|\psi_{(1,0)}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \quad \text{con } E = 0, \\
|\psi_{(1,-1)}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \quad \text{con } E = 0, \\
|\psi_{(0,0)}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \quad \text{con } E = -J,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

dove $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ rappresentano rispettivamente spin up e spin down:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Sfruttando la simmetria $SU(2)$ del modello, è possibile riscrivere il risultato ottenuto utilizzando gli operatori di spin totale:

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2}(\vec{\sigma} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \vec{\sigma}). \tag{2.5}$$

In particolare, usando la relazione

$$\begin{aligned}
\vec{S}^2 &= \frac{1}{4}(\vec{\sigma} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \vec{\sigma})^2 \\
&= \frac{1}{4}(\vec{\sigma}^2 \otimes \mathbb{I} + 2\vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma} + \mathbb{I} \otimes \vec{\sigma}^2) \\
&= \frac{1}{2}\sigma \otimes \sigma + \frac{3}{2}\mathbb{I} \otimes \mathbb{I},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

si può riscrivere l'Hamiltoniana del modello come:

$$H_{12} = \frac{J}{4}(\vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma} - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) = \frac{J}{2}(\vec{S}^2 - 2\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}). \tag{2.7}$$

Per quanto riguarda la diagonalizzazione dell'Hamiltoniana appena ricavata, si può sfruttare la nota relazione $\vec{S}^2 |S, S^z\rangle = S(S+1) |S, S^z\rangle$, ottenendo così:

$$H_{12} |S, S^z\rangle = \frac{J}{2}(S(S+1) - 2) |S, S^z\rangle, \quad S^z = -S, \dots, +S; \quad S = 0, 1. \tag{2.8}$$

Il risultato trovato è consistente con quello ottenuto in precedenza, in quanto per $S = 1$ si ha uno stato di tripletto con $E = 0$, mentre per $S = 0$ si ha uno stato di singoletto con $E = -J$.

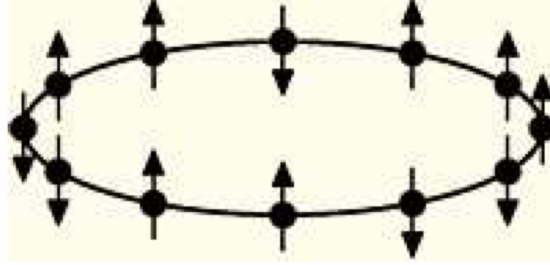


Figura 2.1: Schematizzazione di una catena di spin con topologia chiusa.

2.1.2 N siti

Gli osservabili per il problema a N siti sono quelli introdotti nel capitolo precedente (1.2)². Come nel caso della catena XY, per scrivere l'Hamiltoniana si sceglie una topologia chiusa, ovvero si considerano condizioni al contorno periodiche. Si può vedere una schematizzazione del modello in Fig.2.1. L'Hamiltoniana per il problema a N siti risulta quindi essere:

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} H_{n,n+1} + H_{N,1}, \quad (2.9)$$

dove l'Hamiltoniana a due siti è:

$$H_{ij} = \frac{J}{4}(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}). \quad (2.10)$$

L'Hamiltoniana (2.9) è invariante per traslazione e l'operatore corrispondente a questa simmetria è:

$$\Pi = \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{23} \dots \mathcal{P}_{L-1,L} = e^{-i\mathbb{P}}, \quad (2.11)$$

dove \mathcal{P} è l'operatore di permutazione (A.4) e \mathbb{P} è l'operatore della quantità di moto. Π commuta con l'Hamiltoniana e il suo ruolo è quello di spostare ogni sito del reticolo di un posto verso destra.

L'Hamiltoniana si può anche riscrivere in funzione degli operatori di spin totale:

$$H = -J \sum_{n=1}^N \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1} = -J \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2}(S_n^+ S_{n+1}^- + S_n^- S_{n+1}^+) + S_n^z S_{n+1}^z \right], \quad (2.12)$$

dove $S_n^\pm \equiv S_n^x \pm iS_n^y$ sono gli operatori che invertono la direzione dello spin e valgono le relazioni di commutazione:

$$[S_n^z, S_{n'}^\pm] = \pm S_n^\pm \delta_{nn'}, \quad [S_n^+, S_{n'}^-] = 2S_n^z \delta_{nn'}. \quad (2.13)$$

²In particolare, si ricordi che questi si scrivono come: $\sigma_j^\alpha = \overset{1}{\downarrow} \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I} \otimes \overset{j}{\downarrow} \sigma^\alpha \otimes \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \overset{N}{\downarrow} \mathbb{I}$, dove σ^α sono le matrici di Pauli.

Per $J > 0$ è favorito un allineamento ferromagnetico, mentre per $J < 0$ si ha un allineamento anti-ferromagnetico.

La catena di Heisenberg presenta un'invarianza per traslazioni e per rotazioni $SU(2)$. Dato che il modello rimane integrabile anche in seguito all'applicazione di un campo magnetico esterno, per esempio sull'asse z , si considera solo la simmetria rotazionale $SU(1)$ attorno all'asse z , che implica la conservazione della terza componente dello spin totale $S^z \equiv \sum_{n=1}^N S_n^z$: $[H, S^z] = 0$. Visto che la magnetizzazione è conservata, si può riscrivere S^z come $S^z = N/2 - R$, dove R è il numero di spin down.

Nel caso $R = 0$ si ha un singolo autostato $|0\rangle$, che risolvendo l'equazione agli autovalori $H|0\rangle = E_0|0\rangle$ risulta essere:

$$|0\rangle \equiv |\uparrow \dots \uparrow\rangle \quad \text{con energia} \quad E_0 \equiv -\frac{J}{4}N. \quad (2.14)$$

Nel caso con un solo spin down $R = 1$, gli N vettori della base sono contrassegnati dalla posizione dello spin down:

$$|n\rangle = S_n^- |0\rangle \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.15)$$

Con questi vettori si possono costruire N combinazioni lineari che rispettano la simmetria traslazionale, come l'invarianza di H rispetto a traslazioni discrete:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ikn} |n\rangle \quad \text{per numeri d'onda} \quad k = \frac{2\pi m}{N}, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (2.16)$$

I vettori (2.16) sono autostati dell'operatore di traslazione con autovalori e^{ik} e di H con autovalori:

$$E = E_0 + J(1 - \cos k). \quad (2.17)$$

I vettori $|\psi\rangle$ rappresentano eccitazioni di *magnoni* ($\Delta S = 1$), nei quali lo stato $|0\rangle$ che presenta tutti spin up è periodicamente perturbato da un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$. Si noti che il caso $k = 0$ rappresenta proprio lo stato degenero $|0\rangle$.

Considerando il caso generale con R spin down [7], si possono riscrivere i vettori $|\psi\rangle$ come:

$$|\psi\rangle = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_R \leq N} f(n_1, \dots, n_R) |n_1, \dots, n_R\rangle, \quad (2.18)$$

dove $f(n_1, \dots, n_R)$ sono le funzioni d'onda (non normalizzate):

$$f(n_1, \dots, n_R) = \sum_{\mathcal{P}} \exp \left[i \sum_{j=1}^R k_{\mathcal{P}j} n_j + \frac{i}{2} \sum_{l < j} \theta(k_{\mathcal{P}l}, k_{\mathcal{P}j}) \right]. \quad (2.19)$$

La somma si estende su tutte le $R!$ permutazioni \mathcal{P} dei modi in cui si possono assegnare le quasi-quantità di moto a ogni spin down e $\theta(k_l, k_j) = -\theta(k_j, k_l)$ è lo shift di fase

antisimmetrico. Risolvendo l'equazione agli autovalori $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ si trovano i valori dell'energia:

$$E = E_0 + J \sum_{j=1}^R (1 - \cos k_j). \quad (2.20)$$

Rimangono adesso da trovare le condizioni che determinano i valori k_j . Per gli autostati deve valere la relazione:

$$2f(n_1, \dots, n_j, n_j+1, \dots, n_R) = f(n_1, \dots, n_j, n_j, \dots, n_R) + f(n_1, \dots, n_j+1, n_j+1, \dots, n_R), \quad (2.21)$$

per $j = 1, \dots, R$. Questa condizione fissa lo shift di fase e si può scrivere:

$$e^{i\theta(k_j, k_l)} = -\frac{e^{i(k_j+k_l)} + 1 - 2e^{ik_j}}{e^{i(k_j+k_l)} + 1 - 2e^{ik_l}}. \quad (2.22)$$

Scrivendo la (2.22) in forma reale, si ottiene la condizione:

$$2\cot\frac{\theta(k_j, k_l)}{2} = \cot\frac{k_j}{2} - \cot\frac{k_l}{2}, \quad j, l = 1, \dots, R. \quad (2.23)$$

Sfruttando la periodicità della catena XXX relativa a traslazioni di N siti $f(n_1, \dots, n_R) = f(n_2, \dots, n_R, n_1+N)$, si possono ricavare R relazioni tra gli shift di fase e le quasi-quantità di moto, dette *Equazioni di Bethe*:

$$Nk_j = 2\pi\tilde{I}_j + \sum_{l \neq j} \theta(k_j, k_l), \quad j = 1, \dots, R, \quad (2.24)$$

dove \tilde{I}_j sono degli interi $\tilde{I}_j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Le fasi (2.22) (2.23) non dipendono dalla differenza della quasi-quantità di moto della particella, quindi risultano esserci più possibilità di scelta dei numeri quantici rispetto agli stati nello spazio di Hilbert. A causa di ciò le Equazioni di Bethe (2.24) non risultano invarianti per traslazioni. Per risolvere questo problema si possono introdurre le *rapidità* λ_j per parametrizzare le quasi-quantità di moto:

$$\cot\frac{k_j}{2} = \lambda_j, \quad \text{oppure} \quad k_j = \frac{1}{i} \ln \frac{\lambda_j + i}{\lambda_j - i} = \pi - \theta_1(\lambda_j), \quad (2.25)$$

dove $\theta_n(\lambda) \equiv 2 \arctan \frac{\lambda}{n}$. A questo punto, si possono scrivere l'energia e la quantità di moto di un singolo magnone caratterizzato dalla quasi-quantità di moto k :

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= \frac{1}{i} \ln \frac{\lambda + i}{\lambda - i} = k, \\ \varepsilon_0(\lambda) &= -J \frac{dk}{d\lambda} = \frac{2J}{\lambda^2 + 1} = J(1 - \cos k). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si può riscrivere la fase di scattering in funzione delle rapidità:

$$\theta(k_j, k_l) = -\theta_2(\lambda_j - \lambda_l) + \pi \operatorname{sgn}[\Re(\lambda_j - \lambda_l)], \quad (2.27)$$

dove $\Re(x)$ è la parte reale di x e $\operatorname{sgn}(y) = \pm 1$ è il segno di y . Anche le Equazioni di Bethe (2.24) si possono riscrivere in funzione delle rapidità:

$$N\theta_1(\lambda_j) = 2\pi I_j + \sum_{l=1}^R \theta_2(\lambda_j - \lambda_l), \quad j = 1, \dots, R. \quad (2.28)$$

Lo stato adesso è definito da un nuovo set di numeri $\{I_j\}, j = 1, \dots, R$ detti numeri di Bethe. Infine, parametrizzando anche gli autostati con le rapidità, si possono scrivere le loro energie e le loro quantità di moto come:

$$\begin{aligned} E &= E_0 + J \sum_{j=1}^R \varepsilon_0(\lambda_j), \\ K &= \left[\sum_{j=1}^R p_0(\lambda_j) \right] \bmod 2\pi = \left[\pi R - \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^R I_j \right] \bmod 2\pi. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Il metodo appena utilizzato per risolvere la catena XXX è noto come *Coordinate Bethe Ansatz* ed è una versione moderna del procedimento proposto originariamente da Bethe.

2.2 Catena XXZ

Come detto in precedenza, il modello della catena XXZ introduce un'anisotropia nell'interazione degli spin sull'asse z , che può essere descritta dalla *costante di accoppiamento* Δ . L'Hamiltoniana del modello a N siti si può quindi scrivere come [10]:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z). \quad (2.30)$$

Anche in questo caso si impongono le condizioni al contorno periodiche $\vec{\sigma}_{i+N} = \vec{\sigma}_i$; e come l'Hamiltoniana della catena XXX, anche quella della catena XXZ risulta essere invariante per traslazioni descritte dall'operatore (2.11).

Se $\Delta = 0$ è possibile ricondursi alla catena XY, in quanto rimangono solo le interazioni sugli assi x e y .

L'operatore totale di spin delle tre componenti si può definire come:

$$S^\xi = \sum_{i=1}^N S_i^\xi, \quad \xi \in \{x, y, z\}. \quad (2.31)$$

Se nel caso isotropo l'Hamiltoniana commuta con l'operatore totale di spin di ogni componente, nel caso XXZ invece soltanto S^z rappresenta una simmetria per il modello, indipendentemente dal valore di Δ :

$$[H, S^z] = 0. \quad (2.32)$$

Ogni componente di S^z fornisce un contributo di $\pm 1/2$ agli autovalori, quindi si avrà lo spettro:

$$-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2}. \quad (2.33)$$

2.2.1 Esempio: due siti

L'esatto comportamento del sistema dipende dal valore di Δ . Per studiare più nel dettaglio i casi possibili, si può considerare l'Hamiltoniana per una catena composta di due siti:

$$H = -(\sigma^x \otimes \sigma^x + \sigma^y \otimes \sigma^y + \Delta \sigma^z \otimes \sigma^z) = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & -2 & 0 \\ 0 & -2 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

La matrice (2.34) è simmetrica a valori reali, quindi per il teorema spettrale è diagonalizzabile e ha autovalori reali, in particolare si trovano le coppie di autovettori e autovalori:

$$\begin{aligned} |\uparrow\uparrow\rangle; & \quad E = -\Delta, \\ |\downarrow\downarrow\rangle; & \quad E = -\Delta, \\ |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle; & \quad E = \Delta - 2, \\ |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle; & \quad E = \Delta + 2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

dove $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ indicano rispettivamente spin up e spin down (2.4).

Al variare di Δ si hanno le seguenti situazioni:

- $\Delta > 1$: il ground state è doppiamente degenere e può essere rappresentato dallo stato $|\uparrow\uparrow\rangle$ oppure dallo stato $|\downarrow\downarrow\rangle$, entrambi con energia $E = -\Delta$. La magnetizzazione totale risulta essere $M = S^z = 2$ e il sistema si trova in una fase ferromagnetica.
- $\Delta < 1$: il ground state risulta essere $|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$ con energia $E = \Delta - 2$. In questo caso la magnetizzazione totale è nulla $M = S^z = 0$ e il sistema si trova in una fase anti-ferromagnetica.

- $\Delta = 1$: questo caso è riconducibile al problema della catena XXX con simmetria globale $SU(2)$. In questa situazione si hanno tre autovalori coincidenti $E = -\Delta = -1$ che risultano essere quelli di minore energia, rendendo così il ground state multi-degenere. Questo fenomeno dà origine a una transizione di fase quantistica, che però si verifica solo a temperatura zero.
- $\Delta \rightarrow \pm\infty$: per studiare questo caso si può ricorrere al modello di Ising.

Per studiare i range di valori $\Delta < -1$ e $-1 < \Delta < +1$ è necessario applicare un campo magnetico esterno al sistema.

2.2.2 Limiti di Ising

Come menzionato in precedenza, per studiare il comportamento del sistema per $\Delta \rightarrow \pm\infty$ conviene utilizzare il modello di Ising. In particolare si può introdurre l'Hamiltoniana di Ising (per N siti):

$$H_{Ising} = \lim_{\Delta \rightarrow \pm\infty} \frac{H}{\Delta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta}\right), \quad (2.36)$$

che è indistinguibile dal modello di spin nel caso classico.

In particolare è valido il risultato ottenibile dal modello classico per cui se $\Delta \rightarrow +\infty$, coppie di spin paralleli danno un contributo nullo agli autovalori, mentre coppie di spin antiparalleli danno un contributo di $+1$. Il ground state risulta quindi essere ferromagnetico e si può scrivere come:

$$|\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle \quad \text{oppure} \quad |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle. \quad (2.37)$$

Al contrario, se $\Delta \rightarrow -\infty$ si avrà una situazione opposta, ovvero coppie di spin antiparalleli diminuiscono l'energia, quindi il ground state sarà anti-ferromagnetico. È tuttavia necessario fare una distinzione tra un numero pari e un numero dispari di siti. Se N è pari, il ground state si può scrivere come:

$$|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots\rangle \quad \text{oppure} \quad |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \dots\rangle. \quad (2.38)$$

Questi stati sono detti stati di Nèel, ed essendo N pari sono compatibili con le condizioni al contorno periodiche. Se invece N è dispari, il sito 1 e il sito N avranno lo spin orientato nello stesso verso, quindi non si ha la perfetta alternanza spin up/down che si trova negli stati di Nèel. Questo fenomeno è detto *frustrazione*.

2.2.3 Diagramma di fase

Nonostante il modello della catena XXZ non sia integrabile in presenza di un campo magnetico esterno, è utile considerare questo caso più generale per ottenere il diagramma

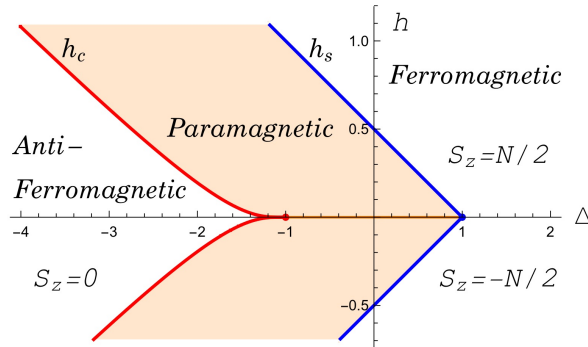


Figura 2.2: Diagramma di fase a temperatura zero della catena XXZ.

di fase. In particolare, si considera l'Hamiltoniana [7]:

$$H = -J \sum_{n=1}^N [S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y + \Delta S_n^z S_{n+1}^z] - 2h \sum_{n=1}^N S_n^z. \quad (2.39)$$

In Fig.2.2 [7] si può vedere il diagramma di fase che si ottiene per il modello XXZ. Oltre ai risultati ottenuti in precedenza, si può notare che nel range $-1 < \Delta < +1$ il sistema si trova in una fase paramagnetica con spettro continuo ed è descritto da una teoria di campo conforme $c = 1$.

Capitolo 3

Algebraic Bethe Ansatz

3.1 Equazione di Yang-Baxter

La relazione fondamentale di questo contesto è l'equazione di Yang-Baxter (YBE), che si può scrivere come:

$$\mathcal{R}_{12}(\lambda - \mu)\mathcal{R}_{13}(\lambda - \nu)\mathcal{R}_{23}(\mu - \nu) = \mathcal{R}_{23}(\mu - \nu)\mathcal{R}_{13}(\lambda - \nu)\mathcal{R}_{12}(\lambda - \mu). \quad (3.1)$$

Una soluzione della YBE (3.1) è data dalla matrice $\mathcal{R}(\lambda)$:

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lambda\mathbb{I} + i\mathcal{P}, \quad (3.2)$$

dove \mathcal{P} è la matrice di permutazione (A.4). La (3.2) risulta essere la matrice \mathcal{R} corrispondente alla catena XXX. $\mathcal{R}(\lambda)$ agisce su uno spazio $V \otimes V$, mentre la YBE agisce su uno spazio $V \otimes V \otimes V$. I termini che compaiono nella (3.1) si possono scrivere come:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}(\lambda) &= \mathcal{R}(\lambda) \otimes \mathbb{I}, \\ \mathcal{R}_{23}(\mu) &= \mathbb{I} \otimes \mathcal{R}(\mu), \\ \mathcal{R}_{13}(\lambda) &= \mathcal{P}_{23}\mathcal{R}_{12}(\lambda)\mathcal{P}_{23}, \quad \text{dove } \mathcal{P}_{23} = \mathbb{I} \otimes \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Gli indici indicano gli spazi su cui le matrici agiscono in modo non banale.

La YBE si può scrivere in maniera alternativa definendo $\check{\mathcal{R}} = \mathcal{P}\mathcal{R}$ e $d \equiv \lambda - \mu$:

$$\check{\mathcal{R}}_{12}(d)\check{\mathcal{R}}_{23}(\lambda)\check{\mathcal{R}}_{12}(\mu) = \check{\mathcal{R}}_{23}(\mu)\check{\mathcal{R}}_{12}(\lambda)\check{\mathcal{R}}_{23}(d). \quad (3.4)$$

Un'altra soluzione della YBE è data dalla matrice \mathcal{R} corrispondente alla catena XXZ, che si può scrivere come:

$$\mathcal{R}(\lambda) = e^\lambda R^+ - e^{-\lambda} R^-, \quad (3.5)$$

dove R^+ e R^- sono le matrici triangolari:

$$\begin{aligned}
R^+ &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}(\sigma^z+1)} & (q - q^{-1})\sigma^- \\ 0 & q^{\frac{1}{2}(-\sigma^z+1)} \end{pmatrix}, \\
R^- &= \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(q - q^{-1}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{2}(\sigma^z-1)} & 0 \\ -(q - q^{-1})\sigma^+ & q^{\frac{1}{2}(\sigma^z-1)} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Il parametro q è indice del fatto che per descrivere la catena XXZ è necessario usare l'algebra $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, ovvero il caso q -deformato del gruppo speciale lineare di Lie \mathfrak{sl}_2 .

Un altro modo in cui si può scrivere la matrice \mathcal{R} della catena XXZ è il seguente:

$$\mathcal{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh(\lambda + i\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\lambda) & \sinh(i\mu) & 0 \\ 0 & \sinh(i\mu) & \sinh(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(\lambda + i\mu) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Da un punto di vista fisico, la YBE descrive la fattorizzazione di uno scattering multi-particelle, una caratteristica dei sistemi integrabili 2D [11]. Da un punto di vista matematico invece si può considerare come una deformazione delle algebre di Lie o delle loro estensioni infinito dimensionali, note come algebre di Kac-Moody [12].

La YBE può avere diverse rappresentazioni grafiche, in Fig.3.1 si può vedere un esempio. Nell'Appendice B è mostrato come sia possibile avere un'ulteriore rappresentazione attraverso l'utilizzo del Braid Group.

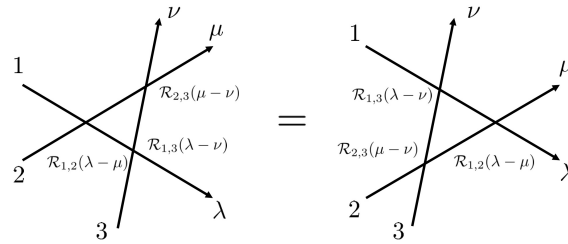


Figura 3.1: Rappresentazione grafica dell'equazione di Yang-Baxter.

3.2 Operatori Lax

Si prenda in considerazione la matrice \mathcal{R} della catena XXX (3.2). La matrice di permutazione \mathcal{P} può essere scritta come:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^z}{2} + \frac{1}{2} & \sigma^- \\ \sigma^+ & -\frac{\sigma^z}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Utilizzando la stessa forma, si può definire la matrice più generale:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} J^z + \frac{1}{2} & J^- \\ J^+ & -J^z + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

dove J^\pm, J^z sono i generatori dell'algebra \mathfrak{sl}_2 e soddisfano le relazioni:

$$\begin{aligned} [J^+, J^-] &= 2J^z \\ [J^z, J^\pm] &= \pm J^\pm. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A questo punto si può definire l'operatore Lax come:

$$L = \lambda \mathbb{I} + i\mathbb{P}, \quad (3.11)$$

che soddisfa la relazione fondamentale:

$$\mathcal{R}_{12}(\lambda_1 - \lambda_2)L_{1n}(\lambda_1)L_{2n}(\lambda_2) = L_{2n}(\lambda_2)L_{1n}(\lambda_1)\mathcal{R}_{12}(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (3.12)$$

Gli indici 1 e 2 denotano uno spazio ausiliario, mentre l'indice n indica lo spazio quantistico su cui agisce l'operatore. Se si indica con \mathcal{A} l'algebra definita dalla (3.12), allora si può scrivere che $L \in \text{End}(V) \otimes \mathcal{A}$.

Come l'equazione di Yang-Baxter, anche gli operatori Lax possono avere una rappresentazione grafica. In Fig.3.2 è mostrata la rappresentazione di L e della relazione fondamentale (3.12). Naturalmente a ogni matrice \mathcal{R} corrisponde un'algebra diversa, quindi

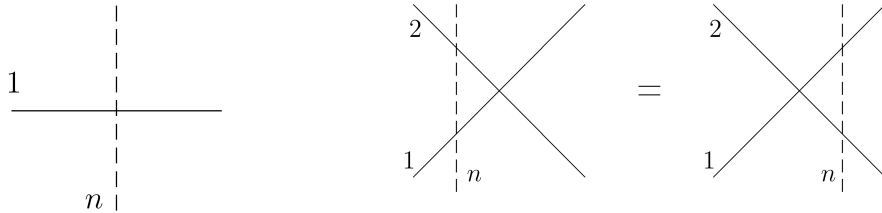


Figura 3.2: Rappresentazione grafica dell'operatore L e della relazione fondamentale.

considerando la matrice \mathcal{R} della catena XXZ (3.5) si può scrivere l'operatore Lax come:

$$L = e^\lambda L^+ - e^{-\lambda} L^-, \quad (3.13)$$

dove L^+, L^- sono le matrici triangolari che danno origine alle sub-algebre di Borel di $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ [13][14] :

$$L^+ = \begin{pmatrix} cA & B \\ 0 & cD \end{pmatrix}, \quad L^- = \begin{pmatrix} c^{-1}A^{-1} & 0 \\ C & c^{-1}D^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

c è una costante arbitraria e \mathcal{R} ed L soddisfano relazione fondamentale (3.12). Studiando i limiti $\lambda_i \rightarrow \pm\infty$ la (3.12) si può riscrivere come:

- $\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow +\infty$:

$$R_{12}^+ L_{1n}^+ L_{2n}^+ = L_{2n}^+ L_{1n}^+ R_{12}^+, \quad (3.15)$$

- $\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow -\infty$:

$$R_{12}^- L_{1n}^- L_{2n}^- = L_{2n}^- L_{1n}^- R_{12}^-, \quad (3.16)$$

- $\lambda_1 \rightarrow +\infty, \lambda_2 \rightarrow -\infty$:

$$R_{12}^+ L_{1n}^+ L_{2n}^- = L_{2n}^- L_{1n}^+ R_{12}^+. \quad (3.17)$$

3.3 Transfer Matrix

L'elemento chiave per l'implementazione dell'Algebraic Bethe Ansatz è la costruzione della *Transfer Matrix*, ma prima di introdurla è necessario definire la matrice di Monodromia:

$$T_a(\lambda) = L_{aN}(\lambda) L_{a(N-1)}(\lambda) \dots L_{a1}(\lambda). \quad (3.18)$$

Gli indici $1 \dots N$ si riferiscono agli spazi quantistici, mentre a indica lo spazio ausiliario; ed evidentemente $T(\lambda) \in \text{End}(V) \otimes \mathcal{A}^{\otimes N}$.

$T(\lambda)$ soddisfa la relazione fondamentale:

$$\mathcal{R}_{12}(\lambda_1 - \lambda_2) T_1(\lambda_1) T_2(\lambda_2) = T_2(\lambda_2) T_1(\lambda_1) \mathcal{R}_{12}(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (3.19)$$

È semplice dimostrare questa relazione nel caso $N = 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ab} T_a T_b &= \mathcal{R}_{ab} L_{a2} L_{a1} L_{b2} L_{b1} \\ &= \mathcal{R}_{ab} L_{a2} L_{b2} L_{a1} L_{b1} \\ &= L_{b2} L_{a2} \mathcal{R}_{ab} L_{a1} L_{b1} \\ &= L_{b2} L_{a2} L_{b1} L_{a1} \mathcal{R}_{ab} \\ &= L_{b2} L_{b1} L_{a2} L_{a1} \mathcal{R}_{ab} = T_b T_a \mathcal{R}_{ab}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

In Fig.3.3 e Fig.3.4 si possono vedere le rappresentazioni grafiche della matrice di Monodromia (3.18) e della relazione fondamentale (3.19). Per ottenere la Transfer Matrix

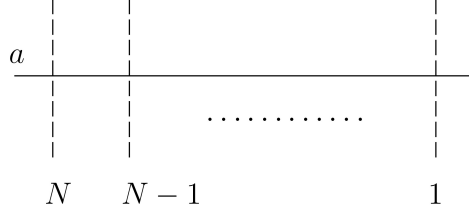


Figura 3.3: Rappresentazione grafica della matrice di Monodromia.

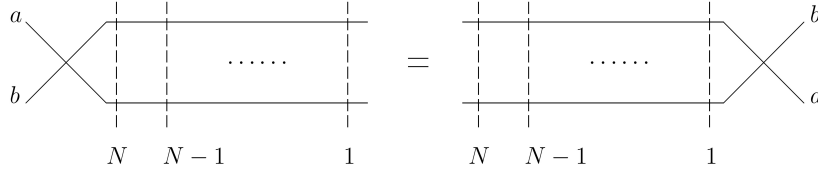


Figura 3.4: Rappresentazione grafica della relazione fondamentale.

dalla matrice di Monodromia si traccia sullo spazio ausiliario:

$$t(\lambda) = \text{Tr}_a[T_a(\lambda)], \quad (3.21)$$

ed evidentemente $t(\lambda) \in \mathcal{A}^{\otimes N}$. La Transfer Matrix costituisce una famiglia di operatori commutanti:

$$[t(\lambda), t(\lambda')] = 0, \quad (3.22)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} t(\lambda) t(\lambda') &= (\text{Tr}_a[T_a(\lambda)])(\text{Tr}_b[T_b(\lambda')]) \\ &= \text{Tr}_{ab}[T_a(\lambda)T_b(\lambda')] \\ &= \text{Tr}_{ab}[T_b(\lambda')T_a(\lambda)] \\ &= (\text{Tr}_b[T_b(\lambda')])(\text{Tr}_a[T_a(\lambda)]) = t(\lambda') t(\lambda). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Questa condizione è fondamentale perché è quella che assicura che il sistema sia integrabile. In particolare, la (3.23) è valida $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$, quindi tutti i fattori dell'espansione in serie commutano tra loro:

$$\sum_{n,m} \lambda^n \lambda'^m [t^{(n)}, t^{(m)}] = 0 \quad \rightarrow \quad [t^{(n)}, t^{(m)}] = 0 \quad \forall n, m. \quad (3.24)$$

Gli elementi $t^{(n)}$ sono detti *cariche in involuzione* e le prime due cariche corrispondono alla quantità di moto e all'energia.

Si può dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\left. \frac{d \ln(t(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \propto H = \sum_{j=1}^N H_{j,j+1}, \quad \text{dove} \quad H_{j,j+1} \propto \left. \frac{d\check{\mathcal{R}}_{j,j+1}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (3.25)$$

con condizioni al contorno periodiche $H_{N,N+1} = H_{N,1}$.

Come ipotesi di partenza si può imporre che sia lo spazio ausiliario sia gli spazi quantistici siano rappresentati dallo stesso spazio vettoriale, così da poter scrivere:

$$\mathcal{R}(0) \propto \mathcal{P}, \quad (3.26)$$

dove \mathcal{P} è la matrice di permutazione. Adesso bisogna sviluppare il calcolo:

$$\left. \frac{d \ln(t(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = t^{-1}(0)t'(0). \quad (3.27)$$

Come prima cosa si può calcolare $t(0)$. Utilizzando la relazione valida per ogni sistema fisico conosciuto $\text{Tr}_0[\mathcal{P}_{0N}] \propto \mathbb{I}$ si trova come risultato:

$$\begin{aligned} t(0) &= \text{Tr}_0[\mathcal{R}_{0N}(0) \mathcal{R}_{0,N-1}(0) \dots \mathcal{R}_{01}(0)] \\ &\propto \text{Tr}_0[\mathcal{P}_{0N} \mathcal{P}_{0,N-1} \dots \mathcal{P}_{01}] \\ &= \text{Tr}_0[\mathcal{P}_{N,N-1} \mathcal{P}_{N,N-2} \dots \mathcal{P}_{N1} \mathcal{P}_{0N}] \\ &= \mathcal{P}_{N,N-1} \mathcal{P}_{N,N-2} \dots \mathcal{P}_{N1} \text{Tr}_0[\mathcal{P}_{0N}] \\ &= \mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_{23} \dots \mathcal{P}_{N-1,N} = \Pi, \end{aligned} \quad (3.28)$$

dove Π è l'operatore di traslazione (2.11). Di conseguenza si può scrivere:

$$\begin{aligned} t^{-1}(0) &\propto \mathcal{P}_{1N} \mathcal{P}_{1,N-1} \dots \mathcal{P}_{13} \mathcal{P}_{12} \\ &= \mathcal{P}_{N-1,N} \mathcal{P}_{N-2,N-1} \dots \mathcal{P}_{23} \mathcal{P}_{12}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Come ultima cosa bisogna calcolare la derivata di $t(\lambda)$:

$$\begin{aligned} t'(0) &= \text{Tr}_0 \sum_i \mathcal{R}_{0N}(0) \dots \mathcal{R}'_{0i}(0) \dots \mathcal{R}_{01}(0) \\ &\propto \text{Tr}_0 \sum_i \mathcal{P}_{0N} \dots \mathcal{R}'_{0i}(0) \dots \mathcal{P}_{01} \\ &= \text{Tr}_0 \sum_i \mathcal{P}_{N,N-1} \dots \mathcal{P}_{N,i+1} \mathcal{R}'_{Ni}(0) \dots \mathcal{P}_{N1} \mathcal{P}_{0N} \\ &= \sum_i \mathcal{P}_{N,N-1} \dots \mathcal{P}_{N,i+1} \mathcal{R}'_{Ni}(0) \dots \mathcal{P}_{N1}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Utilizzando i risultati (3.29) e (3.30) si può riscrivere la (3.27) come:

$$\begin{aligned} t^{-1}(0)t'(0) &\propto \sum_i \mathcal{P}_{N1} \mathcal{P}_{N2} \dots \mathcal{P}_{N,N-2} \mathcal{P}_{N,N-1} \mathcal{P}_{N,N-1} \dots \mathcal{P}_{N,i+1} \dots \mathcal{R}'_{Ni} \dots \mathcal{P}_{N1} \\ &= \dots = \sum_i \tilde{\mathcal{R}}'_{i,i+1}(0). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Come esempio si può considerare il caso della catena XXZ. Si prenda in considerazione la matrice \mathcal{R} corrispondente al modello (3.7):

$$\mathcal{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh(\lambda + i\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\lambda) & \sinh(i\mu) & 0 \\ 0 & \sinh(i\mu) & \sinh(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(\lambda + i\mu) \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Si possono calcolare le seguenti quantità:

$$\mathcal{R}'(0) = \begin{pmatrix} \cosh(i\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh(i\mu) \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\mathcal{R}(0) = \sinh(i\mu)\mathcal{P},$$

$$\mathcal{R}^{-1}(0) = (\sinh(i\mu))^{-1}\mathcal{P}.$$

Utilizzando questi risultati si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{-1}(0)\mathcal{R}'(0) &= \frac{1}{\sinh(i\mu)} \begin{pmatrix} \cosh(i\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh(i\mu) \end{pmatrix} \\ &\propto \frac{1}{2} [\sigma^x \otimes \sigma^x + \sigma^y \otimes \sigma^y + \cosh(i\mu)(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sigma^z \otimes \sigma^z)]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sostituendo l'espressione appena ottenuta, la (3.27) diventa:

$$\begin{aligned} H &\propto \left. \frac{d \ln(t(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \\ &\propto -\frac{1}{2} \sum_i [\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_{i+1}^y + \cosh(i\mu)(\mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_{i+1} + \sigma_i^z \otimes \sigma_{i+1}^z)]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

È immediato notare che, imponendo $\Delta = \cosh(i\mu)$, l'Hamiltoniana ottenuta corrisponde a quella della catena XXZ (a meno di una costante). Quest'osservazione è importante perché grazie alla (3.24) si può costruire una serie di quantità conservate semplicemente calcolando le derivate:

$$\left. \frac{d^{(n)} \ln(t(\lambda))}{d^{(n)}\lambda} \right|_{\lambda=0} \propto H^{(n)}. \quad (3.36)$$

3.4 Algebraic Bethe Ansatz

In questo paragrafo verranno ricavati lo spettro e le equazioni del Bethe Ansatz per la rappresentazione dello spin s dell'algebra $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

L'obiettivo del Metodo dello Scattering Inverso quantistico è quello di diagonalizzare la Transfer Matrix e determinarne lo spettro e i rispettivi autostati. Ciò viene fatto attraverso l'utilizzo dell'Algebraic Bethe Ansatz [15].

Si ricordi la definizione della Transfer Matrix:

$$t(\lambda) = \text{Tr}_0[T_0(\lambda)] = \text{Tr}_0[L_{0N}(\lambda) \dots L_{01}(\lambda)], \quad (3.37)$$

dove $L_{0n}(\lambda)$ si può scrivere come:

$$L_{0n}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh\left(\lambda + \frac{i\mu}{2} + i\mu J^z\right) & \sinh(i\mu J^-) \\ \sinh(i\mu J^+) & \sinh\left(\lambda + \frac{i\mu}{2} - i\mu J^z\right) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

La prima cosa da fare è determinare uno stato di riferimento nel caso anti-ferromagnetico. In particolare, si consideri lo stato $|\omega\rangle$ su cui J^+ agisce come operatore di distruzione e sia $|\Omega\rangle$ il prodotto tensoriale di N stati del genere:

$$J_n^+ |\omega\rangle_n = 0, \quad |\Omega\rangle = |\omega\rangle \otimes \dots \otimes |\omega\rangle. \quad (3.39)$$

Applicando la matrice di Monodromia $T(\lambda)$ a $|\Omega\rangle$ si possono annullare i termini C_i in quanto annichiscono lo stato:

$$\begin{aligned} T(\lambda) |\Omega\rangle &= \begin{pmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} |\omega\rangle \otimes \dots \otimes |\omega\rangle \\ &= \begin{pmatrix} A_N \dots A_1 & \mathcal{B} \\ 0 & D_N \dots D_1 \end{pmatrix} |\Omega\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ 0 & \mathcal{D} \end{pmatrix} |\Omega\rangle. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Visto che la Transfer Matrix esegue la traccia su $T(\lambda)$, non è necessario conoscere l'esatta forma di \mathcal{B} , ma soltanto $\mathcal{A} + \mathcal{D}$. Sapendo che A_n e D_n agiscono su $|\omega\rangle$ nel seguente modo:

$$\sinh\left(\lambda + \frac{i\mu}{2} \pm i\mu J_n^z\right) |\omega\rangle_n = \sinh\left(\lambda + \frac{i\mu}{2} \pm i\mu s\right) |\omega\rangle_n, \quad (3.41)$$

si può dedurre che l'azione di \mathcal{A} e \mathcal{D} su $|\Omega\rangle$ sia:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} |\Omega\rangle &= \sinh\left(\lambda + \frac{i\mu}{2} + i\mu s\right)^N |\Omega\rangle \\ \mathcal{D} |\Omega\rangle &= \sinh\left(\lambda + \frac{i\mu}{2} - i\mu s\right)^N |\Omega\rangle. \end{aligned} \quad (3.42)$$

A questo punto è possibile scrivere come agisce la Transfer Matrix sullo stato di riferimento $|\Omega\rangle$:

$$t(\lambda) |\Omega\rangle = (\mathcal{A} + \mathcal{D}) |\Omega\rangle = \left[\sinh\left(\lambda + \frac{i\mu}{2} + i\mu s\right)^N + \sinh\left(\lambda + \frac{i\mu}{2} - i\mu s\right)^N \right] |\Omega\rangle. \quad (3.43)$$

Lo step successivo è capire come agisce $\mathcal{A} + \mathcal{D}$ su un generico stato di Bethe $|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \mathcal{B}(\lambda_1) \dots \mathcal{B}(\lambda_M) |\Omega\rangle. \quad (3.44)$$

Visto che è già nota l'azione di $\mathcal{A} + \mathcal{D}$ su $|\Omega\rangle$, rimangono solo da determinare le relazioni tra \mathcal{A} , \mathcal{D} e \mathcal{B} . In particolare si consideri la matrice \mathcal{R} della catena XXZ (3.7), che soddisfa la relazione algebrica fondamentale (3.19). Imponendo $\delta = \lambda_1 - \lambda_2$ si trovano le relazioni:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}(\lambda_1), \mathcal{A}(\lambda_2)] &= [\mathcal{B}(\lambda_1), \mathcal{B}(\lambda_2)] = [\mathcal{C}(\lambda_1), \mathcal{C}(\lambda_2)] = [\mathcal{D}(\lambda_1), \mathcal{D}(\lambda_2)] = 0, \\ a(\delta)\mathcal{B}(\lambda_1)\mathcal{A}(\lambda_2) &= b(\delta)\mathcal{A}(\lambda_2)\mathcal{B}(\lambda_1) + c\mathcal{B}(\lambda_2)\mathcal{A}(\lambda_1), \\ a(\delta)\mathcal{B}(\lambda_2)\mathcal{D}(\lambda_1) &= b(\delta)\mathcal{D}(\lambda_1)\mathcal{B}(\lambda_2) + c\mathcal{B}(\lambda_1)\mathcal{D}(\lambda_2). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Utilizzando queste relazioni è possibile scrivere in che modo $\mathcal{A} + \mathcal{D}$ agisce su $|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}(\lambda) + \mathcal{D}(\lambda)] |\Psi\rangle &= [\mathcal{A}(\lambda) + \mathcal{D}(\lambda)] \mathcal{B}(\lambda_1) \dots \mathcal{B}(\lambda_M) |\Omega\rangle \\ &= \left[\frac{a(-\delta_1)}{b(-\delta_1)} \dots \frac{a(-\delta_M)}{b(-\delta_M)} \mathcal{B}(\lambda_1) \dots \mathcal{B}(\lambda_M) \mathcal{A}(\lambda) + (\dots) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a(\delta_1)}{b(\delta_1)} \dots \frac{a(\delta_M)}{b(\delta_M)} \mathcal{B}(\lambda_1) \dots \mathcal{B}(\lambda_M) \mathcal{D}(\lambda) + (\dots) \right] |\Omega\rangle, \end{aligned} \quad (3.46)$$

dove $\delta_i = \lambda - \lambda_i$. Perché $|\Psi\rangle$ sia un autostato della Transfer Matrix, è necessario che i termini indicati con (\dots) si annullino. Questo succede soltanto per determinati valori λ_i , detti "radici di Bethe", che soddisfano le *Equazioni del Bethe Ansatz*:

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_i + i\mu s)}{\sinh(\lambda_i - i\mu s)} \right)^N = \prod_{i \neq j}^M \frac{\sinh(\lambda_i - \lambda_j + i\mu)}{\sinh(\lambda_i - \lambda_j - i\mu)}. \quad (3.47)$$

Queste equazioni garantiscono l'analiticità degli autovalori e forniscono tutte le informazioni fisiche relative al sistema che si sta considerando. Se la (3.47) è soddisfatta, allora $|\Psi\rangle$ è autostato della Transfer Matrix con autovalori noti:

$$\begin{aligned} t(\lambda) |\Psi\rangle &= \left[\prod_{i=1}^M \frac{\sinh(\lambda - \lambda_i - i\mu)}{\sinh(\lambda - \lambda_i)} \sinh\left(\lambda + \frac{i\mu}{2} + i\mu s\right)^N \right. \\ &\quad \left. + \prod_{i=1}^M \frac{\sinh(\lambda - \lambda_i + i\mu)}{\sinh(\lambda - \lambda_i)} \sinh\left(\lambda + \frac{i\mu}{2} - i\mu s\right)^N \right] |\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Per il modello della catena XXZ con spin $1/2$ si trova che l'energia e la quantità di moto del sistema si possono scrivere come:

$$\begin{aligned}
 E &\propto \left. \frac{d \ln(t(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^M \frac{\mu \sinh(i\mu)}{\sinh(\lambda_j + \frac{i\mu}{2}) \sinh(\lambda_j - \frac{i\mu}{2})}, \\
 P &\propto t(0) = -\sum_{j=1}^M \ln \frac{\sinh(\lambda_j + \frac{i\mu}{2})}{\sinh(\lambda_j - \frac{i\mu}{2})}.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Inoltre, gli stati di Bethe $|\Psi\rangle$ sono autostati di J^z con autovalori:

$$J^z = \frac{N}{2} - M. \tag{3.50}$$

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi era di fornire una visione generale delle catene di spin e di come queste possano essere risolte.

È stata studiata la catena XY e come l'Hamiltoniana corrispondente a questo modello possa essere diagonalizzata attraverso tre step, ovvero applicando una trasformata di Jordan-Wigner, spostandosi nello spazio di Fourier e applicando infine una trasformazione di Bogoliubov. È stato poi mostrato il diagramma di fase corrispondente a questo modello e si è ricavata la sua termodinamica attraverso la funzione di partizione.

Successivamente è stata presentata la catena XXZ, generalizzazione della catena XXX proposta originariamente da Heisenberg, mostrando anche in questo caso il diagramma di fase. Si è mostrato come la catena XXX possa essere risolta attraverso il Coordinate Bethe Ansatz e infine è stato presentato un metodo per diagonalizzare l'Hamiltoniana della catena XXZ, l'Algebraic Bethe Ansatz. In particolare sono stati introdotti gli elementi essenziali per l'applicazione di questo metodo, ovvero l'algebra di Yang-Baxter, gli operatori Lax e la Transfer Matrix.

Quelli presentati sono soltanto alcuni di tanti esempi, ma forniscono una conoscenza buona, seppur limitata, delle catene di spin e dei metodi con cui possono essere risolte.

Appendice A

Elementi di Calcolo Tensoriale

Vengono riportati di seguito gli elementi di calcolo tensoriale usati per scrivere le Hamiltoniane dei diversi modelli di catene di spin.

Come prima cosa è necessario introdurre il prodotto tensoriale tra matrici. Nel caso di due matrici 2×2 A e B , il loro prodotto tensoriale $A \otimes B$ è definito come:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Utilizzando la definizione (A.1), si possono scrivere gli osservabili del problema a due siti: $\vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I}$ e $\vec{\sigma}_2 = \mathbb{I} \otimes \vec{\sigma}$. In particolare si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_1^x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_1^y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_1^z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma_2^x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_2^y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_2^z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Si noti che le componenti degli osservabili di siti diversi commutano tra loro, infatti $[\sigma_1^i, \sigma_2^j] = 0$ per ogni $i, j \in \{x, y, z\}$. Gli operatori appena introdotti agiscono sugli elementi $x \otimes y$ dello spazio prodotto $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

Inoltre è utile introdurre la matrice di permutazione \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Come suggerisce il nome, \mathcal{P} permuta i fattori di un prodotto tensoriale:

$$\mathcal{P}(x \otimes y) = y \otimes x. \tag{A.5}$$

Inoltre valgono anche le relazioni:

$$\mathcal{P}^2 = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad \mathcal{P}\vec{\sigma}_1\mathcal{P} = \vec{\sigma}_2, \quad \mathcal{P}\vec{\sigma}_2\mathcal{P} = \vec{\sigma}_1. \tag{A.6}$$

Appendice B

Equazione di Yang-Baxter e Braid Group

Definizione 1. *L'Artin braid group di tipo A è definito dai generatori $g_i, i = 1, \dots, N-1$ e dalle relazioni:*

$$\begin{aligned} g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1}, & i \in \{1, \dots, N-2\}, \\ [g_i, g_j] &= 0, & |i-j| > 1. \end{aligned} \tag{B.1}$$

I generatori g_i e il loro inverso g_i^{-1} si possono rappresentare graficamente come:

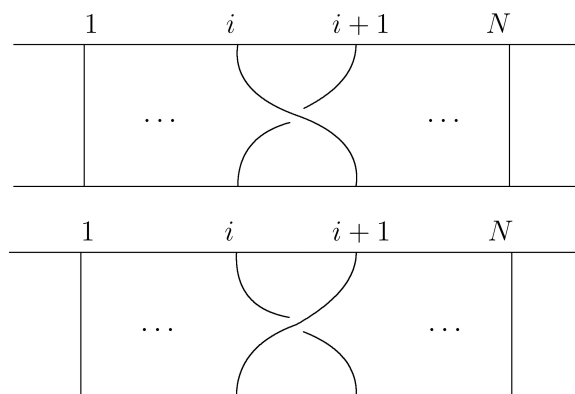


Figura B.1: Rappresentazione grafica di g_i e g_i^{-1} .

Due diagrammi rappresentano lo stesso elemento del gruppo se si possono far coincidere "spostando i fili" senza intrecciarli. Per esempio, è ovvio dimostrare graficamente la relazione $g_i g_i^{-1} = \mathbb{I}$, come si vede in Fig.B.2. In Fig.B.3 si può vedere come, attraverso questa rappresentazione grafica, sia possibile raffigurare la relazione del braid group $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$. È possibile utilizzare queste rappresentazioni per ottenere delle

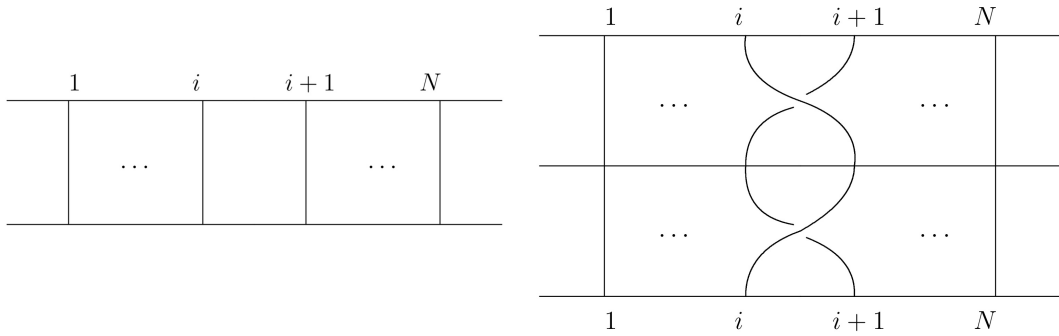


Figura B.2: Rappresentazione grafica di $g_i g_i^{-1} = \mathbb{I}$.

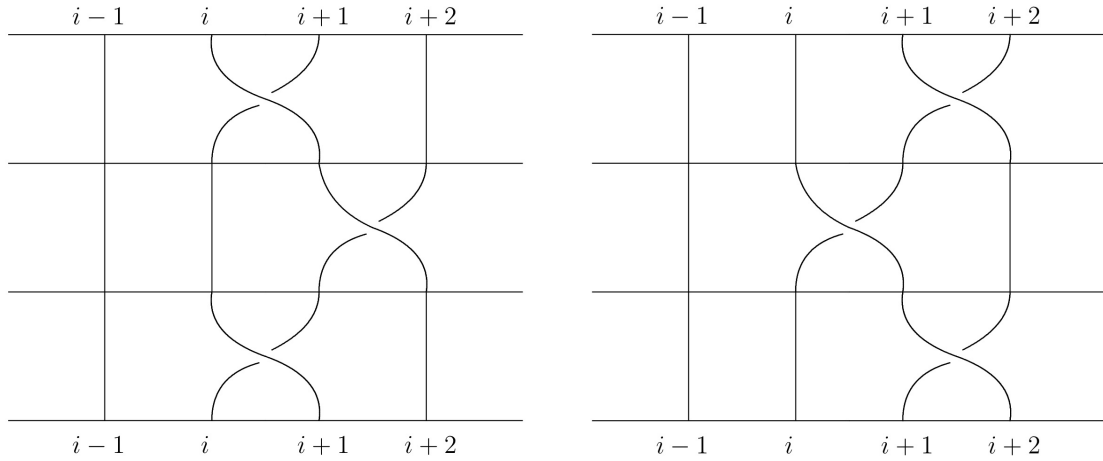


Figura B.3: Rappresentazione grafica di $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$.

soluzioni della YBE, tuttavia il braid group è "troppo grande" per essere fisico, quindi si restringe il campo a un gruppo quoziente [16] [17] [18].

Definizione 2. *L'algebra di Hecke di tipo A $H_N(q)$ è definita dai generatori $g_i, i = 1, \dots, N - 1$, dalle relazioni già presentate e da una condizione aggiuntiva:*

$$\begin{aligned}
 g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1}, & i \in \{1, \dots, N - 2\}, \\
 (g_i - q)(g_i + q^{-1}) &= 0, \\
 [g_i, g_j] &= 0, & |i - j| > 1.
 \end{aligned}
 \tag{B.2}$$

Chiaramente l'algebra di Hecke $H_N(q)$ è un quoziente del braid group di tipo A. Ridefinendo i generatori come $U_i = g_i - q$ si può introdurre l'algebra di Temperley-Lieb:

Definizione 3. L'algebra di Temperley-Lieb $T_N(q)$ è un quoziente dell'algebra di Hecke ed è definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
U_i U_{i+1} U_i - U_i &= U_{i+1} U_i U_{i+1} - U_{i+1}, \\
U_i^2 &= -(q + q^{-1})U_i, \\
[U_i, U_j] &= 0, \quad |i - j| > 0, \\
U_{i\pm 1} U_i U_{i\pm 1} &= U_{i\pm 1}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Anche nel caso dell'algebra di Temperley-Lieb esiste una rappresentazione grafica. I generatori U_i si possono rappresentare come:

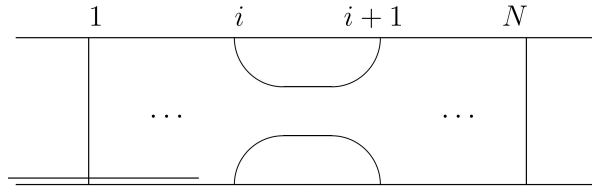


Figura B.4: Rappresentazione grafica dei generatori U_i .

Utilizzando questa rappresentazione, è possibile raffigurare la relazione $U_i^2 = -(q + q^{-1})U_i$ come:

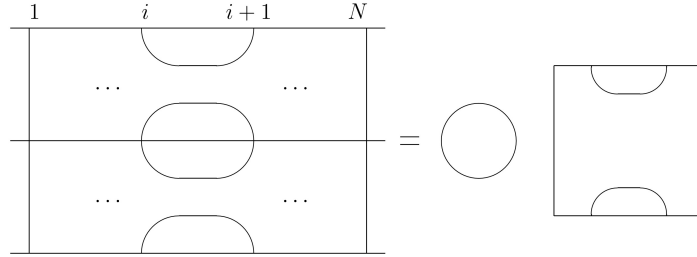


Figura B.5: Rappresentazione grafica della relazione $U_i^2 = -(q + q^{-1})U_i$. Il cerchio a destra dell'uguaglianza rappresenta la costante $-(q + q^{-1})$.

Si prenda in considerazione la matrice \mathcal{R} della catena XXZ:

$$\mathcal{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh(\lambda + i\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\lambda) & e^\lambda \sinh(i\mu) & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \sinh(i\mu) & \sinh(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(\lambda + i\mu) \end{pmatrix}. \tag{B.4}$$

Questa si può riscrivere come:

$$\tilde{\mathcal{R}} = e^\lambda g - e^{-\lambda} g^{-1}; \tag{B.5}$$

e se $U = g - q$ soddisfa l'algebra di Temperley-Lieb, allora $\tilde{\mathcal{R}}$ soddisfa la YBE.

Bibliografia

- [1] W. Heisenberg, “*Zur Theorie Des Ferromagnetismus*,” *Z. Phys.*, vol. 49, p. 619, 1928.
- [2] H. Bethe, “*On the Theory of Metals*,” *Z. Phys.*, vol. 71, pp. 205–226, 1931.
- [3] L. Faddeev and L. Takhtajan, “*The Quantum Method of the Inverse Problem and the Heisenberg XYZ Model*,” *Russ. Math. Surv.*, vol. 34, no. 5, p. 11, 1979.
- [4] P. Kulish and E. Sklyanin, “*Quantum Spectral Transform Method Recent Developments*,” *J. Sov. Math.*, vol. 19, 1982.
- [5] L. Faddeev and L. Takhtajan, “*Local Hamiltonians for Integrable Quatum Models on a Lattice*,” *J. Sov. Math.*, vol. 24, 1984.
- [6] V. Korepin, N. Bogoliubov, and A. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, ser. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1993.
- [7] F. Franchini, *An Introduction to Integrable Techniques for One-Dimensional Quantum Systems*. Springer International Publishing, 2017.
- [8] M. Nielsen, “*The Fermionic Canonical Commutation Relations and the Jordan-Wigner Transform*,” 2005.
- [9] R. Nepomechie, “*A Spin Chain Primer*,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. 13, no. 24n25, pp. 2973–2985, oct 1999.
- [10] A. Doikou, S. Evangelisti, G. Feverati, and N. Karaiskos, “*Introduction To Quantum Integrability*,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. 25, no. 17, pp. 3307–3351, jul 2010.
- [11] A. Zamolodchikov and A. Zamolodchikov, “*Factorized S-Matrices in two Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Theory Models*,” *Ann. Phys. (NY)*, vol. 120, pp. 253–291, 1979.

- [12] V. Kac, *Infinite-Dimensional Lie Algebras*, 3rd ed. Cambridge University Press, 1990.
- [13] L. Faddeev, E. Sklyanin, and L. Takhtajan, “*The Quantum Inverse Problem Method. 1*,” *Teor. Mat. Fiz.*, vol. 40, pp. 194–220, 1979.
- [14] L. Faddeev, N. Reshetikhin, and L. Takhtajan, “*Quantization of Lie Groups and Lie Algebras*,” *Alg. Anal.*, vol. 1, no. 1, pp. 178–206, 1989.
- [15] L. Faddeev, “*How Algebraic Bethe Ansatz Works for Integrable Model*,” preprint *arXiv:hep-th/9605187*, 1996.
- [16] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*. Springer Berlin, Heidelberg, 1968.
- [17] D. Kazhdan and G. Lusztig, “*Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras*,” *Inv. Math.*, vol. 53, pp. 165–184, 1979.
- [18] H. Temperley and E. Lieb, “*Relations Between the ‘Percolation’ and ‘Colouring’ Problem and Other Graph-Theoretical Problems Associated with Regular Planar Lattices: Some Exact Results for the ‘Percolation’ Problem*,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 322, no. 1549, pp. 251–280, 1971.