

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Effetti Relativistici in Astrofisica

Tesi di Laurea

Presentata da:
Leonardo Buoncompagni

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Sessione I
Anno Accademico 2022-2023

Introduzione

In questo elaborato saranno analizzati i fenomeni astrofisici in cui la teoria della relatività ha un ruolo fondamentale. Inizialmente verranno fornite le basi della relatività ristretta partendo dalle prime teorie dell'Ottocento per spiegare le discrepanze tra la realtà galileiana e le leggi di Maxwell giungendo alle fondamentali trasformazioni di Lorentz e all'equazione del legame tra massa ed energia.

Una volta definite le proprietà di base, saranno trattati gli eventi astrofisici legati alla cinematica relativistica ovvero l'aberrazione e l'effetto Doppler. Successivamente si passerà alla sezione sull'emissione di radiazione: dapprima sarà spiegato come una particella carica emetta radiazione, per poi passare al caso dell'emissione di una particella relativistica ed al fenomeno del beaming relativistico. Il beaming sarà alla base della descrizione della radiazione di sincrotrone che sarà trattata nei suoi elementi fondanti. In seguito si passerà allo scattering inverse Compton e a come questi due processi di radiazione interagiscano tra loro ed in quali casi ha luogo la cosiddetta catastrofe Compton. Questo fenomeno fungerà da base per la trattazione dei getti di materia espulsi dagli AGN, in cui la catastrofe Compton apparentemente dovrebbe avvenire ma non viene osservata: si vedrà come la spiegazione risieda nel fenomeno dei moti superluminali degli stessi getti di materia.

Nella sezione finale dell'elaborato saranno descritti i problemi che portarono Albert Einstein alla pubblicazione della teoria della relatività generale, di cui saranno forniti brevemente gli elementi fondamentali che saranno propedeutici alla descrizione dell'interessante lensing gravitazionale e dei suoi utilizzi in astrofisica.

Indice

1	Relatività speciale	1
1.1	La nascita della relatività	1
1.2	Trasformazioni di Lorentz	1
2	Effetti di cinematica relativistica	3
2.1	Aberrazione relativistica	3
2.2	Effetto Doppler relativistico	4
3	Emissione di radiazione	5
3.1	Radiazione da carica in moto	5
3.1.1	Carica in moto relativistico	6
3.2	Beaming relativistico	6
3.3	Radiazione di sincrotrone	7
3.3.1	Distribuzione spettrale di singolo elettrone	8
3.3.2	Distribuzione per una popolazione di elettroni	9
3.4	Inverse Compton	9
3.5	Inverse Compton e Sincrotrone	11
3.5.1	Catastrofe Compton	11
3.6	Moti superluminali	12
4	La Relatività Generale	13
4.1	Lensing gravitazionale	14

1 Relatività speciale

1.1 La nascita della relatività

Verso la fine dell'Ottocento ci si accorse di una importante discrepanza tra le leggi di Maxwell e la relatività Galileiana. Le equazioni di Maxwell per le onde elettromagnetiche contengono una costante: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ che corrisponde alla velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica nel vuoto. Questo valore ($c = 299.792.458 m/s$) però, per la relatività Galileiana, non può essere costante per osservatori che si trovano in diversi sistemi di riferimento in moto. Questa grande incoerenza portò alla formulazione di tre possibili spiegazioni:

- Esiste un mezzo di propagazione delle onde elettromagnetiche, l'**etere**, e costituisce un sistema di riferimento privilegiato in cui la luce si muove a velocità sempre costante.
- Le leggi di Maxwell non sono corrette e le trasformazioni galileiane sono applicabili anche all'elettromagnetismo.
- Le leggi della meccanica Newtoniana sono errate.

A fine Ottocento furono condotti vari esperimenti per cercare di dimostrare l'esistenza dell'etere, famoso quello di **Michelson e Morley** con gli interferometri, ma tutti diedero esito negativo. Dimostrarono anzi che non esiste alcun riferimento "privilegiato" e che quindi le trasformazioni di Galileo (che imponevano che la velocità della luce dipendesse dalla velocità relativa tra sorgente ed osservatore) dovevano essere rivedute e non le leggi di Maxwell che si mostrarono corrette.

La svolta ci fu con Albert Einstein che nel suo *annus mirabilis*, il 1905, nell'articolo "*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*" formulò due postulati che costituirono la base della **teoria della relatività ristretta**:

1. *Principio di Relatività*: non esiste un sistema di riferimento privilegiato, le leggi della fisica sono le stesse in ogni sistema inerziale.
2. *Principio di costanza di c*: la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in ogni sistema inerziale.

Da questi due postulati deriva la relatività ristretta, che permise di spiegare gli esperimenti di Michelson, Morley e altri e predisse fenomeni scoperti molti anni dopo e che tutt'ora si stanno studiando. La relatività è alla base anche di molti eventi astrofisici, i più importanti dei quali saranno trattati in questa tesi.

1.2 Trasformazioni di Lorentz

Si rese quindi necessario sostituire le trasformazioni Galileiane con altre formule che coincidessero con i risultati riscontrati negli esperimenti. Nel 1897 *Joseph Larmor* scoprì per la prima volta alcune di queste formule. Nel 1904 *Hendrik Lorentz* ricavò una serie di equazioni, successivamente rielaborate nella loro forma finale dal matematico Henri Poincaré, che supplivano alle mancanze delle trasformazioni di Galileo. Queste

equazioni furono poi utilizzate da Einstein che per la prima volta riuscì a dare ad esse un'applicazione appropriata nella sua teoria della relatività ristretta.

Le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni lineari tali per le quali, a partire dalle coordinate spaziali e temporali di un sistema di riferimento inerziale S di coordinate (t, x, y, z) , si ricavano le coordinate rispetto ad un altro sistema di riferimento, indicato con S' e di coordinate (t', x', y', z') , che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al primo.

Sotto l'assunzione che il sistema S' si muova di moto rettilineo uniforme rispetto ad S con velocità v lungo il solo asse $x-x'$ e che al tempo $t=t'=0$ le origini dei sistemi siano sovrapposte, Lorentz giunse alle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-(\frac{v}{c^2})x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \text{Con } \beta = v/c$$

(Spesso si utilizza $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ detto *fattore di Lorentz*)

Queste formule portarono con loro delle conseguenze importantissime per la fisica, fino ad allora inimmaginabili:

- Le lunghezze perpendicolari alla direzione del moto relativo dei due sistemi rimangono uguali in entrambi i sistemi. Le lunghezze parallele al moto, invece, risultano *contratte* rispetto a quelle che sono in quiete per l'osservatore di una quantità pari a $\Delta x = \Delta x'/\gamma$. *La misura delle lunghezze dipende dal moto rispetto all'osservatore.*
- L'intervallo temporale misurato in un sistema in moto rispetto ad un osservatore, è più lungo dello stesso intervallo misurato nel sistema solidale con l'osservatore. La differenza di lunghezza di questo lasso temporale è data da $\Delta t = \Delta t'\gamma$.
- Due eventi che appaiono simultanei in S e separati tra loro di una distanza Δx in un riferimento inerziale, non sono simultanei per un altro sistema inerziale S' .

Questi importanti risultati portarono ad altri enormi cambiamenti nella descrizione di quantità fisiche fondamentali quali *addizione delle velocità, quantità di moto, massa ed energia di una particella.*

Nel caso delle velocità: se si ha un corpo nel sistema S che si muove a velocità u ed un sistema S' che si muove con una velocità v rispetto ad S , sfruttando le trasformazioni di Lorentz, si risale alle seguenti relazioni per la velocità del corpo misurata da un osservatore nel sistema S' :

$$u'_z = \frac{u_z - v}{1 - u_z v/c^2} \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2} \quad u'_x = \frac{u_x \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2} \quad (1.2.1)$$

La quantità di moto, invece, deve essere ridefinita in maniera tale che la legge di conservazione dell'impulso negli urti valga anche per le trasformazioni di Lorentz e che

la sua espressione rimanga del tipo $\vec{p} = m\vec{v}$. Per fare ciò è necessario ammettere che la massa di una particella è una funzione della sua velocità secondo la formula:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (1.2.2)$$

dove m_0 è la *massa a riposo*, o massa propria, della particella. Con questa formulazione, l'impulso relativistico risulta pari a

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Da notare è anche il fatto che per $u \rightarrow c$, $m \rightarrow \infty$: questo denota la presenza di un limite massimo per la velocità di un corpo in quanto più essa si avvicina a c e più aumenta l'inerzia del corpo rendendo sempre più difficile imprimere un ulteriore aumento di velocità.

Avendo apportato questi cambiamenti è necessario modificare anche l'espressione dell'energia della particella. L'espressione classica dell'energia cinetica ($K = 1/2mv^2$) ora diventa

$$K = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1 \right]$$

Definito $mc^2 = E$ (con E detta *energia totale della particella*), si può esprimere l'equazione dell'energia come

$$E = m_0c^2 + K = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} \quad (1.2.3)$$

Con m_0c^2 che è l'*energia a riposo* della particella. Questo è un risultato fondamentale poiché implica che esiste un legame tra la massa e l'energia: la massa a riposo può essere considerata una forma di energia interna di un corpo.

Tutti questi risultati, e molti altri che esulano dallo scopo di questa tesi, scossero i fondamenti della fisica ed aprirono la strada alla descrizione di una lunga serie di fenomeni fisici spiegabili solo tramite la teoria della relatività.

In Astrofisica in particolare, la relatività ricopre un ruolo fondamentale in molti fenomeni. In questo elaborato tali fenomeni saranno suddivisi a seconda dell'ambito relativistico che ne costituisce base: si parlerà quindi di effetti cinematici, processi di emissione ed effetti della relatività generale che sarà descritta prossimamente.

2 Effetti di cinematica relativistica

2.1 Aberrazione relativistica

Si consideri un treno di onde elettromagnetiche piane di lunghezza d'onda e frequenza λ' e ν' emesse da una sorgente posta nel sistema S' che si muove con velocità v rispetto al sistema S . I raggi giacciono sul piano $x'-y'$ e la loro direzione di propagazione è inclinata di un angolo θ' rispetto all'asse x' .

L'equazione che ne descrive la propagazione è

$$\cos 2\pi \left[\frac{x' \cos \theta' + y' \sin \theta'}{\lambda'} - \nu' t' \right] \quad (2.1.1)$$

Nel riferimento S , per la linearità delle trasformazioni di Lorentz, i piani delle onde devono rimanere inalterati e si ha quindi

$$\cos 2\pi \left[\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\lambda} - \nu t \right] \quad (2.1.2)$$

dove λ , θ e ν sono le rispettive quantità relative al sistema S .

Applicando alle equazioni 2.1.1 e 2.1.2 le trasformazioni di Lorentz ed eguagliando i termini di x, y e t si ottiene

$$\nu = \frac{\nu'(1 + \beta \cos \theta')}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.1.3)$$

con ulteriori passaggi algebrici si risale all' *equazione per l'aberrazione relativistica*:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta' + \beta} \quad (2.1.4)$$

La 2.1.4 mostra come l'angolo di propagazione della luce rispetto ad uno stesso asse, visto da due diversi sistemi di riferimento inerziali, varia in funzione della velocità di spostamento della sorgente. Quindi la direzione da cui la luce arriva ad un osservatore dipende dal moto della sorgente (o dell'osservatore).

2.2 Effetto Doppler relativistico

Un altro fenomeno astrofisico che ha alla sua base la relatività è l'effetto Doppler relativistico. Si tratta di un fenomeno che consiste nell'alterazione della frequenza e della lunghezza d'onda percepita da un osservatore raggiunto da un'onda emessa da una sorgente in moto rispetto ad esso. Nel caso classico l'effetto è descritto dall'equazione

$$\nu_{oss} = \nu_{em} \left(\frac{u \pm v_{oss}}{u \mp v_{em}} \right)$$

con v_{oss} e v_{em} velocità dell'osservatore e della sorgente rispettivamente. Con u si indica invece la velocità di propagazione della radiazione in un mezzo.

Si tratta di un fenomeno in funzione della sola velocità relativa tra osservatore ed emettitore.

Nel caso relativistico, la formula da considerare è la 2.1.3 che può essere riscritta per il sistema S' come

$$\nu' = \frac{\nu(1 - \beta \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.2.1)$$

Da cui si può ricavare per S :

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \quad (2.2.2)$$

Si tratta di un'espressione più complessa di quella classica: presenta infatti una dipendenza anche dall'angolo di provenienza della radiazione θ , oltre che dalle velocità relative di osservatore e sorgente.

Si nota che per $\theta = 0$ l'osservatore in S vede la sorgente avvicinarsi, per cui la frequenza ν è maggiore di quella emessa ν' . Con $\theta = 180$ si è invece nella situazione opposta. In questi due casi particolari la 2.1.3 corrisponde a

$$\begin{aligned} \nu &= \nu' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \nu' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} && \text{per } \theta = 0 \\ \nu &= \nu' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \nu' \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} && \text{per } \theta = 180 \end{aligned}$$

che coincidono coi risultati dell'effetto Doppler classico. Si parla in questi casi di effetto *Doppler longitudinale*.

La grande differenza con la fisica classica si ha quando $\theta = 90$ e $\nu \sim c$: classicamente in questo caso non ci sarebbe alcun effetto Doppler ma considerando la relatività si scopre che esiste anche l'effetto *Doppler trasversale* espresso dalla formula

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2.2.3)$$

Questa formula mostra che nel caso in cui la linea di vista dell'osservatore è perpendicolare alla direzione del suo moto relativo con la sorgente, esso misura una frequenza ν minore della frequenza propria della sorgente di radiazione ν' .

In Astrofisica questo particolare effetto è utilizzato in vari ambiti come la determinazione delle caratteristiche di sistemi stellari doppi le cui orbite giacciono sul piano di osservazione e la determinazione della velocità di rotazione delle galassie.

3 Emissione di radiazione

Passiamo ora all'analisi dei processi di emissione di radiazione che si basano sulla relatività: sarà dapprima trattata l'emissione di una particella carica accelerata e tale fenomeno sarà poi applicato alla descrizione della radiazione di sincrotrone e dello scattering inverse Compton.

3.1 Radiazione da carica in moto

Una particella carica sottoposta ad un'accelerazione emette radiazione. Questo risultato importantissimo è il risultato del lavoro di *Joseph Larmor* che per primo definì la potenza emessa da una carica accelerata. Si basò sui **potenziali ritardati** elaborati da *Liénard e Wiechert*. Si tratta di potenziali che, se perturbati dal moto della particella che li genera, non si modificano istantaneamente in tutto lo spazio ma considerano il tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza tra l'osservatore e la particella. Proprio l'aggiunta di questo dettaglio è ciò che permette alla particella di generare radiazione.

Tramite i potenziali di Liénard-Wiechert si possono ricavare i valori dei campi elettrico e magnetico di radiazione (\vec{E}_{rad} e \vec{B}_{rad}) da cui si ottiene il *vettore di Poynting* che fornisce la potenza emessa dalla particella:

$$S = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{rad}|^2 = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{qa}{Rc^2} \sin\theta \right)^2 \quad (3.1.1)$$

Trovato il vettore di Poynting, associando alla particella un *momento di dipolo*, lo si può dividere per un'unità di area ed integrare su tutto l'angolo solido per ottenere la *formula di Larmor*:

$$P = (-) \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{2q^2 a^2}{3c^3}$$

In unità di angolo solido la distribuzione angolare della potenza emessa nel caso non relativistico è pari a

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{q^2}{c^3} a^2 \sin^2 \theta \quad (3.1.2)$$

Dove a è l'accelerazione a cui è sottoposta la particella, q la carica e θ l'angolo tra la linea di vista e la direzione dell'accelerazione.

La dipendenza dal $\sin^2 \theta$ implica che la radiazione viene emessa con una distribuzione **toroidale**. Un osservatore non riceverà alcuna radiazione se la sua linea di vista è allineata alla direzione di accelerazione della particella. Di contro, riceverà il picco dell'emissione osservandola perpendicolarmente all'accelerazione.

3.1.1 Carica in moto relativistico

Nel caso in cui la particella sia in regime relativistico, cioè quando il suo fattore di Lorentz γ assume valori molto maggiori dell'unità, considerando gli effetti relativistici (in particolare la dilatazione dei tempi che porta a $d\tau = dt/\gamma$) si può riscrivere l'equazione di Larmor come

$$P = \frac{2q^2}{3m^2c^3} \left(\frac{dp_i}{d\tau} \cdot \frac{dp_i}{d\tau} \right) \quad (3.1.3)$$

$$\text{dove } \left(\frac{dp_i}{d\tau} \cdot \frac{dp_i}{d\tau} \right) = \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dc}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \beta^2 \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2$$

Si hanno quindi due componenti: una vettoriale ed una scalare.

A questo punto si devono considerare due casi a seconda della direzione dell'accelerazione:

- **Accelerazione lineare:** in questo caso l'accelerazione ha la stessa direzione della velocità e quindi si ha $\left| \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right| \simeq \frac{dp}{d\tau}$ e l'equazione di Larmor relativistica è

$$P = \frac{2q^2}{3m^2c^3} \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 \simeq \frac{2q^2}{3m^2c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (3.1.4)$$

che coincide con l'equazione di Larmor classica.

- **Accelerazione centripeta:** l'accelerazione non è parallela alla velocità e quindi impone un cambiamento di direzione alla particella, portando ad avere $\left| \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right| \gg \beta \left(\frac{dp}{d\tau} \right)$ per cui l'equazione di Larmor diventa

$$P = \frac{2q^2}{3m^2c^3} \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 \simeq \frac{2q^2}{3m^2c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 \quad (3.1.5)$$

γ^2 è considerabile come un indice dell'energia posseduta dalla particella e da questa formula si nota come ad alte energie l'emissione di radiazione aumenta enormemente. Importante è anche considerare che ad un aumento di carica e diminuzione di massa corrisponde un aumento dell'emissione energetica: per questo motivo in questo genere di processo si considerano solo gli elettroni come particelle emittenti radiazione poichè, a parità di energia, emettono circa $3 \cdot 10^6$ volte la potenza emessa dai protoni.

3.2 Beaming relativistico

Considerando una carica in moto relativistico, nel sistema di riferimento della particella, la radiazione viene emessa con la distribuzione a toroide trattata in precedenza (figura 1a). Per un osservatore esterno invece, la radiazione si concentra in un cono di semiapertura pari a $1/\gamma$ in direzione della velocità della particella (figura 1b). È il



Figura 1: Rappresentazione del beaming relativistico.

fenomeno del *beaming relativistico*.

La causa di questo fenomeno è l'aberrazione relativistica (capitolo 2.1) che modifica l'angolo in cui viene emessa la radiazione nel riferimento dell'osservatore secondo la formula 2.1.4. Preso l'angolo di emissione nel riferimento della particella $\theta' = 90^\circ$, dato che in regimi ultra-relativistici $\beta \simeq 1$, la 2.1.4 diventa

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \simeq \frac{1}{\gamma} \quad (3.2.1)$$

che dimostra il valore dell'angolo di semiapertura del cono in cui si concentra la radiazione.

A causa di ciò la radiazione emessa apparirà amplificata quando la particella si dirige verso l'osservatore, ed apparirà attenuata nel caso opposto.

3.3 Radiazione di sincrotrone

L'emissione per sincrotrone è uno dei principali meccanismi di perdita energetica per particelle ultrarelativistiche. È un'emissione tipica delle radiogalassie in cui sono presenti *Active Galactic Nuclei* che producono getti molto estesi di materia in cui gli elettroni vengono accelerati fino a velocità relativistiche. Si tratta infatti di elettroni ultra-relativistici in moto all'interno di zone in cui è presente un campo magnetico B . La presenza di quest'ultimo fa sì che la particella risenta di una forza pari a

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.3.1)$$

Questa forza imprime alle particelle un'accelerazione centripeta che le costringe a seguire un moto elicoidale e ne causa l'emissione di radiazione secondo le leggi di Larmor e del beaming relativistico. Se le particelle si muovono a velocità non relativistiche si parla invece di *radiazione di ciclotrone*. L'energia che irradia un elettrone è data dalla formula di Larmor che in questo caso si esprime come

$$-\frac{d\epsilon}{dt} = 2\sigma_T\gamma^2 \frac{B^2}{8\pi} \sin^2(\theta) \quad (3.3.2)$$

dove $\sigma_T = 6.652 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^{-2}$ è la *sezione d'urto Thomson per l'elettrone*.

La 3.3.2 diviene quindi

$$-\frac{d\epsilon}{dt} = 2c\sigma_T\gamma^2 \frac{B^2}{8\pi} \sin^2 \theta \simeq 1.62 \cdot 10^{-15} \gamma^2 B^2 \sin^2(\theta) \quad [\text{erg} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (3.3.3)$$

Dalla 3.3.3 si nota che elettroni più energetici emettono più radiazione, cosa che li porta velocemente ad energie basse, e che campi magnetici forti inducono una perdita di energia maggiore rispetto ai campi deboli.

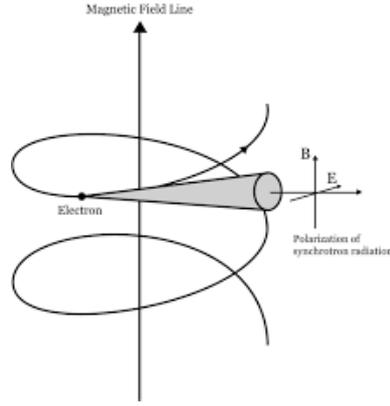


Figura 2: schema di un elettrone che emette per sincrotrone

A causa del beaming relativistico la radiazione che arriva ad un osservatore è sottoforma di impulsi luminosi. Questo accade perché l'emissione è visibile solo fintanto che il cono di luce è rivolto verso il ricevitore. La durata dell'impulso è pari a

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega_{rel}} = \frac{\gamma m_e c^2}{eB\gamma} = \frac{2}{\omega_L}$$

dove $\Delta\theta$ è l'intervallo angolare entro cui è osservabile la radiazione e $\omega_{rel} = \frac{\omega_L}{\gamma}$ è la girofrequenza angolare dell'elettrone all'interno del campo magnetico corretta per gli effetti relativistici. Con $\omega_L = \frac{2\pi}{T_L} = \frac{qB}{2\pi mc}$ si indica la girofrequenza, ovvero il numero di rivoluzioni al secondo eseguite dall'elettrone nel caso non relativistico.

Nel riferimento dell'osservatore questo lasso temporale corrisponde a

$$\Delta\tau = (1 - \beta)\Delta t \simeq \frac{1}{\gamma^3 \omega_{rel}} \sim \frac{5 \cdot 10^{-8}}{\gamma^2 B} \quad [s]$$

Per fare un esempio coi valori tipici di $\gamma = 10^3$ e $B = 1\mu G$, si ottiene un impulso della durata di $\Delta\tau = 50 \quad [ns]$.

3.3.1 Distribuzione spettrale di singolo elettrone

Mediante l'analisi di Fourier dell'impulso si risale allo spettro della radiazione generata: è uno spettro che presenta una *frequenza caratteristica* ν_s data dalla formula

$$\nu_s \simeq 6.24 \cdot 10^{18} \epsilon^2 B \sim 4.2 \cdot 10^{-9} \gamma^2 B_{[\mu G]} \quad [GHz] \quad (3.3.4)$$

Nel grafico della distribuzione spettrale si hanno due andamenti:

- per $\nu \ll \nu_s$ la distribuzione spettrale aumenta con una proporzionalità da $\nu^{1/3}$
- per $\nu \gg \nu_s$ la distribuzione cala con un andamento esponenziale $e^{-\nu/\nu_s}$

In particolare, il picco del flusso $F(\nu)$ si ha per $\nu \sim 0.3\nu_s$.

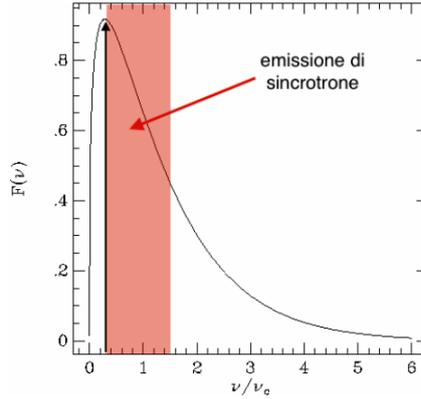


Figura 3: Spettro dell'emissione per sincrotrone da singolo elettrone.

3.3.2 Distribuzione per una popolazione di elettroni

Considerando molti elettroni, lo spettro totale ha un andamento dato dalla sovrapposizione delle distribuzioni spettrali dei singoli elettroni che emettono ciascuno alla propria frequenza caratteristica. Gli elettroni in una nube hanno energie che seguono una distribuzione a legge di potenza del tipo $N_e d\epsilon = N_0 \epsilon^{-\delta} d\epsilon$ e generano uno spettro di emissione con emissività data da: $J_s(\nu) \sim N_0 B^{\alpha+1} \nu^{-\alpha}$ con $\alpha = (\delta - 1)/2$ detto indice spettrale.

Lo spettro totale del sincrotrone è inoltre diviso in due zone, separate dalla *frequenza di picco*, che distinguono due diversi andamenti per l'emissività come si vede in figura 4:

- **regime otticamente spesso:** alle frequenze più basse la radiazione emessa dagli elettroni viene assorbita da altri e si ha che $\log S_\nu \propto \nu^{5/2}$
- **regime otticamente sottile:** la radiazione non è assorbita dagli elettroni per cui il flusso della radiazione in funzione della frequenza segue la legge della sovrapposizione degli effetti dovuti ai singoli elettroni $\log S_\nu \propto \nu^{-\alpha}$

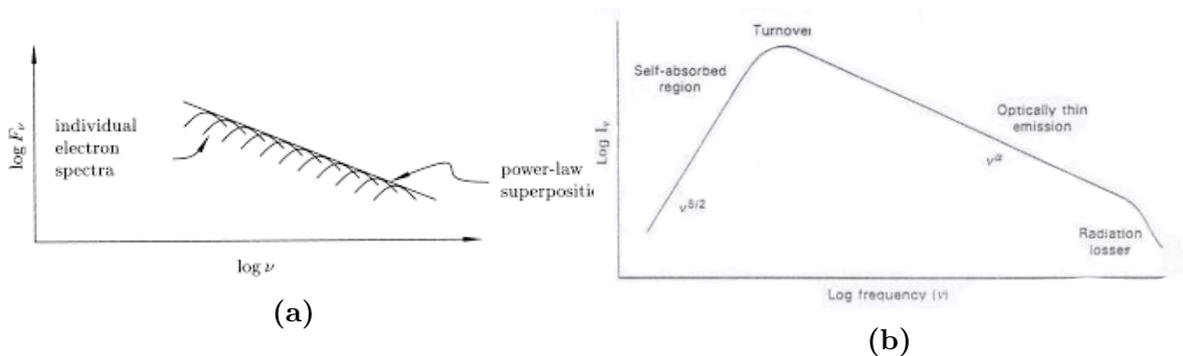


Figura 4: Lo spettro di sincrotrone.

3.4 Inverse Compton

Il *Compton Inverso* è un processo di scattering nel quale un elettrone relativistico urta un fotone poco energetico cedendogli parte della sua energia. È l'effetto contrario

allo *scattering Compton* dove è il fotone a cedere energia all'elettrone.

Ponendosi nel sistema di riferimento in quiete dell'elettrone \mathbf{S}' di figura 5 si definiscono

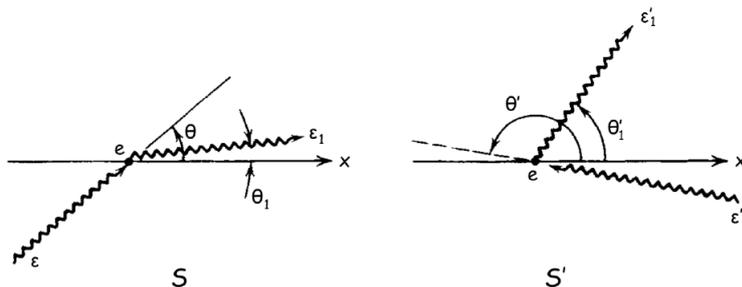


Figura 5: Schema dell'effetto Compton Inverso nel riferimento dell'osservatore (S) e dell'elettrone (S')

$\epsilon' = h\nu'$ ed $\epsilon'_1 = h\nu'_1$ le energie del fotone rispettivamente prima e dopo l'interazione con l'elettrone. Nel riferimento di un osservatore esterno \mathbf{S} invece le analoghe quantità sono definite come segue $\epsilon = h\nu$ e $\epsilon_1 = h\nu_1$.

Alla base del processo c'è l'effetto Doppler relativistico che modifica le energie coinvolte secondo le formule:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon'_1 \gamma (1 + \beta \cos \theta'_1) && \text{nel sistema } \mathbf{S} \\ \epsilon' &= \epsilon \gamma (1 - \beta \cos \theta) && \text{nel sistema } \mathbf{S}' \end{aligned}$$

L'angolo θ (misurato rispetto un asse) a cui avviene l'interazione è fondamentale nel determinare le energie coinvolte:

- per $\theta = 0$ e $\theta'_1 = \pi$ il fotone guadagna la minima energia possibile, e nel sistema di riferimento dell'elettrone appare redshiftato.
- per $\theta = \pi$ e $\theta'_1 = 0$ il fotone guadagna il massimo di energia e nel riferimento dell'elettrone appare blueshiftato.

Da quest'ultimo caso, ovvero l'urto frontale, si ricava l'espressione per l'energia massima acquistata dal fotone in un sistema di riferimento esterno:

$$\epsilon_1 \simeq 4\gamma^2 \epsilon \quad (3.4.1)$$

Si vede come il Compton inverso sia un fenomeno molto efficace per trasferire energia dagli elettroni ai fotoni. Affinché possa avvenire è però necessario che i fotoni siano poco energetici poiché ad alte energie diminuisce la *sezione d'urto Thomson* (σ_T) degli elettroni ed il processo diventa meno efficiente.

Dal momento che $\gamma \sim 10^3$ si hanno interazioni che cedono una grande energia ai fotoni che vengono spostati in bande diverse dello spettro. I salti energetici subiti dai fotoni sono tipicamente:

- banda radio \Rightarrow ultravioletta
- Infrarosso \Rightarrow banda X
- banda ottica \Rightarrow banda γ

Se si considera una regione in cui è presente un plasma composto di elettroni relativistici, assumendo di essere in presenza di una distribuzione isotropa di fotoni caratterizzata da una densità di energia U_{ph} , si ha che l'energia ceduta dagli elettroni ai fotoni per unità di tempo è pari a

$$\left(\frac{d\epsilon}{dt} \right)_{IC} = \frac{d\epsilon_{out}}{dt} - \frac{d\epsilon_{in}}{dt} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{ph} \quad (3.4.2)$$

3.5 Inverse Compton e Sincrotrone

Sincrotrone ed Inverse Compton sono fenomeni causati dalla presenza di elettroni relativistici: una regione che contiene questo tipo di particella presenterà emissione dovuta ad entrambi questi processi di radiazione. L'equazione 3.4.2 ha una forma simile alla 3.3.3. Integrando il termine $\sin^2\theta$ della 3.3.3 così da considerare un'emissione isotropa si ottiene

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{2}{3}$$

che sostituito nella 3.3.3 la trasforma in

$$\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)_{sinc} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_B \quad (3.5.1)$$

A questo punto, si possono confrontare le due equazioni per l'emissione totale dovuta ai due processi di radiazione e si ottiene la seguente importante relazione

$$\frac{(d\epsilon/dt)_{sinc}}{(d\epsilon/dt)_{IC}} = \frac{U_B}{U_{ph}} \quad (3.5.2)$$

Ovvero il rapporto fra le perdite energetiche per sincrotrone ed inverse compton dà il rapporto fra le densità di energia del campo magnetico e dei fotoni. Dato che gli stessi elettroni che emettono per per sincrotrone eseguono anche lo scattering Compton inverso, nei casi in cui la sorgente della radiazione è compatta, è possibile (mediante la formula 3.5.2) stimare il valore del campo magnetico della sorgente, che si tratta di una quantità generalmente complessa da misurare in maniera diretta.

La perdita di energia degli elettroni relativistici dovuta ai due processi combinati è data dalla somma delle equazioni 3.4.2 e 3.5.1 che dà

$$-\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)_{IC+sinc} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 (U_B + U_{ph}) \quad (3.5.3)$$

A questo punto inserendo i valori di $U_B = \frac{B^2}{8\pi}$ ed $\epsilon = mc^2\gamma$ nell'equazione appena descritta si ottiene:

$$-\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)_{IC+sinc} = \frac{4}{3} \frac{\sigma_T \beta^2}{m^2 c^3} \epsilon^2 \left(\frac{B^2}{8\pi} + U_{rad}\right) = C_s \epsilon^2 (B^2 + 8\pi U_{rad}) \quad (3.5.4)$$

Dove U_{rad} non è altro che U_{ph} ovvero la densità di energia del campo di radiazione e C_s una costante.

3.5.1 Catastrofe Compton

Come citato in precedenza, gli elettroni relativistici che emettono fotoni a basse energie per sincrotrone sono anche gli stessi che eseguono scattering *Inverse Compton* su tali fotoni portandoli ad energie dell'ordine dei raggi X e γ . Questo particolare processo, che avviene in sorgenti compatte, prende il nome di *Synchrotron Self-Compton*.

Si considera una regione sferica magnetizzata contenente elettroni ultra relativistici. Le particelle emettono fotoni poco energetici per sincrotrone e subiscono scattering *IC*.

Assumendo che la regione si comporti come un corpo nero si ha che il flusso uscente da essa è dato da

$$S(\nu) = 2kT_e \frac{\nu^2}{c^2} \Omega \quad (3.5.5)$$

In una sorgente autoassorbita, come il caso in questione, la temperatura di brillanza (T_B) corrisponde a quella della sorgente e si ha che la densità di energia emessa per sincrotrone è data da

$$U_{rad} = \frac{L(\nu)\nu}{cR^2 d\Omega} = \frac{L(\nu)\nu}{4\pi cR^2} \sim 2kT_B \frac{\nu^3}{c^3} \quad (3.5.6)$$

con $L(\nu)$ luminosità della sorgente. Unendo questo risultato all'equazione 3.5.2 invertita si ottiene

$$\eta = \frac{(d\epsilon/dt)_{IC}}{(d\epsilon/dt)_{sinc}} = \frac{U_{rad}}{B^2/8\pi} = \frac{16\pi kT_B \nu^3}{B^2 c^3} \quad (3.5.7)$$

Riscrivendo a questo punto il campo magnetico B in funzione di quantità misurabili (ovvero nella forma $B = \frac{2\pi m_e c}{e} \left(\frac{m_e c^2}{3kT_B}\right)^2 \nu$) e sostituendolo nella 3.5.7 si ha

$$\eta = \left(\frac{324e^2 k^5}{\pi m_e^6 c^{13}} \nu T_B^5 \right) \quad (3.5.8)$$

Posto il rapporto tra le emissioni $\eta = 1$, questa equazione porta ad un risultato fondamentale:

$$T_B = 10^{12} \left(\frac{1[GHz]}{\nu} \right)^{1/5} [K] \quad (3.5.9)$$

Questa relazione mostra che quando la temperatura di brillanza T_B della sorgente supera i $10^{12} K$ si ha $\eta > 1$. In questa situazione la densità di energia dei fotoni radio generati per sincrotrone è minore di quella dei fotoni X generati dallo scattering. Questo vuol dire che il processo prevalente è l'Inverse Compton: i fotoni X subiscono ulteriore scattering diventando fotoni γ aumentando ancora di più lo squilibrio tra fotoni originati per sincrotrone e scattering. I fotoni γ subiscono ulteriore scattering ad energie più elevate facendo perdere energia sempre più rapidamente agli elettroni in processo che si autoalimenta: si parla di *catastrofe Compton* e riguarda quelle sorgenti radio che hanno un temperatura di brillanza superiore a $10^{12} K$.

3.6 Moti superluminali

In alcune situazioni si osservano delle sorgenti la cui temperatura di brillanza risulta maggiore del valore di soglia per la catastrofe Compton. Tuttavia, osservando la radiazione X e γ proveniente da tali sorgenti non si riscontrano emissioni intense come quelle previste in caso di catastrofe Compton.

Il fenomeno astrofisico dietro questi inattesi risultati sono i *moti superluminali* che si riscontrano spesso osservando i getti radio espulsi dagli AGN. Uno dei primi casi di osservazione di questo evento è stato quello di **3C273**, il primo *quasar* mai identificato: uno dei suoi getti radio sembrava aver percorso una distanza di 25 anni luce nell'arco di 3 anni.

Il motivo per cui si osservano getti di materia in moto a velocità superluminali ha basi geometriche. Si consideri la situazione di figura 6: una sorgente emette un getto di materia a velocità v inclinato di un angolo Φ rispetto all'asse sorgente-osservatore,

quest'ultimo posto a distanza D dalla sorgente. Il segnale luminoso della radiazione arriva all'osservatore dopo un tempo $t = D/c$. Al tempo t_1 il getto ha percorso una distanza pari a $x_1 = vt_1$: per l'osservatore, che vede solo una *proiezione* del moto reale, la distanza percorsa dal getto è $x_{oss} = vt_1 \sin(\Phi)$. Ad un tempo $t_2 = t_1 + \frac{D-vt_1 \cos(\Phi)}{c}$ l'osservatore vede arrivare il getto nella posizione x_1 .

La velocità trasversale del getto, ovvero quella misurata dall'osservatore, è data dalla formula

$$v_{\perp} = \frac{vt_1 \sin(\Phi)}{t_2 - t} = \frac{vt_1 \sin(\Phi)}{t_1 - (vt_1 \cos(\Phi)/c)} = \frac{v \sin(\Phi)}{1 - (v \cos(\Phi)/c)} \quad (3.6.1)$$

Ponendo $\Phi = v/c = \beta$ si ha il massimo dell'equazione 3.6.1, che quindi diventa

$$v_{\perp} = \frac{v\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2} = \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma v \quad (3.6.2)$$

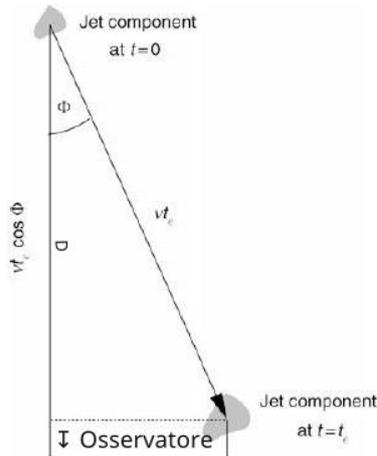


Figura 6: Schema del moto di un getto di materia.

Quindi se il getto viene espulso ad una velocità sufficientemente vicina a c , per l'osservatore esso si muoverà a velocità superluminare. Un oggetto che si muove a queste velocità subisce anche il beaming relativistico, che amplificando l'intensità della radiazione percepita dall'osservatore, altera anche le stime di temperatura e frequenza della sorgente luminosa. In particolare tali quantità vengono modificate di un fattore moltiplicativo k e quindi si ha $T_{oss} = T_0 k$ e $\nu_{oss} = \nu_0 k$. Dalla formula del rapporto per le perdite energetiche di sincrotrone ed inverse Compton (3.5.7) si può notare che η è proporzionale a νT_B^5 , e quindi che, in caso di sorgenti in moto a velocità relativistiche, $\nu \propto k^6$. Se k assume valori molto grandi la misura che viene eseguita della T_B di una sorgente può eccedere la temperatura critica per l'innesco della catastrofe Compton senza che questa abbia effettivamente luogo. Questo fenomeno spiega come in alcuni casi, sorgenti con $T_B > 10^{12} K$ non presentino enormi emissioni nella banda $Xo \gamma$ come invece ci si aspetterebbe.

4 La Relatività Generale

La relatività ristretta risolveva molti problemi della fisica ma ne tralasciava altri. Era sorta in particolare una contraddizione riguardo la forza gravitazionale: per le leggi di Newton, l'interazione gravitazionale tra due corpi è un evento istantaneo, ma per la relatività ristretta nessun segnale può essere trasmesso a velocità infinita. Rimaneva irrisolta anche la questione della distinzione fra massa gravitazionale ed inerziale. La massa inerziale è quella che compare nella seconda legge di Newton ($F = ma$) e rappresenta la resistenza che un corpo esercita all'alterazione del suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme, mentre la massa gravitazionale è quella contenuta nella legge di gravitazione ($F = G \frac{mM}{r^2}$) ed è una quantità associata al campo gravitazionale. Sperimentalmente si era ottenuto che le due masse coincidono fino alla dodicesima cifra decimale ma non era chiaro il motivo di questa coincidenza. Inoltre, dal momento

che particelle prive di massa presentano anche proprietà tipiche di corpi massicci, ci si chiedeva se e come queste interagissero con un campo gravitazionale.

A portare una svolta fu nuovamente Albert Einstein che nel 1911 propose il *principio di equivalenza*. Il principio di equivalenza afferma che: considerati un sistema di riferimento S inerziale all'interno di un campo gravitazionale uniforme ed uno S' non inerziale accelerato in maniera uniforme e posto in assenza di campo gravitazionale, essi costituiscono due sistemi di riferimento equivalenti. Essere equivalenti implica che esperimenti uguali condotti nei due riferimenti danno gli stessi risultati. Da questo principio discende che se un corpo si trova in caduta libera in un campo gravitazionale, in assenza di attriti, esso si comporterà come se si trovasse in assenza del campo stesso. Di conseguenza, assume le caratteristiche di un sistema di riferimento inerziale, nonostante per un osservatore esterno il corpo sia soggetto ad un'accelerazione. Questa osservazione fatta da Einstein in uno dei suoi *Gedankenexperiment* (gli esperimenti mentali), implica l'esistenza di una relatività anche per l'accelerazione esattamente come esiste la relatività per velocità e tempo descritta dalla relatività ristretta. Il principio di equivalenza risolve inoltre la questione sulla coincidenza tra massa gravitazionale ed inerziale.

Questo concetto pose la base per l'elaborazione della *teoria della relatività generale*, pubblicata sempre da Einstein nel 1916. Questa teoria, complessa da trattare nella sua interezza, presenta alcuni punti fondamentali: in presenza di campi gravitazionali non uniformi, la relatività ristretta è valida ma solo in sistemi di riferimento infinitesimi. La materia è in grado di curvare lo spazio-tempo e tale curvatura corrisponde al campo gravitazionale della fisica classica. Da ciò segue che la geometria euclidea (e con essa la relatività ristretta) non sono più valide in grandi regioni di spazio proprio a causa di questa curvatura. La deformazione dello spazio-tempo causa inoltre una deviazione della luce e del moto inerziale che diventano delle *geodetiche* nelle regioni di spazio deformate dalla materia. Questa deviazione, per la luce è anche la causa dell'effetto detto *redshift gravitazionale*. Gli effetti della gravità non si propagano a velocità infinita ma a quella della luce. Il tempo scorre più lentamente nelle regioni in cui è presente un campo gravitazionale debole e viceversa. Ultimo concetto notevole è che non esistono in sostanza sistemi di riferimento in alcun modo privilegiati rispetto ad altri come mostrato anche dal principio di equivalenza.

4.1 Lensing gravitazionale

Il lensing gravitazionale è un effetto di deviazione ed amplificazione che la radiazione di una sorgente luminosa subisce quando interagisce col campo gravitazionale di un oggetto molto massiccio come un ammasso di galassie o un buco nero. Si tratta di un fenomeno non legato all'ottica geometrica ma causato dalla deformazione dello spazio-tempo indotta dalla presenza di una grande massa posta tra una sorgente di radiazione e l'osservatore. La sorgente in background subisce una distorsione che varia a seconda delle caratteristiche dell'oggetto che funge da lente e della geometria del sistema osservatore-lente-sorgente. In particolare si distinguono tre diverse casistiche:

- **Lensing forte:** sorgente, lente ed osservatore si trovano tutti sulla stessa linea di vista. In questo caso la sorgente apparirà a forma di anello e con più copie di se stessa (figura 7 c, d). L'anello che si forma è detto anche *anello di Einstein* la cui apertura è determinata dalla formula $\Theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L}}$ do-

ve con D_L , D_S e D_{LS} si indicano rispettivamente la distanza osservatore-lente, osservatore-sorgente e lente-sorgente.

- **Lensing debole:** sorgente e lente non sono esattamente allineate, la deformazione è meno notevole e la sorgente va a formare un arco luminoso attorno alla lente (figura 7 b).
- **Microlensing:** è un effetto causato da oggetti poco massicci come singole stelle. Una sorgente di background in questo caso non subisce particolari deformazioni nell'immagine ma ad un osservatore essa apparirà in una posizione leggermente diversa da quella attesa e leggermente amplificata in luminosità. Celebre esempio di questo fenomeno è l'osservazione effettuata da *Eddington* nel 1919 durante un'eclissi di Sole.

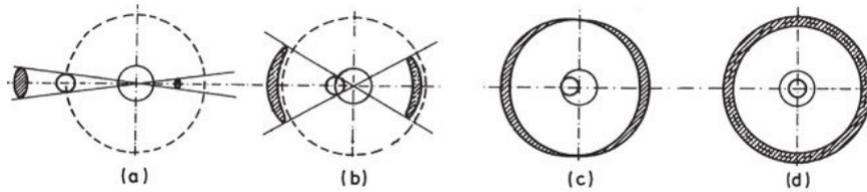


Figura 7: Rappresentazione grafica dei diversi effetti di lensing gravitazionale.

Nel caso più semplice, dove si ha un oggetto puntiforme di massa M , l'angolo di deflessione della luce proveniente dal background è regolato dalla formula

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (4.1.1)$$

dove b è il *parametro d'impatto* del fotone che interagisce con la massa. Questa formula costituisce una buona approssimazione per α piccoli e mostra come l'effetto diventa più evidente al diminuire del parametro d'impatto ed all'aumentare della massa.

Il lensing gravitazionale permette di osservare oggetti estremamente distanti grazie anche all'effetto di amplificazione della luminosità apparente. È utilizzato anche per individuare esopianeti e buchi neri di massa stellare. Costituisce infine uno strumento utile alla determinazione della distribuzione della massa in ammassi di galassie e aloni di materia oscura: analizzando la deformazione dell'immagine di una sorgente di background è possibile risalire alle caratteristiche del campo gravitazionale della lente e quindi a com'è distribuita la massa al suo interno.

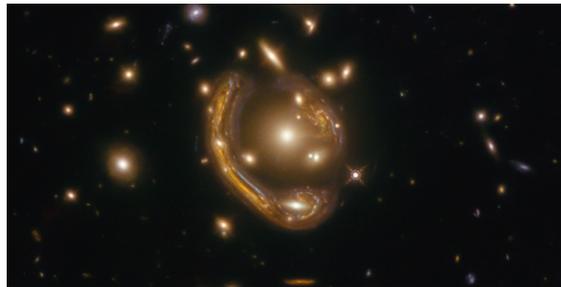


Figura 8: Effetto di lensing gravitazionale con parziale anello di Einstein in GAL-CLUS-022058s, nella costellazione della Fornace.

Riferimenti bibliografici

- [1] Robert Resnick, *Introduzione alla relatività ristretta*, Milano: Casa Editrice Ambrosiana, 1979.
- [2] Malcom S. Longair, *High energy astrophysics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [3] Carla e Roberto Fanti, *Una finestra sull'universo "invisibile"*, Bologna, Università di Bologna, 2012.
- [4] Halliday, Resnick, Krane, *Fisica 2*, Casa Editrice Ambrosiana, 2004
- [5] Daniele Dallacasa, *Appunti del corso di Processi di radiazione e MHD*, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2021.
- [6] Daniele Dallacasa, *Dispense del corso di Processi di radiazione e MHD*, Dispense, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2021.
- [7] Francesca Pozzi, *Appunti del corso di Fisica 2, modulo di relatività*, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2021.
- [8] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, Quinta Edizione, Springer, 2007.
- [9] Figura 1: Kapteyn Astronomical Institute, www.astro.rug.nl
- [10] Figura 2: Springer, www.springer.com
- [11] Figura 3: Daniele Dallacasa, *Dispense del corso di Processi di radiazione e MHD*
- [12] Figura 4: Erlangen University, pulsar.steinwarte.uni-erlangen.de
- [13] Figura 5: Daniele Dallacasa, *Dispense del corso di Processi di radiazione e MHD*
- [14] Figura 6: www.researchgate.net
- [15] Figura 7: Malcom S. Longair, *High energy astrophysics*
- [16] Figura 8: esahubble.org