

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Il Teorema di Liouville-Arnold

Relatore:
Prof. Paolo Albano

Presentata da:
Alessandro Micciché

Anno Accademico 2022/2023

Sommario

Si considera il moto nello spazio delle fasi di un sistema fisico autonomo con k gradi di libertà, di cui si conoscono k integrali primi, tra i quali l'hamiltoniana del sistema. Se tali integrali primi sono funzionalmente indipendenti, il loro insieme di livello è una sottovarietà k -dimensionale dello spazio delle fasi, M . Inoltre, se gli integrali primi sono in involuzione tra loro e M è connessa e compatta, allora: M è diffeomorfa al toro k -dimensionale, le equazioni del moto si integrano per quadrature e il moto è quasi periodico.

Ringraziamenti

Ringrazio il professore Paolo Albano per la disponibilità e la pazienza con cui mi ha accompagnato in questo lavoro. La sua cura ha reso la realizzazione di questa tesi più semplice e il percorso da seguire più chiaro. Lo ringrazio per avermi insegnato gli argomenti qui trattati, insieme ad altri, e a presentare tali conoscenze in forma di lavoro scritto, in modo trasparente ed esaustivo.

Indice

Introduzione	3
1 Sistemi hamiltoniani	5
2 Integrali primi e teorema di Poisson	10
3 Campi vettoriali e commutatori	16
4 Sottogruppi discreti di \mathbb{R}^n	22
5 Il teorema di Liouville-Arnold	26
A Teorema d'invertibilità locale	35
B Teorema della funzione implicita	38
Bibliografia	40

Introduzione

Per un sistema fisico conservativo con un grado di libertà, la conservazione dell'energia meccanica permette d'integrare l'equazione del moto (dall'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine della seconda legge della dinamica si passa a un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che può essere integrata per separazione delle variabili). Per un sistema autonomo con più gradi di libertà, il Teorema di Liouville-Arnold lega la conoscenza di un certo numero di grandezze fisiche che restano invariate durante l'evoluzione del sistema, gli integrali primi, all'integrazione delle equazioni del moto. Tale risultato può essere descritto usando il formalismo hamiltoniano, in cui, l'insieme degli stati del sistema fisico con k gradi di libertà è rappresentato dalla varietà $2k$ -dimensionale dello spazio delle fasi, l'insieme delle $2k$ variabili coniugate, le coordinate e gli impulsi generalizzati. La dinamica del sistema fisico è descritta dal sistema di $2k$ equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, le equazioni canoniche di Hamilton, espresse per mezzo della funzione di Hamilton H (la funzione di fase associata all'energia meccanica). Sotto opportune ipotesi, a ogni integrale primo del moto, F , è associato un gruppo a un parametro di trasformazioni dello spazio delle fasi, generate dal campo vettoriale hamiltoniano associato a F , che lascia invariata l'hamiltoniana H . Tale invarianza può essere formulata affermando che H e F siano in involuzione, cioè che la parentesi di Poisson tra H e F sia nulla. Se a H , si aggiungono, se esistono, $k - 1$ integrali primi, in modo da formare un insieme di k integrali primi funzionalmente indipendenti e in involuzione tra loro, la soluzione del sistema di equazioni canoniche giace sulla sottovarietà definita dall'insieme di livello di tali integrali primi. In questa tesi si dimostra che, facendo opportune ipotesi sulla topologia degli insiemi di livello degli integrali primi, si può trovare un cambiamento di variabili tale che, nelle nuove coordinate, il moto avvenga in un toro e sia quasi periodico. Tale cambiamento di variabili può essere realizzato in modo canonico, ma non ci occuperemo di quest'aspetto.

Per presentare il risultato di cui sopra, la tesi è suddivisa in cinque capitoli. Nel primo capitolo, si introduce il formalismo hamiltoniano a partire da

quello lagrangiano, ricavando il sistema di equazioni canoniche di Hamilton. Si mostra come lo spazio delle fasi sia naturalmente una varietà simplettica. La forma simplettica definita su di esso induce un isomorfismo, in ogni suo punto, tra i differenziali delle funzioni di fase e i vettori tangenti: a ogni funzione di fase è associato un campo vettoriale definito nello spazio delle fasi. Nel secondo capitolo, a partire dalla definizione d'integrale primo del moto, si introduce la parentesi di Poisson tra due funzioni. Si ha quindi che una funzione di fase, che non dipende esplicitamente dal tempo, è conservata durante l'evoluzione del sistema con hamiltoniana H se e solo se la parentesi di Poisson tra H e F è nulla. L'algebra delle parentesi di Poisson è presentata attraverso le loro proprietà e, in particolare, si deduce l'identità di Jacobi. Nel terzo capitolo, si studiano i campi vettoriali definiti nello spazio delle fasi, a partire dall'introduzione del flusso e degli operatori differenziali loro associati. Quest'ultima formulazione permette di definire, dati due campi vettoriali, un terzo campo vettoriale, il commutatore dei due. Osserviamo che, grazie all'identità di Jacobi, è possibile associare il commutatore di due campi alla parentesi di Poisson delle rispettive funzioni di fase. Si dimostra che, in generale, il commutatore di due campi vettoriali si annulla se e solo se commutano i flussi associati ai due campi. Quindi, nel caso di campi vettoriali associati a funzioni di fase, due campi commutano se e solo se la parentesi di Poisson delle funzioni è una costante. Il quarto capitolo è dedicato a un risultato di struttura per i sottogruppi discreti di \mathbb{R}^k : ogni sottogruppo discreto di \mathbb{R}^k è una combinazione lineare, a coefficienti interi, di vettori opportunamente scelti di \mathbb{R}^k . Infine, nel quinto capitolo, si dimostra il Teorema di Liouville-Arnold

Capitolo 1

Sistemi hamiltoniani

Ogni sistema fisico è caratterizzato dal suo *stato*: un insieme minimale di grandezze fisiche a cui è possibile ridursi per la conoscenza di qualunque grandezza fisica inerente al sistema e alla sua evoluzione temporale. Dalla forma dell'equazione che rappresenta la seconda legge della dinamica e dalla natura delle interazioni a noi note risulta naturale caratterizzare lo stato di un sistema fisico attraverso la sua posizione e la sua velocità. In generale la posizione di un sistema composto da n punti materiali è determinata da $3n$ coordinate; se tale sistema è soggetto a vincoli che limitano la regione dello spazio \mathbb{R}^{3n} accessibile, allora il numero k di coordinate indipendenti che determinano in modo univoco la posizione del sistema sarà minore di $3n$: in generale tale numero k si chiama *numero di gradi di libertà* del sistema.

La formulazione lagrangiana della fisica rimuove l'apparente ruolo privilegiato delle coordinate cartesiane per la descrizione meccanica di un sistema fisico, come appare invece dalla scrittura della seconda legge della dinamica in meccanica newtoniana. Si chiamano *coordinate generalizzate* $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ le k grandezze del sistema di coordinate scelto che determinano la posizione del sistema fisico, per cui costituiscono una parametrizzazione per il sottoinsieme di \mathbb{R}^{3n} in cui il sistema si muove. Chiamiamo tale sottoinsieme lo *spazio delle configurazioni* \mathcal{M} . Si chiamano *velocità generalizzate* le loro derivate temporali $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k)$. Tali grandezze identificano lo stato del sistema. La dinamica di quest'ultimo è tale da soddisfare un principio variazionale, *il principio di minima azione* (W.R. Hamilton). La traiettoria $\mathbf{q}(t)$ che descrive il moto fisico, reale del sistema tra gli istanti t_1 e t_2 in cui occupa le posizioni fissate $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$ e $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}(t_2)$ è un estrema del funzionale

$$F(\mathbf{q}; t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt . \quad (1.1)$$

$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, t)$ è la *funzione di Lagrange* (o *lagrangiana*)

del sistema, differenza tra l'energia cinetica T e l'energia potenziale U . La funzione L caratterizza il sistema in quanto contiene le informazioni circa la geometria dello spazio accessibile a questo e il tipo d'interazione cui è soggetto. Il fatto che $\mathbf{q}(t)$ sia un estremo per (1.1) conduce all' *equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (1.2)$$

per $i = 1, 2, \dots, k$, che rappresentano le equazioni della dinamica per il sistema. Dunque la dinamica di un sistema a k gradi di libertà è descritta da k equazioni differenziali del secondo ordine nelle funzioni $q_i(t)$. Si definiscono *impulsi generalizzati* le grandezze p_i :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := p_i. \quad (1.3)$$

Il passaggio dalla formulazione lagrangiana a quella hamiltoniana della meccanica avviene attraverso un cambio di variabili nella descrizione dello stato meccanico del sistema: dall'identificazione dello stato attraverso le coordinate generalizzate e le velocità generalizzate $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, a quella attraverso le coordinate generalizzate e gli impulsi generalizzati (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Ciò si realizza attraverso una particolare trasformazione, *la trasformazione di Legendre*, che permette di passare da una funzione definita su un dato insieme di variabili, in questo caso $\dot{\mathbf{q}}$, a una funzione definita sullo spazio duale, \mathbf{p} . La richiesta per applicare tale trasformazione è che la funzione a cui venga applicata, $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ in questo caso, sia strettamente convessa rispetto all'argomento interessato dalla trasformazione: la forma quadratica, $\sum_{i=1, j=1}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} d\dot{q}_i d\dot{q}_j$, è definita positiva. Tale richiesta è generalmente soddisfatta in quanto è equivalente alla richiesta che l'energia cinetica T sia una forma quadratica definita positiva. La trasformata di Legendre di $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ rispetto alla variabile $\dot{\mathbf{q}}$ è la funzione:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sup_{\dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), t). \quad (1.4)$$

Calcolando la condizione per tale estremo superiore si ottiene la formula (1.3). Invertendo tale formula (le condizioni per poterlo fare sono soddisfatte in generale per la regolarità della funzione L) si ha una funzione effettivamente di $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Questa nuova funzione che fornisce la caratterizzazione fisica del sistema per mezzo di questo nuovo insieme di variabili, si chiama *funzione di Hamilton (o hamiltoniana)*. Da $L = T - U$ si ottiene, esplicitando la scrittura di T e inserendo (1.3) in (1.4), $H = T + U$. La funzione di Hamilton rappresenta l'energia meccanica del sistema. Il passaggio da L

a H fornisce una struttura formale differente rispetto a (1.2) delle equazioni del moto. Confrontando i differenziali della funzione $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e della sua definizione formale $H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), t)$ otteniamo:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (1.5a)$$

$$d(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L) = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (1.5b)$$

e uguagliando i due differenziali e notando che $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{p}}$ dall'equazioni del moto (1.2), otteniamo le espressioni:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (1.6)$$

per $i = 1, 2, \dots, k$, oltre che $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$. La dinamica dello stato del sistema è descritta dall'equazioni (1.6), le quali costituiscono un sistema di $2k$ equazioni differenziali al primo ordine in (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . La variazione temporale delle variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) è così legata in modo formalmente semplice alla funzione che descrive il sistema, H . Tali equazioni sono note come *equazioni canoniche di Hamilton*. Dalle equazioni (1.6) è ovvio che:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Quindi se la funzione di Hamilton H non dipende in modo esplicito dal tempo (*sistema autonomo*), l'energia meccanica del sistema è conservata.

Lo spazio di dimensione $2k$ delle coordinate generalizzate e degli impulsi generalizzati (\mathbf{q}, \mathbf{p}) si chiama *spazio delle fasi*. Le equazioni canoniche (1.6) indicano che una traiettoria di fase $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ soluzione del sistema è determinata dal campo vettoriale $(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}})$ tangente in ogni punto allo spazio delle fasi. Alla hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ è quindi associato un campo vettoriale che determina l'evoluzione temporale, per un certo intervallo di tempo, di ogni punto dello spazio delle fasi. Tale associazione ha una radice più profonda che la rende generale. La geometria dello spazio delle fasi di un sistema hamiltoniano induce una corrispondenza tra campi vettoriali e funzioni di fase (funzioni definite sullo spazio delle fasi). Nel seguito di questo e nei successivi capitoli assumeremo che le funzioni siano di classe C^∞ e le varietà siano differenziabili di classe C^∞ .

Lo spazio delle configurazioni \mathcal{M} parametrizzato da $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ è una varietà differenziabile k -dimensionale. A una varietà differenziabile k -dimensionale sono associate due varietà differenziabili $2k$ -dimensionali di cui richiamiamo brevemente la definizione.

Definizione 1.1 (Fibrato tangente). Sia \mathcal{M} una varietà differenziabile k -dimensionale. Si chiama fibrato tangente di \mathcal{M} la varietà differenziabile $2k$ -dimensionale $T\mathcal{M}$:

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \{m\} \times T_m\mathcal{M},$$

con $T_m\mathcal{M}$ lo spazio tangente a \mathcal{M} nel punto m .

Passando dallo spazio tangente al suo duale, lo spazio cotangente, si può introdurre un'altra varietà differenziabile associata a \mathcal{M} .

Definizione 1.2 (Fibrato cotangente). Sia \mathcal{M} una varietà differenziabile k -dimensionale. Si chiama fibrato cotangente di \mathcal{M} la varietà differenziabile $2k$ -dimensionale $T^*\mathcal{M}$:

$$T^*\mathcal{M} = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \{m\} \times T_m^*\mathcal{M},$$

con $T_m^*\mathcal{M}$ lo spazio cotangente a \mathcal{M} nel punto m (ovvero lo spazio delle 1-forme sullo spazio $T_m\mathcal{M}$).

Risulta evidente dunque, dalle precedenti definizioni e da (1.3), che il passaggio dalla meccanica lagrangiana a quella hamiltoniana equivale al passaggio dalla funzione lagrangiana L , definita sul fibrato tangente dello spazio delle configurazioni, $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, alla funzione hamiltoniana H , definita sul fibrato cotangente dello spazio delle configurazioni, lo spazio delle fasi (\mathbf{q}, \mathbf{p}) .

Questo passaggio permette di definire in modo naturale delle strutture geometriche sulla varietà $T^*\mathcal{M}$.

Definizione 1.3 (Varietà simplettica). Una 2-forma differenziale ω^2 , definita su una varietà differenziabile \mathcal{V} , chiusa (i.e. $d\omega^2 = 0$) e non degenere (i.e. $\forall v \in \mathcal{V}, \forall \xi \in T_v\mathcal{V}, \exists \eta \in T_v\mathcal{V}$ t.c. $\omega^2(\xi, \eta) \neq 0$) si chiama forma simplettica.

Una varietà \mathcal{V} sulla quale è definita una forma simplettica ω^2 si chiama varietà simplettica. Dal fatto che ω^2 è non degenere segue che \mathcal{V} ha dimensione pari.

Supponiamo che lo spazio delle configurazioni di un sistema meccanico sia una varietà differenziabile di dimensione k , \mathcal{M} . Allora, il fibrato cotangente a \mathcal{M} , $T^*\mathcal{M}$, è una varietà differenziabile di dimensione pari $2k$ e in esso è definita in maniera naturale una forma simplettica. Si ha infatti il seguente risultato (si veda [1] per la dimostrazione):

Teorema 1.1. *Il fibrato cotangente $T^*\mathcal{M}$ è una varietà simplettica con la forma simplettica data, in coordinate locali, da:*

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^k dq_i \wedge dp_i . \quad (1.8)$$

La 2-forma ω^2 sullo spazio delle fasi $\Gamma = T^*\mathcal{M}$ induce un isomorfismo in ogni suo punto $\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ tra lo spazio tangente $T_\gamma\Gamma$ e lo spazio cotangente $T_\gamma^*\Gamma$. Il vettore tangente $\xi \in T_\gamma\Gamma$ è messo in corrispondenza alla 1-forma $\omega_\xi^1 := \omega^2(\xi, \cdot) \in T_\gamma^*\Gamma$. La matrice di questa trasformazione è la matrice a blocchi $2k \times 2k$:

$$J = \begin{bmatrix} 0_{k \times k} & -\mathbb{1}_{k \times k} \\ \mathbb{1}_{k \times k} & 0_{k \times k} \end{bmatrix} , \quad (1.9)$$

dove $0_{k \times k}$ e $\mathbb{1}_{k \times k}$ sono rispettivamente la matrice nulla e la matrice identità $k \times k$. Dunque, data una funzione di fase $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, il suo differenziale dF è una 1-forma differenziale su Γ , a questo è associato, attraverso l'isomorfismo sopra (rappresentato ora dalla matrice J^{-1}), un campo vettoriale in ogni punto, i.e. un vettore tangente allo spazio delle fasi in ogni suo punto che genera la dinamica del sistema con funzione caratteristica F . Nel caso della funzione di Hamilton, tale isomorfismo genera il *campo vettoriale hamiltoniano con funzione H* , \mathbf{X}_H , e le equazioni canoniche (1.6) si scrivono come:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \mathbf{X}_H(\boldsymbol{\gamma}(t)) = J^{-1} \nabla_\gamma H(\boldsymbol{\gamma}(t)) , \quad (1.10)$$

con

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{k \times k} & \mathbb{1}_{k \times k} \\ -\mathbb{1}_{k \times k} & 0_{k \times k} \end{bmatrix} , \quad \nabla_\gamma H(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_k}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \\ \frac{\partial H}{\partial p_1}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_k}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \end{bmatrix} . \quad (1.11)$$

Capitolo 2

Integrali primi e teorema di Poisson

Una funzione di fase $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ è un *integrale primo del moto* per il sistema di equazioni differenziali (1.6) se:

$$\frac{dF}{dt}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = 0, \quad (2.1)$$

ovvero la funzione F assume un valore costante lungo le soluzioni del sistema di cui sopra, $F(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) \equiv F(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0), t_0)$ con t_0 un arbitrario istante iniziale. La conoscenza di un integrale primo del moto corrisponde alla conoscenza di una grandezza fisica conservata durante la dinamica del sistema meccanico. Si ha che:

$$\frac{dF}{dt} := \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right), \quad (2.2)$$

poiché è calcolata lungo le soluzioni di (1.6), si ha da qui:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \quad (2.3)$$

Si definisce *parentesi di Poisson* delle funzioni F e H la funzione:

$$\{H, F\} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \quad (2.4)$$

È evidente da (2.1), (2.2), (2.3), che una funzione di fase, F , che non dipende esplicitamente dal tempo è un integrale primo del moto per il sistema di

equazioni canoniche generate dalla funzione H , se e solo se la sua parentesi di Poisson con l'hamiltoniana H è nulla:

$$\{H, F\} = 0 . \quad (2.5)$$

Se F e H non dipendono esplicitamente dal tempo, dalla sua definizione, è chiaro come la parentesi di Poisson di F e H sia la derivata direzionale della funzione F lungo la direzione del campo della velocità di fase delle equazioni (1.10), ovvero del campo vettoriale hamiltoniano \mathbf{X}_H . Si ha dunque:

$$\{H, F\} = dF(\mathbf{X}_H) . \quad (2.6)$$

La 1-forma differenziale dF è associata, attraverso l'isomorfismo rappresentato da J^{-1} , al campo vettoriale $\mathbf{X}_F = J^{-1}\nabla_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, tale che:

$$\{H, F\} = dF(\mathbf{X}_H) = \omega^2(\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_H) . \quad (2.7)$$

Si può quindi dare la (2.7) come definizione equivalente di parentesi di Poisson, una volta considerato lo spazio delle fasi come varietà simplettica.

La parentesi di Poisson può essere definita per due qualunque funzioni di fase, $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Se la loro parentesi di Poisson è nulla:

$$\{F, G\} = 0 , \quad (2.8)$$

le funzioni $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sono dette *in involuzione*. Vale la

Proposizione 2.1. *Le parentesi di Poisson di due funzioni F e G , $\{F, G\}$, hanno le seguenti proprietà:*

- (i). $\{F, c\} = 0$;
- (ii). $\{F, G\} = -\{G, F\}$;
- (iii). $\{F_1 + F_2, G\} = \{F_1, G\} + \{F_2, G\}$;
- (iv). $\{F_1 \cdot F_2, G\} = F_1 \cdot \{F_2, G\} + F_2 \cdot \{F_1, G\}$;
- (v). $\frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{G, \frac{\partial F}{\partial t}\right\}$;
- (vi). $\{F, q_k\} = \frac{\partial F}{\partial p_k}$;
- (vii). $\{F, p_k\} = -\frac{\partial F}{\partial q_k}$;

per ogni c costante arbitraria, per ogni F_1 e F_2 funzioni arbitrarie.

La dimostrazione della proposizione (2.1) è un calcolo diretto che segue dalla definizione (2.4). Eccetto le proprietà (iv) e (v), le altre sono proprietà riconducibili direttamente alle proprietà delle 2-forme differenziali tramite la definizione equivalente (2.7). Una relazione particolarmente importante è la seguente:

Teorema 2.1 (Identità di Jacobi). *Le parentesi di Poisson di tre funzioni E, F, G soddisfano alla relazione:*

$$\{E, \{F, G\}\} + \{F, \{G, E\}\} + \{G, \{E, F\}\} = 0 . \quad (2.9)$$

Dimostrazione. La parentesi di Poisson di due funzioni $F, G, \{F, G\}$, è una funzione delle derivate prime di F e G , omogenea e lineare rispetto a F, G . Dunque la parentesi di Poisson $\{E, \{F, G\}\}$ è una funzione contenente le derivate seconde di F, G , come loro combinazione lineare con coefficienti le derivate prime di E , quindi lineare rispetto a F, G , oltre che omogenea. Complessivamente l'espressione (2.9) è una combinazione lineare delle derivate seconde di E, F, G . Guardiamo adesso tutti i termini contenenti, ad esempio, le derivate seconde di F :

$$\{G, \{E, F\}\} + \{E, \{F, G\}\} = \{G, \{E, F\}\} - \{E, \{G, F\}\} .$$

Scriviamo la parentesi di Poisson di due funzioni, ad esempio E ed F , attraverso una notazione che per il momento rappresenta solo una concisa espressione simbolica utile per i conti. Nel prossimo capitolo verrà chiarita la radice di tale associazione. Facciamo uso dell'operatore differenziale lineare \mathcal{L}_E :

$$\{E, F\} = \mathcal{L}_{\mathbf{X}_E} F = \left(\sum_{i=1}^{2k} X_{E_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) F , \quad (2.10)$$

dove \mathbf{X}_E è il campo vettoriale associato al differenziale di E e $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Così possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} \{G, \{E, F\}\} - \{E, \{G, F\}\} &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}_G}(\mathcal{L}_{\mathbf{X}_E} F) - \mathcal{L}_{\mathbf{X}_E}(\mathcal{L}_{\mathbf{X}_G} F) = \\ &= (\mathcal{L}_{\mathbf{X}_G} \mathcal{L}_{\mathbf{X}_E} - \mathcal{L}_{\mathbf{X}_E} \mathcal{L}_{\mathbf{X}_G}) F , \end{aligned} \quad (2.11)$$

e inserendo l'espressione degli operatori differenziali otteniamo:

$$\begin{aligned}
& \{G, \{E, F\}\} - \{E, \{G, F\}\} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{2k} X_{Gi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{2k} X_{Ej} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^{2k} X_{Ei} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{2k} X_{Gj} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] F \\
&= \left[\sum_{i,j=1}^{2k} \left(X_{Gi} \frac{\partial X_{Ej}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + X_{Gi} X_{Ej} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i,j=1}^{2k} \left(X_{Ei} \frac{\partial X_{Gj}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + X_{Ei} X_{Gj} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] F \\
&= \left[\sum_{i,j=1}^{2k} \left(X_{Gi} \frac{\partial X_{Ej}}{\partial x_i} - X_{Ei} \frac{\partial X_{Gj}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] F.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Come si vede, tale espressione non contiene derivate seconde della funzione F . Considerando i termini contenenti derivate seconde di G ed E otteniamo lo stesso risultato. L'unica espressione lineare delle derivate seconde di E , F , G , che non contiene tali derivate seconde è la funzione identicamente nulla, dunque segue (2.9). \square

Da tale identità si deduce che dati due integrali del moto F , G , si ha automaticamente un terzo integrale del moto: la loro parentesi di Poisson.

Teorema 2.2 (di Poisson). *Se F e G sono due integrali primi del moto per il sistema con hamiltoniana H , la loro parentesi di Poisson, $\{F, G\}$, è ancora un integrale primo del moto.*

Dimostrazione. Se F e G sono due funzioni che non dipendono in modo esplicito dal tempo, $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = 0$, F e G sono integrali primi del moto se e solo se $\{H, F\} = \{H, G\} = 0$. Per l'identità di Jacobi (2.9):

$$\{H, \{F, G\}\} = -\{F, \{G, H\}\} - \{G, \{H, F\}\} = 0,$$

per cui $\{F, G\}$, che a sua volta è una funzione che non dipende in modo esplicito dal tempo, è un integrale primo del moto.

Se F e G dipendono in modo esplicito dal tempo, si ha per la loro parentesi di Poisson, da (2.3) e (2.4):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{F, G\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} + \{H, \{F, G\}\} \\
&= \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} - \{F, \{G, H\}\} - \{G, \{H, F\}\} \\
&= \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \{\{H, F\}, G\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} + \{F, \{H, G\}\} \\
&= \left\{\frac{dF}{dt}, G\right\} + \left\{F, \frac{dG}{dt}\right\} = 0,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

dove nella seconda e terza riga abbiamo usato la proprietà (v), l'antisimmetria e la bilinearità delle parentesi e l'identità di Jacobi, nell'ultima riga l'ipotesi che F e G siano integrali primi. \square

Ripetendo il ragionamento, notiamo come a partire da due integrali primi se ne possano generare a piacere. Tuttavia sono d'interesse fisico gli integrali primi indipendenti tra loro: la parentesi di Poisson di due integrali primi potrebbe essere una funzione costante, un multiplo dei due, una funzione di questi. Per un sistema autonomo, il numero d'integrali primi indipendenti, sulla varietà differenziabile $2k$ -dimensionale dello spazio delle fasi, è al più $2k - 1$. La conoscenza di un integrale primo introduce un vincolo sullo spazio delle fasi accessibile al sistema fisico. Infatti quest'ultimo si muoverà sulla varietà definita dall'insieme di livello del dato integrale primo F : $F(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = F(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0)) = c$, in uno spazio di dimensione $2k - 1$. La loro conoscenza risulta essenziale nella risoluzione del sistema dinamico: in generale per un sistema autonomo di $2k$ equazioni differenziali ordinarie del primo ordine serve conoscere $2k - 1$ integrali primi indipendenti per la sua integrazione. Come vedremo, il sistema di equazioni canoniche di Hamilton (1.6) è peculiare, *canonico* appunto, tale per cui è sufficiente conoscere solo k integrali primi per integrarlo, se questi sono in involuzione tra loro. Osserviamo per ultimo che la parentesi di Poisson tra coordinate e impulsi generalizzati soddisfa:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \tag{2.14a}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0, \tag{2.14b}$$

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \tag{2.14c}$$

per $i, j = 1, \dots, k$. Dalle proprietà (vi) e (vii), se $F=H$, le equazioni canoniche (1.6) possono essere riscritte utilizzando le parentesi di Poisson:

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}, \tag{2.15}$$

per $i, j = 1, \dots, k$. La dinamica di un sistema hamiltoniano è esprimibile attraverso le parentesi di Poisson, le quali derivano dalla struttura canonica del sistema e allo stesso tempo ne costituiscono una rappresentazione equivalente.

Capitolo 3

Campi vettoriali e commutatori

Abbiamo visto come a ogni funzione di fase sia associato un campo vettoriale hamiltoniano. Ci proponiamo in questo capitolo di studiare le relazioni di commutazione tra questi campi vettoriali, mostrando come queste siano legate alle funzioni di fase associate. Per fare ciò sarà necessario definire prima alcuni oggetti matematici.

Siano \mathcal{M} una varietà compatta e \mathbf{A} un campo vettoriale su \mathcal{M} , $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$.

Definizione 3.1 (Flusso). Il gruppo a un parametro, $t \in \mathbb{R}$, di diffeomorfismi $\mathbf{A}^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tale che, per $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, soddisfa:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^t(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^t(\mathbf{x})) .$$

In particolare, a $t = 0$ si ha:

$$\left. \frac{d}{dt}\mathbf{A}^t(\mathbf{x}) \right|_{t=0} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) .$$

L'esistenza del gruppo a un parametro di diffeomorfismi è garantita se \mathcal{M} è una varietà compatta.

Il flusso è dunque un'applicazione tale che il campo vettoriale a lui associato è il campo delle velocità.

Definizione 3.2 (Operatore differenziale). A ogni funzione $\phi(\mathbf{x})$ si associa, attraverso l'operatore $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$, una nuova funzione $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}\phi(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{A}}\phi(\mathbf{x}) &= \left. \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{A}^t(\mathbf{x})) \right|_{t=0} = \nabla\phi(\mathbf{A}^t(\mathbf{x})) \cdot \left. \frac{d}{dt}\mathbf{A}^t(\mathbf{x}) \right|_{t=0} \\ &= \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

Questa nuova funzione non è altro che la derivata di ϕ lungo la direzione del campo vettoriale \mathbf{A} . Fissato il sistema di coordinate $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ sulla varietà, l'operatore ha la forma:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^k A_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (3.1)$$

È quindi un operatore differenziale del primo ordine. Gode delle proprietà di linearità e di tipo Leibniz:

$$(i). \quad \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2) = \lambda_1 \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\phi_1) + \lambda_2 \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\phi_2);$$

$$(ii). \quad \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\phi_1 \phi_2) = \phi_1 \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\phi_2) + \phi_2 \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\phi_1);$$

per ogni costante λ_1, λ_2 e funzione ϕ_1, ϕ_2 .

La scrittura (2.10) adesso ci dice che la parentesi di Poisson tra due funzioni di fase, E e F , possiamo interpretarla come l'applicazione dell'operatore differenziale associato al campo vettoriale hamiltoniano \mathbf{X}_E alla funzione di fase F .

$$\{E, F\} = \mathcal{L}_{\mathbf{X}_E} F . \quad (3.2)$$

Dati due campi vettoriali \mathbf{A} e \mathbf{B} , possiamo definire l'operatore differenziale commutatore (o semplicemente commutatore):

$$[\mathcal{L}_{\mathbf{A}}, \mathcal{L}_{\mathbf{B}}] = \mathcal{L}_{\mathbf{A}} \mathcal{L}_{\mathbf{B}} - \mathcal{L}_{\mathbf{B}} \mathcal{L}_{\mathbf{A}} , \quad (3.3)$$

che apparentemente è un operatore differenziale del secondo ordine ma, come abbiamo già visto in (2.11) e (2.12), è un operatore differenziale del primo ordine:

$$[\mathcal{L}_{\mathbf{A}}, \mathcal{L}_{\mathbf{B}}] = \sum_{i,j=1}^k \left(A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} - B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} . \quad (3.4)$$

L'operatore in (3.4) è naturalmente associato al campo vettoriale $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ di componenti:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_j = \sum_{i=1}^k \left(A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} - B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) . \quad (3.5)$$

Tale campo vettoriale associato ai due campi \mathbf{A} e \mathbf{B} è detto *commutatore*. Possiamo adesso studiare le relazioni di commutazione tra due campi vettoriali definiti su una varietà. Associamo a ciascuno dei due campi il suo flusso: \mathbf{A}^t e \mathbf{B}^s . Per due generici intervalli di tempo t e s , l'ordine in cui si seguono i due flussi, ovvero evolve temporalmente il punto \mathbf{x} sulla varietà, è in generale importante in quanto questi potrebbero non commutare:

$$\mathbf{A}^t \mathbf{B}^s(\mathbf{x}) - \mathbf{B}^s \mathbf{A}^t(\mathbf{x}) \neq 0 . \quad (3.6)$$

Per misurarne il grado di non commutatività, introduciamo una funzione $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ e ne calcoliamo la differenza così:

$$\Delta(t, s; \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{A}^t \mathbf{B}^s(\mathbf{x})) - \phi(\mathbf{B}^s \mathbf{A}^t(\mathbf{x})) . \quad (3.7)$$

Se i due flussi commutano tale differenza sarà nulla. Lo sviluppo di Taylor della funzione (3.7) in $(t, s) = (0, 0)$ fino al secondo ordine è dato da:

$$\Delta(t, s; \mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Delta(t, s; \mathbf{x}) \Big|_{t=0, s=0} ts + o(t^2 + s^2) . \quad (3.8)$$

Calcoliamo ora la derivata seconda mista per $\phi(\mathbf{A}^t \mathbf{B}^s(\mathbf{x}))$. Partiamo da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{A}^t \mathbf{B}^s(\mathbf{x})) \Big|_{t=0} &= \nabla \phi(\mathbf{A}^t \mathbf{B}^s(\mathbf{x})) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{A}^t(\mathbf{B}^s(\mathbf{x})) \Big|_{t=0} \\ &= \nabla \phi(\mathbf{B}^s(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{B}^s(\mathbf{x})) = \mathcal{L}_A \phi(\mathbf{B}^s(\mathbf{x})) , \end{aligned}$$

e così:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{A}^t \mathbf{B}^s(\mathbf{x})) \right) \Big|_{t=0, s=0} &= \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}_A \phi(\mathbf{B}^s(\mathbf{x})) \Big|_{s=0} \\ &= \nabla \mathcal{L}_A \phi(\mathbf{B}^s(\mathbf{x})) \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{B}^s(\mathbf{x}) \Big|_{s=0} \\ &= \nabla \mathcal{L}_A \phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_B \mathcal{L}_A \phi(\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

Allo stesso modo, calcolando la derivata seconda mista per $\phi(\mathbf{B}^s \mathbf{A}^t(\mathbf{x}))$ otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} \phi(\mathbf{B}^s \mathbf{A}^t(\mathbf{x})) \right) \Big|_{t=0, s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{B}^s \mathbf{A}^t(\mathbf{x})) \right) \Big|_{t=0, s=0} = \mathcal{L}_A \mathcal{L}_B \phi(\mathbf{x}) ,$$

per cui (3.8) diventa:

$$\Delta(t, s; \mathbf{x}) = [\mathcal{L}_B, \mathcal{L}_A] \phi(\mathbf{x}) ts + o(t^2 + s^2) . \quad (3.9)$$

Questo risultato è utile per dimostrare il legame tra la commutatività di due flussi associati a due campi vettoriali e il commutatore dei due campi vettoriali. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 3.1. *I flussi \mathbf{A}^t e \mathbf{B}^s commutano se e soltanto se il commutatore dei due campi vettoriali a essi associato è nullo:*

$$\mathbf{A}^t \mathbf{B}^s = \mathbf{B}^s \mathbf{A}^t \iff [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0 . \quad (3.10)$$

Dimostrazione. Se i due flussi commutano, $\mathbf{A}^t \mathbf{B}^s = \mathbf{B}^s \mathbf{A}^t$, si ha da (3.7):

$$\Delta(t, s; \mathbf{x}) \equiv 0 ,$$

per ogni funzione ϕ regolare. Così come tutti i coefficienti del suo sviluppo di Taylor, avremo da (3.9): $[\mathcal{L}_B, \mathcal{L}_A]\phi(\mathbf{x}) = 0$. Data l'arbitrarietà di ϕ , ciò implica che è nullo il campo vettoriale associato all'operatore differenziale $[\mathcal{L}_B, \mathcal{L}_A]$, ovvero $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$.

Se $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, allora da (3.9):

$$\phi(\mathbf{A}^t \mathbf{B}^s(\mathbf{x})) - \phi(\mathbf{B}^s \mathbf{A}^t(\mathbf{x})) = o(t^2 + s^2) . \quad (3.11)$$

Qui ci limitiamo a dimostrare che ciò implica la commutatività dei flussi per (t, s) appartenente a un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^2$ opportunamente "piccolo" contenente $(0, 0)$: $U = \{(t, s) | 0 \leq t \leq t_a, 0 \leq s \leq s_b\}$. Per mostrare che le applicazioni $\mathbf{A}^{t_a} \mathbf{B}^{s_a}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}^{s_b} \mathbf{A}^{t_a}(\mathbf{x})$ conducono allo stesso punto \mathbf{x}' sulla varietà \mathcal{M} , suddividiamo il rettangolo U in N^2 rettangoli, facendo una partizione in N parti degli intervalli $[0, t_a]$ e $[0, s_b]$ come in Figura (3.1a). Tale rappresentazione ha il seguente significato: muoversi lungo l'asse dei tempi t e considerare ad esempio l'intervallo $[t_i, t_j]$ equivale ad applicare la trasformazione $\mathbf{A}^{t_j - t_i}$. Analogamente muoversi lungo l'asse dei tempi s e considerare ad esempio l'intervallo $[s_i, s_j]$ equivale ad applicare la trasformazione $\mathbf{B}^{s_j - s_i}$. Applicare i flussi nell'ordine $\mathbf{B}^{s_b} \mathbf{A}^{t_a}$ vuol dire considerare l'evoluzione del punto \mathbf{x} per un tempo t_a secondo il campo vettoriale \mathbf{A} e poi l'evoluzione per un tempo s_b secondo il campo vettoriale \mathbf{B} a partire dal punto $\mathbf{A}^{t_a}(\mathbf{x})$. Nel rettangolo di Figura (3.1a) ciò equivale a muoversi inizialmente lungo l'asse t da $(0, 0)$ a $(t_a, 0)$, per poi muoversi lungo l'asse s da $(t_a, 0)$ a (t_a, s_b) . Analogamente per $\mathbf{A}^{t_a} \mathbf{B}^{s_b}(\mathbf{x})$, lungo l'asse s da $(0, 0)$ a $(0, s_b)$ per poi muoversi lungo l'asse t da $(0, s_b)$ a (t_a, s_b) . Questi due cammini in \mathbb{R}^2 equivalgono a due punti, distinti in generale, su \mathcal{M} , punti d'arrivo di una corrispondente traiettoria su tale varietà. Per i due cammini in U come sopra è possibile passare attraverso N^2 cammini intermedi, tali che ciascuno di essi differisce dal successivo per una coppia di lati di uno degli N^2 rettangoli: dato uno di questi cammini, il cammino successivo comprende i due lati opposti, di un dato rettangolo, rispetto ai due lati compresi nel dato cammino. A ognuno di questi cammini corrisponderà la trasformazione: $\mathbf{A}^{t_a - t_m} \mathbf{B}^{s_b - s_n} \mathbf{A}^{t_m - t_{m-1}} \mathbf{B}^{s_n - s_{n-1}} \dots \mathbf{A}^{t_1} \mathbf{B}^{s_1}(\mathbf{x})$ con $\{t_1, \dots, t_m\}$ e $\{s_1, \dots, s_n\}$ l'insieme delle coordinate t e s degli spigoli della spezzata che costituisce il dato cammino in U . Scegliamo adesso come funzione ϕ le coordinate locali (x_1, \dots, x_k) , per cui (3.11) diventa:

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{B}^s(\mathbf{x}))_i - (\mathbf{B}^s \mathbf{A}^t(\mathbf{x}))_i = O((t^2 + s^2)^{3/2}) , \quad (3.12)$$

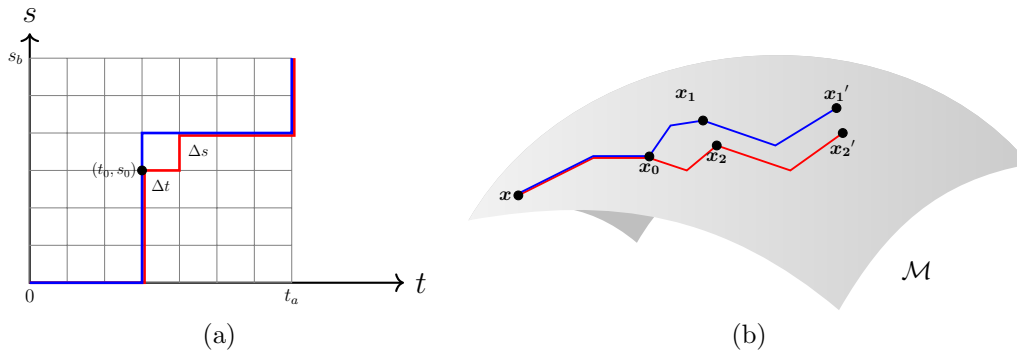


Figura 3.1: In Figura (a) è rappresentata la partizione dell'insieme U . Sono rappresentati due cammini intermedi (blu, rosso) su U che differiscono per una coppia di lati di un rettangolo. In Figura (b) sono rappresentati i punti immagine dei flussi applicati secondo i due ordini di Figura (a), connessi da linee per facilitarne il confronto.

con $i = 1, \dots, k$. Presi due cammini intermedi che differiscono per una coppia di lati appartenenti a un certo rettangolo in U di vertice inferiore sinistro (t_0, s_0) , sulla varietà \mathcal{M} avrò due punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , immagini dei due flussi applicati al punto \mathbf{x}_0 in ordine opposto per gli intervalli temporali $\Delta t = t_a/N$ e $\Delta s = s_b/N$, dove \mathbf{x}_0 è l'immagine dell'applicazione dei due flussi nello stesso ordine fino al tempo (t_0, s_0) (Figura 3.1). Per cui da (3.12) la distanza tra questi due punti sarà:

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq CN^{-3},$$

con C costante.

A questo punto i punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 evolvono secondo lo stesso ordine di applicazione dei flussi (i due cammini intermedi per costruzione differiscono solo per una coppia di lati). Per il lemma di Grönwall sulla dipendenza delle soluzioni di un'equazione differenziale dalle condizioni iniziali, i risultati di tale applicazione saranno due punti \mathbf{x}'_1 e \mathbf{x}'_2 la cui distanza sarà:

$$d(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) \leq C'N^{-3},$$

con C' costante. Iterando N^2 volte tale ragionamento, la distanza tra le immagini delle due applicazioni $\mathbf{A}^{t_a} \mathbf{B}^{s_a}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}^{s_b} \mathbf{A}^{t_a}(\mathbf{x})$ sarà:

$$d(\mathbf{A}^{t_a} \mathbf{B}^{s_a}(\mathbf{x}), \mathbf{B}^{s_b} \mathbf{A}^{t_a}(\mathbf{x})) = O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (3.13)$$

Per l'arbitrarietà di N i due flussi commutano. □

Pensiamo adesso al sistema fisico hamiltoniano. La varietà \mathcal{M} è lo spazio delle fasi del sistema in esame e le coordinate su \mathcal{M} sono le coppie di variabili coniugate, le coordinate e gli impulsi generalizzati $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$. I risultati e gli oggetti matematici introdotti fino a ora ci permettono di andare più a fondo nel legame tra funzioni di fase e campi vettoriali a loro associati. Infatti la parentesi di Poisson di due funzioni è naturalmente legata al commutatore dei due campi vettoriali hamiltoniani.

Teorema 3.2. *Date due funzioni di fase $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e i campi vettoriali a loro associati \mathbf{X}_F , \mathbf{X}_G . Il commutatore dei due campi vettoriali $[\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G]$ è il campo vettoriale $\mathbf{X}_{\{F,G\}}$ associato alla parentesi di Poisson $\{F, G\}$.*

Dimostrazione. Possiamo verificare che due campi vettoriali sono uguali se i loro operatori differenziali agiscono allo stesso modo su una funzione ϕ arbitraria. Per definizione l'operatore differenziale associato al campo $[\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G]$ è l'operatore differenziale commutatore $[\mathcal{L}_{\mathbf{X}_F}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}_G}]$ che per (3.2) agisce su ϕ così:

$$[\mathcal{L}_{\mathbf{X}_F}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}_G}]\phi = \{F, \{G, \phi\}\} - \{G, \{F, \phi\}\},$$

per l'identità di Jacobi (2.9) ciò è uguale a:

$$[\mathcal{L}_{\mathbf{X}_F}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}_G}]\phi = -\{G, \{\phi, F\}\} - \{\phi, \{F, G\}\} - \{G, \{F, \phi\}\} = \{\{F, G\}, \phi\},$$

che vuol dire da (3.2):

$$[\mathcal{L}_{\mathbf{X}_F}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}_G}]\phi = \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{\{F,G\}}}\phi.$$

Data l'arbitrarietà di ϕ , abbiamo $[\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G] = \mathbf{X}_{\{F,G\}}$. □

A questo punto dai Teoremi (3.1) e (3.2) vale la seguente caratterizzazione importante per la commutatività dei flussi dei campi vettoriali hamiltoniani, attraverso la parentesi di Poisson delle due funzioni che inducono tali campi.

Corollario 3.1. *Siano $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ due funzioni di fase. I flussi dei campi vettoriali \mathbf{X}_F^t , \mathbf{X}_G^s commutano se e soltanto se la parentesi di Poisson delle due funzioni $\{F, G\}$ è una costante, cioè:*

$$\mathbf{X}_F^t \mathbf{X}_G^s = \mathbf{X}_G^s \mathbf{X}_F^t \iff \{F, G\} = c, \quad (3.14)$$

con c costante.

Capitolo 4

Sottogruppi discreti di \mathbb{R}^n

In questo capitolo mostriamo un risultato di natura più tecnica che sarà utile per la dimostrazione del teorema di Liouville-Arnold.

Un sottogruppo H del gruppo G è un sottogruppo discreto se per ogni elemento h di H , esiste un intorno di h in G tale che l'intersezione tra H e tale intorno contenga il solo elemento h . Ciò equivale a dire che l'insieme degli elementi h è privo di punti d'accumulazione. Preso $G = \mathbb{R}^n$, un sottogruppo discreto Γ di \mathbb{R}^n è quindi costituito da soli punti isolati.

Proposizione 4.1. *Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n , $\Gamma = \{\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots\}$, un intorno V_a del punto \mathbf{h}_a tale che $V_a \cap \Gamma = \{\mathbf{h}_a\}$ è del tipo:*

$$V_a = \mathbf{h}_a + V_0, \quad (4.1)$$

Overo ogni punto di Γ ha un intorno, della stessa taglia, che non contiene altri punti di Γ .

Dimostrazione. Consideriamo in \mathbb{R}^n la metrica euclidea. Per la struttura di gruppo, si ha che $\mathbf{0} \in \Gamma$. Per definizione di sottogruppo discreto esiste l'intorno di $\mathbf{0}$, V_0 , tale che $V_0 \cap \Gamma = \{\mathbf{0}\}$. Consideriamo adesso un punto $\mathbf{h}_a \neq \mathbf{0}$. Ne consideriamo l'intorno $V_a = \mathbf{h}_a + V_0$. Ammettiamo vi sia un elemento del sottogruppo $\mathbf{h}_b \neq \mathbf{h}_a$ tale che $\mathbf{h}_b \in V_a \cap \Gamma$. Tale punto si può scomporre così: $\mathbf{h}_b = \mathbf{h}_a + (\mathbf{h}_b - \mathbf{h}_a) = \mathbf{h}_a + \Delta\mathbf{h}_{ba}$ dove $\Delta\mathbf{h}_{ba}$ per costruzione appartiene a V_0 , ed essendo diverso da $\mathbf{0}$, non appartiene a Γ . Per cui, $\mathbf{h}_b = \mathbf{h}_a + \Delta\mathbf{h}_{ba}$ non appartiene a Γ e $(\mathbf{h}_a + V_0) \cap \Gamma = \{\mathbf{h}_a\}$. \square

Vediamo un esempio di sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n : scelti $k \leq n$ vettori linearmente indipendenti in \mathbb{R}^n , $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$, l'insieme:

$$I = \{m_1\mathbf{e}_1 + \dots + m_k\mathbf{e}_k \mid m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}\}, \quad (4.2)$$

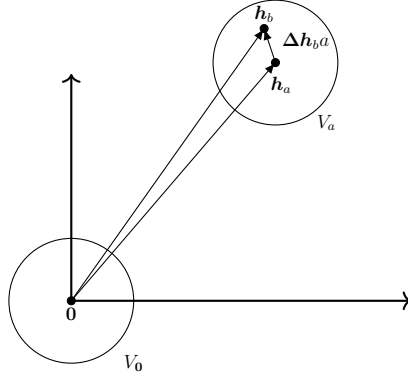


Figura 4.1: *Rappresentazione in \mathbb{R}^2 della costruzione usata nella Proposizione 4.1.*

è un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n . I vettori $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ sono chiamati i *generatori* del sottogruppo I .

Il precedente non è solo un esempio: ogni sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n è della forma (4.2). Vale infatti il seguente

Teorema 4.1. *Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n , esistono allora $k \leq n$ vettori linearmente indipendenti $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \in \Gamma$ tali che:*

$$\Gamma = \{m_1 \mathbf{e}_1 + \dots + m_k \mathbf{e}_k \mid m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.3)$$

Dimostrazione. Il teorema si dimostra iterando un certo numero di volte la stessa costruzione. Consideriamo \mathbb{R}^n , inteso come spazio metrico euclideo. Per la struttura di gruppo, $\mathbf{0} \in \Gamma$. Se $\Gamma = \{\mathbf{0}\}$, il sottogruppo è della forma (4.3) e il teorema è dimostrato.

Sia $\mathbf{e}_0 \in \Gamma$ diverso da $\mathbf{0}$, consideriamo il sottospazio di \mathbb{R}^n generato da \mathbf{e}_0 : $W_0 = \text{span}\{\mathbf{e}_0\} = \mathbb{R}\mathbf{e}_0$. Preso l'insieme $\Gamma \cap W_0$, cerchiamo il punto $\mathbf{e}_1 \in \Gamma \cap W_0$ tale che:

$$|\mathbf{e}_1 - \mathbf{0}| = |\mathbf{e}_1| = \min_{\mathbf{e} \in \Gamma \cap W_0} |\mathbf{e}|.$$

Tale minimo esiste. Infatti consideriamo la palla chiusa $\overline{B_{|\mathbf{e}_0|}(\mathbf{0})}$, di centro $\mathbf{0}$ e raggio $|\mathbf{e}_0|$. L'insieme $\overline{B_{|\mathbf{e}_0|}(\mathbf{0})} \cap \Gamma \cap W_0$ è un insieme finito. Se così non fosse $\overline{B_{|\mathbf{e}_0|}(\mathbf{0})} \cap \Gamma \cap W_0$ conterebbe un numero infinito di elementi \mathbf{e}_j , $j \in \mathbb{N}$, tali che, per la proposizione (4.1):

$$|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j| \geq \delta,$$

per $i \neq j$ e un certo $\delta > 0$. Sommando tale distanza per tutti gli \mathbf{e}_j , otterrei una distanza infinita. Si avrebbe quindi l'assurdo:

$$+\infty = \sum_{j \in \mathbb{N}} \delta \leq 2|\mathbf{e}_0| ,$$

perché i punti \mathbf{e}_j in W_0 si trovano contenuti in $\overline{B_{|\mathbf{e}_0|}(\mathbf{0})}$, per cui la somma delle loro distanze vale al più $2|\mathbf{e}_0|$. Esiste dunque \mathbf{e}_1 come sopra.

L'insieme dei punti $\mathbb{Z}\mathbf{e}_1$ esaurisce tutti i punti di Γ in W_0 :

$$\{m\mathbf{e}_1 \mid m \in \mathbb{Z}\} = \Gamma \cap W_0 .$$

Infatti se ci fosse un punto $\mathbf{e} \in]m\mathbf{e}_1, (m+1)\mathbf{e}_1[$, $\mathbf{e} \in \Gamma$, il punto $\mathbf{e} - m\mathbf{e}_1 \in \Gamma$ si troverebbe a una distanza da $\mathbf{0}$ minore di \mathbf{e}_1 .

Se $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1$ il teorema è dimostrato. Altrimenti, ci sarà un punto esterno alla retta $W_0 = \mathbb{R}\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e} \notin \mathbb{R}\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e} \in \Gamma$. Cerchiamo un punto di distanza minima, ma non nulla, da tale retta, \mathbf{e}_2 , che appartenga al sottogruppo Γ . Proiettiamo \mathbf{e} su $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$, la sua proiezione giace nell'intervallo $\Delta = [m\mathbf{e}_1, (m+1)\mathbf{e}_1]$. Costruiamo il cilindro C di asse Δ e raggio pari alla distanza tra Δ ed \mathbf{e} , $d(\Delta, \mathbf{e})$. Per definizione di sottogruppo discreto, l'insieme $\Gamma \cap C$ contiene un numero finito di punti. Selezioniamo tra questi il punto \mathbf{e}_2 che ha distanza minima dalla retta. Tale punto è il punto di Γ più vicino a $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$, che non appartiene a tale retta:

$$\forall \mathbf{e}' \in \Gamma \setminus \mathbb{R}\mathbf{e}_1, d(\mathbf{e}', \mathbb{R}\mathbf{e}_1) \geq d(\mathbf{e}_2, \mathbb{R}\mathbf{e}_1) .$$

Infatti se ci fosse un punto $\mathbf{e}' \in \Gamma \setminus C$, più vicino alla retta rispetto a \mathbf{e}_2 ,

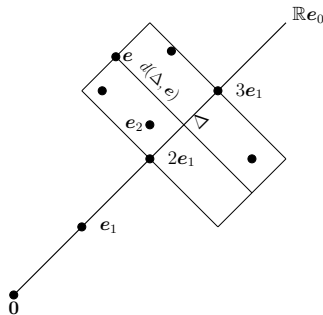


Figura 4.2: *Rappresentazione della sezione nel piano contenente \mathbf{e}_1 del cilindro C costruito per individuare il punto \mathbf{e}_2 . I punti rappresentano i vettori appartenenti al sottogruppo Γ .*

la sua proiezione giacerebbe nell'intervallo $\Delta' = [n\mathbf{e}_1, (n+1)\mathbf{e}_1]$, con $n \neq$

m . Il vettore $\mathbf{e}' + (m - n)\mathbf{e}_1 \in \Gamma \cap C$ avrebbe distanza dalla retta $d(\mathbf{e}' + (m - n)\mathbf{e}_1, \mathbb{R}\mathbf{e}_1) = d(\mathbf{e}', \mathbb{R}\mathbf{e}_1) < d(\mathbf{e}_2, \mathbb{R}\mathbf{e}_1)$, che è un assurdo. Sia $W_1 = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. L'insieme dei punti $\mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{e}_2$ esaurisce tutti i punti di Γ in W_1 :

$$\{m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} = \Gamma \cap W_1 .$$

Se ci fosse un punto $\mathbf{e} \in \Gamma \cap W_1 \setminus \{\mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{e}_2\}$, quindi del tipo $\mathbf{e} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2$ con $\bar{m}_1 < \lambda_1 < \bar{m}_1 + 1, \bar{m}_2 < \lambda_2 < \bar{m}_2 + 1$, il punto $\mathbf{e} - \bar{m}_1\mathbf{e}_1 - \bar{m}_2\mathbf{e}_2 \in \Gamma$ avrebbe distanza da $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$ minore di \mathbf{e}_2 , assurdo per la costruzione sopra.

Se $\Gamma = \{m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ il teorema è dimostrato. Altrimenti, ci sarà un punto $\mathbf{e} \in \Gamma \setminus W_1$. Selezioniamo come prima il punto $\mathbf{e}_3 \in \Gamma \setminus W_1$ di distanza minima da W_1 e mostriamo con gli stessi argomenti che, sia $W_2 = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, allora:

$$\{m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3 \mid m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\} = \Gamma \cap W_2 .$$

Ripetendo il procedimento, la dimostrazione termina se abbiamo esaurito i punti di Γ o le dimensioni di R^n , in quanto per costruzione i vettori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_k)$ sono linearmente indipendenti. Il sottogruppo discreto Γ è quindi un sottogruppo discreto del tipo (4.3). \square

Capitolo 5

Il teorema di Liouville-Arnold

Nel Capitolo 2, abbiamo accennato al fatto che per risolvere il sistema di $2k$ equazioni canoniche (1.6), che rappresentano la dinamica di un sistema fisico con k gradi di libertà, è sufficiente conoscere k integrali primi del moto indipendenti e in involuzione tra loro. In questo capitolo dimostreremo che, nell'ipotesi in cui la sottovarietà k dimensionale dello spazio delle fasi, definita dai k vincoli degli integrali primi, sia una sottovarietà compatta e connessa, è possibile trovare un cambiamento di variabili tale che, nelle nuove coordinate, il moto avvenga in un toro e sia quasi periodico (V.I. Arnold). È possibile, senza questa ipotesi, dimostrare che il sistema (1.6) è comunque integrabile per quadrature (J. Liouville). Il teorema che presenteremo (purtroppo) non fornisce indicazioni sul come individuare gli integrali primi.

Teorema 5.1 (Liouville-Arnold). *Sia dato un sistema hamiltoniano autonomo, e sia \mathcal{M} la varietà simplettica $2k$ -dimensionale dello spazio delle fasi del sistema fisico. Siano $F_1 = H, F_2, \dots, F_k$ funzioni di fase in involuzione:*

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k. \quad (5.1)$$

Sia

$$M_{\mathbf{f}} = \{\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathcal{M} \mid F_i(\mathbf{x}) = f_i, i = 1, \dots, k\} \quad (5.2)$$

l'insieme di livello delle funzioni F_i , con $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k) \in \mathbb{R}^k$. Se le funzioni F_i sono funzionalmente indipendenti su $M_{\mathbf{f}}$, i.e. $\nabla F_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla F_k(\mathbf{x})$ sono linearmente indipendenti per $\mathbf{x} \in M_{\mathbf{f}}$, allora:

(i). $M_{\mathbf{f}}$ è una varietà differenziabile k -dimensionale invariante per il flusso hamiltoniano associato a H .

(ii). Se la varietà $M_{\mathbf{f}}$ è compatta e connessa, è diffeomorfa al toro k -dimensionale:

$$\mathbb{T}^k = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \bmod 2\pi\}. \quad (5.3)$$

(iii). Il flusso hamiltoniano di H su $M_{\mathbf{f}}$ è un moto quasi periodico:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} \quad (5.4)$$

con $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{f})$.

(iv). Le equazioni canoniche di Hamilton si integrano per quadrature.

Dimostrazione. Dimostreremo i primi tre punti.

(i). Per ipotesi i gradienti $\nabla F_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla F_k(\mathbf{x})$ sono linearmente indipendenti per $\mathbf{x} \in M_{\mathbf{f}}$, per cui l'insieme $M_{\mathbf{f}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M} \mid F_i(\mathbf{x}) = f_i, i = 1, \dots, k\}$ è una varietà differenziabile di dimensione k (o una sottovarietà di dimensione k dello spazio delle fasi $2k$ -dimensionale \mathcal{M}). A partire dalle funzioni di fase in involuzione (5.1), sulla varietà $M_{\mathbf{f}}$ sono definiti k campi vettoriali tangenti, linearmente indipendenti e che commutano a due a due. Tali campi sono i campi vettoriali hamiltoniani associati alle funzioni di fase F_i , legati alle 1-forme differenziali dF_i attraverso l'isomorfismo indotto dalla forma simplettica (1.8), rappresentato dalla matrice J^{-1} (1.11):

$$\mathbf{X}_{F_i} = J^{-1} \nabla F_i, \quad (5.5)$$

per cui:

$$\mathbf{X}_{F_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Tali campi vettoriali sono tangenti alla varietà $M_{\mathbf{f}}$. Infatti, la traiettoria del punto $\mathbf{x} \in M_{\mathbf{f}}$ secondo il campo vettoriale \mathbf{X}_{F_i} , per una data funzione F_i , soluzione di:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{x}(t)), \quad (5.7)$$

appartiene all'insieme di livello $\{\mathbf{x}' \in \mathcal{M} \mid F_i(\mathbf{x}') = f_i\}$:

$$\frac{d}{dt} F_i(\mathbf{x}) = \{F_i, F_i\}(\mathbf{x}(t)) = 0,$$

da cui:

$$\nabla F_i(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla F_i(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{x}(t)) = 0,$$

ovvero il campo vettoriale $\mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{x}(t))$ appartiene allo spazio tangente dell'insieme di livello della F_i :

$$\mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{x}(t)) \in T_{\mathbf{x}(t)} \{\mathbf{x}' \in \mathcal{M} \mid F_i(\mathbf{x}') = f_i\}. \quad (5.8)$$

Tale campo vettoriale appartiene anche allo spazio tangente dell'insieme di livello della funzione F_j con $j \neq i$. Infatti:

$$\frac{d}{dt} F_j(\mathbf{x}) = \{F_i, F_j\}(\mathbf{x}(t)) = 0,$$

per l'ipotesi che F_j e F_i siano in involuzione. Da qui segue:

$$\nabla F_j(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla F_j(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{x}(t)) = 0 ,$$

ovvero il campo vettoriale $\mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{x})$ appartiene allo spazio tangente dell'insieme di livello della F_j . Valendo per ogni $j \neq i$, ciò implica che $\mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{x})$ è un vettore tangente all'insieme di livello delle funzioni di fase F_i, F_j , ovvero alla varietà $M_{\mathbf{f}}$. I campi $\mathbf{X}_{F_1}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{X}_{F_k}(\mathbf{x})$ sono linearmente indipendenti poiché per ipotesi lo sono i gradienti $\nabla F_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla F_k(\mathbf{x})$, di cui i campi vettoriali sono immagine attraverso l'isomorfismo (5.5). Sono campi vettoriali commutanti a due a due, ovvero le applicazioni $\mathbf{X}_{F_i}^{t_i}, t_i \in I_i$, con I_i un certo intervallo in cui è definita la soluzione di (5.7) (in generale, potrebbe non essere definito un gruppo a un parametro ($t \in \mathbb{R}$) di diffeomorfismi se la varietà $M_{\mathbf{f}}$ non fosse compatta) commutano a due a due:

$$\mathbf{X}_{F_i}^{t_i} \mathbf{X}_{F_j}^{t_j} - \mathbf{X}_{F_j}^{t_j} \mathbf{X}_{F_i}^{t_i} = 0 ,$$

con $i, j = 1, \dots, k$ e $j \neq i$, in quanto le parentesi di Poisson delle loro funzioni $\{F_i, F_j\}$ sono nulle (Corollario 3.1). Ecco dunque i k campi vettoriali tangenti ad $M_{\mathbf{f}}$, linearmente indipendenti, che commutano a due a due. Abbiamo appena visto che $M_{\mathbf{f}}$ è una varietà invariante non solo per il flusso di fase hamiltoniano associato a H (cioè il punto $\mathbf{X}_H^t(\mathbf{x})$ è un vettore appartenente alla varietà $M_{\mathbf{f}}$ se \mathbf{x} appartiene ad $M_{\mathbf{f}}$) ma per tutti i flussi di fase hamiltoniani associati alle F_i . Notiamo poi che la forma simplettica (1.8) è nulla se calcolata su una qualunque coppia di vettori appartenenti allo spazio tangente di $M_{\mathbf{f}}$:

$$\omega^2|_{T_{\mathbf{x}}M_{\mathbf{f}}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in M_{\mathbf{f}} ;$$

infatti, i campi $\mathbf{X}_{F_1}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{X}_{F_k}(\mathbf{x})$ sono una base per lo spazio tangente di $M_{\mathbf{f}}$, per cui due vettori $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in T_{\mathbf{x}}M_{\mathbf{f}}$ ammettono l'espansione :

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\eta} = \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbf{X}_{F_j}(\mathbf{x}) ,$$

da cui, per la linearità rispetto a entrambi gli argomenti delle 2-forme differenziali:

$$\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i,j=1}^k \alpha_i \beta_j \omega^2(\mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{x}), \mathbf{X}_{F_j}(\mathbf{x})) .$$

Ricordando (2.7) :

$$\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i,j=1}^k \alpha_i \beta_j \{F_j, F_i\} = 0 ,$$

poiché F_i, F_j sono in involuzione. Una varietà nella quale la restrizione della forma simplettica ω^2 si annulla identicamente si dice *nulla* o *(sotto)varietà lagrangiana*, se la dimensione è massimale.

(ii). Se la varietà M_f è compatta, allora per ogni campo vettoriale \mathbf{X}_{F_i} , $i = 1, \dots, k$, è definito il gruppo a un parametro, $t \in \mathbb{R}$, di diffeomorfismi, ovvero il flusso per $t \in \mathbb{R}$ (Definizione 3.1):

$$\mathbf{X}_{F_i}^t : M_f \rightarrow M_f ,$$

tale che:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}_{F_i}^t(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{X}_{F_i}^t(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in M_f .$$

Poiché $\mathbf{X}_{F_i}^t$ è una famiglia di applicazioni parametrizzate da un parametro reale, e i numeri reali sono un gruppo commutativo, il gruppo $\mathbf{X}_{F_i}^t$ è un gruppo commutativo. Inoltre abbiamo visto che i flussi $\mathbf{X}_{F_i}^{t_i}, \mathbf{X}_{F_j}^{t_j}$, $i \neq j$, commutano, per cui possiamo fare un'azione collettiva di tutti questi flussi, definendo *l'azione g del gruppo commutativo di \mathbb{R}^k su M_f* :

$$\begin{aligned} g^{\mathbf{t}} : M_f &\rightarrow M_f , \\ g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{X}_{F_1}^{t_1}(\dots(\mathbf{X}_{F_k}^{t_k}(\mathbf{x}))) , \end{aligned} \tag{5.9}$$

con $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$. Una sua qualunque permutazione non cambierebbe il risultato dell'applicazione di $g^{\mathbf{t}}$ al punto \mathbf{x} , in quanto i flussi commutano. Tale applicazione ha l'ovvio significato di far evolvere un punto della varietà secondo i k flussi di cui sopra in sequenza, per un certo intervallo di tempo per ogni flusso; l'evoluzione temporale del punto iniziale non dipende dall'ordine di applicazione dei flussi. Le proprietà di gruppo derivano dalle proprietà di gruppo dei singoli flussi e dalla loro commutatività. Fissato un punto $\mathbf{x}_0 \in M_f$, si può esplicitare l'applicazione evoluzione temporale del punto \mathbf{x}_0 :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^k &\rightarrow M_f , \\ g(\mathbf{t}) &= g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) . \end{aligned}$$

Ogni punto \mathbf{x}_0 , ha un intorno parametrizzato da un intorno di $0 \in \mathbb{R}^k$, attraverso g . In dettaglio, fissato il punto \mathbf{x}_0 , esistono un intorno $U \subset M_f$ di \mathbf{x}_0 e un intorno $V \subset \mathbb{R}^k$ di $\mathbf{0}$ tali che l'applicazione:

$$g : V \rightarrow U \tag{5.10}$$

sia un diffeomorfismo. Infatti, la matrice jacobiana di g calcolata in $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ è:

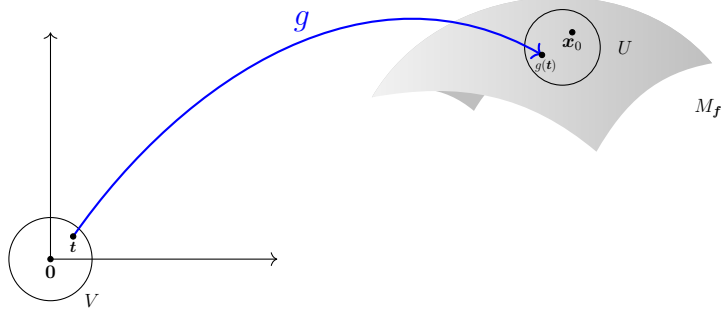


Figura 5.1: *Rappresentazione del diffeomorfismo $g : V \rightarrow U$*

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}}(\mathbf{t}) \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \left[\frac{\partial g}{\partial t_1}(\mathbf{0}), \dots, \frac{\partial g}{\partial t_k}(\mathbf{0}) \right] .$$

Quindi, ricordando che $g(\mathbf{t}) = \mathbf{X}_{F_1}^{t_1}(\mathbf{X}_{F_2}^{t_2} \dots(\mathbf{x}_0))$:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial t_1} \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \left. \frac{d}{dt_1} \mathbf{X}_{F_1}^{t_1}(\mathbf{X}_{F_2}^{t_2} \dots(\mathbf{x}_0)) \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \mathbf{X}_{F_1}(\mathbf{x}_0)$$

e usando la commutatività dei flussi:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g}{\partial t_2} \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} &= \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \mathbf{X}_{F_1}^{t_1}(\mathbf{X}_{F_2}^{t_2} \dots(\mathbf{x}_0)) \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \mathbf{X}_{F_2}^{t_2}(\mathbf{X}_{F_1}^{t_1} \dots(\mathbf{x}_0)) \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \\ &= \left. \frac{d}{dt_2} \mathbf{X}_{F_2}^{t_2}(\mathbf{X}_{F_1}^{t_1} \dots(\mathbf{x}_0)) \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \mathbf{X}_{F_2}(\mathbf{x}_0) , \end{aligned}$$

per cui:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}}(\mathbf{t}) \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = [\mathbf{X}_{F_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{X}_{F_k}(\mathbf{x}_0)] .$$

Abbiamo visto nel punto (i) che $\mathbf{X}_{F_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{X}_{F_k}(\mathbf{x}_0)$ sono linearmente indipendenti, la matrice ha rango massimo k , e dunque il jacobiano è diverso da zero per $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. Dal teorema della funzione inversa, esiste un intorno V di $\mathbf{0}$ in cui l'applicazione g è invertibile e la funzione inversa gode delle proprietà di differenziabilità di g . L'applicazione $g : V \rightarrow U$ è allora un diffeomorfismo. Consideriamo adesso l'applicazione:

$$g : \mathbb{R}^k \rightarrow M_f .$$

Si tratta di un'applicazione suriettiva:

$$\forall \mathbf{x} \in M_f, \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k \text{ t.c. } g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x} . \quad (5.11)$$

Per mostrarlo, ricordiamo innanzitutto che la varietà M_f è connessa per ipotesi, per cui esiste una curva γ in M_f che congiunge \mathbf{x}_0 con \mathbf{x} . Consideriamo un insieme $\{\bar{\mathbf{x}}_i\}$ di punti sulla curva γ , con $i = 0, 1, \dots, n$ tali che $\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$ e $\bar{\mathbf{x}}_n = \mathbf{x}$. Selezionando i punti $\{\bar{\mathbf{x}}_i\}$ in modo tale che, presi i loro intorno $\{U_i\}$ come sopra, i.e. per ciascuno di essi esiste un intorno V_i di $0 \in \mathbb{R}^n$ che lo parametrizza attraverso g , l'unione di questi costituisca un ricoprimento della curva γ e $\bar{\mathbf{x}}_{j+1} \in U_j \cap U_{j+1}$, per $j = 0, 1, \dots, n-1$ (Figura 5.2). Per cui esiste $\mathbf{t}_j \in V_j$ tale che $\bar{\mathbf{x}}_{j+1} = g^{\mathbf{t}_j}(\bar{\mathbf{x}}_j)$ e dunque per composizione dell'applicazione g :

$$g^{\mathbf{t}_{n-1}}(\dots(g^{\mathbf{t}_0}(\mathbf{x}_0))) = \mathbf{x} ,$$

per le proprietà di gruppo:

$$g^{\mathbf{t}_{n-1} + \dots + \mathbf{t}_0}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x} ;$$

per l'arbitrarietà di \mathbf{x} , $g : \mathbb{R}^k \rightarrow M_f$ è suriettiva. Per cui è possibile, a

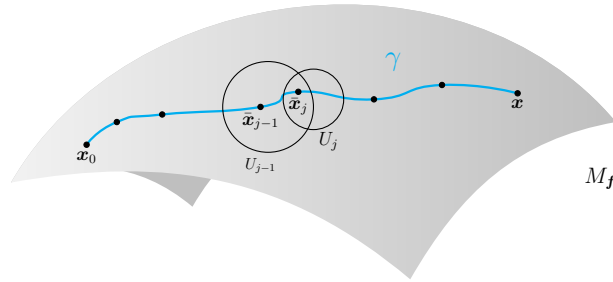


Figura 5.2: Rappresentazione della costruzione d' intorni tra il punto \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} congiunti dalla curva γ .

partire da qualsiasi punto iniziale su M_f , giungere a qualsiasi altro punto su M_f facendo evolvere il punto iniziale per degli intervalli di tempo opportuni secondo i k campi $\mathbf{X}_{F_1}, \dots, \mathbf{X}_{F_k}$. Osserviamo che g necessariamente non è anche iniettiva, poiché se lo fosse, data anche la sua continuità, $g : \mathbb{R}^k \rightarrow M_f$ sarebbe un omeomorfismo e i due spazi \mathbb{R}^k e M_f sarebbero omeomorfi, il che è impossibile in quanto il primo non è uno spazio compatto a differenza del secondo. Introduciamo a questo punto il *gruppo stazionario del punto \mathbf{x}_0* :

$$\Gamma = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k \mid g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0\} .$$

È un sottogruppo in quanto:

- $\forall \mathbf{t}, \mathbf{s} \in \Gamma, \mathbf{t} + \mathbf{s} \in \Gamma$;

- esiste l'elemento neutro $\mathbf{0} \in \Gamma$: $\mathbf{0} + \mathbf{t} = \mathbf{t} + \mathbf{0} = \mathbf{t}$, $\forall \mathbf{t} \in \Gamma$;
- esiste l'elemento opposto di \mathbf{t} , $-\mathbf{t} \in \Gamma$: $-\mathbf{t} + \mathbf{t} = \mathbf{t} - \mathbf{t} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{t} \in \Gamma$.

Infatti, per $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \Gamma$, si ha che $g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) = g^{\mathbf{s}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Per cui $g^{\mathbf{t}+\mathbf{s}}(\mathbf{x}_0) = g^{\mathbf{t}}(g^{\mathbf{s}}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}_0$. Esiste l'elemento zero $\mathbf{0}$ in quanto $g^{\mathbf{0}} = id$. Esiste l'elemento opposto $-\mathbf{t} \in \Gamma$, $g^{-\mathbf{t}}(g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0)) = g^{\mathbf{t}}(g^{-\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}_0$, da cui $g^{-\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

È un sottogruppo indipendente dalla scelta del punto \mathbf{x}_0 , cioè il gruppo stazionario per \mathbf{x}_0 è anche gruppo stazionario per \mathbf{x} , con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$: dalla suriettività dell'applicazione g (5.11) esiste $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^k$ tale che $g^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}$, preso $\mathbf{t} \in \Gamma$:

$$g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = g^{\mathbf{t}}(g^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}_0)) = g^{\mathbf{r}}(g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0)) = g^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x} .$$

Per cui Γ è un sottogruppo definito in modo indipendente dal punto per il quale rappresenta il gruppo stazionario. Mostriamo che Γ è un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^k . Esiste certamente un intorno V di $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$ tale che $V \cap \Gamma = \{\mathbf{0}\}$. Ciò segue dal fatto che $g : V \rightarrow U$ (5.10) è un diffeomorfismo, ed è quindi iniettivo:

$$\forall \mathbf{t} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}, g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{x}_0 .$$

Inoltre esiste, $\forall \mathbf{t} \in \Gamma$, l'intorno standard di \mathbf{t} , $\mathbf{t} + V$, tale che $(\mathbf{t} + V) \cap \Gamma = \{\mathbf{t}\}$. Infatti, se esistesse un punto $\mathbf{s} \in (\mathbf{t} + V) \cap \Gamma$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{t}$, avremmo, per $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{s} = \mathbf{t} + \mathbf{v}$:

$$\mathbf{x}_0 = g^{\mathbf{s}}(\mathbf{x}_0) = g^{\mathbf{t}+\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = g^{\mathbf{v}}(g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0)) = g^{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x} ,$$

con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, per quanto dimostrato prima. Dunque Γ è un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^k . Per il Teorema (4.1) esistono $l \leq k$ vettori linearmente indipendenti $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l) \in \Gamma$ tali che:

$$\Gamma = \{m_1 \mathbf{e}_1 + \dots + m_l \mathbf{e}_l \mid m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z}\} . \quad (5.12)$$

Adesso, consideriamo $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathbb{R}^k$, tali che:

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}' \in \Gamma . \quad (5.13)$$

Allora, si ha:

$$g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) = g^{\mathbf{t}'}(\mathbf{x}_0) , \quad \forall \mathbf{x}_0 \in M_f , \quad (5.14)$$

poiché $g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) = g^{\mathbf{t}'+\Delta\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) = g^{\mathbf{t}'}(g^{\Delta\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0))$ con $\Delta\mathbf{t} \in \Gamma$, per cui $g^{\Delta\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) = g^{\mathbf{t}'}(\mathbf{x}_0)$. Definiamo la relazione di equivalenza:

$$\mathbf{t} \sim \mathbf{t}' \iff \mathbf{t} - \mathbf{t}' \in \Gamma . \quad (5.15)$$

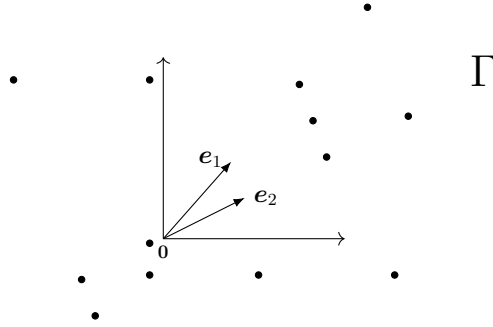


Figura 5.3: Rappresentazione in \mathbb{R}^2 dei generatori del sottogruppo discreto Γ . I punti rappresentano gli elementi di Γ .

La classe di equivalenza di \mathbf{t} è data da:

$$[\mathbf{t}] = \{\mathbf{t}' \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{t}' \sim \mathbf{t}\} .$$

L'insieme di tali classi forma lo spazio quoziente:

$$\mathbb{R}^k \setminus \Gamma = \{[\mathbf{t}] \mid \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k\} .$$

Definiamo adesso l'applicazione:

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \mathbb{R}^k \setminus \Gamma &\rightarrow M_f , \\ \tilde{g}([\mathbf{t}]) &= g(\mathbf{t}) = g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) , \end{aligned} \tag{5.16}$$

dove \mathbf{t} è uno dei rappresentanti della classe di equivalenza $[\mathbf{t}]$. Per (5.14) e (5.13) tale funzione è ben definita. È suriettiva poiché lo è $g : \mathbb{R}^k \rightarrow M_f$, ed è iniettiva: prese le classi di equivalenza $[\mathbf{t}_1], [\mathbf{t}_2]$ e i loro rappresentanti $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$, $\tilde{g}([\mathbf{t}_1]) = \tilde{g}([\mathbf{t}_2]) \iff g^{\mathbf{t}_1}(\mathbf{x}_0) = g^{\mathbf{t}_2}(\mathbf{x}_0) \iff g^{\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, ovvero $\mathbf{t}_1 \sim \mathbf{t}_2$, quindi $[\mathbf{t}_1] = [\mathbf{t}_2]$. Per le proprietà di differenziabilità di g , l'applicazione \tilde{g} è un diffeomorfismo. Gli spazi $\mathbb{R}^k \setminus \Gamma$ e M_f sono dunque diffeomorfi.

Completiamo l'insieme $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l)$ con $k - l$ vettori linearmente indipendenti $(\mathbf{e}_{l+1}, \dots, \mathbf{e}_k)$ in modo che l'insieme $(\frac{\mathbf{e}_1}{2\pi}, \dots, \frac{\mathbf{e}_l}{2\pi}, \mathbf{e}_{l+1}, \dots, \mathbf{e}_k)$ costituisca una base dello spazio \mathbb{R}^k . Per cui un vettore $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$ si espande:

$$\mathbf{t} = \frac{\varphi_1}{2\pi} \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{\varphi_l}{2\pi} \mathbf{e}_l + t_{l+1} \mathbf{e}_{l+1} + \dots + t_k \mathbf{e}_k .$$

Guardiamo adesso lo spazio quoziente $\mathbb{R}^k \setminus \Gamma$. Tramite la relazione di equivalenza (5.15), $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathbb{R}^k$ sono equivalenti se:

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_l, t_{l+1}, \dots, t_k) = (\varphi'_1 + 2\pi m_1, \dots, \varphi'_l + 2\pi m_l, t'_{l+1}, \dots, t'_k) ,$$

con $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z}$. Per cui $\mathbb{R}^k \setminus \Gamma$ è diffeomorfo a $\frac{\mathbb{R}^l}{(2\pi\mathbb{Z})^l} \times \mathbb{R}^{k-l}$, ovvero è diffeomorfo a $\mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^{k-l}$. Per composizione di diffeomorfismi, $M_{\mathbf{f}}$ è diffeomorfo a $\mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^{k-l}$. Per ipotesi $M_{\mathbf{f}}$ è compatto, poiché \mathbb{R}^{k-l} non lo è, si deve avere $l = k$. Quindi la varietà $M_{\mathbf{f}}$ è diffeomorfa al toro k -dimensionale \mathbb{T}^k .

(iii). Le variabili angolari $(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \bmod 2\pi$ che costituiscono una parametrizzazione per il toro \mathbb{T}^k , sono dunque una parametrizzazione per la varietà $M_{\mathbf{f}}$. Consideriamo le variabili (t_1, \dots, t_k) , tali che, per un qualche $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$, $g(\mathbf{t}) = g^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in M_{\mathbf{f}}$. Esisterà un'applicazione lineare A , rappresentata dalla matrice A , tra i due spazi vettoriali \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^k , tale che:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^k, \\ \mathbf{t} &\rightarrow \boldsymbol{\varphi}, \\ \mathbf{e}_1 &\rightarrow (2\pi, 0, \dots, 0), \\ &\dots \\ \mathbf{e}_k &\rightarrow (0, 0, \dots, 2\pi), \end{aligned}$$

con $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ i generatori del gruppo stazionario, che costituiscono una base dello spazio \mathbb{R}^k , per cui l'applicazione A è definita in modo univoco. In tal modo, poiché il punto $\mathbf{x} \in M_{\mathbf{f}}$ non varia sotto l'applicazione di $g^{\bar{\mathbf{t}}}$, con $\bar{\mathbf{t}} \in \Gamma$, anche le variabili angolari tramite A , $(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \bmod 2\pi$ restano costanti, a $(0, \dots, 0)$ in questo caso. Il sistema fisico è rappresentato da un punto nello spazio delle fasi che si muove sull'insieme di livello $M_{\mathbf{f}}$ sotto il flusso di fase hamiltoniano con funzione H , per cui quando studiamo la dinamica fisica di un punto su $M_{\mathbf{f}}$, l'unico parametro temporale dell'applicazione $g^{\mathbf{t}}$ non nullo è il parametro $t_1 := t$ e il flusso è \mathbf{X}_H^t . Rappresentando l'applicazione A attraverso la matrice A nella base canonica di \mathbb{R}^k , da:

$$\boldsymbol{\varphi} = A\mathbf{t},$$

per $\mathbf{t} = (t, \dots, 0)$ otteniamo:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\omega}t,$$

dove $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{f})$ in generale dipende dai valori assunti dalle funzioni di fase F_i nel punto dello spazio delle fasi che rappresenta la condizione iniziale a un dato tempo. Il moto del sistema fisico sulla varietà $M_{\mathbf{f}}$, con condizione iniziale $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\varphi}_0$, in coordinate angolari risulta quindi:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\omega}t.$$

□

Appendice A

Teorema d'invertibilità locale

In quanto segue, per semplificare la notazione, un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, si scriverà semplicemente x .

Teorema A.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e sia $x_0 \in \Omega$. Se la matrice jacobiana $f'(x_0)$ è tale che $\det f'(x_0) \neq 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f|_U$ è invertibile, e l'applicazione inversa $(f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow U$ è di classe C^1 .*

Dimostrazione. Dalla differenziabilità di f si ha che:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|). \quad (\text{A.1})$$

Poiché $\det f'(x_0) \neq 0$, possiamo scrivere:

$$f'(x_0)^{-1}(f(x) - f(x_0)) = x - x_0 + f'(x_0)^{-1}o(|x - x_0|). \quad (\text{A.2})$$

Rinominando $y := f'(x_0)^{-1}(f(x) - f(x_0))$, $x := x - x_0$, $\varphi(x) := f'(x_0)^{-1}o(|x - x_0|)$, si ha che:

$$y = x + \varphi(x), \quad (\text{A.3})$$

con $\varphi(x)$ di classe C^1 (per la continuità di f e delle sue derivate parziali), con le proprietà che $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, per (A.2). Cerchiamo l'applicazione inversa della forma:

$$x = y + \psi(y). \quad (\text{A.4})$$

Mostriamo che esiste ed è unica la funzione $\psi(y)$ che realizza la funzione inversa come in (A.4). Sostituendo (A.4) in (A.3) otteniamo:

$$\psi(y) = -\varphi(y + \psi(y)), \quad (\text{A.5})$$

ovvero $\psi(y)$, se esiste, deve essere un punto fisso per l'applicazione:

$$(T\psi)(y) = -\varphi(y + \psi(y)), \quad (\text{A.6})$$

con $\psi(y) \in C(\overline{B_\varepsilon(0)}, \overline{B_\varepsilon(0)})$. Mostriamo che T così definita è una contrazione. Poniamo $X = C(\overline{B_\varepsilon(0)}, \overline{B_\varepsilon(0)})$. Verifichiamo prima di tutto che T trasforma X in X . $(T\psi)(y)$ è una mappa continua (composizione di funzioni continue), inoltre $(T\psi)(y) \in C(\overline{B_\varepsilon(0)}, A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Inoltre si ha che:

$$\begin{aligned} |(T\psi)(y)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(t(y + \psi(y))) dt \right| = \left| \int_0^1 \varphi'(t(y + \psi(y)))(y + \psi(y)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |\varphi'(t(y + \psi(y)))(y + \psi(y))| dt \\ &\leq \int_0^1 |\varphi'(t(y + \psi(y)))| |y + \psi(y)| dt . \end{aligned} \tag{A.7}$$

Poiché $y \in \overline{B_\varepsilon(0)}$, $\psi(y) \in \overline{B_\varepsilon(0)}$, per ogni $t \in [0, 1]$ si deduce che $t(y + \psi(y)) \in \overline{B_{2\varepsilon}(0)}$. Sia :

$$A_\varepsilon := \max_{\xi \in \overline{B_{2\varepsilon}(0)}} |\varphi'(\xi)| . \tag{A.8}$$

Dato che per ipotesi, φ' è continua e $\varphi'(0) = 0$, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $A_\varepsilon < \frac{1}{2}$. Quindi:

$$|(T\psi)(y)| \leq A_\varepsilon \int_0^1 |y + \psi(y)| dt \leq A_\varepsilon 2\varepsilon \leq \varepsilon , \tag{A.9}$$

ovvero $(T\psi)(y) \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ e T trasforma X in X .

Si può dimostrare che l'insieme X con la distanza indotta d dalla norma

$$\|\psi\| = \max_{y \in \overline{B_\varepsilon(0)}} |\psi(y)|, \quad \psi \in X , \tag{A.10}$$

è uno spazio metrico completo. Verifichiamo ora che l'applicazione T è effettivamente una contrazione su X . Prese $\psi_1, \psi_2 \in X$:

$$\begin{aligned} d(T\psi_1, T\psi_2) &= \\ &= \max_{y \in \overline{B_\varepsilon(0)}} |\varphi(y + \psi_1(y)) - \varphi(y + \psi_2(y))| = \\ &= \max_{y \in \overline{B_\varepsilon(0)}} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(y + \psi_2(y) + t(\psi_1(y) - \psi_2(y))) dt \right| \leq \\ &= \max_{y \in \overline{B_\varepsilon(0)}} \int_0^1 |\varphi'(y + \psi_2(y) + t(\psi_1(y) - \psi_2(y)))| |\psi_1(y) - \psi_2(y)| dt , \end{aligned} \tag{A.11}$$

essendo $y + \psi_2(y) + t(\psi_1(y) - \psi_2(y)) = (1-t)(y + \psi_2(y)) + t(y + \psi_1(y)) \in \overline{B_{2\varepsilon}(0)}$ per $0 \leq t \leq 1$, otteniamo:

$$d(T\psi_1, T\psi_2) \leq A_\varepsilon \max_{y \in \overline{B_\varepsilon(0)}} |\psi_1(y) - \psi_2(y)| = A_\varepsilon d(\psi_1, \psi_2) \leq \frac{1}{2} d(\psi_1, \psi_2), \quad (\text{A.12})$$

ovvero T è una contrazione. Dunque, per il Teorema delle contrazioni, esiste ed è unica $\psi \in C(\overline{B_\varepsilon(0)}, \overline{B_\varepsilon(0)})$ che realizza la funzione inversa (A.4).

Da (A.4) si ha $\psi(0) = 0$. A partire da (A.3), poiché $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 0$, si ottiene:

$$|y| = |x + \varphi(x)| \leq |x| + |\varphi(x)| \leq C|x|, \quad (\text{A.13})$$

con C costante. Inoltre:

$$|y| = |x + \varphi(x)| \geq |x| - |\varphi(x)| \geq |x| - \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x|, \quad (\text{A.14})$$

da cui:

$$\frac{1}{2}|x| \leq |y| \leq C|x|. \quad (\text{A.15})$$

Calcoliamo adesso:

$$\left| \frac{\psi(y)}{|y|} \right| = \left| \frac{x - y}{|y|} \right| = \left| \frac{\varphi(x)}{|y|} \right| = \left| \frac{\varphi(x)}{|x|} \right| \frac{|x|}{|y|} \leq 2 \left| \frac{\varphi(x)}{|x|} \right|, \quad (\text{A.16})$$

e nel limite per $|x| \rightarrow 0$:

$$2 \left| \frac{\varphi(0) + \varphi'(0)x + o(|x|)}{|x|} \right| \xrightarrow{|x| \rightarrow 0} 0, \quad (\text{A.17})$$

in quanto $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 0$. Da (A.15) si ha che se $|x| \rightarrow 0$ anche $|y| \rightarrow 0$, e:

$$\left| \frac{\psi(y)}{|y|} \right| \xrightarrow{|y| \rightarrow 0} 0, \quad (\text{A.18})$$

ovvero ψ è differenziabile in 0 e $\psi'(0) = 0$. In questo modo, si è verificato che la funzione f in un intorno di x_0 ammette inversa f^{-1} differenziabile in y_0 . Visto che $\det f'(x_0) \neq 0$, la stessa condizione vale nell'intorno di x_0 di cui sopra e la conclusione segue ripetendo il precedente ragionamento. \square

Appendice B

Teorema della funzione implicita

In quanto segue, per semplificare la notazione, un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, si scriverà semplicemente x .

Teorema B.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, Ω aperto, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$ e $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, allora esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di x_0 , un intorno $V \subset \mathbb{R}^d$ di y_0 e $y = g(x)$ per $x \in U, y \in V$, $g \in C^1(U, V)$ tali che $y_0 = g(x_0)$, $f(x, g(x)) = 0$ e*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)), \quad \forall x \in U.$$

Dimostrazione. Definiamo una funzione $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$. Φ è di classe C^1 e $\Phi(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, 0)$. Scriviamo esplicitamente $\Phi'(x_0, y_0)$:

$$\Phi'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n \times n} & 0_{n \times d} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)_{d \times n} & \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)_{d \times d} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

è una matrice a blocchi con $\det \Phi'(x_0, y_0) = \det \mathbb{1}_{n \times n} \cdot \det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ per ipotesi. Dunque per il teorema d'invertibilità locale, Φ è invertibile in un intorno di (x_0, y_0) . Sia $t := f(x, y)$, allora $\Phi(x, y) = (x, t)$ e $\Phi^{-1}(x, t) = (x, y)$, ovvero $y = h(x, t)$, con h di classe C^1 . A questo punto $t = f(x, h(x, t))$, e per $t = 0$: $0 = f(x, h(x, 0))$, da cui

$$y = h(x, 0) := g(x). \quad (\text{B.2})$$

Osserviamo che $\Phi^{-1}(x_0, 0) = (x_0, y_0) = (x_0, h(x_0, 0))$, $y_0 = g(x_0)$. Da $f(x, g(x)) = 0$, per x in un intorno opportuno U di x_0 , si deduce che:

$$\frac{d}{dx_i} f_l(x, g(x)) = \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(x, g(x)) + \sum_{k=1}^d \frac{\partial f_l}{\partial g_k}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = 0, \quad (\text{B.3})$$

per $i = 1, \dots, n$ e $l = 1, \dots, d$. (B.3) può essere riscritta in modo più sintetico come

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) = \frac{\partial f}{\partial g}(x, g(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(x), \quad (\text{B.4})$$

e, poiché per ipotesi $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ è invertibile, otteniamo:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = - \left(\frac{\partial f}{\partial g}(x, g(x)) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)), \quad (\text{B.5})$$

per ogni $x \in U$. Questo conclude la dimostrazione del teorema. \square

Bibliografia

- [1] V.I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, Roma, 2004.
- [2] L.D. Landau e E.M. Lifšits, *Fisica Teorica. Vol. I: Meccanica*, Editori Riuniti, Roma, 2009.
- [3] A. Fasano e S. Marmi, *Analytical Mechanics*, Oxford University Press, New York, 2006.