Alma Mater Studiorum · Universitá di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

La formula della somma di Eulero e alcune sue applicazioni

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Chiara Garofano

Anno Accademico 2022/2023

Ai miei genitori

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è enunciare e dimostrare la formula della somma di Eulero e studiarne versioni sempre più fini, ovvero versioni che esplicitino più dettagliatamente l'errore, che quindi risulterà più facile da maneggiare e ottimizzare; essa è un potente strumento per approssimare integrali con somme e viceversa.

Nel primo capitolo si vede un risultato che ricorda la formula, sebbene più generico: il criterio integrale per lo studio delle serie; viene svelata l'intuizione che portò Eulero nel 1736 a pensare alla formula che oggi porta il suo nome: una rappresentazione "geometrica" che mette a confronto l'integrale di una funzione definita su $[1, +\infty[$ con la somma della serie associata a $f(n)$; inoltre vengono riportate alcune definizioni e notazioni che saranno utili nel seguito della tesi: si definiscono i numeri e i polinomi di Bernoulli.

Nel secondo capitolo si definisce la costante generalizzata di Eulero e, tramite l'ausilio di altre rappresentazioni "geometriche", viene enunciato e dimostrato il teorema della formula di Eulero per funzioni positive e decrescenti; tramite poi passaggi analitici si arriva ad una prima versione più generale: la formula della somma di Eulero per funzioni di classe C^1, e una sua variante.

Il terzo capitolo è dedicato ad uno studio più approfondito di ciò che si è visto nel secondo; vengono enunciate le formule della somma di Eulero per funzioni C^2 e C^3; si arriva alla fine a dimostrare il teorema nella forma più generale: la formula della somma di Eulero per funzioni C^{2m+1} dove m è un numero naturale generico; conclude il capitolo il calcolo pratico della costante di Eulero definita nel Capitolo 1 tramite l'ultima formula citata.

Nel quarto ed ultimo capitolo si vede qualche applicazione della formula: viene definita la funzione Zeta di Riemann e dimostrato un risultato che la rigurda; la formula di Eulero aiuta ad approssimare questa funzione speciale in quanto essa è definita come somma di serie; in ultimo è trattata la Formula di Stirling e riportata una versione della sua dimostrazione che utilizza proprio la formula della somma di Eulero e la formula di Wallis.

Indice

Capitolo 1

Richiami, preliminari e notazioni

1.1 Test integrale

Il test integrale per la convergenza di serie infinite confronta una somma finita $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ e un integrale $\int_1^n f(x)dx$, dove f è una funzione positiva strettamente decrescente.

Teorema 1.1 (Criterio integrale per serie).
Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione positiva e decrescente. Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n), \tag{1.1}$$

e l'integrale

$$\int_1^{\infty} f(x)dx, \tag{1.2}$$

convergono o divergono simultaneamente.

Dimostrazione. Introduciamo le somme parziali della serie (1.1)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poichè la serie è a termini positivi, la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che quindi è crescente, ammette limite che denotiamo

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n \in]0, +\infty].$$

Analogamente abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx, \tag{1.3}$$

dove il secondo membro può essere un numero positivo o $+\infty$. Si noti che f è integrabile in ogni intervallo limitato perché decrescente, quindi la serie (1.1) e l'integrale (1.2) sono ben definiti. Osserviamo ora che, per la proprietà di additività dell'integrale, possiamo scrivere

$$\int_1^n f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx. \tag{1.4}$$

E grazie all'ipotesi che f è decrescente abbiamo che

$$x \in [k, k+1] \Rightarrow f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

Quindi per monotonia dell'integrale

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx.$$

Poiché la funzione integranda nei due integrali agli estremi è costante rispetto alla variabile x, possiamo calcolarli esplicitamente e otteniamo

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

Sommando per $k = 1, 2, ..., n-1$ e ricordando (1.4) abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \tag{1.5}$$

Osserviamo che $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = s_{n-1}$, mentre, con un cambiamento dell'indice di somma, troviamo che $\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = s_n - f(1)$. La stima (1.5) diventa dunque

$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq s_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene

$$s - f(1) \leq \int_1^\infty f(x)dx \leq s,$$

il che dimostra che s è un numero finito se e solo se l'integrale improprio è finito. $\square$

1.2 Rappresentazione geometrica

La differenza tra la somma e l'integrale può essere rappresentata geometricamente come si vede nella Figura 1.1.

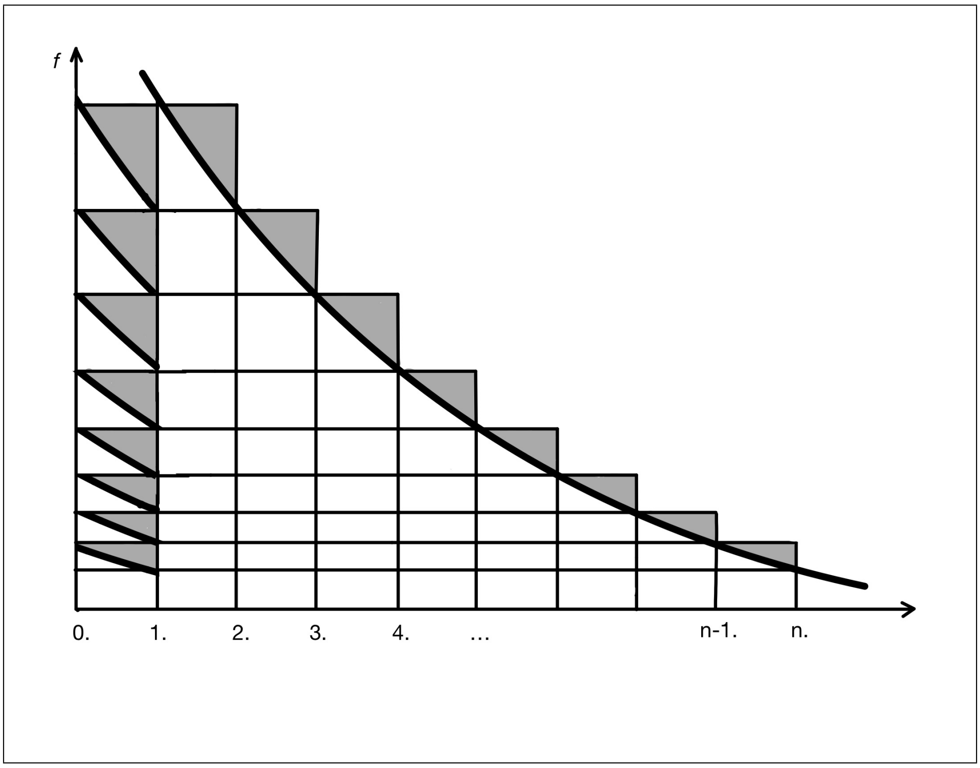

Figura 1.1: *Tutte le regioni scure sull'intervallo* $[1, n]$ *possono essere traslate nel rettangolo di area* $f(1)$.

Nel 1736 Eulero usò un diagramma come quello in Figura 1.1 per ottenere il caso più semplice di ciò che poi si conobbe come "Formula della somma di Eulero", un potente strumento per stimare somme con integrali e viceversa, dunque una versione migliorata e più precisa del criterio Integrale per serie. Da questa poi Eulero derivò una formula più generale tramite un metodo analitico che usa i numeri di Bernoulli e le funzioni periodiche di Bernoulli, la formula è trattata ordinariamente nei corsi avanzati di calcolo o di analisi reale e complessa.

1.3 Polinomi e numeri di Bernoulli

Definizione 1.2 (**Polinomi di Bernoulli**). *I polinomi di Bernoulli* $B_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$ *sono polinomi unicamente definiti dalle seguenti proprietà:*

1. $B_0(x) = 1$
2. $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$
3. $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$ *per tutti gli* $n \geq 1$.

È chiaro che queste proprietà determinano unicamente i polinomi: supponiamo per induzione di conoscere $B_{n-1}(x)$. Allora (2) ci permette di trovare $B_n(x)$ come primitiva a meno di una costante. La condizione (3) determina la costante. Per esempio, avremo

$$B_0(x) = 1,\ B_1(x) = x - \frac{1}{2},\ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Lemma 1.3. *Per tutti gli $n \neq 1$ vale $B_n(1) = B_n(0)$.*

Dimostrazione. Per $n = 0$, B_0 è costante e l'asserzione è ovvia. Sia quindi $n \geq 2$; per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(x)dx \overset{(2)}{=} n \int_0^1 B_{n-1}(x)dx \overset{(3)}{=} 0.$$

Questo conclude la prova. □

Definizione 1.4 (Numeri di Bernoulli). *I numeri di Bernoulli sono i valori $B_n := B_n(0)$ dei polinomi di Bernoulli calcolati in 0.*

Ecco i primi numeri di Bernoulli:

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ 0,\ -\frac{1}{30},\ 0,\ \frac{1}{42},\ 0,\ ...$$

Si dimostra che $B_n = 0$ per ogni n dispari ≥ 3.

1.4 Notazione O grande

Definizione 1.5. *Se $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, scriveremo*

$$f(x) = O(g(x))$$

se esiste una costante M>0 tale che

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall\, x \geq a.$$

Un'identità della forma

$$f(x) = h(x) + O(g(x))$$

significa

$$f(x) - h(x) = O(g(x)).$$

Notiamo che, se $g \geq 0$, $f(t) = O(g(t))$ per $t \geq a$ implica $\int_a^x f(t)dt = O(\int_a^x g(t)dt)$ per tutte le $x \geq a$.

Capitolo 2

Formula della somma di Eulero

2.1 Costante generalizzata di Eulero

Assumiamo f una funzione positiva e strettamente decrescente sull'intervallo $[1, +\infty[$. Introduciamo una successione $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri che rappresentano la somma delle aree scure in Figura 1.1 nell'intervallo $[1, n]$, cioè i numeri definiti come

$$d_n := \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x)dx, \quad n = 2, 3, ... \tag{2.1}$$

È chiaro che $d_{n+1} > d_n$ e che tutte le parti scure sopra la curva in Figura 1.1 possono essere traslate a sinistra ad occupare una porzione di rettangolo di altezza $f(1)$ e base $[0, 1]$, inoltre poichè f è strettamente decrescente non ci sono sovrapposizioni dei pezzi spostati. Il confronto tra le aree ci dá la seguente disuguaglianza:

$$0 < d_n < d_{n+1} < f(1).$$

Dunque $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione strettamente crescente e limitata quindi ha limite finito.

Definizione 2.1 (Costante generalizzata di Eulero). *Con le notazioni precedenti, poniamo*

$$C(f) := \lim_{n\to+\infty} d_n.$$

Ci riferiamo a $C(f)$ come la costante generalizzata di Eulero associata ad f.

Geometricamente $C(f)$ rappresenta l'infinita somma delle porzioni ombreggiate sull'intervallo $[1, +\infty[$ della Figura 1.1 (o equivalentemente l'insieme delle parti ombreggiate e tratteggiate sopra la funzione nella Figura 2.1). Queste possono essere traslate e incastrate nel rettangolo di area $f(1)$ senza sovrapposizioni quindi

$$0 < C(f) < f(1).$$

Inoltre $C(f) - d_n$ rappresenta la somma delle aree scure sull'intervallo $[n, +\infty[$, cioè $C(f)$ meno le parti tratteggiate nella Figura 2.1 (che rappresentano proprio la somma d_n), e come si vede in Figura 2.1 questi pezzi possono invece essere portati ad occupare il rettangolo di altezza $f(n)$ e base $[n, n+1]$ senza sovrapposizioni, quindi confrontando le aree troviamo

$$0 < C(f) - d_n < f(n), \quad \forall\ n = 2, 3, ... \tag{2.2}$$

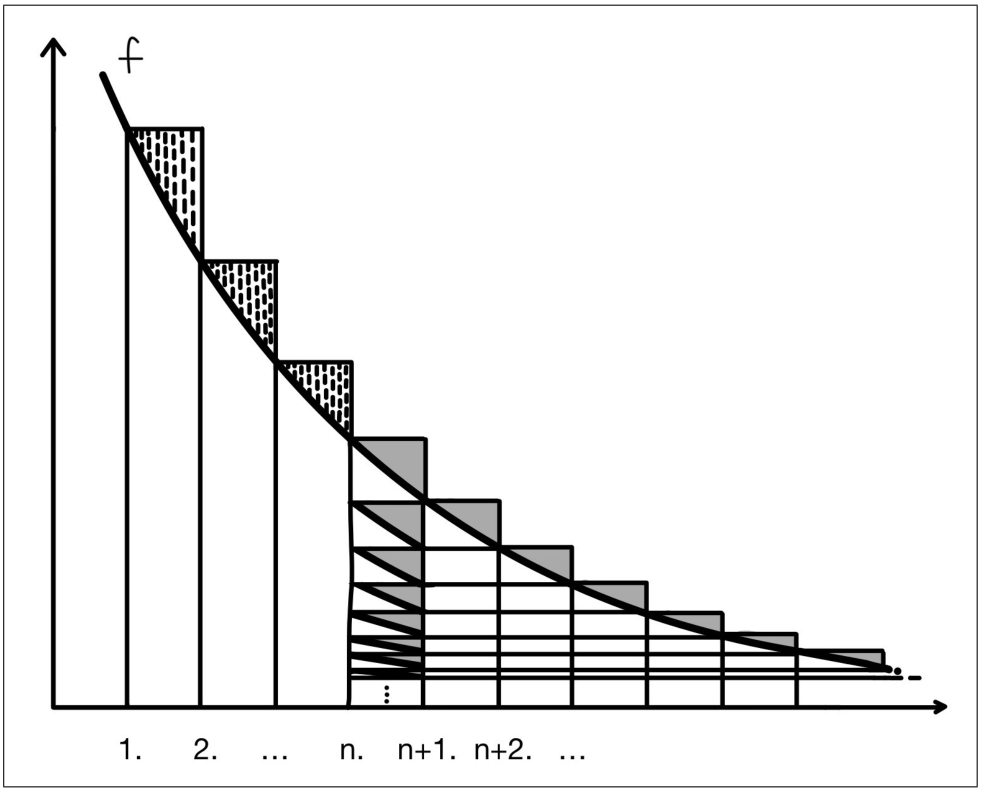

Figura 2.1: *Tutte le regioni scure sull'intervallo $[n, +\infty[$ possono essere traslate senza sovrapposizioni nel rettangolo di altezza $f(n)$ e base $[n, n+1]$. La somma delle parti tratteggiate corrisponde alla quantità d_n mentre quella (infinita) delle sezioni scure a $C(f) - d_n$.*

Teorema 2.2 (Formula della somma di Eulero per funzioni positive e decrescenti). *Se f è una funzione positiva strettamente decrescente su $[1, +\infty[$ allora esistono una costante positiva $C(f) < f(1)$ e una successione $\{E_f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $0 < E_f(n) < f(n)$ tali che*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + C(f) + E_f(n). \tag{2.3}$$

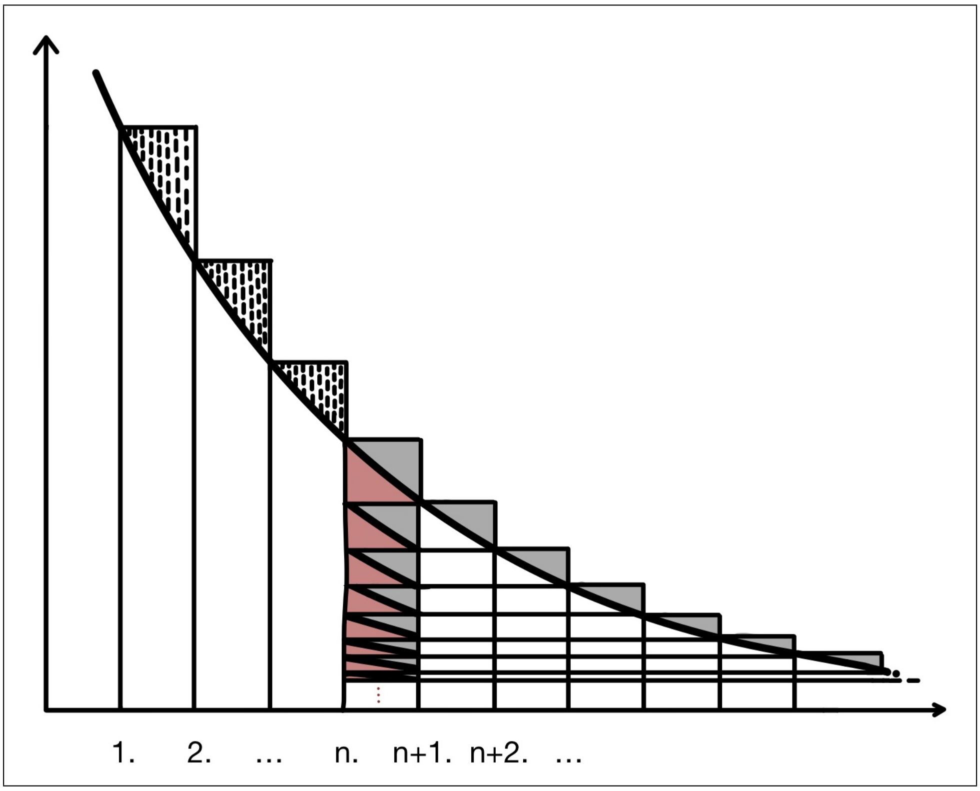

Figura 2.2: *La somma (infinita) delle regioni evidenziate in rosso rappresenta geometricamente la quantità $E_f(n)$.*

Dimostrazione. Se definiamo $E_f(n) := f(n) + d_n - C(f)$, allora (2.3) segue da (2.1) infatti

$$d_n \underset{(2.1)}{=} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x)dx,$$

e rimettendo $f(n)$ nella sommatoria si ottiene

$$E_f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx - C(f).$$

La disuguaglianza $0 < E_f(n) < f(n)$ si deduce da (2.2), infatti

$$0 \underset{(2.2)}{<} f(n) - (C(f) - d_n) = E_f(n),$$

e sempre da (2.2) abbiamo $C(f) - d_n > 0$ da cui

$$0 < E_f(n) = f(n) + d_n - C(f) < f(n).$$

Questo conclude la prova. □

Se $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ allora (2.3) implica

$$C(f) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx\right). \tag{2.4}$$

Esempio 2.3. Sia $f(x) = \frac{1}{x}$ e $C(f)$ la costante di Eulero classica di f che chiameremo C. Da (2.4) sappiamo che

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n)\right).$$

In questo caso dunque il Teorema 2.2 afferma

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \log(n) + C + E_{\frac{1}{x}}(n),$$

con $0 < E_{\frac{1}{x}}(n) < \frac{1}{n}$. Non si sa ancora se C sia un numero razionale o irrazionale; il suo valore numerico approssimato al ventesimo decimale è $C = 0.57721566490153286060$.

2.2 Formula della somma di Eulero alla derivata prima

Sia f una funzione tale che $\int_1^n f(x)dx$ esista per ogni $n > 1$ (di seguito non richiediamo più che f sia positiva e decrescente). L'intuizione chiave sta nel notare che la definizione dei d_n in (2.1) può essere riscritta come

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1} I(k), \quad \text{dove} \quad I(k) = \int_k^{k+1}\Big(f(k) - f(x)\Big)dx. \tag{2.5}$$

Supponiamo che f sia di classe C^1 su $[1, +\infty[$. Integrando per parti possiamo scrivere (2.5) nel seguente modo

$$I(k) = \int_k^{k+1}\Big(f(k) - f(x)\Big)\cdot 1dx =$$

$$= \left[(x-k+1)\Big(f(k) - f(x)\Big)\right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1}(x-k-1)f'(x)dx.$$

Ma $\left[(x-k+1)\Big(f(k) - f(x)\Big)\right]_k^{k+1} = 0$, quindi

$$I(k) = \int_k^{k+1}(x-k+1)f'(x)dx. \tag{2.6}$$

Nell'integrale (2.6) il simbolo muto x varia tra k e $k+1$ quindi la quantità k può essere sostituita con $\lfloor x \rfloor$ cioè la parte intera di x. Facendo questa sostituzione, da (2.5) e (2.6) troviamo

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1} I(k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1}(x - \lfloor x \rfloor - 1)f'(x)dx\right) =$$

$$= \int_1^n (x - \lfloor x \rfloor)f'(x)dx - \int_1^n f'(x)dx = \int_1^n (x - \lfloor x \rfloor)f'(x)dx - f(n) + f(1). \tag{2.7}$$

Quando f è positiva e decrescente, come in Figura 2.3, $I(k)$ è l'area del triangolo curvilineo colorato sull'intervallo $[k, k+1]$. In ogni caso (2.5) ha significato per ogni funzione f localmente integrabile.

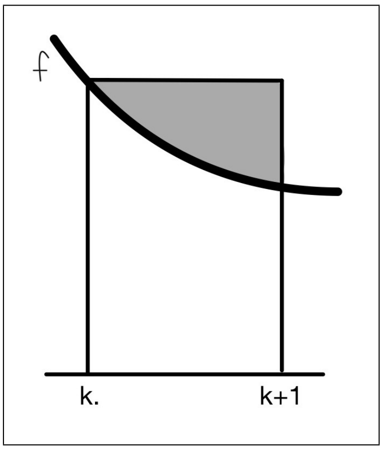

Figura 2.3: *Interpretazione geometrica dell'integrale $I(k)$ come l'area della regione scura.*

Teorema 2.4 (Formula della somma di Eulero per funzioni $\mathbf{C^1}$). *Per ogni funzione f con derivata prima continua sull'intervallo* $[1, n]$ *vale*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \int_1^n (x - \lfloor x \rfloor) f'(x)dx + f(1). \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Si usano le definizioni in (2.1) e (2.7) e si riordinano i termini. □

In (2.8) gli ultimi due termini nel membro di destra rappresentano l'errore fatto approssimando la serie a sinistra con il primo integrale a destra. La formula è utile perché f non deve essere positiva o decrescente, può anche essere crescente o oscillante. Altre varianti della formula si ottengono studiando con più precisione l'errore. Il fattore $(x - \lfloor x \rfloor)$ è una funzione non negativa con periodo 1. Se f' ha segno fissato (cosa che succede se f è monotona) allora il termine integrale nell'errore ha lo stesso segno di f'. Per far diminuire l'errore è preferibile moltiplicare f' per un fattore che cambi segno così che ci siano delle cancellazioni durante l'integrazione. Col fine di introdurre cambi di segno possiamo traslare $(x - \lfloor x \rfloor)$ in basso di $\frac{1}{2}$; consideriamo dunque la nuova funzione $x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ il cui grafico è riportato nella Figura 2.4.

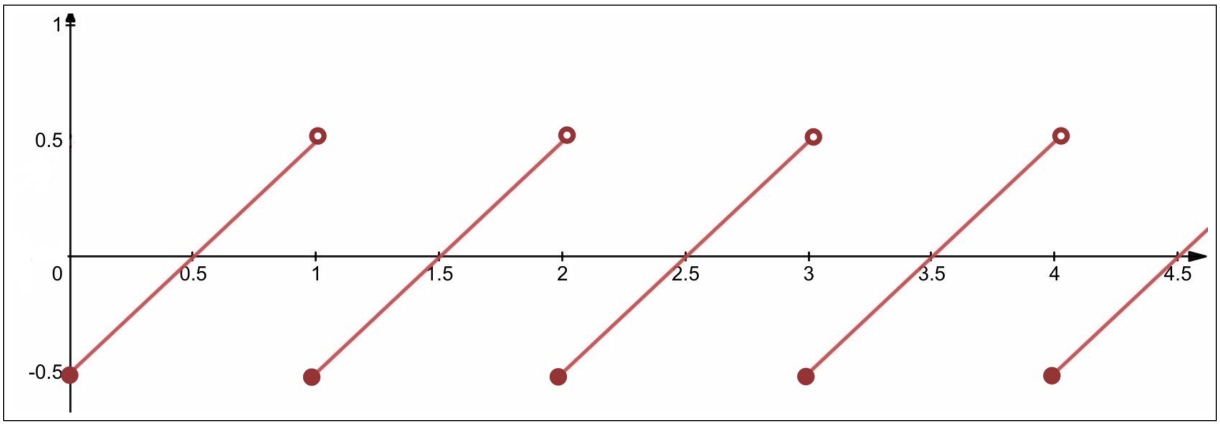

Figura 2.4: *La funzione periodica* $x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ *cambia segno.*

Quindi l'integrale nell'errore può ora essere scritto come

$$\int_1^n (x - \lfloor x \rfloor) f'(x) dx = \int_1^n \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx + \frac{1}{2} \int_1^n f'(x) dx,$$

dove l'ultimo termine è uguale a $\frac{1}{2}(f(n) - f(1))$. Usando questa scrittura in (2.8) otteniamo la seguente variante:

Teorema 2.5 (**Variante della formula della somma di Eulero per funzioni $\mathbf{C^1}$**). *Nelle ipotesi precendenti vale*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x) dx + \int_1^n \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx + \frac{1}{2} \Big(f(n) + f(1) \Big).$$

Successive varianti saranno ottenute ripetendo l'integrazione per parti nel secondo integrale a destra nel Teorema 2.5. Il fattore $x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ ha valore $-\frac{1}{2}$ quando x è intero. Modifichiamo leggermente questo fattore per farlo scomparire se calcolato su interi, proprietà desiderabile in vista di prossime integrazioni per parti. Per fare questo introduciamo $P_1(x)$, la prima funzione di Bernoulli.

Definizione 2.6 (**Prima funzione di Bernoulli**). *Poniamo*

$$P_1(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} & \textit{se } x \textit{ non è un intero,} \\ 0 & \textit{se } x \textit{ è intero.} \end{cases}$$

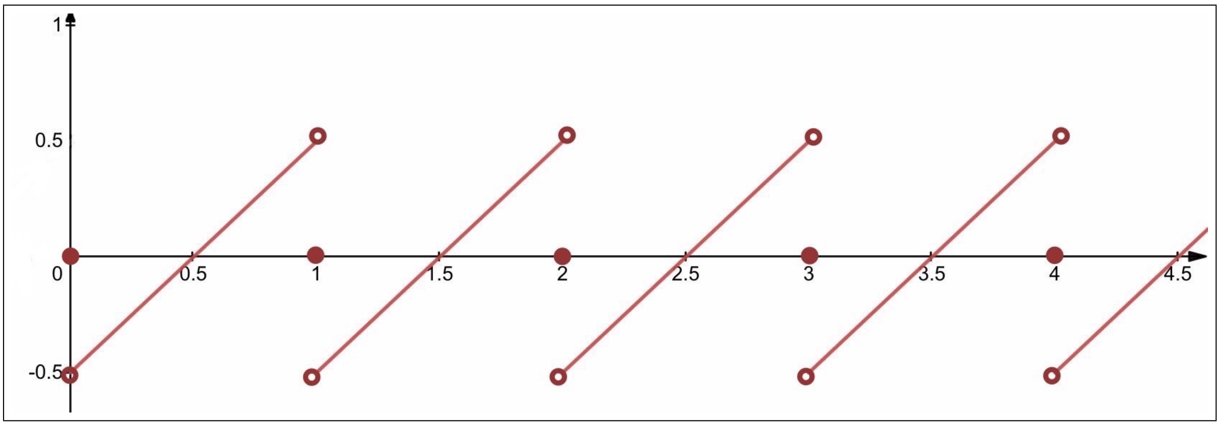

Figura 2.5: *Grafico della funzione di Bernoulli* $P_1(x)$

L'integrale nell'errore non cambia se si sostituisce $x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ con $P_1(x)$ perché i due fattori differiscono solo sugli interi (che sono numerabili), cioè su un insieme Lebesgue-trascurabile. Quindi il Teorema 2.5 può essere scritto come

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \int_1^n P_1(x)f'(x)dx + \frac{1}{2}\Big(f(n) + f(1)\Big). \tag{2.9}$$

Si noti la differenza tra (2.9) e (2.3), dove quest'ultima mostra esplicitamente la costante generalizzata di Eulero $C(f)$. Per far assomigliare di più (2.9) a (2.3), ipotizziamo che l'integrale improprio $\int_1^\infty P_1(x)f'(x)dx$ converga, così possiamo scrivere

$$\int_1^n P_1(x)f'(x)dx = \int_1^\infty P_1(x)f'(x)dx - \int_n^\infty P_1(x)f'(x)dx.$$

Dunque (2.9) prende la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + C(f) + E_f(n). \tag{2.10}$$

dove

$$C(f) = \frac{1}{2}f(1) + \int_1^\infty P_1(x)f'(x)dx \tag{2.11}$$

e

$$E_f(n) = \frac{1}{2}f(n) - \int_n^\infty P_1(x)f'(x)dx.$$

L'equazione (2.10) ha esattamente la stessa forma della (2.3) ma (2.10) è più generale perché f non deve essere positiva né monotona; le uniche restrizioni su f sono l'esistenza e la continuità di f' e la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^\infty P_1(x)f'(x)dx. \tag{2.12}$$

Una condizione sufficiente per la convergenza è che $\int_1^\infty |f'(x)|dx$ converga. Per vederlo notiamo che la funzione di Bernoulli $P_1(x)$ è limitata infatti la Figura 2.4 mostra che $|P_1(x)| \leq \frac{1}{2}$ per tutte le x.

Esempio 2.7. Riprendiamo la stessa funzione dell'Esempio 2.3, $f(x) = \frac{1}{x}$. Allora f è derivabile e abbiamo $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; calcoliamo

$$\int_n^\infty |f'(x)|dx = \int_n^\infty \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{n},$$

dunque (2.12) esiste e (2.11) esprime la costante di Eulero come

$$C = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{P_1(x)}{x^2}dx.$$

Capitolo 3

Analisi fine del termine di errore

3.1 Formula della somma di Eulero alla derivata seconda

Introduciamo una nuova funzione $P_2(x)$ la cui derivata è $2P_1(x)$ per tutti i valori non interi di x. Il fattore 2 è usato affinché $P_2(x)$ sia la seconda funzione periodica di Bernoulli che appare nella Formula della somma di Eulero, perció richiediamo che

$$P_2(x) = 2\int_0^x P_1(t)dt + C, \tag{3.1}$$

dove C è una costante che sarà specificata dopo. La funzione P_2 è quadratica sull'intervallo $[0, 1]$. Infatti $P_2(x) = x^2 - x + C$ se $0 \leq x \leq 1$. Il suo grafico è un arco parabolico che congiunge i punti $(0, C)$ e $(1, C)$. Fuori da questo intervallo il grafico, mostrato in Figura 3.1, consiste di traslazioni orizzontali di questo arco parabolico perché P_2 ha periodo 1: per vederlo basta notare che P_1 ha periodo 1 e che $\int_0^1 P_1(t)dt = 0$; questo implica $\int_a^b P_1(t)dt = 0$ per ogni intervallo $[a, b]$ di lunghezza 1 e quindi

$$P_2(x + 1) - P_2(x) = 2\int_x^{x+1} P_1(t)dt = 0.$$

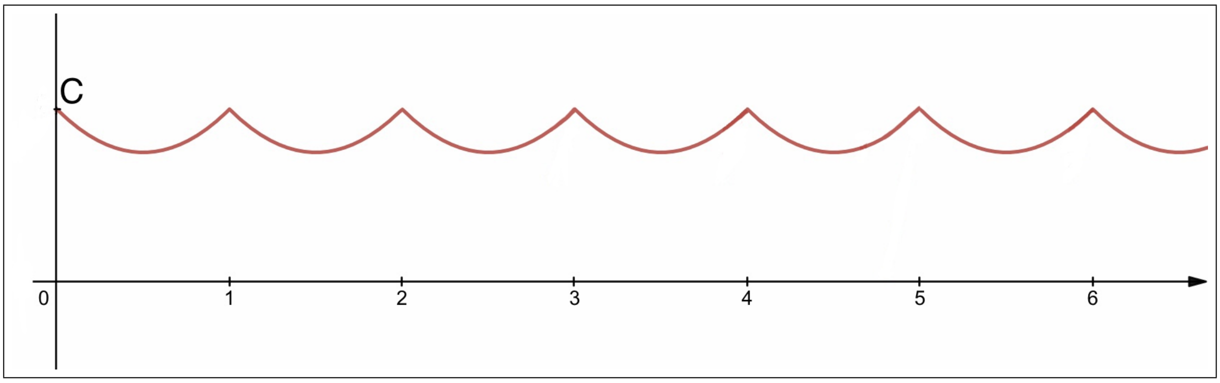

Figura 3.1: *Grafico di* $P_2(x) = 2\int_0^x P_1(t)dt + C$

A causa della periodicità, P_2 prende il valore costante $C = P_2(0)$ sugli interi. Usando questo fatto, integrando per parti il termine integrale dell'errore in (2.9), otteniamo

$$\int_1^n P_1(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}P_2(0)\Big(f'(n) - f'(1)\Big) - \frac{1}{2}\int_1^n P_2(x)f''(x)dx,$$

purché f'' sia continua. Ripetute integrazioni per parti portano alla forma generale della formula della somma di Eulero che coinvolge ordini più alti di derivazione di f e ordini più alti di funzioni periodiche di Bernoulli, le quali rappresentano polinomi sull'intervallo $[0, 1]$. Per vedere esattamente come le funzioni di Bernoulli evolvono nel processo, integriamo la funzione periodica $3P_2(x)$ da 0 a x per ottenere un'altra funzione periodica $P_3(x)$, la cui derivata sia $3P_2(x)$. Per garantire che la funzione $P_3(x)$ sia periodica di periodo 1, abbiamo bisogno che $\int_0^1 P_2(t)dt = 0$. Questa proprietà governa poi la scelta della costante C in (3.1). L'integrale del polinomio quadratico $x^2 - x + C$ da 0 a 1 è uguale a $C - \frac{1}{6}$, quindi scegliamo $C = \frac{1}{6}$ e prendiamo

$$P_2(x) = 2\int_0^x P_1(t)dt + \frac{1}{6}.$$

La formula della somma di Eulero può ora essere riscritta come segue:

Teorema 3.1 (**Formula della somma di Eulero per funzioni $\mathbf{C^2}$**). *Per ogni funzione f con derivata seconda continua sull'intervallo $[1, n]$ vale*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx - \frac{1}{2}\int_1^n P_2(x)f''(x)dx + \frac{1}{2}P_2(0)\Big(f'(n) - f'(1)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(n) + f(1)\Big). \tag{3.2}$$

Inoltre se l'integrale improprio $\int_1^\infty |f''(x)|dx$ converge allora abbiamo anche

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + C(f) + E_f(n),$$

dove

$$C(f) = \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}P_2(0)f'(1) - \frac{1}{2}\int_1^{\infty} P_2(x)f''(x), dx \tag{3.3}$$

e

$$E_f(n) = \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}P_2(0)f'(n) + \frac{1}{2}\int_n^{\infty} P_2(x)f''(x)dx. \tag{3.4}$$

3.2 Formula della somma di Eulero alla derivata terza

Per migliorare la stima dell'errore integriamo $P_2(t)$ da 0 a x e definiamo la funzione di Bernoulli

$$P_3(x) = 3\int_0^x P_2(t)dt,$$

cosicché la derivata di $P_3(x)$ sia uguale a $3P_2(x)$. Non c'è bisogno di aggiungere una costante in questo caso perché sull'intervallo unitario $[0,1]$ si ha $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ e $\int_0^1 P_3(t)dt = 0$. La funzione P_3 ha periodo 1 perché P_2 ha periodo 1 e $\int_0^1 P_3(t)dt = 0$. Il grafico di P_3 è una curva limitata cubica a tratti, come mostra la Figura 3.2

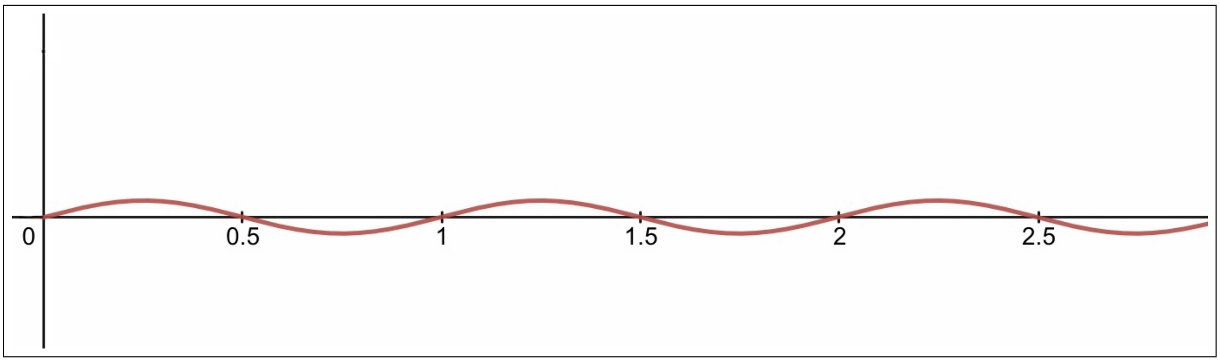

Figura 3.2: *Grafico di* $P_3(x) = 3\int_0^x P_2(t)dt$

Notiamo che P_3 si annulla sugli interi, quindi, integrando per parti su $[1,n]$, otteniamo

$$\int_1^n P_2(x)f''(x)dx = -\frac{1}{3}\int_1^n P_3(x)f^{(3)}(x)dx,$$

purché $f^{(3)}$ sia continua. Questa identità insieme al Teorema 3.1 ci forniscono la formula della somma di Eulero alla derivata terza:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx - \frac{1}{3!}\int_1^n P_3(x)f^{(3)}(x)dx + \frac{1}{2}P_2(0)\Big(f'(n) - f'(1)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(n) + f(1)\Big).$$

E, analogamente a prima, se l'integrale improprio $\int_1^{\infty} |f^3(x)|dx$ converge allora abbiamo anche

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + C(f) + E_f(n),$$

dove

$$C(f) = \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}P_2(0)f'(1) - \frac{1}{3!}\int_1^\infty P_3(x)f^{(3)}(x), dx$$

e

$$E_f(n) = \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}P_2(0)f'(n) - \frac{1}{3!}\int_n^\infty P_3(x)f^{(3)}(x)dx.$$

3.3 I numeri di Bernoulli e la formula generale della somma di Eulero

La strategia per ottenere la versione generale della formula è ora evidente. Partendo dalla funzione periodica di Bernoulli $P_1(x)$ definita nella Definizione 2.6, introduciamo la successione delle funzioni periodiche $P_2(x), P_3(x), \dots$ con periodo 1, e una successione di costanti B_k tali che

$$P_k(x) = k\int_0^x P_{k-1}(t)dt + B_k \quad \text{per}\, k \geq 2, \tag{3.5}$$

e ogni B_k è scelto tale che

$$\int_0^1 P_k(t)dt = 0. \tag{3.6}$$

La periodicità implica che $P_k(0) = P_k(1)$ e (3.5), (3.6) mostrano che entrambi questi valori sono uguali a B_k. Abbiamo già visto, sull'intervallo chiuso $[0,1]$, che le funzioni $P_k(x)$ sono polinomiali di grado k per $k = 2$ o 3 (Il caso $k = 1$ è speciale perché $P_1(x) = x - \frac{1}{2}$ è un polinomio lineare solo sull'intervallo $]0,1[$ ed è discontinuo sugli estremi). È facilmente dimostrabile per induzione che sull'intervallo chiuso $[0,1]$ la funzione definita da (3.5) è polinomiale di grado k per ogni $k \geq 2$. Denotiamo questo polinomio con $B_k(x)$, notazione usuale per i *Polinomi di Bernoulli*; i primi sono

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}; \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6};$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x; \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

Le funzioni periodiche di Bernoulli sono estensioni periodiche di questi polinomi, date da: $P_k(x) = B_k(x - \lfloor x \rfloor)$. Le costanti $B_k = P_k(0) = P_k(1)$ sono chiamati *Numeri di Bernoulli*; i primi sono

$$B_1 = -\frac{1}{2}; \quad B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_3 = 0; \quad B_4 = -\frac{1}{30}.$$

Ora mostriamo che le nostre definizioni dei numeri e dei polinomi di Bernoulli siano coerenti con le definizioni solite, partendo da $B_0(x) = 1$ e $B_0 = 1$. La nostra definizione (3.5) mostra che le derivate successive di questi polinomi sono

$$B_k'(x) = kB_{k-1}(x), \quad B_k''(x) = k(k-1)B_{k-2}, \quad ..., \quad B_k^{(r)} = r!\binom{k}{r}B_{k-r}(x),$$

e quindi

$$B_k^{(r)}(0) = r!\binom{k}{r}B_{k-r}(0) = r!\binom{k}{r}B_{k-r}. \tag{3.7}$$

D'altra parte il polinomio di Taylor di ogni polinomio $B_k(x)$ di grado k è data da $B_k(x) = \sum_{r=0}^{k} B_k^{(r)}(0)\frac{x^r}{r!}$ quindi (3.7) implica

$$B_k(x) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} B_{k-r}x^r. \tag{3.8}$$

Prendendo $x = 1$ in (3.8) e notando che $B_k(1) = P_k(1) = B_k$ per $k \geq 2$, (3.8) diventa

$$B_k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} B_{k-r} \quad \forall\, k \geq 2.$$

E questa è la formula ricorsiva solita per definire i numeri di Bernoulli (partendo da $B_0 = 1$) e (3.8) è uno dei modi standard di definire i polinomi di Bernoulli in termini dei numeri di Bernoulli. Conseguentemente i numeri e i polinomi che appaiono in questo trattato sono i numeri e i polinomi di Bernoulli classici che appaiono nella letteratura. È ben noto che i numeri di Bernoulli B_k con indice dispari $k \geq 3$ sono uguali a 0, quindi solo i numeri di Bernoulli con indice pari appaiono nella formula generale della somma di Eulero. È inoltre noto che sull'intervallo $[0, 1]$ i polinomi di Bernoulli soddisfino le seguenti disuguaglianze per $k \geq 1$:

$$|B_{2k}(x)| \leq |B_{2k}| \quad \text{e} \quad |B_{2k+1}(x)| \leq (2k+1)|B_{2k}|.$$

Il metodo che abbiamo delineato ci porta alla seguente versione della formula di Eulero alle derivate di ordine dispari che si può dimostrare facilmente per induzione sull'ordine $2n + 1$.

Teorema 3.2 (Formula generale della somma di Eulero). *Per ogni funzione f con derivata di ordine $2m + 1$ continua sull'intervallo $[1, n]$ vale*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{(2m+1)!}\int_1^n P_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)dx +$$

$$+\sum_{r=1}^{m} \frac{B_{2r}}{(2r)!}\Big(f^{(2r-1)}(n) - f^{(2r-1)}(1)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(1) + f(n)\Big). \tag{3.9}$$

Inoltre se l'integrale improprio $\int_1^\infty |f^{(2m+1)}(x)|dx$ converge, allora si ha anche

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + C(f) + E_f(n), \tag{3.10}$$

dove

$$C(f) = \frac{1}{2}f(1) - \sum_{r=1}^{m} \frac{B_{2r}}{(2r)!} f^{(2r-1)}(1) + \frac{1}{(2m+1)!}\int_1^\infty P_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x)dx, \tag{3.11}$$

e

$$E_f(n) = \frac{1}{2}f(n) - \sum_{r=1}^{m} \frac{B_{2r}}{(2r)!} f^{(2r-1)}(m) - \frac{1}{(2m+1)!}\int_n^\infty P_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x)dx. \tag{3.12}$$

Esempio 3.3. Se $f(x) = \frac{1}{x}$ avremo $f^{(2m+1)}(x) = -\frac{(2m+1)!}{x^{2m+2}}$ e (3.11) ci dà la seguente espressione per la costante di Eulero classica

$$C = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \cdots + \frac{B_{2m}}{2m} - \int_1^\infty \frac{P_{2m+1}(x)}{x^{2m+2}}dx, \tag{3.13}$$

e il corrispondente termine dell'errore (3.12) diventa

$$E_f(n) = \frac{1}{2n} - \frac{B_2}{2n^2} - \frac{B_4}{4n^4} - \cdots - \frac{B_{2m}}{(2m)n^{2m}} + \int_n^\infty \frac{P_{2m+1}(x)}{x^{2m+2}}dx. \tag{3.14}$$

Si è tentati a mandare m a $+\infty$ in (3.13) e ottenere una serie infinita per la costante di Eulero. Tuttavia l'integrale in (3.13) non tende a 0 per m che va a $+\infty$ e, infatti, può essere dimostrato che la serie infinita $\sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{2k}$ diverge rapidamente; dunque (3.13) non è molto utile per il calcolo pratico di C.

3.4 Calcolo della costante di Eulero con la formula generale

Usiamo la formula generale di Eulero trovata nella Sezione 3.3 per calcolare le prime 7 cifre della costante di Eulero della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Dall'equazione in (3.10) riscriviamo

$$C = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) - E_f(n), \tag{3.15}$$

dove $E_f(n)$ è data da (3.14). Prendendo $m = 3$ in (3.14) troviamo

$$E_f(n) = \frac{1}{2n} - \frac{B_2}{2n^2} - \frac{B_4}{4n^4} - \frac{B_6}{6n^6} + \int_n^\infty \frac{P_7(x)}{x^8}dx =$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \int_n^\infty \frac{P_7(x)}{x^8}dx.$$

Usando la disuguaglianza $|P_7(x)| \leq 7|B_6| = \frac{1}{6}$ otteniamo

$$\left| \int_n^\infty \frac{P_7(x)}{x^8} dx \right| \leq \frac{1}{6} \int_n^\infty \frac{1}{x^8} dx = \frac{1}{42n^7}.$$

Adesso (3.15) possiamo riscirverla come

$$C = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} \right) + E(n), \tag{3.16}$$

dove $0 < |E(n)| < \frac{1}{42n^7}$. Usando una calcolatrice che fornisca 12 cifre decimali troviamo che $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = 2.92896825381$ e $\log(10) \approx 2.30258509299$. Se $n = 10$ sono trascurabili sia $E(n)$ che il termine $\frac{1}{252n^6}$, poiché troppo piccoli per influenzare l'ottava cifra. Trascurando questi ultimi termini e tenendo 8 cifre otteniamo dunque

$$C \approx 2.92896825 - 2.30258509 - \frac{1}{20} + \frac{1}{1200} - \frac{1}{1200000} \approx 0,57721566.$$

Capitolo 4

Alcune Applicazioni

4.1 Calcolo della funzione Zeta di Riemann

Nei capitoli precedenti abbiamo visto la forma generale della formula della somma di Eulero per una funzione f definita sull'intervallo $[1, n]$. Vediamo ora la versione su un intervallo chiuso generico all'interno di $[1, +\infty[$.

Teorema 4.1 (**Seconda versione della formula della somma di Eulero per funzioni $\mathbf{C^1}$**). *Sia f funzione con derivata f' continua sull'intervallo $[y, x]$, dove $0 < y < x$ allora vale*

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)dt + f(x)(\lfloor x \rfloor - x) - f(y)(\lfloor y \rfloor - y). \quad (4.1)$$

Dimostrazione. Sia $m = \lfloor y \rfloor$ e $k = \lfloor x \rfloor$. Per gli interi n ed $n-1$ in $[y, x]$ abbiamo

$$\int_{n-1}^n \lfloor t \rfloor f'(t)dt = \int_{n-1}^n (n-1)f'(t)dt = (n-1)\Big(f(n) - f(n-1)\Big) = \Big(nf(n) - (n-1)f(n-1)\Big) - f(n).$$

Sommando da $n = m+1$ a $n = k$ troviamo

$$\int_m^k \lfloor t \rfloor f'(t)dt = \sum_{n=m+1}^k \Big(nf(n) - (n-1)f(n-1)\Big) - \sum_{y<n\leq x} f(n) =$$

(somma telescopica)

$$= kf(k) - mf(m) - \sum_{y<n\leq x} f(n).$$

Dunque

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = -\int_m^k \lfloor t \rfloor f'(t)dt + kf(k) - mf(m) = -\int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t)dt + kf(x) - mf(y). \quad (4.2)$$

L'integrazione per parti ci dà

$$\int_y^x f(t)dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x tf'(t),$$

e questo combinato con (4.2) ci restituisce (4.1). $\square$

Definizione 4.2 (**Funzione Zeta di Riemann**). *La funzione Zeta di Riemann è definita come*

$$\zeta(s) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} & s > 1, \\ \lim_{x \to +\infty} (\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s}) & 0 < s < 1. \end{cases}$$

Il prossimo teorema ci fornisce delle formule asintotiche per le serie $\zeta(s)$, che sono facili conseguenze della formula della somma di Eulero.

Teorema 4.3. *Se $x \ge 1$ valgono:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \log(x) + C + O(\frac{1}{x})$ *dove C è la costante di Eulero,*
2. $\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})$ *se $s > 0, s \neq 1$,*
3. $\sum_{n > x} \frac{1}{n^s} = O(x^{1-s})$ *se $s > 1$,*
4. $\sum_{n \le x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha})$ *se $\alpha \ge 0$.*

Dimostrazione. Basta prendere $f(t) = \frac{1}{t}$ nella formula della somma di Eulero. L'abbiamo già vista analoga nell'Esempio 2.3 nel caso in cui la somma era infinita, rivediamolo aiutandoci con il Teorema 4.1:

$$\begin{aligned} \sum_{n \le x} \frac{1}{n} &= \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt + 1 - \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x} = \\ &= \log(x) - \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= \log(x) + 1 - \int_1^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt + \int_x^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

L'integrale improprio $\int_1^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$ esiste perché dominato da $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$, che è finito; inoltre

$$0 \le \int_x^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \le \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x};$$

quindi l'ultima identità diventa

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n} = \log(x) + 1 - \int_1^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Questo prova (1) con

$$C = 1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$$

e facendo tendere x a $+\infty$ troviamo

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n\le x} \frac{1}{n} - \log(x) \right) = 1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.$$

Quindi per ciò visto nella Sezione 2.1 abbiamo che C è proprio la costante di Eulero nel caso di $f = \frac{1}{x}$. Per provare (2) usiamo lo stesso tipo di ragionamento con $f(x) = x^{-s}$, dove $s > 0, s \neq 1$. La formula della somma di Eulero afferma

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n^s} = \int_1^x \frac{dt}{t^s} - s\left(\int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt \right) + 1 - \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^s} =$$

$$= \frac{x^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + 1 - s\left(\int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt \right) + O(x^{-s}).$$

Quindi

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + C(s) + O(x^{-s}), \tag{4.3}$$

dove

$$C(s) = 1 - \frac{1}{1-s} - s\int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt.$$

Se $s > 1$, quando x tende a $+\infty$ il membro di sinistra in (4.3) è proprio $\zeta(s)$ e i termini x^{1-s}, x^{-s} tendono entrambi a 0. Dunque per $s > 1$ si ha che $C(s) = \zeta(s)$. Se invece $0 < s < 1$, x^{-s} tende a 0 e (4.3) mostra che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{n\le x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} \right) = C(s).$$

Per la definizione (4.2) abbiamo $C(s) = \zeta(s)$ se $0 < s < 1$, e questo prova (2). Per provare (3), usiamo (2) con $s > 1$ per ottenere

$$\sum_{n>x} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n\le x} \frac{1}{n^s} \underset{(2)}{=} \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-s}) = O(x^{1-s}),$$

poiché $x^{-s} \le x^{1-s}$ essendo $x \ge 1$. Usiamo di nuovo la formula della somma di Eulero con $f(t) = t^\alpha$ e otteniamo

$$\sum_{n\le x} n^\alpha = \int_1^x t^\alpha dt + \alpha \int_1^x t^{\alpha-1}(t - \lfloor t \rfloor) dt + 1 - (x - \lfloor x \rfloor) x^\alpha =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} + O\left(\alpha \int_1^x t^{\alpha-1} dt \right) + O(x^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha).$$

$\square$

4.2 La formula di Stirling

Definizione 4.4. *La formula di Stirling dà un'asintotica equivalenza del fattoriale di un numero naturale n quando n tende all'infinito:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1 \tag{4.4}$$

che spesso viene scritta come

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n^n}{e^n}\right), \quad n \to \infty. \tag{4.5}$$

La formula di Stirling sopra enunciata è facilmente dimostrabile con la formula di Eulero trovata nei paragrafi precedenti e con l'adeguata applicazione della formula del prodotto di Wallis. D'altra parte il prodotto di Wallis si può dedurre a sua volta dalla formula di Stirling:

Teorema 4.5 (**Prodotto di Wallis**)**.** *Per prodotto di Wallis si intende un'espressione del valore di π trovata nel 1655 dal matematico John Wallis,*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)}{(2n-1)} \cdot \frac{(2n)}{(2n+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots = \frac{\pi}{2}. \tag{4.6}$$

Dimostrazione. Consideriamo l'approssimazione finita con il prodotto di Wallis ottenuta prendendo i primi k termini in (4.6):

$$p_k = \prod_{n=1}^{k} \frac{(2n)}{(2n-1)} \cdot \frac{(2n)}{(2n+1)},$$

quindi p_k può essere riscritto come

$$p_k = \frac{1}{(2k+1)} \prod_{n=1}^{k} \frac{(2n)^4}{(2n(2n-1))^2} = \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{4^{2k}k!^2}{(2k!)^2},$$

sostituendo ora l'approssimazione di Stirling (4.4) in questa espressione, sia per $k!$ che per $2k!$, possiamo dedurre che p_k converge a $\frac{\pi}{2}$ per k che tende a $+\infty$; questo conclude la prova. □

Bibliografia

[1] Giovanni Felder: *Problema di Basilea, numeri di Bernoulli e serie di Fourier,* https://people.math.ethz.ch/ felder/Corsodaggiornamento2019.pdf

[2] Tom M. Apostol: *An elementary view of Euler's summation formula*, 1999

[3] Tom M. Apostol: *Tom M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory*, New York, Springer-Verlag, 1976,

Ringraziamenti

Prima di tutto un grazie speciale ai miei genitori Massimo e Maria Cira, senza il vostro supporto morale ed economico non avrei avuto la possibilità di arrivare fino a qui.

Ringrazio il mio relatore, Chiar.mo Professore Andrea Bonfiglioli, per avermi accompagnata nella scrittura di questo elaborato.

Grazie a tutta la mia famiglia per avermi incoraggiata e spronata ad andare avanti, in particolare alle mie sorelle Anna e Rossella che hanno vissuto insieme a me il periodo dello studio "matto e disperato".

Un grazie speciale a tutti i miei amici con i quali ho condiviso tante esperienze (universitarie e non); grazie a voi non sono impazzita sui libri e ho trovato momenti di svago necessari alla buona riuscita del mio percorso.

Altrettanto fondamentale l'aiuto dei colleghi universitari (che considero comunque amici), grazie a voi le aule erano un po' meno anguste e lo studio in biblioteca più leggero (e sicuramente non decaffeinato).

Grazie ai conquilini Bolognesi conosciuti, mi avete insegnato a crescere e diventare una persona autonoma; le piccole feste in casa e i discorsi filosofici notturni mi hanno accompagnato in questa avventura senza mai farmi sentire sola.

Infine, ma non per importanza, ringrazio il mio fidanzato Simone, mi hai supportato ma soprattutto sopportato per quest'ultimo fondamentale anno, che senza di te sarebbe stato vuoto di momenti indimenticabili; mi hai sempre sostenuta, apprezzata e motivata a fare del mio meglio, forse non lo sai ma il tuo credere in me mi ha fatto credere in me stessa; mi hai aiutato nei momenti difficili e hai riso con me in quelli felici, sei il compagno perfetto, ti amo.