Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

IL LEMMA DI MILNOR-ŠVARC E LE SUE IMPLICAZIONI GEOMETRICHE E TOPOLOGICHE

Tesi di Laurea Triennale

Relatore:
Chiar.mo Dott.
MARCO MORASCHINI

Presentata da:
ALESSANDRO BENEVENTI

Sessione Estiva
Anno Accademico 2022-2023

Introduzione

Questa tesi ha come argomento principale il *Lemma di Milnor-Švarc*, un risultato fondamentale riguardante la teoria geometrica dei gruppi.

Riassumendo brevemente, tale teorema afferma quanto segue. Dato un gruppo che agisce su di uno spazio metrico, se opportune ipotesi sono verificate, risulta possibile affermare che il gruppo sia finitamente generato e lo spazio metrico sia *quasi-isometrico* a tale gruppo. In particolare, lo scopo della tesi sarà proprio quello di chiarire il significato del concetto di *quasi-isometria* e di spiegare in maniera puntuale quali siano le ipotesi del teorema ed il perché queste siano necessarie, nonché mostrare alcune delle principali conseguenze del Lemma di Milnor-Švarc.

Facendo un passo indietro, spieghiamo brevemente in cosa consista la *teoria geometrica dei gruppi*. Già verso la fine dell'800, numerosi matematici iniziarono ad indirizzare i loro interessi verso la correlazione tra gruppi, visti come entità puramente algebrica, e geometria. Ma è solamente intorno agli anni Ottanta del Novecento con i lavori pionieristici *'Hyperbolic Groups'* ed *'Asymptotic Invariants of Infinite Groups'* di Mikhail Gromov, che si iniziò a parlare di teoria geometrica dei gruppi. Lo scopo della teoria geometrica dei gruppi è quello di comprendere a fondo il legame tra le proprietà algebriche dei gruppi finitamente generati e le proprietà geometriche e topologiche degli spazi su cui tali gruppi agiscono. In particolare, l'intuizione rivoluzionaria, consiste nel considerare i gruppi finitamente generati come oggetti geometrici attraverso i loro *Grafi di Cayley*, dotarli di una struttura di spazio metrico e, quindi, studiare la loro relazione con la geometria.

Enunciamo ora il Lemma di Milnor-Švarc nella sua versione relativa alla quasi-geometria:

Teorema 0.1 (Lemma di Milnor-Švarc)**.** Sia G un gruppo e si consideri un'azione per isometrie di G su uno spazio metrico (X, d) non vuoto. Supponiamo che esistano due costanti $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che X sia uno spazio (c,b)-quasi-geodetico e supponiamo che esista un sottoinsieme $B \subset X$ con le seguenti proprietà:

(i) Il diametro di B è finito;

(ii) I G-traslati di B ricoprono X, ossia $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$;

(iii) L'insieme $S := \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \varnothing\}$ è finito, dove B' è l'insieme dei punti che hanno distanza da B minore o uguale a $2b$:

$$B' := B_{2 \cdot b}(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B \text{ tale che } d(x, y) \leq 2 \cdot b\}.$$

Allora sono verificate le seguenti:

1. Il gruppo G è generato da S. Quindi, in particolare, è finitamente generato.

2. Per ogni $x \in X$ la mappa

$$\begin{aligned} G &\to X \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

   è una quasi-isometria rispetto alla metrica delle parole d_S su G. In altre parole, G ed X sono quasi-isometrici.

Per quanto riguarda gli scopi di questa tesi, ciò a cui siamo maggiormente interessati è studiare il Lemma di Milnor-Švarc nella sua versione topologica. In particolare, questa consente di affermare quanto segue:

Teorema 0.2 (Formulazione topologica del Lemma di Milnor-Švarc)**.** Dato un gruppo G che agisce tramite isometrie su di uno spazio metrico proprio, geodetico e non vuoto (X, d). Se l'azione di G è propria e cocompatta, allora G è finitamente generato e $\forall x \in X$ la mappa:

$$G \to X$$
$$g \mapsto g \cdot x$$

è una quasi isometria.

Sfruttando la versione topologica del Lemma di Milnor-Švarc, saremo in grado di mostrare che se (M, g) è una varietà Riemanniana *piatta*, ovvero se il suo rivestimento universale $(\widetilde{M}, p^*g)$ è isometrico a $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$, allora il suo gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ è quasi-isometrico allo spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$. In particolare, saremo in grado di osservare che le superfici di genere $g \geq 2$ non possono essere piatte.

Struttura della tesi

La tesi è suddivisa in quattro capitoli: uno contenente i preliminari, uno riguardante le quasi-isometrie, uno sul Lemma di Milnor-Švarc ed uno sulle sue applicazioni principali.

Più precisamente, nella prima parte preliminare di questa tesi spiegheremo cosa si intende per grafo di Cayley di un gruppo finitamente generato e ne studieremo alcune proprietà. La seconda sezione preliminare, invece, avrà come obiettivo principale quello di richiamare brevemente i risultati fondamentali riguardanti la teoria dei rivestimenti. Infine, la terza sezione dei preliminari riguarderà alcuni risultati di geometria Riemanniana. Le ultime due sezioni permetteranno di comprendere al meglio le implicazioni del Lemma di Milnor-Švarc.

Il secondo capitolo della tesi è totalmente incentrato sulla presentazione della *coarse geometry*, spaziando tra i concetti di quasi-isometria, di metrica indotta su un grafo di Cayley arrivando, infine, alla crescita dei gruppi finitamente generati.

Nel terzo capitolo verrà enunciato e dimostrato il Lemma di Milnor-Švarc nella sua versione quasi-geometrica.

Nel quarto, ed ultimo, capitolo verranno presentate la sua versione topologica ed alcune rilevanti conseguenze ad essa associate.

Indice

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Grafi di Cayley di gruppi finitamente generati

Un aspetto fondamentale riguardante la teoria geometrica dei gruppi è quello di comprendere come interpretare i gruppi in modo geometrico. Uno dei modi per vedere un gruppo (finitamente generato) come oggetto geometrico è attraverso il suo *grafo di Cayley*, di cui ci occuperemo in questa sezione. Per un maggior approfondimento riguardo i temi trattati si consiglia la consultazione del libro *'Geometric group theory, an introduction'* di Clara Löh [Löh17].

Per prima cosa introduciamo gli aspetti essenziali riguardanti le definizioni e le nozioni basilari relative alla teoria dei grafi:

Definizione 1.1.1 (Grafo)**.** Un *grafo* è una coppia $G = (V, E)$ di insiemi disgiunti dove E è un sottoinsieme di $V \times V$.

Gli elementi di V sono detti *vertici* mentre quelli di E sono detti *archi.*

I grafi rappresentano uno dei possibili modi in cui visualizzare le relazioni tra oggetti di tipo generico e, per questa ragione, vengono utilizzati nei più disparati campi, spaziando dalla teoria delle reti alla cybersecurity fino all'economia.

Osservazione 1.1.2 (Grafi orientati e non orientati)**.** È bene notare che la definizione qui riportata è quella di grafo *non orientato*. I grafi *orientati* sono anch'essi descritti da una coppia (V, E) di insiemi disgiunti dove V sono i vertici ed E sono gli archi. La differenza sostanziale, tuttavia, risiede nel fatto che gli archi sono insiemi ordinati. Tale tipologia di grafo viene principalmente utilizzata negli ambiti in cui viene posta una maggiore enfasi sulla tipologia di relazioni tra oggetti rispetto a quella necessaria in questa tesi, come per esempio nello studio della relazioni economiche internazionali.

Definizione 1.1.3 (Vertici adiacenti e grado di un vertice)**.** Due vertici v, v' si dicono *adiacenti* se esiste un arco che li connette, ovvero se $\{v, v'\} \subset E$. Il numero di vertici adiacenti ad un vertice v è detto *grado* del vertice.

Esempio 1.1.4. Sia $V := \{1, 2, 3, 4\}$ e sia $E := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$. Il grafo $G_1 := (V, E)$ può essere realizzato geometricamente come un triangolo formato dai vertici 1,2 e 3 in cui un quarto punto è lasciato al di fuori e non connesso in alcun modo agli altri 3. Inoltre osserviamo che in G_1 ogni vertice $v \in \{1, 2, 3\}$ è adiacente agli altri due vertici di $\{1, 2, 3\}$ mentre nessun vertice è adiacente a 4.

Introduciamo ora le definizioni di *isomorfismi di grafi*, di *cicli* e *cammini*. Queste proprietà caratterizzano fortemente un grafo.

Definizione 1.1.5 (Isomorfismo di grafi)**.** Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due grafi. I grafi G e G' si dicono *isomorfi* se esiste una biiezione $f : V \to V'$ tale che $\forall v, w \in V$ si ha:

$$\{v, w\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(w)\} \in E'\}.$$

In altre parole, due grafi isomorfi differiscono solo per le *etichette* dei vertici.

Definizione 1.1.6 (Percorsi, cicli e grafi connessi)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo. Definiamo le seguenti nozioni:

- Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Un *percorso (o cammino) in G di lunghezza n* è una sequenza $v_0, \ldots, v_n$ di vertici appartenenti a V tali che $\{v_j, v_{j+1}\} \in$

E, $\forall j \in \{0, \ldots, n-1\}$ e che per ogni j si abbia $v_j \neq v_{j-2}$. Se $n < \infty$ si dice che tale percorso connette i vertici v_0 e v_n.

- Il grafo G si dice *connesso* se ogni coppia di vertici può essere connessa da un *percorso* in G.

- Sia $n \in \mathbb{N}_{>2}$. Un *ciclo in G di lunghezza n* è una sequenza $v_0, \ldots, v_n$ di vertici appartenenti a V tale che $\{v_{n-1}, v_0\} \in E$ e, inoltre, $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$, $\forall j \in \{0, \ldots, n-2\}$, richiedendo che $v_j \neq v_{j-2}$ per ogni j.

Osservazione 1.1.7. Si noti che per ogni percorso di lunghezza n che collega un dato numero di vertici all'interno di un grafo G, esistono infiniti percorsi di lunghezza arbitraria che collegano i medesimi vertici. Infatti, dato un percorso, risulta sufficiente percorrere gli archi in un verso e poi in quello opposto al fine di creare un cammino di lunghezza arbitraria che coinvolga gli stessi vertici. Tuttavia, tale arbitrarietà nella scelta risulta spesso superflua, in quanto nelle applicazioni viene implicitamente sempre utilizzato il cammino più breve che mette in relazione due o più vertici.

Esempio 1.1.8. Riconsiderando l'Esempio 1.1.4 si nota immediatamente come G_1 non sia connesso. Invece, per esempio, $G_2 = (V', G')$, con $V' := \{1, 2, 3\}$ ed $E := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$, è chiaramente un grafo connesso. Inoltre, in G_2 la sequenza 1,2,3 è un ciclo.

Ora, date le definizioni necessarie, introduciamo la definizione di *grafo di Cayley*, un oggetto di cruciale importanza per quanto riguarda lo studio della teoria geometrica dei gruppi.

Definizione 1.1.9 (Grafo di Cayley)**.** Sia G un gruppo e sia $S \subset G$ un insieme di generatori per G. Allora il *grafo di Cayley di G* rispetto all'insieme di generatori S è il grafo $\mathrm{Cay}(G, S)$, dove G rappresenta l'insieme dei vertici e l'insieme degli archi è dato da:

$$\Big\{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G, s \in S \cup S^{-1} \backslash \{e\}\Big\}$$

In particolare, due vertici distinti g, g' all'interno di un grafo di Cayley sono adiacenti se e solo se esiste $s \in S \cup S^{-1} \backslash \{e\}$ tale che $g \cdot s = g'$

Esempio 1.1.10. Mostriamo alcuni esempi:

- I grafi di Cayley del gruppo additivo $\mathbb{Z}$ rispetto agli insiemi di generatori $\{1\}$ e $\{2, 3\}$ sono rappresentati rispettivamente da una linea retta puntata e da un insieme di punti in cui ciascun elemento $z \in \mathbb{Z}$ è collegato a $z-3, z-2, z+2, z+3$. In particolare entrambi i grafi, se *"guardati da lontano"*, sembrano avere la stessa struttura, la quale ricorda la retta reale. Più precisamente, tali grafi sono detti *quasi-isometrici*, come vedremo poi in seguito nella tesi.

- Il grafo di Cayley del gruppo additivo $\mathbb{Z}^2$ rispetto all'insieme di generatori $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ risulta essere una griglia in $\mathbb{R}^2$. Guardato da lontano, questo grafo di Cayley ricorda il piano Euclideo.

- Il grafo di Cayley del gruppo ciclico $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ rispetto all'insieme di generatori $S = \{[1]\}$ è un esagono.

- Indichiamo con S_3 il gruppo simmetrico formato delle permutazioni di 3 elementi. Il grafo di Cayley $\mathrm{Cay}(S_3, S_3)$ è formato da 6 vertici in cui ogni vertice è connesso ad ognuno degli altri vertici. D'altra parte, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ rappresenta esattamente lo stesso grafo e, per questo, esiste un isomorfismo di grafi. Ciò mostra che gruppi non-isomorfi possono avere rispettivi grafi di Cayley isomorfi rispetto a determinati insiemi di generatori.

Osservazione 1.1.11 (Proprietà elementari del grafo di Cayley)**.** I grafi di Cayley soddisfano le seguenti proprietà:

1. I grafi di Cayley sono grafi connessi poichè ogni vertice g può essere raggiunto dall'elemento neutro come segue:

   dato $g = s_1 \cdot s_2 \cdots s_n \in G$ si ha che $e, s_n, s_{n-1} \cdot s_n, s_{n-2} \cdot s_{n-1} \cdot s_n, \ldots, s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$ è un cammino da e a g.

2. Ogni vertice di un grafo di Cayley ha lo stesso numero di vertici adiacenti, il quale è $|S \cup S^{-1} \backslash \{e\}|$. Quindi ogni vertice del grafo ha un numero finito di vertici adiacenti se e solo se il gruppo è finitamente generato.

1.2 Teoria dei rivestimenti e deck transformations

In questa sezione ricordiamo la definizione di rivestimento di uno spazio topologico, nonché alcune proposizioni caratterizzanti tali oggetti. Particolare enfasi sarà data ai teoremi che riguardano il legame tra rivestimenti, gruppi fondamentali e azioni di gruppi.

Il lettore o la lettrice interessati possono approfondire tali argomenti in diversi libri classici di topologia algebrica, come ad esmepio: *'Algebraic topology'* di Allen Hatcher [Hat02], in *'Topologia'* di Marco Manetti [Man14] oppure in *'Introduction to Topological Manifolds'* di John M. Lee [Lee06].

Definizione 1.2.1 (Rivestimento di uno spazio topologico)**.** Siano E uno spazio topologico e sia X uno spazio topologico connesso per archi e localmente connesso per archi. Una funzione continua e suriettiva $p\colon E \to X$ è detta *rivestimento* se per ogni $x \in X$ esiste intorno aperto U_x di x tale che $p^{-1}(U_x) = \bigsqcup\limits_{i\in I} A_i$ con $A_i \subset E$ aperti disgiunti e tali che $p_{|A_i}\colon A_i \to U_x$ sia un omeomorfismo.

Se E è connesso e semplicemente connesso, $p\colon E \to X$ è detto *rivestimento universale*.

Esempio 1.2.2. Ricordiamo i seguenti esempi:

1. Ogni spazio topologico X riveste se stesso tramite la mappa identità.

2. La mappa $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, dove per S^1 intendiamo la circonferenza di raggio unitario in $\mathbb{R}^2$, tale che $p(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$ è un rivestimento. Poiché $\mathbb{R}$ è semplicemente connesso, questo è anche un rivestimento universale di S^1. Tuttavia, come vedremo in seguito, nel caso in cui il rivestimento universale esista questo è anche unico e, pertanto, diremo che $\mathbb{R}^2$ è *il* rivestimento universale di S^1.

3. La mappa $p\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1 = T^2$ tale che
$$p(t, t') = ((cos(2\pi t), sen(2\pi t)); (cos(2\pi t'), sen(2\pi t')))$$

è un rivestimento. Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, questo è anche il rivestimento universale di T^2.

4. Il rivestimento universale di S^2 è S^2 stesso.

La seguente definizione, unita alla proposizione, consente di dedurre alcune proprietà caratterizzanti i rivestimenti:

Definizione 1.2.3 (Omeomorfismo locale)**.** Un'applicazione continua tra due spazi topologici $f\colon X \to Y$ si dice *omeomorfismo locale* se $\forall x \in X$ esistono due aperti $A \subset X$ e $B \subset Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f_{|A}\colon A \to B$ è un omeomorfismo.

Proposizione 1.2.4 ([Man14, Proposizione 12.12])**.** Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Allora:

- L'applicazione p è un omeomorfismo locale; in particolare p è aperta e le fibre sono discrete.
- Per ogni coppia di punti $x, y \in X$ le fibre $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(y)$ hanno la stessa cardinalità.
- Per ogni sottospazio $Y \subset X$ connesso, la restrizione $p : p^{-1}(Y) \to Y$ è ancora un rivestimento.

Osservazione 1.2.5. Notiamo che se $p\colon E \to X$ è un *rivestimento connesso*, ovvero se E è uno spazio connesso, allora E è anche connesso per archi. Infatti, per la proprietà di locale omeomorfismo, E è localmente connesso per archi e, poiché connesso, è anche connesso per archi.

Definizione 1.2.6. Se ogni fibra di un rivestimento $p\colon E \to X$ è finita ed ha cardinalità d, allora diremo che p è un *rivestimento di grado d*.

Un'ulteriore proprietà fondamentale dei rivestimenti è quella data dai teoremi di esistenza ed unicità del sollevamento dei cammini.

Definizione 1.2.7 (Sollevamento)**.** Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento e $f : Y \to X$ una applicazione continua tra spazi topologici. Un sollevamento di f è una applicazione continua $g\colon Y \to E$ tale che $f = p \circ g$, ossia tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Prima di introdurre i teoremi relativi all'esistenza e all'unicità di un sollevamento di una applicazione continua, osserviamo che ogni funzione continua tra spazi topologici $\varphi\colon A \to B$ induce un omomorfismo di gruppi $\varphi_*\colon \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(B, b_0)$, dove $\varphi(a_0) = b_0$. Infatti, sia $\gamma\colon [0, 1] \to A$ un cammino chiuso tale che $\gamma(0) = \gamma(1) = a_0$. Allora $[\gamma] \in \pi_1(A, a_0)$. Definiamo $\varphi_*([\gamma]) := [\varphi \circ \gamma]$, dove $[\varphi \circ \gamma]$ è un cammino chiuso contenuto in $\pi_1(B, b_0)$. Tale applicazione è ben definita. Infatti, se $[\gamma] = [\gamma']$ esiste $G\colon [0, 1] \times [0, 1] \to A$ omotopia tra γ e γ'. Pertanto, $\varphi \circ F$ è un omotopia tra $\varphi \circ \gamma$ e $\varphi \circ \gamma'$. Concludendo otteniamo che se $[\gamma] = [\gamma']$ allora $[\varphi \circ \gamma] = [\varphi \circ \gamma']$.

Teorema 1.2.8 (Esistenza del sollevamento, [Hat02, Proposizione 1.33])**.** Sia Y uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi e sia $p : E \to X$ un rivestimento. Sia $f : Y \to X$ un'applicazione continua. Sia $y_0 \in Y$ e $e_0 \in p^{-1}(f(y_0))$. Allora esiste un sollevamento $g\colon (Y, y_0) \to (E, e_o)$ di f tale che $g(y_0) = e_0$ se e solo se $\mathrm{Im} f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \mathrm{Im} p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Teorema 1.2.9 (Unicità del sollevamento, [Hat02, Proposizione 1.34])**.** Sia Y uno spazio topologico connesso e sia $p : E \to X$ un rivestimento. Sia $f : Y \to X$ un'applicazione continua. Siano $g, h\colon Y \to E$ sollevamenti di f. Allora solamente una delle seguenti risulta verificata:

- $g = h$
- $g(y) \neq h(y),\ \forall y \in Y$.

In altre parole, o i due sollevamenti coincidono ovunque oppure sono distinti per ogni $y \in Y$.

Definizione 1.2.10 (Spazio topologico localmente semplicemente connesso)**.** Uno spazio topologico X si dice *localmente semplicemente connesso* se ogni $x \in X$ e per ogni V intorno di x esiste $U \subset V$ intorno di x tale che $i_*\pi_1(U, x)$ sia il gruppo banale in $\pi_1(X, x)$ dove $i\colon U \to X$ denota l'inclusione.

Definizione 1.2.11 (Spazio topologico semilocalmente semplicemente connesso)**.** Uno spazio topologico X si dice *semilocalmente semplicemente connesso* se ogni $x \in X$ possiede un intorno connesso per archi V tale che $i_*\pi_1(V, x)$ sia il gruppo banale in $\pi_1(X, x)$ dove $i\colon V \to X$ denota l'inclusione.

Teorema 1.2.12 (Esistenza del rivestimento universale, [Man14, Teorema 13.34])**.** Uno spazio topologico X connesso e localmente connesso per archi possiede un rivestimento universale se e soltanto se è semilocalmente semplicemente connesso.

Proposizione 1.2.13 (Unicità del rivestimento universale, [Man14, Proposizione 13.30])**.** Il rivestimento universale di uno spazio topologico X è unico a meno di omeomorfismo.

Osservazione 1.2.14. Un esempio classico di spazio topologico che non ammette rivestimento universale è l'*orecchino Hawaiano*. L'orecchino Hawaiano è uno spazio topologico costituito da un insieme di circonferenze in $\mathbb{R}^2$ di raggio $\frac{1}{n}$ e centro $(\frac{1}{n}, 0)$ tutte tangenti nello stesso punto $(0, 0)$. Chiaramente, tale spazio, non è semilocalmente semplicemente connesso nell'origine. Infatti, per ogni intorno di $(0, 0)$, tale intorno contiene sempre almeno una circonferenza e, pertanto, lo spazio in questione non può essere semilocalmente semplicemente connesso.

Notiamo inoltre che se X è uno spazio topologico semplicemente connesso e quindi localmente semplicemente connesso, questo non implica necessariamente l'essere semilocalmente semplicemente connesso. Infatti, facendo il *cono* sull'orecchino Hawaiano H (ovvero considerando $H \times [0, 1]$ e quozientando per $H \times \{1\}$, ottenendo così $\frac{H\times[0,1]}{H\times\{1\}} := X$) si ottiene uno spazio contraibile ma non semilocalmente semplicemente connesso.

Data la naturale struttura di gruppo all'interno dell'insieme degli automorfismi di una categoria $\mathcal{C}$, si introduce ora la definizione di azione di gruppo su un oggetto appartenente ad una generica categoria:

Definizione 1.2.15 (Azione di gruppo)**.** Sia G un gruppo, $\mathcal{C}$ una categoria e sia $X \in \mathcal{C}$ un suo oggetto. Un'*azione sinistra* di G su X nella categoria $\mathcal{C}$ è un omomorfismo di gruppi $\rho : G \to Aut_{\mathcal{C}}(X)$.

In altre parole, un'azione sinistra di G su X consiste in una famiglia $(f_g)_{g \in G}$ di automorfismi di X tali che

$$\begin{aligned} &f_g \circ f_h = f_{g \cdot h}, \ \forall g, h \in G \\ &f_{1_G} = \mathrm{id}_{Aut}, \text{con } e \text{ elemento neutro di } G \end{aligned}$$

Indicheremo l'azione di G su X come $G \curvearrowright X$.

Sia G un gruppo e sia X un insieme. Consideriamo l'azione $\rho : G \to Aut_{\mathbf{Set}}(X)$. Verrà utilizzata la notazione $g \cdot x = (\rho(g))(x)$, guardando quindi ρ come mappa $G \times X \to X$.

Si osservi che nel caso degli spazi topologici i gruppi agiscono per *omeomorfismi*.

Definizione 1.2.16 (Orbite di G)**.** Per ogni $x, y \in X$ definiamo:

$$x \sim y \quad \text{se esiste } g \in G \text{ tale che } y = g \cdot x.$$

La relazione $\sim$ è di equivalenza su X e le classi di equivalenza vengono dette *orbite* di G. Indicheremo con X/G lo spazio quoziente associato.

Consideriamo le seguenti definizioni relative ad alcune particolari tipologie di azioni di gruppo, che ci serviranno in seguito.

Il lettore o la lettrice osservino che in letteratura tali definizioni vengono *"modificate"* a seconda dei contesti nelle quali vengono utilizzate. In questa trattazione facciamo riferimento a quelle utilizzate in *'Geometric group theory, an introduction'* di Clara Löh [Löh17].

Definizione 1.2.17 (Azione propria di gruppo)**.** Un'azione $G \curvearrowright X$ di un gruppo G su di uno spazio topologico X si dice *propria* se per ogni insieme compatto $B \subset X$ l'insieme $\{g \in G \mid g \cdot B \cap B \neq \varnothing\}$ è finito, dove per $g \cdot B$ intendiamo l'insieme $\{g \cdot b \mid b \in B\}$.

Esempio 1.2.18 (Azione propria)**.** Vediamo alcuni esempi di azioni proprie:

1. La traslazione indotta da $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ è una azione propria (rispetto alla topologia euclidea su $\mathbb{R}$). Analogamente vale per $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$.

2. La traslazione $\mathbb{Q} \curvearrowright \mathbb{R}$ non è propria. Infatti, data la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, per ogni $K \subset \mathbb{R}$ compatto esistono infiniti $q \in \mathbb{Q}$ tali che $K \cap q \cdot K \neq \varnothing$.

3. La rotazione $\mathbb{Z} \curvearrowright S^1$ non è propria. Infatti, banalmente, S^1 è compatto e $\mathbb{Z}$ è infinito.

Definizione 1.2.19 (Mappa propria)**.** Siano X ed Y due spazi topologici. Una mappa $f\colon X \to Y$ si dice *propria* se f è chiusa e se la preimmagine di ogni insieme compatto $K \subset Y$ è compatta in X.

Osservazione 1.2.20. È bene sottolineare che l'azione di gruppo sopra definita precedentemente viene chiamata *propria* in quanto, se lo spazio topologico X è localmente compatto, tale definizione è equivalente a richiedere che la mappa $G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (x, g \cdot x)$ sia una mappa *propria* .

Consideriamo, infatti, il seguente teorema:

Proposizione 1.2.21 ([Lee06, Proposizione 12.9])**.** Sia G un gruppo discreto che agisce su uno spazio topologico X localmente compatto. Le seguenti sono equivalenti:

(i) La mappa $G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (x, g \cdot x)$ è propria.

(ii) L'azione di G è propria.

(iii) Per ogni $x, x' \in X$ esistono, rispettivamente, due intorni U_x e $U_{x'}$ tali che l'insieme $\{g \in G \mid U_x \cap (g \cdot U_{x'}) \neq \varnothing\}$ sia finito.

Corollario 1.2.22. Sia G un gruppo discreto che agisce propriamente su uno spazio topologico X compatto, localmente compatto e Hausdorff. Allora X/G è Hausdorff.

Dimostrazione. Sia ρ la mappa $\rho : G \times X \to X \times X$ sopra utilizzata. Lo spazio $X \times X$ è localmente compatto e Hausdorff in quanto prodotto finito di due insiemi localmente compatti ed Hausdorff. Per la Proposizione 1.2.21 l'immagine di ρ è chiusa, in quanto l'azione di G è propria.

Quindi $\{(x, g \cdot x), x \in X, g \in G\}$ è chiuso in $X \times X$, quindi X/G è Hausdorff per il teorema di caratterizzazione dei quozienti Hausdorff [Man14, Teorema 5.14]. □

Definizione 1.2.23 (Azione libera)**.** Un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X si dice *libera* se $g \cdot x \neq x, \forall x \in X, \forall g \in G$ tali che $g \neq 1_G$.

Osservazione 1.2.24. Notiamo che:

1. In generale, le azioni libere *non sono proprie*. Consideriamo come esempio la rotazione irrazionale sulla circonferenza. Sia $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tale che α non sia un multiplo razionale di π. Consideriamo il gruppo ciclico generato da α e definiamo $n \cdot e^{i\theta} := e^{i(\theta+2\pi n\alpha)}$, con $n \in \mathbb{Z}$, l'azione del gruppo su S^1. Abbiamo quindi:

$$n \cdot e^{i\theta} = e^{i\theta} \Leftrightarrow e^{i2\pi n\alpha} = 1 \Leftrightarrow n = 0.$$

   Pertanto, tale azione, è libera. Tuttavia il gruppo generato da α è infinito e S^1 è compatto, pertanto l'azione non può essere propria.

2. In generale, le azioni proprie *non sono libere*. Si pensi, per esempio, all'azione banale di un gruppo non banale e finito su uno spazio non vuoto.

Definizione 1.2.25 (Azione propriamente discontinua)**.** Sia $G \curvearrowright X$ un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X. Tale azione si dice *propriamente discontinua* se $\forall x \in X$ esiste un intorno aperto U di x tale che $g \cdot U \cap U = \varnothing$ per ogni $g \in G$ diverso dall'identità.

Consideriamo il seguente teorema, che lega le definizioni riguardanti le diverse tipologie di azioni di gruppo sopra riportate:

Proposizione 1.2.26 (Azione libera e propria $\Rightarrow$ propriamente discontinua)**.** Sia G un gruppo che agisce su uno spazio topologico X localmente compatto e Hausdorff in modo libero e proprio. Allora l'azione è propriamente discontinua.

Dimostrazione. Scegliendo $x = x'$ e considerando la Proposizione 1.2.21, abbiamo l'esistenza di due intorni aperti U e U' di x tali che $U \cap g \cdot U' = \varnothing$ per ogni $g \in G$ eccetto un numero finito. Siano $e, g_1, \dots, g_m \in G$ tali elementi. Poiché l'azione è libera e X è Hausdorff, per ogni g_i esistono due intorni disgiunti W_i di x e W_i' di $g_i \cdot x$. Sia

$$\tilde{U} := U \cap U' \cap W_1 \cap (g_1^{-1} \cdot W_1') \cap \dots \cap W_m \cap (g_m^{-1} \cdot W_m').$$

Mostriamo che $\tilde{U}$ ha le proprietà richieste dalla definizione di azione propriamente discontinua.

Consideriamo $g = g_i$ per qualche indice i. Se $y \in \tilde{U} \subset g_i^{-1} \cdot W_i'$, allora $g_i \cdot y \in W_i'$, che è disgiunto da W_i e quindi da $\tilde{U}$. Quindi $\tilde{U} \cap (g_i \cdot \tilde{U}) = \varnothing$. Dall'altra parte, se $g \in G$ non è l'identità e non è uno dei g_i precedentemente considerati, allora per ogni $y \in \tilde{U} \subset U$ abbiamo $g \cdot y \in g \cdot U$, che è disgiunto da U e quindi da $\tilde{U}$. $\square$

Definiamo ora un' ulteriore tipologia di azione, la quale ci servirà per provare altre proprietà riguardo le azioni proprie.

Definizione 1.2.27 (Azione wandering)**.** Sia $G \curvearrowright X$ un' azione di un gruppo G su uno spazio topologico X Hausdorff. Diciamo che l'azione è *wandering* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x tale che $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \varnothing\} < \infty$.

Notiamo che la definizione di azione *wandering* impone delle condizioni meno stringenti rispetto a quella di propriamente discontinua. Chiaramente, se una azione è propriamente discontinua è anche wandering.

Proposizione 1.2.28. Sia $G \curvearrowright X$ una azione di un gruppo G su uno spazio topologico X. Allora le seguenti sono equivalenti:

1. L'azione è wandering.

2. Per ogni $x \in X$ abbiamo che la cardinalità di $\mathrm{Stab}_G(x) < \infty$ ed esiste un intorno aperto U di x tale che $g \cdot U \cap U \neq \varnothing$ implica $g \in \mathrm{Stab}_G(x)$, dove per $\mathrm{Stab}_G(x)$ si intende l'insieme degli elementi di G che stabilizzano x.

Inoltre, se l'azione di G è libera, anche la seguente è equivalente alle precedenti:

3 L'azione è propriamente discontinua.

Dimostrazione. 2) $\Rightarrow$ 1) è immediata. Proviamo la controimplicazione. Sia U un intorno di $x \in X$ tale che $g \cdot U \cap U \neq \varnothing$ per un numero finito di $g \in G$. Abbiamo che la cardinalità di $\mathrm{Stab}_G(x) < \infty$ in quanto se $g \in \mathrm{Stab}_G(x)$ allora $x \in g \cdot U \cap U$. Costruiamo l'intorno cercato. Sia

$$\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \varnothing \text{ e } g \cdot x \neq x\} = \{g_1, \ldots, g_n\}.$$

Poiché X è Hausdorff, per ogni i esistono due intorni aperti $V_i, W_i \subset X$ di $x, g_i \cdot x$ tali che abbiano intersezione vuota. Chiamiamo $W_i' = g_i^{-1}(W_i)$. Poiché G agisce in modo continuo, W_i' è un aperto che contiene x. Sia $U_i = U \cap V_i \cap W_i'$. Allora $x \in U_i$ e

$$U_i \cap g_i \cdot U_i \subset U_i \cap g \cdot W_i' \subset V_i \cap W_i = \varnothing.$$

Pertanto $U' = \bigcup_i U_i$ ha le proprietà richieste da 2): infatti se $g \cdot U' \cap U' \neq \varnothing$ allora o $g \cdot x = x$ oppure $g = g_i$ per qualche i e $g_i \cdot U' \cap U' \subset g_i \cdot U_i \cap U_i = \varnothing$.

Infine, se G agisce liberamente, allora $\mathrm{Stab}_G(x)$ è banale per ogni x; quindi 2) $\Leftrightarrow$ 3).

□

Torniamo, ora, ai rivestimenti di spazi topologici. Consideriamo il seguente lemma:

Lemma 1.2.29. Sia $G \curvearrowright X$ una azione di un gruppo G su uno spazio topologico X e sia $\pi : X \to X/G$ la proiezione al quoziente. Allora π è aperta. Inoltre, se G è finito, π è anche chiusa.

Dimostrazione. Sia $A \subset X$. Allora vale:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup\{g \cdot A \mid g \in G\}$$

Se A è aperto, allora $g \cdot A$ è aperto per ogni $g \in G$. Quindi $\pi^{-1}(\pi(A))$ è unione di aperti e dunque aperto. Per definizione di topologia quoziente ne segue che $\pi(A)$ è aperto.

Se G è finito, si ripete lo stesso ragionamento con A chiuso. □

Proposizione 1.2.30. Sia $G \curvearrowright X$ una azione propriamente discontinua di un gruppo G su uno spazio topologico X. Se il quoziente X/G è connesso, allora la mappa quoziente $p : X \to X/G$ è un rivestimento.

Dimostrazione. Sia $x \in X$ fissato e sia $U \subset X$ intorno aperto di x tale che $g \cdot U \cap U = \varnothing$ per ogni g diverso dall'identità. Per la proposizione precedente, $p : X \to X/G$ è aperta e abbiamo:

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup\{g \cdot U \mid g \in G\}$$

Per concludere risulta sufficiente mostrare che gli aperti $g \cdot U$ sono disgiunti al variare di $g \in G$ e che per ogni $g \in G$ la proiezione $p : g \cdot U \to p(U)$ è un omeomorfismo.

Siccome $g \cdot U \cap h \cdot U = h(h^{-1}g \cdot U \cap U)$, si ha che $g \cdot U \cap h \cdot U = \varnothing$ per ogni $g \neq h$. La proiezione $p\colon U \to p(U)$ è iniettiva in quanto se esistessero $u, v \in U$ distinti tali che $p(u) = p(v) = [u]$, allora esisterebbe $g \in G$ tale che $g(v) = u$ ma questo è assurdo, in quanto $v \in U$ e non esiste $g \neq \mathrm{id} \in G$ tale che $g \cdot U \cap U \neq \varnothing$. La proiezione $p\colon U \to p(U)$, quindi, è continua, aperta, biunivoca e quindi un omeomorfismo. La proiezione $p\colon g \cdot U \to p(U)$ è la composizione dell'omeomorfismo $g^{-1}\colon g \cdot U \to U$ e dell'omeomorfismo $p\colon U \to p(U)$ e questo conclude la dimostrazione. □

Definizione 1.2.31 (Deck transformation)**.** Sia $p : E \to X$ un rivestimento. Una *deck transformation* è un omeomorfismo $d : E \to E$ tale che $p = p \circ d$, ovvero tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

In particolare, notiamo che:

- L'insieme di tutte le deck transformation *Deck(p)* è un gruppo rispetto all'operazione di composizione. Indicheremo tale gruppo con $G(E)$.
- Una deck transformation è un caso particolare di sollevamento di una applicazione continua.

Esempio 1.2.32. Abbiamo i seguenti esempi:

1. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $p\colon S^1 \to S^1,\ p(z) = z^n$ un rivestimento di S^1 di grado n. Infatti p è continua, suriettiva e la preimmagine di ogni aperto U di S^1 tramite p è unione disgiunta di n aperti in S^1 omeomorfi ad U. Allora $d\colon S^1 \to S^1$ tale che $d(z) = ze^{\frac{2\pi i}{n}}$ è una deck transformation. Infatti d è un omeomorfismo e $p \circ d(z) = p(ze^{\frac{2\pi i}{n}}) = z^n = p(z)$. Inoltre $\mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, infatti $d^k(z) = d \circ \cdots \circ d(z) = ze^{k\cdot\frac{2\pi i}{n}}$ e $d^n(z) = ze^{n\cdot\frac{2\pi i}{n}} = z$.

2. Consideriamo il rivestimento universale
$$r : \mathbb{R} \to S^1, r(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t)).$$
Si consideri $d_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t + k$ con $k \in \mathbb{Z}$. La mappa d_k è banalmente una deck transformation e, inoltre, $\mathrm{Deck}(r) \cong \mathbb{Z}$.

Notiamo, quindi, che per il teorema dell'unicità del sollevamento dei cammini prima citato, una deck transformation è completamente determinata dall'immagine di un singolo punto, nel caso in cui E sia uno spazio connesso.

Osservazione 1.2.33 (L'azione per deck transformation è libera e propria)**.** Sotto opportune ipotesi, l'azione per deck transformation è libera e propria. Infatti:

- L'azione per deck transformation del gruppo $G(E)$ su E è libera se E è uno spazio connesso. Infatti, poiché l'azione è interamente determinata dall'immagine di un singolo punto, se esiste $x \in E$ tale che $g \cdot x = x$ allora $g = 1_G$.

- Mostreremo nella Sezione 3 della parte preliminare (Osservazione 1.3.32) che, sotto opportune ipotesi, l'azione per deck transformations del gruppo $G(E)$ su E è propria.

Vogliamo ora mostrare che ogni spazio topologico X che possiede determinate caratteristiche è omeomorfo al suo rivestimento universale quozientato rispetto allo gruppo fondamentale di X stesso. In altre, parole: $X \cong E/\pi_1(X)$.

Teorema 1.2.34 ([Hat01, Teorema 1.34])**.** Sia G un gruppo che agisce su uno spazio topologico X semplicemente connesso tramite un'azione propriamente discontinua. Allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a G.

Lemma 1.2.35. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento *connesso*. Allora l'azione del gruppo $G(E)$ su E è una azione propriamente discontinua.

Dimostrazione. Sia $x \in X$. Essendo p un rivestimento, esiste un intorno aperto V di x tale che $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i\in I} A_i$. Per la locale connessione per archi, ogni intorno aperto di un punto in X contiene un intorno aperto U connesso per archi. Sia $U \subset V$ l'aperto connesso per archi contenuto in V. Allora $p_{|U}^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} B_i$, dove per ogni i si ha $B_i \subset A_i$ aperto. Ognuno di tali sottoinsimi è connesso per archi in quanto omeomorfo ad U tramite p. Ogni deck transformation agisce permutando tali componenti connesse per archi, ovvero $g \cdot B_i = B_j$, con $i, j \in I$ a priori non distinti e $g \in G(E)$ deck transformation. Il risultato segue ora dal fatto che l'azione di $G(E)$ sia libera (Osservazione 1.2.33). □

Sia X uno spazio topologico semilocalmente semplicemente connesso e tale che soddisfi le ipotesi del teorema precedente. Sia $p\colon E \to X$ il suo rivestimento universale, il quale esiste per il Teorema 1.2.12. Poiché l'azione di $G(E)$ su E è propriamente discontinua ed E è semplicemente connesso, allora

$$\pi_1(E/G(E)) \cong G(E).$$

Prima di giungere alla proposizione che consentirà di concludere il discorso iniziato, si considerino la seguente definizione ed il seguente lemma:

Definizione 1.2.36 (Azione transitiva)**.** Sia G un gruppo che agisce su un insieme X non vuoto. L'azione si dice transitiva se esiste una sola orbita e tale orbita coincide con X stesso. In altre parole, se dati $x, y \in X$ esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$.

Lemma 1.2.37 ([Bre13, Corollario III.6.4])**.** Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento *connesso.* Allora il sottogruppo $p_*\pi_1(E, e_o)$ è normale nel gruppo $\pi_1(X, x_0)$ se e soltanto se $G(E)$ agisce transitivamente sull'insieme $p^{-1}(x_0)$.

Proposizione 1.2.38. Siano E ed X due spazi topologici, con X connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Sia $p\colon E \to X$ il rivestimento universale. Allora $E/G(E)$ è omeomorfo a X.

Dimostrazione. Per definizione di $G(E)$ la mappa p è continua e costante sulle classi di equivalenza indotte dalla azione di gruppo. Quindi per la proprietà universale del quoziente, esiste un'applicazione continua $\tilde{p}\colon E/G(E) \to X$ tale che faccia commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ E/G(E) \arrow[ur, "\tilde{p}"'] & \end{tikzcd}$$

In particolare, si ha che $\tilde{p}$ associa a $G(E) \cdot p^{-1}(x_0)$ il punto $x_0 \in X$. Tale applicazione è banalmente suriettiva per definizione di rivestimento.

Poiché E è semplicemente connesso, allora $\pi_1(E) = e$, quindi $p_{\#}\pi_1(E) = e$ è normale in ogni gruppo, in particolare lo è anche nel gruppo $\pi_1(X)$. Pertanto, per il Lemma 1.2.37, $G(E)$ agisce transitivamente sull'insieme $p^{-1}(x_0)$. Per questa ragione si ha che $\tilde{p}$ è iniettiva.

Resta da provare che $\tilde{p}$ è aperta. Per la Proposizione 1.2.4, p è una mappa aperta. Sia $A \subset E/G(E)$ un aperto. Sia $U := \pi^{-1}(A)$ che è aperto dato che π continua. Si ha quindi che

$$\tilde{p}(A) = \tilde{p}(\pi(\pi^{-1}(A))) = \tilde{p}(\pi(U)) = p(U).$$

Poiché p è aperta, segue che $p(U) = \tilde{p}(A)$ è aperto. Abbiamo così provato che $\tilde{p}$ è un omeomorfismo, da cui segue la tesi. $\square$

Da tale proposizione segue direttamente che

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(E/G(E)) \cong G(E).$$

Concludendo, otteniamo il seguente risultato:

Proposizione 1.2.39. Dato uno spazio topologico X semilocalmente semplicemente connesso, connesso e localmente connesso per archi vale:

$$X \cong E/\pi_1(X).$$

1.3 Cenni di geometria Riemanniana

La seguente sezione ha lo scopo di introdurre definizioni e teoremi fondamentali per quanto riguarda alcuni aspetti legati alla geometria Riemanniana. Infatti, in tale branca si trova una delle conseguenze principali del lemma di Milnor-Švarc, nonchè quella maggiormente approfondita in questa tesi.

Il lettore o la lettrice interessati possono approfondire quanto trattato in *'Differential Geometry I'* di Clara Löh [Löh21] o in *'Introduction to Smooth Manifold'* di John M. Lee [Lee13].

Definizione 1.3.1 (Varietà topologica)**.** Sia $n \in \mathbb{N}$. Una *varietà topologica* di dimensione n è uno spazio topologico M con le seguenti proprietà:

- Per ogni $x \in M$ esiste U_x intorno aperto di x in M omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.
- M è Hausdorff e ha una base numerabile di aperti.

Esempio 1.3.2 (Varietà topologiche)**.** Consideriamo i seguenti esempi di varietà topologiche:

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ è una varietà topologica di dimensione n.

2. Sottoinsiemi aperti di varietà topologiche sono varietà topologiche (rispetto alla topologia indotta). Infatti, banalmente, sottospazi di spazi Hausdorff sono Hausdorff, ogni aperto nel sottospazio è aperto nello spazio di partenza e, per questo, per ogni x nel sottospazio esiste un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$. La base di aperti rimane, chiaramente, numerabile.

3. Prodotto finito di varietà topologiche è ancora una varietà topologica (rispetto alla topologia prodotto). Le argomentazioni sono analoghe a quelle sopra.

4. Lo spazio $M := (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ non è una varietà topologica. Infatti non può essere una varietà di dimensione 2 in quanto nessun

$x \in M$ ha un intorno di dimensione 2 in M (per motivazioni analoghe non può nemmeno avere dimensione maggiore di 2). D'altro canto non esiste nessun intorno di $(0,0)$ omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}$ e, pertanto, l'insieme M non è una varietà topologica.

5. La *"retta con punto doppio"* non è una varietà topologica in quanto non è uno spazio Hausdorff. Tale spazio topologico si ottiene quozientando $X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$ tramite la seguente relazione di equivalenza: $(x,0) \sim (x,1) \Leftrightarrow x \neq 0$. Risulta immediato mostrare che non è possibile trovare due intorni aperti di $(0,0)$ e $(0,1)$ che abbiano intersezione vuota, per questo lo spazio non può essere Hausdorff.

6. La *"long line"*, o *Alexandroff line*, non è una varietà topologica in quanto non ha una base numerabile di aperti. Tale spazio topologico viene generato, intuitivamente, incollando assieme una quantità non numerabile di intervalli $[0,1)$.

Introduciamo ora ora la definizione di *varietà liscia*, l'oggetto principale nello studio della geometria differenziale e Riemanniana. In particolare, risultano necessarie le seguenti definizioni:

Definizione 1.3.3 (Carta)**.** Sia M una varietà topologica di dimensione n.

- Una *carta* di M è un omeomorfismo $U \to U'$ tra due aperti $U \subset M$ e $U' \subset \mathbb{R}^n$. Chiamiamo questa una carta *intorno* ad x, se $x \in U$.

- Due carte $\varphi : U \to U'$ e $\psi : V \to V'$ sono *compatibili in modo liscio* se le mappe del cambio di carta

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

$$\varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

  sono mappe lisce, ovvero di classe C^∞.

In altre parole, le mappe del cambio di carta sono quelle applicazioni che consentono di passare da un aperto di $\mathbb{R}^n$ (omeomorfo ad un aperto sulla varietà) all'altro. Si richiede che tali mappe siano *lisce*, nel senso di funzioni C^∞. Si noti che queste funzioni vengono viste come funzioni da sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ e, pertanto, si intendono di classe C^∞ nel senso classico.

Poiché, per definizione di varietà topologica, ogni punto x di M è contenuto in una carta ha senso introdurre una definizione che utilizzi la nozione di ricoprimento in aperti su M. Questa definizione permette di osservare la varietà da un punto di vista globale.

Definizione 1.3.4 (Atlante)**.** Sia M una varietà topologica. Abbiamo la seguente definizione:

- Un *atlante* per M è un insieme A di carte su M tali che l'unione del dominio di tali carte sia un ricoprimento di M in aperti.
- Un atlante A di M si dice *liscio* se ogni coppia di carte di A è compatibile in modo liscio.
- Un atlante A di M si dice *massimale* se per ogni A' atlante di M che contiene A, ovvero tale che ogni carta di A sia contenuta in A', si ha $A = A'$. Un atlante massimale liscio di M è anche detto *struttura liscia* su M.

Definizione 1.3.5 (Varietà liscia)**.** Una *varietà liscia* è una coppia (M, A), data da varietà topologica M e una struttura liscia A su di essa.

In particolare, nella notazione, si dirà solamente che M è una *varietà liscia*. Le carte della struttura liscia saranno chiamate *carte lisce*.

Osservazione 1.3.6 (Coordinate locali e parametrizzazioni)**.** Sia M una varietà topologica di dimensione n e sia $\varphi : U \to U'$ una carta liscia su M. Le funzioni $U \to \mathbb{R}$ costituenti le n componenti di φ sono chiamate *coordinate locali* su U rispetto alla carta φ.

L'omeomorfismo inverso $\varphi^{-1} : U' \to U$ è, invece, chiamato *parametrizzazione* di U.

La mappa di parametrizzazione è quella che permette di descrivere ogni aperto sulla varietà come immagine omeomorfa di un aperto di $\mathbb{R}^n$ e che, in particolare, consente di ricreare un aperto sulla varietà a partire da un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Chiaramente, ogni oggetto matematico, ha sempre la necessità di essere equipaggiato con morfismi adatti che preservino la struttura data. Nel caso delle varietà lisce vengono utilizzate le *mappe lisce*, ovvero mappe che, se descritte localmente tramite carte, risultano essere mappe C^∞ tra aperti di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.3.7 (Mappa liscia)**.** Una mappa $f\colon M \to N$ tra due varietà lisce è *liscia* se per ogni $x \in M$ esiste una carta liscia $\varphi : U \to U'$ di M intorno ad x e una carta liscia $\psi : V \to V'$ di N intorno ad $f(x)$ con $f(U) \subset V$ tale che la mappa

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U' \to V'$$

sia di classe C^∞.

Esempio 1.3.8. Sia M una varietà liscia.

- La mappa identità $\mathrm{id}_M : M \to M$, utilizzando la stessa struttura liscia nel dominio e nel codominio, è una mappa liscia. Infatti, banalmente, utilizzando la stessa carta per descrivere l'intorno di x e di $f(x)$ si ritrova l'identità tra due aperti di $\mathbb{R}^n$.

- Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ sono mappe lisce tra varietà lisce, allora $g \circ f : M \to P$ è ancora una mappa liscia. Infatti, se $x \in M$, esistono φ carta intorno ad x e ψ carta intorno ad $f(x)$ tali che $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U' \to V'$ sia una mappa liscia. Analogamente, se $y \in N$ esiste ξ carta intorno ad $f(y)$ tale che $\xi \circ g \circ \psi^{-1} : V' \to W'$ sia una mappa liscia. Componendo si ottiene che

  $$\xi \circ g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \xi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} : U' \to W'$$

  è una mappa liscia.

Osservazione 1.3.9 (Categoria delle varietà differenziabili)**.** Si osservi che poichè i morfismi tra varietà ammettono composizione, l'insieme delle varietà lisce munito delle mappe lisce come morfismi tra esse, genera una categoria. Tale categoria viene denotata con il simbolo **Mfd** (dall'inglese *Manifolds*).

Definizione 1.3.10 (Diffeomorfismo)**.** Un *diffeomorfismo* è un isomorfismo nella categoria delle varietà lisce. Nel dettaglio: siano M e N varietà lisce. Un *diffeomorfismo* $M \to N$ consiste in una mappa liscia $f : M \to N$ tale che esista un'altra mappa liscia $g : N \to M$ tale che:

$$g \circ f = \mathrm{id}_M \quad \text{e} \quad f \circ g = \mathrm{id}_N$$

Osservazione 1.3.11. In particolare è possibile osservare come una carta $\varphi\colon U \to U'$ di M sia un diffeomorfismo. Mostriamo prima che φ è una mappa liscia: risulta sufficiente considerare φ^{-1} come carta attorno ogni punto di M e, quindi, sfruttando $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ come carta nell'insieme di arrivo, si ottiene proprio l'identita su $\mathbb{R}^n$, che è chiaramente una mappa C^∞. In maniera del tutto analoga si mostra che φ^{-1} è anch'essa una mappa liscia. Poichè la loro composizione porta all'identità, si trova che φ è un diffeomorfismo.

Si osservi che la definizione di carta liscia non era stata inzialmente data come diffeomorfismo in quanto ancora non era chiaro cosa si intendesse per mappa C^∞ su di una varietà.

Un ulteriore oggetto geometrico di fondamentale importanza per quanto riguarda la struttura delle varietà differenziabili n-dimensionali è lo spazio tangente. Tale struttura è costituite da uno spazio vettoriale che, localmente, *approssima la varietà*. Più precisamente:

Definizione 1.3.12 (Vettore tangente e spazio tangente)**.** Sia M una varietà liscia e $x \in M$.

- Siano $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ intervallo e $\gamma : I \to M$ una curva differenziabile tale che $\gamma(0) = x$. Allora $\gamma'(0)$ si dice *vettore tangente* ad M in x.

- Si definisce *spazio tangente* alla varietà M in x l'insieme di tutti i vettori tangenti ad M in x. Tale spazio si indica con T_xM.

Chiaramente, lo spazio tangente porta con sé una naturale struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Nello studio della geometria Euclidea, al fine di descrivere concetti geometrici come lunghezze, angoli e distanze vengono utilizzati i *prodotti interni*. Nello studio delle varietà si vuole utilizzare uno strumento del tutto analogo, il quale possa definire una metrica sulla varietà studiata, non considerandola come un sottoinsieme dello spazio Euclideo. Per questo motivo si introduce il concetto di metrica Riemanniana e, quindi, di varietà Riemanniana.

Per completezza verrà data prima la definizione di spazio metrico, ossia di uno spazio dotato di una *funzione distanza* che permette di misurare le distanze tra oggetti dello spazio stesso:

Definizione 1.3.13 (Spazio metrico)**.** Uno spazio metrico è il dato di un insieme X e di una mappa $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che:

- Per ogni $x, y \in X$ si ha $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.
- Per ogni $x, y \in X$ si ha $d(x, y) = d(y, x)$.
- Per ogni $x, y, z \in X$ vale la *disuguaglianza triangolare* :

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x).$$

Definizione 1.3.14 (Varietà Riemanniana)**.** Una varietà Riemanniana (M, g) è il dato di una varietà liscia M e di una mappa g di classe C^∞ che ad ogni punto $x \in M$ associa un prodotto scalare definito positivo sullo spazio tangente ad M in x.

Esempio 1.3.15. $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare standard è una varietà Riemanniana.

In particolar modo, la mappa g con cui M è equipaggiata, rende la varietà Riemanniana uno spazio metrico. Infatti, si consideri la seguente definizione di distanza tra due punti:

Definizione 1.3.16 (Distanza tra due punti)**.** Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa per archi, siano $p, q \in M$ e sia $\gamma\colon I = [0, 1] \to M$ una curva su M tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

- Definiamo $L(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\|\, dt$ la lunghezza della curva γ, dove per $\|\gamma'(t)\|$ si intende il modulo del vettore $\gamma'(t)$ appartenente allo spazio tangente $T_{\gamma(t)}M$ calcolato tramite la mappa g.
- Definiamo la *distanza* tra p e q come $d(p, q) = \inf_{\gamma\colon p \to q} L(\gamma)$, ossia come l'estremo inferiore tra tutte le possibili lunghezze di curve che connettono p e q su M.

Tramite facili verifiche, si mostra che la distanza sopra definita rispetta tutte le caratteristiche richieste dalla definizione di spazio metrico e, per questo, ogni varietà Riemanniana è uno spazio metrico.

Teorema 1.3.17 (Esistenza di una metrica Riemanniana, [Löh21, Teorema 1.3.6])**.** Sia M una varietà liscia. Allora su di essa esiste una (non unica) metrica Riemanniana.

Verranno introdotte ora due definizioni, quella di differenziale e quella di pull-back di una metrica Riemanniana, la cui importanza risulterà più chiara in seguito.

Definizione 1.3.18 (Differenziale)**.** Sia $f\colon M \to N$ una mappa liscia tra varietà lisce. Sia $x \in M$. Allora si definisce *differenziale di f in x* la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} d_x f\colon T_xM &\to T_{f(x)}N \\ \dot\alpha(0) &\mapsto \dot\beta(0), \end{aligned}$$

dove la curva $\alpha\colon [0, 1] \to M$ viene mandata nella curva $\beta := f \circ \alpha\colon [0, 1] \to N$.

Proposizione 1.3.19 (Pull-back di una metrica Riemanniana [Löh21, Proposizione 1.3.4])**.** Sia $f\colon M \to N$ un diffeomorfismo locale tra varietà lisce e sia g una metrica Riemanniana su N. Allora la mappa f^*g che ad ogni punto di M associa il seguente prodotto scalare è una metrica Riemanniana su M e viene chiamato *pullback di g tramite f*:

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_x^{f^*g}\colon T_xM \times T_xM &\to \mathbb{R}\\ (v,w) &\mapsto \langle v,w\rangle_x^{f^*g} := g_{f(x)}(d_xf(v), d_xf(w))\end{aligned}$$

dove

$$g_{f(x)}(d_xf(v), d_xf(w)) = \langle d_xf(v), d_xf(w)\rangle_{f(x)}^g$$

In altre parole, il pull-back di una metrica tramite una mappa liscia *"trasporta"* la metrica del codominio di f nel suo dominio.

Osservazione 1.3.20 (Distanza relativa alla metrica del pull-back)**.** In particolare notiamo che $d_M(x,y) = \inf_\gamma L^g(\gamma\colon x \to y)$, dove γ è un cammino che connette x ed y. Infatti, per definizione abbiamo che $d_M(x,y) = \inf_{\gamma\colon x\to y} L^{f^*g}(\gamma)$ e $L^{f^*g}(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\|^{f^*g}\,dt$. Inoltre:

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\|^{f^*g} &= \langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle_{\gamma(t)}^{f^*g} = \langle d_{\gamma(t)}f(\gamma'(t)), d_{\gamma(t)}f(\gamma'(t))\rangle_{f(\gamma(t))}^g\\ &= \langle (f\circ\gamma)'(t), (f\circ\gamma)'(t)\rangle_{f\circ\gamma(t)}^g\\ &= \|(f\circ\gamma)'(t)\|^g.\end{aligned}$$

Pertanto, concludendo, abbiamo che:

$$\begin{aligned}d_M(x,y) &= \inf_{\gamma\colon x\to y} L^{f^*g}(\gamma) = \inf_{\gamma\colon x\to y}\int_I \|\gamma'(t)\|^{f^*g}\,dt = \inf_{\gamma\colon x\to y}\int_I \|(\gamma)'(t)\|^g\,dt\\ &= \inf_\gamma L^g(f\circ\gamma).\end{aligned}$$

Così come in precedenza si era dotata la categoria delle varietà lisce di morfismi opportuni, è ora necessario introdurre una nuova tipologia di morfismi, i quali costituiranno le mappe all'interno della categoria delle varietà Riemanniane.

Si consideri prima la seguente definizione:

Definizione 1.3.21 (Isometria)**.** Sia $f : X \to Y$ una mappa tra due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y).

- Diciamo che f è un embedding isometrico se

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X$$

- La mappa f è una *isometria* se è un embedding isometrico ed esiste un altro embedding $g\colon Y \to X$ tale che:

$$f \circ g = id_Y \quad \text{e} \quad g \circ f = id_X.$$

  In altre parole, un' isometria è un embedding isometrico biunivoco.

- Due spazi metrici si dicono *isometrici* se esiste una isometria tra loro.

Osservazione 1.3.22. Chiaramente, ogni embedding isometrico è iniettivo, in quanto

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Inoltre, ogni isometria è un omeomorfismo rispetto alla topologia indotta dalla metrica. Infatti, ogni embedding isometrico è continuo, in quanto è continuo in ogni punto.

Definizione 1.3.23 (Azione di gruppo per isometrie)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico e sia G un gruppo che agisce su di esso. Diremo che G *agisce per isometrie* se per ogni $g \in G$ il morfismo $g\colon X \to X$ è un isometria di spazi metrici.

Prima di concludere questa sezione, risulta necessario enunciare due risultati fondamentali per quanto riguarda le azioni di gruppo sulle varietà Riemanniane. Nella seguente trattazione si intenderà ogni gruppo Γ come uno spazio topologico dotato della *topologia discreta.*

Lemma 1.3.24. Sia $\Gamma \curvearrowright M$ un'azione libera e propria di un gruppo Γ su di una varietà topologica M. Allora l'azione è propriamente discontinua.

Dimostrazione. Risulta sufficiente mostrare che ogni varietà topologica M è localmente compatta e, quindi, concludere utilizzando la Proposizione 1.2.26.

Sia $x \in M$ e sia U intorno aperto di x omeomorfo ad un aperto A di $\mathbb{R}^n$ tramite un omeomorfismo φ. Sia B una palla chiusa di raggio finito centrata in $\varphi(x)$ interamente contenuta in A. L'insieme B è compatto per Heine-Borel, pertanto $\varphi^{-1}(B)$ è compatto e contiene x. □

Proposizione 1.3.25 (Struttura liscia sulla varietà quoziente, [Löh21, Proposizione 1.4.18])**.** Sia $\Gamma \curvearrowright M$ un'azione propriamente discontinua di un gruppo Γ su di una varietà liscia M. Allora, lo spazio topologico quoziente M/Γ è dotato di un'unica struttura liscia tale che la proiezione canonica $M \to M/\Gamma$ sia un diffeomorfismo locale.

Osservazione 1.3.26. In generale, né l'essere propria né l'essere libera garantiscono che il quoziente rispetto ad una azione di gruppo sia una varietà. Infatti:

1. Le rotazioni irrazionali sulla circonferenza danno un'azione libera (ma non propria) e lo spazio quoziente non è Hausdorff (e quindi non è una varietà). Infatti, intuitivamente, poiché l'azione non è propria, ogni volta che $e^{i\theta} \in S^1$ viene moltiplicato per $e^{i\alpha}$, con α l'irrazionale che genera il gruppo che agisce su S^1, questo viene ruotato sulla circonferenza senza mai, però, tornare al punto iniziale. Poichè il gruppo generato da α è infinito, l'immagine di $e^{i\theta}$ tramite l'azione di gruppo *"satura"* S^1, ovvero l'orbita di ogni elementi $x \in S^1$ è non periodica e densa. Per questa ragione, dati due generici punti su S^1 non esistono due intorni aperti che non intersechino entrambi l'orbita di x. Poiché nel quoziente tali punti vengono identificati, il quoziente non può essere Hausdorff.

2. L'azione di $\mathbb{Z}/2$ su S^1 ottenuta considerando la riflessione rispetto all'asse orizzontale è propria (in quanto $\mathbb{Z}/2$ è finito) ma non libera (in quanto gli estremi del diametro orizzontale vengono fissati da $\mathbb{Z}/2$). Anche in questo caso il quoziente non è una varietà. Infatti, $S^1/\mathbb{Z}/2$ è

omeomorfo ad un intervallo chiuso, i cui punti estremi non ammettono intorni Euclidei.

Definizione 1.3.27 (Isometria locale per varietà Riemanniane)**.** Siano (M, g) e (M', g') due varietà Riemanniane. Diremo che una mappa $f\colon M \to M'$ è una isometria locale se f è un diffeomorfismo locale e se $g = f^*g'$.

Proposizione 1.3.28 ([Löh21, Proposizione 1.4.20])**.** Sia (M, g) una varietà Riemanniana e sia $\Gamma \curvearrowright M$ un'azione isometrica di Γ su M propriamente discontinua. Allora, esiste sulla varietà liscia quoziente M/Γ un'unica metrica Riemanniana h tale che la proiezione canonica al quoziente $\pi\colon M \to \Gamma/M$ sia un'isometria locale. In particolare risulta $g = \pi^*h$.

Proposizione 1.3.29 ([Löh21, Proposizione 1.4.21])**.** Sia M uno spazio topologico e sia $\Gamma \curvearrowright M$ una azione propriamente discontinua di un gruppo il cui spazio quoziente M/Γ è dotato di una struttura di varietà liscia. Sia π la canonica proiezione al quoziente. Se g è una metrica Riemanniana su M/Γ, allora π^*g è una metrica Riemanniana su M e l'azione $\Gamma \curvearrowright M$ è una azione isometrica rispetto a π^*g. Inoltre, rispetto a tale metrica, π è una isometria locale.

Per quanto riguarda le principali applicazioni della tesi, siamo interessati a studiare il caso di una varietà Riemanniana (M, h) ed il suo rivestimento universale $(\widetilde{M}, p^*h)$ dove $p\colon \widetilde{M} \to M$. In particolare, siamo interessati al caso in cui M sia uno spazio connesso. Notiamo, inoltre, che essendo M uno spazio localmente Euclideo, M è semilocalmente semplicemente connesso e localmente connesso per archi. Osserviamo immediatamente che l'esistenza di $\widetilde{M}$ è direttamente subordinata a tali ipotesi.

Osservazione 1.3.30 (L'azione $\pi_1(M) \curvearrowright \widetilde{M}$ è isometrica)**.** Sia M una varietà. Consideriamo $p\colon \widetilde{M} \to M$ il rivestimento universale. Per la Proposizione 1.2.39, poiché tutte le ipotesi sono rispettate, abbiamo che $\widetilde{M}/\pi_1(M)$ è omeomorfo ad M ed il gruppo delle deck transformations $G(\widetilde{M})$ è isomorfo a $\pi_1(M)$. Inoltre, sia h la metrica Riemanniana su M e sia p^*h la metrica del pull-back su $\widetilde{M}$. Notiamo che è possibile considerare la metrica del pull-back perché per il Lemma 1.2.35 l'azione di $\pi_1(M)$ è propriamente discontinua, quindi per la Proposizione 1.3.25 la proiezione p è un diffeomorfismo locale.

Sia $g \in \pi_1(M)$ e siano $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{M}$. Vogliamo mostrare che

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}(g \cdot \tilde{x}, g \cdot \tilde{y}).$$

Se $\gamma\colon [0,1] \to \widetilde{M}$ è un cammino che connette $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, allora $g \circ \gamma$ è un cammino tra $g \cdot \tilde{x}$ e $g \cdot \tilde{y}$. D'altra parte, se $\gamma'\colon [0,1] \to \widetilde{M}$ è un cammino tra $g \cdot \tilde{x}$ e $g \cdot \tilde{y}$, allora $g^{-1} \circ \gamma$ è un cammino tra $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$. Pertanto, le curve che connettono $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ sono in biiezione con quelle che connettono $g \cdot \tilde{x}$ e $g \cdot \tilde{y}$.

Sfruttando il fatto che $G(\widetilde{M})$ sia isomorfo a $\pi_1(M)$, per ogni $g \in \pi_1(M)$ abbiamo che $p = p \circ g$ dove $p\colon \widetilde{M} \to M \cong \widetilde{M}/\pi_1(M)$. Pertanto $p(g \circ \gamma) = p(\gamma)$ per ogni g e per ogni γ.

Per quanto mostrato relativamente alla distanza indotta dalla metrica del pull-back (Osservazione 1.3.20), abbiamo che:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{\gamma} L^h(p \circ \gamma) = \inf_{\gamma} L^h(p \circ g \circ \gamma) = \inf_{g \circ \gamma} L^h(p(g \circ \gamma)) = \tilde{d}(g \cdot \tilde{x}, g \cdot \tilde{y}),$$

dove la penultima uguaglianza segue proprio dal fatto che i cammini tra $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ siano in biiezione con quelli tra $g \cdot \tilde{x}$ e $g \cdot \tilde{y}$ per ogni $g \in \pi_1(M)$.

Diamo ora la seguente proposizione, la quale era già stata precedentemente riportata come Proposizione 1.2.21. Tuttavia, in questo caso, vengono aggiunte due ulteriori condizioni equivalenti per le quali vengono richieste le nozioni di spazio metrico ed azione per isometrie e, pertanto, non era possibile includerle in precedenza.

Proposizione 1.3.31. [Voi21, Teorema 34.5.1] Sia G un gruppo discreto che agisce su uno spazio topologico X localmente compatto. Le seguenti sono equivalenti:

(i) La mappa $G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (x, g \cdot x)$ è propria.

(ii) L'azione di G è propria.

(iii) Per ogni $x, x' \in X$ esistono, rispettivamente, due intorni U_x e $U_{x'}$ tali che l'insieme $\{g \in G \mid U_x \cap (g \cdot U_{x'}) \neq \varnothing\}$ sia finito.

Inoltre, se X è uno spazio metrico e G agisce per isometrie, allora le precedenti sono equivalenti a:

(iv) L'azione è wandering.

(v) Per ogni $x \in X$, l'orbita $G \cdot x \subset X$ è discreta e la cardinalità di $\mathrm{Stab}_G(x)$ è finita.

Osservazione 1.3.32. Possiamo ora mostrare che nel caso in cui X sia uno spazio metrico localmente compatto, allora l'azione per deck transformation è propria, come già anticipato nell'Osservazione 1.2.33. Per quanto mostrato nel Lemma 1.2.35 l'azione per deck transformation è propriamente discontinua. Poiché l'azione per deck transformation è libera (Osservazione 1.2.33) allora per la Proposizione 1.2.28 l'azione è wandering. Per quanto mostrato nella proposizione immediatamente precedente, si può quindi concludere che l'azione è propria, in quanto il gruppo delle deck transformation $G(E)$, dotando E della metrica pull-back, agisce per isometrie.

Esempio 1.3.33 (Metrica sul toro)**.** Consideriamo l'azione di traslazione data da $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$. Questa è libera, propria e isometrica rispetto alla metrica Riemanniana Euclidea su $\mathbb{R}^2$. Il quoziente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è omeomorfo al toro 2-dimensionale $S^1 \times S^1$. Pertanto, per la Proposizione 1.3.28, è possibile concludere che il toro 2-dimensionale con la metrica indotta dalla proiezione al quoziente è localmente isometrico ad $\mathbb{R}^2$. Per il *Teorema Egregium di Gauss* [Pre10, Teorema 10.1], se due spazi sono localmente isometrici allora hanno la stessa curvatura Gaussiana. Inoltre, poiché la curvatura Gaussiana dello spazio Euclideo è nulla, allora è nulla anche quella indotta sul toro. In particolare, sempre per 1.3.28, osserviamo che il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$ coincide proprio con il pull-back della metrica indotta sul toro dalla proiezione al quoziente.

Capitolo 2

Quasi-Isometrie

2.1 Quasi-isometrie tra spazi metrici

Per quanto riguarda gli scopi della tesi, la nozione di isometria è troppo rigida. Serve, infatti, una definizione che possa descrivere una relazione tra spazi metrici riflettendo unicamente le somiglianze tra tali spazi come se *fossero visti da lontano*. Per tale motivo risulta necessario introdurre la seguente definizione, la quale rilassa la condizione di isometria:

Definizione 2.1.1 (Equivalenza bilipschitz)**.** Sia $f : X \to Y$ una mappa tra due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y).

- Diciamo che f è un *embedding bilipschitz* se esiste una costante $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che
$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X$$
- La mappa f è una *equivalenza bilipschitz* se è un embedding bilipschitz ed esiste un altro embedding bilipschitz $g : Y \to X$ tale che:
$$f \circ g = id_Y \quad \text{e} \quad g \circ f = id_X$$

Osservazione 2.1.2. Ogni embedding bilipschitz è iniettivo e continuo rispetto alle topologie indotte dalla metrica e, quindi, ogni equivalenza bilipschitz è un omeomorfismo.

Tuttavia, anche le equivalenze bilipschitz sono troppo *rigide* per gli scopi desiderati, pertanto introduciamo un'ultima definizione, la quale aggiunge a quella precedente un errore additivo uniforme:

Definizione 2.1.3 (Quasi-isometria)**.** Sia $f : X \to Y$ una mappa tra spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y).

- La mappa f si dice *embedding quasi isometrico* se esistono due costanti $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che
$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b, \quad \forall x, x' \in X$$
- La mappa f si dice *quasi-isometrica* se è un embedding quasi isometrico per la quale esiste un embedding quasi-isometrico che sia una quasi-inversa. Ossia, se esiste $g : Y \to X$ tale che $g \circ f$ abbia distanza finita da id_Y e $f \circ g$ abbia distanza finita da id_X.
- Due spazi metrici X e Y si dicono *quasi-isometrici* se esiste una quasi-isometria $X \to Y$; in questo caso si scrive $X \sim_{QI} Y$.

Esempio 2.1.4 (Isometrie, equivalenze bilipschitz e quasi-isometrie)**.** Chiaramente ogni isometria è un'equivalenza bilipschitz, così come ogni equivalenza bilipschitz è una quasi-isometria, basta scegliere $c = 1$ nel primo caso e $b = 0$ nel secondo. Tuttavia, in generale, non è vero il viceversa:

Consideriamo $\mathbb{R}$ come spazio metrico, la cui funzione distanza è data dal valore assoluto. Consideriamo poi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ e $2 \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ rispetto alla metrica indotta.

Chiaramente, le inclusioni $2 \cdot \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ sono equivalenze quasi-isometriche ma non equivalenze bilipschitz (in quanto non sono biettive). Infatti, per esempio, $2 \cdot \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ è un embedding quasi-isometrico con costanti $c = 1$ e $b = 0$ (in modo ovvio) mentre la sua inversa è quella funzione che associa a z se stesso se z è pari, oppure manda z in $z - 1$ se dispari. Tale funzione è chiaramente una quasi-isometria di costanti $c = 1$ e $b = 1$. La loro composizione ha distanza nulla da $\mathrm{id}_{2 \cdot \mathbb{Z}}$ e distanza al più 1 da $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. In maniera del tutto analoga, $\mathbb{Z}$ si immerge nel modo ovvio in $\mathbb{R}$ e l'applicazione che associa ad ogni $x \in \mathbb{R}$ la sua parte intera ($\lfloor x \rfloor$) è una quasi-isometria di costanti $c = 1$ e $b = 1$.

Ovviamente, poiché le inclusioni $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ e $2 \cdot \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ non sono equivalenze bilipschitz non possono nemmeno essere isometrie.

Tuttavia, risulta cruciale notare che $2 \cdot \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ risultano comunque in equivalenza bilipschitz, sebbene non con le mappe sopra riportate. Infatti, basta considerare:

$$\mathbb{Z} \to 2 \cdot \mathbb{Z}$$
$$z \mapsto 2z$$
$$z \leftarrow\!\shortmid 2z$$

Le mappe sono ben definite in modo ovvio e chiaramente forniscono una equivalenza bilipschitz.

Osservazione 2.1.5. In particolare, è possibile osservare che:

- Le quasi-isometrie, in generale, non sono nè iniettive nè suriettive (come mostra l'esempio precedente)

- Le quasi-isometrie, in generale, non sono continue. Si può notare come nell'esempio precedente come la funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$ che associa ad x la sua parte intera non sia continua.

Esempio 2.1.6 (Esempi di spazi quasi-isometrici e non)**.** Consideriamo i seguenti esempi:

1. Tutti gli spazi metrici di diametro finito sono quasi isometrici, dove per diametro di uno spazio metrico (X, d) si intende

$$\operatorname{diam} X := \sup_{x,y \in X} d(x, y)$$

   Basta infatti considerare due applicazioni tra tali spazi e considerare b uguale al maggiore tra i due diametri dei due spazi.

2. D'altra parte, se uno spazio metrico è quasi-isometrico ad uno spazio di diametro finito, allora esso stesso ha diametro finito.

3. Gli spazi metrici $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, rispetto alla metrica Euclidea, **non** sono quasi-isometrici (Corollario 2.3.10).

Osservazione 2.1.7. È bene notare che la composizione di due embedding quasi-isometrici è ancora un embedding quasi-isometrico. Infatti, consideriamo $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ embedding quasi-isometrici. Per definizione, esistono $c, c', b, b' \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b$$

e

$$\frac{1}{c'} \cdot d_Y(f(x), f(x')) - b' \leq d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x')) \leq c' \cdot d_Y(f(x), f(x')) + b'.$$

Tramite passaggi algebrici elementari si ottiene

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq c' \cdot d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x')) + b' \cdot c'$$

e, riportando nella prima disequazione:

$$\frac{1}{c \cdot c'} d_X(x, x') - (\frac{b}{c'} + b') \leq d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x')).$$

In maniera del tutto analoga si mostra l'altra disuguaglianza. Inoltre, anche la composizione di due isometrie è ancora un'isometria e la dimostrazione è del tutto simile a quanto appena svolto.

La seguente definizione ci permetterà di caratterizzare le quasi-isometrie:

Definizione 2.1.8 (Sottoinsieme quasi-denso)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Z \subset X$ un suo sottoinsieme. Si dice che Z è *quasi-denso* in X se esiste $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che:

$$\forall x \in X \;\; \exists\, z \in Z \quad \text{tale che} \quad d(x, z) \leq c.$$

Proposizione 2.1.9 (Caratterizzazione delle quasi-isometrie)**.** Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f\colon X \to Y$ una mappa. Allora, f è una quasi-isometria se e solo se è un embedding quasi-isometrico con immagine quasi-densa in X.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Se f è una quasi-isometria allora, per definizione, deve esistere una quasi-inversa $g\colon Y \to X$. Per definizione di quasi-inversa esiste $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che

$$\forall y \in Y,\ d_Y(f \circ g(y), y) \leq c,$$

quindi, in particolare, $f(X)$ è quasi denso in Y: basta prendere per ogni $y \in Y$, $f \circ g(y)$.

($\Leftarrow$) D'altra parte, supponiamo che f sia un embedding quasi-isometrico con immagine quasi-densa. Sfruttando l'assioma della scelta, costruiamo un embedding quasi-isometrico g che sia una quasi-inversa di f.

In particolare, proprio per tale assioma, possiamo definire una mappa

$$\begin{aligned} g\colon Y &\to X \\ y &\mapsto x_y \end{aligned}$$

dove, per ogni $y \in Y$ scegliamo un elemento x_y tale che $d_Y(f(x_y), y) \leq c$, il quale esiste per la quasi-densità dell'immagine $f(X)$ in Y.

Osserviamo che la mappa g è quasi-inversa di f. Infatti, per costruzione, per ogni $y \in Y$ abbiamo:

$$d_Y(f \circ g(y), y) = d_Y(f(x_y), y) \leq c;$$

d'altra parte, sfruttando il fatto che f sia un embedding quasi-isometrico, per ogni $x \in X$ otteniamo:

$$d_X(g \circ f(x), x) = d_X(x_{f(x)}, x) \leq c \cdot d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + c \cdot b \leq c^2 + c \cdot b.$$

Pertanto $f \circ g$ e $g \circ f$ hanno distanza finita dalle rispettive mappe identità: questo mostra che g è quasi-inversa di f e viceversa.

Mostriamo ora che g è un embedding quasi-isometrico. Consideriamo $y, y' \in Y$, allora:

$$\begin{aligned} d_X(g(y), g(y')) &= d_X(x_y, x_{y'}) \\ &\leq c \cdot d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) + c \cdot b \\ &\leq c \cdot (d_Y(f(x_y), y) + d_Y(y, y') + d_Y(f(x_{y'}), y')) + c \cdot b \\ &\leq c \cdot (d_Y(y, y') + 2 \cdot c) + c \cdot b \\ &= c \cdot d_Y(y, y') + 2 \cdot c^2 + c \cdot b, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_X(g(y), g(y')) &= d_X(x_y, x_{y'}) \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) - c \cdot b \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot (d_Y(y, y') - d_Y(f(x_y), y) - d_Y(f(x_{y'}), y')) - c \cdot b \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot d_Y(y, y') - \frac{2 \cdot c}{c} - c \cdot b; \end{aligned}$$

questo termina la dimostrazione □

Osservazione 2.1.10 ($\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{R}^n$ sono quasi-isometrici)**.** Sfruttando la proposizione precedente, è possibile mostrare che $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{R}^n$ sono quasi-isometrici. Infatti l'immersione $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è chiaramente una quasi-isometria e l'immagine di tale mappa è quasi-densa, in quanto per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste $z \in \mathbb{Z}^n$ che abbia distanza da x minore o uguale ad 1.

2.2 Quasi-isometrie e gruppi

Dato un insieme di generatori di un gruppo possiamo dotare il gruppo di una metrica tramite la lunghezza dei percorsi sul suo grafo di Cayley.

Definizione 2.2.1 (Metrica su un grafo)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. Allora la mappa

$$V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

che associa a $(v, w) \in V \times V$

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{esiste un cammino di lunghezza } n \text{ che connette } v \text{ e } w \text{ in } G\},$$

descrive una metrica su V.

Definizione 2.2.2 (Metrica delle parole)**.** Sia G un gruppo e sia $S \subset G$ un insieme di generatori per G. Si dice *metrica delle parole d_S associata a G rispetto ad S* la metrica su G associata al suo grafo di Cayley $\mathrm{Cay}(G, S)$. In altre parole, per ogni $g, h \in G$ definiamo:

$$d_S(g, h) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1} \text{ tali che } g^{-1} \cdot h = s_1 \cdots s_n\}.$$

Osservazione 2.2.3. Si può notare immediatamente come la metrica delle parole sia *left-invariant*, ossia invariante per moltiplicazioni a sinistra. Infatti, se $x, y, z, t \in G$, per qualche gruppo G generato da un insieme S, allora $d_S(x \cdot y, z \cdot t) = d_S(z^{-1} \cdot x \cdot y, t)$.

Esempio 2.2.4 (Metrica delle parole su $\mathbb{Z}$)**.** La metrica delle parole su $\mathbb{Z}$ corrispondente all'insieme generatore $\{1\}$ coincide esattamente con la metrica indotta da $\mathbb{R}$. Infatti, dati $z, z' \in \mathbb{Z}$ la loro distanza relativa alla metrica delle parole è esattamente il minimo numero di volte che devo sommare 1 a se stesso per ottenere $z - z'$, che coincide col valore $|z - z'|$. D'altro canto, se si considera su $\mathbb{Z}$ la metrica indotta dal generatore $\mathbb{Z}$ stesso, si ottiene che la distanza tra due generici elementi è sempre 1 (banalmente, $z + (z' - z) = z'$).

Come si può vedere immediatamente dall'esempio sopra, in generale la metrica delle parole su un gruppo dipende dall'insieme di generatori scelto. Tuttavia, la differenza diventa trascurabile se ci si trova nell'ambito della *geometria su larga scala* e $|S| < \infty$:

Proposizione 2.2.5 (Relazione metrica tra gruppi finitamente generati)**.** Sia G un gruppo finitamente generato e siano S e S' due insiemi di generatori *finiti* per G. Allora l'identità su G, id_G, è una equivalenza bilipschitz tra (G, d_S) e $(G, d_{S'})$.

In particolare, se uno spazio metrico (X, d) è bilipschitz equivalente (o quasi-isometrico) a (G, d_S) allora lo è anche a $(G, d_{S'})$.

Dimostrazione. Poichè S è finito, si ha che

$$c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(e, s) < \infty.$$

Siano $g, h \in G$ e sia $n := d_S(g, h)$. Per definizione si ha $g^{-1} \cdot h = s_1 \cdots s_n$ con $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$. Sfruttando la disuguaglianza triangolare e il fatto che la metrica delle parole sia *left-invariant* si ha:

$$\begin{aligned} d_{S'}(g, h) &= d_{S'}(g, g \cdot s_1 \cdots s_n) \\ &\leq d_{S'}(g, g \cdot s_1) + d_{S'}(g \cdot s_1, g \cdot s_1 \cdot s_2) + \ldots \\ &\quad + d_{S'}(g \cdot s_1 \cdots s_{n-1}, g \cdot s_1 \cdots s_{n-1} \cdot s_n) \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_n) \\ &\leq c \cdot n \\ &= c \cdot d_S(g, h) \end{aligned}$$

Scambiando i ruoli di S e S' e ripetendo gli stessi passaggi si ottiene:

$$d_S(g, h) \leq c \cdot d_{S'}(g, h), \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{c} \cdot d_S(g, h) \leq d_{S'}(g, h)$$

ottenendo così che $\mathrm{id}_G : (G, d_S) \to (G, d'_S)$ è una equivalenza bilipschitz. $\square$

Proprio per questo motivo i grafi di Cayley di gruppi finitamente generati rispetto a due insiemi finiti distinti di generatori hanno la stessa struttura se *guardati da lontano.*

Inoltre, tale proposizione non è vera in generale per insiemi di generatori di cardinalità infinita: infatti $(\mathbb{Z}, d_{\mathbb{Z}})$ ha diametro finito mentre $(\mathbb{Z}, d_{\{1\}})$ no. Per questo i due spazi non possono essere in equivalenza bilipschitz.

Risulta ora utile dare una definizione che ci permette di paragonare i gruppi agli spazi metrici:

Definizione 2.2.6 (Quasi-isometrie tra gruppi finitamente generati e spazi metrici)**.** Sia G un gruppo e (X, d_X) uno spazio metrico. Si dice che G ed X sono *quasi-isometrici* se esiste un insieme finito di generatori S di G tale che (G, d_S) ed (X, d_X) sono quasi-isometrici.

2.3 Crescita dei gruppi

Introdurremo ora un invariante per quasi-isometrie: il *tasso di crescita*. Più precisamente definiremo il *"volume"* di una palla in un dato gruppo finitamente generato e ne studieremo il suo comportamento asintotico quando il raggio tende a più infinito.

Osservazione 2.3.1. Sia (X, d) spazio metrico, sia $x \in (X, d)$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Indicheremo con $N(x, r)$ l'insieme degli $y \in X$ tali che $d(x, y) \leq r$.

Definizione 2.3.2 (Tasso di crescita dei gruppi)**.** Sia G un gruppo e sia S un suo insieme di generatori. Si definisce *tasso di crescita* di G rispetto ad S la funzione $\beta_{G,S} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data da:

$$\beta_{G,S}(r) = |\{g \in G \colon d_S(1_G, g) \leq r\}| = |B_r^{G,S}(1_G)|,$$

dove $|B_r^{G,S}(1_G)|$ indica l'insieme degli elementi di G a distanza r dall'elemento neutro di G rispetto alla metrica delle parole indotta da S. La funzione $\beta_{G,S}$ è, quindi, quella funzione che ad r associa la cardinalità dell'r-intorno centrato nell'elemento neutro del gruppo.

Esempio 2.3.3. Consideriamo i seguenti esempi:

1. Il gruppo additivo $\mathbb{Z}$ generato da $\{1\}$ ha tasso di crescita $\beta_{\mathbb{Z},\{1\}}(r) = 2r + 1$.

2. Il gruppo $\mathbb{Z}$ generato da $\{2, 3\}$ ha tasso di crescita:

$$r \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } r = 0 \\ 5 & \text{se } r = 1 \\ 6 \cdot r + 1 & \text{se } r > 1 \end{cases}$$

   Già questo esempio mostra come le funzioni di crescita dello stesso gruppo rispetto ad insiemi di generatori differenti siano diverse.

3. Il tasso di crescita di $\mathbb{Z}^2$ rispetto all'insieme di generatori standard $S := \{(1,0),(0,1)\}$ è quadratico. Infatti la funzione $\beta_{\mathbb{Z}^2,S}$ manda:
$$r \mapsto 1 + 4 \cdot \sum_{j=1}^{r}(r+1-j) = 1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{r} k = 2 \cdot r^2 + 2 \cdot r + 1.$$
Osserviamo che la definizione di $\beta_{\mathbb{Z}^2,S}$ risulta immediata osservando ill grafo di Cayley $\mathbb{Z}^2$ rispetto ad S.

4. Più in generale, se $n \in \mathbb{N}$, allora il tasso di crescita di $\mathbb{Z}^n$ ha lo stesso comportamento di un polinomio di grado n, come si vedrà in seguito.

5. Se F è un gruppo libero di rango $n \geq 2$ allora il tasso di crescita di F è esponenziale. Si ha infatti:
$$r \mapsto 1 + 2 \cdot n \cdot \sum_{j=0}^{r-1}(2 \cdot n - 1)^j = 1 + \frac{n}{n-1} \cdot ((2 \cdot n - 1)^r - 1),$$
in cui abbiamo utilizzato l'identità $1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$. La formula iniziale può essere provata immediatamente per induzione, basti pensare infatti che ad ogni passo, oltre agli elementi già contati, ne vengono aggiunti $(2 \cdot n - 1)$ a tutti i vertici "esterni", che a loro volta erano stati ottenuti allo stesso modo. Per esempio, nel caso del gruppo libero generato da 2 generatori si ha:
$$\begin{aligned}
&\text{per } r = 1 \to 1 + 4\\
&\text{per } r = 2 \to 1 + 4 + 4 \cdot 3\\
&\text{per } r = 3 \to 1 + 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3\\
&\dots
\end{aligned}$$

Proposizione 2.3.4 (Proprietà di base delle funzioni di crescita)**.** Sia G un gruppo finitamente generato e sia $S \subset G$ un insieme di generatori finito. Allora $\beta_{G,S}$ gode delle seguenti proprietà:

1. *Sub-moltiplicatività*: per ogni $r, r' \in \mathbb{N}$ abbiamo:
$$\beta_{G,S}(r + r') \leq \beta_{G,S}(r) \cdot \beta_{G,S}(r').$$

2. $\beta_{G,S}$ *possiede un "lower bound"*. Se G è infinito, allora $\beta_{G,S}$ è strettamente crescente. In particolare $\beta_{G,S}(r) \geq r$ per ogni $r \in \mathbb{N}$.

3. $\beta_{G,S}$ *possiede un "upper bound"*: per ogni $r \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$\beta_{G,S}(r) \leq \beta_{F(S),S}(r) = 1 + \frac{|S|}{|S|-1} \cdot ((2 \cdot |S| - 1)^r - 1),$$

   dove $F(S)$ è il gruppo libero generato da S.

Dimostrazione. La prima e la seconda proprietà seguono immediatamente dalla definizione di metrica delle parole su G.

Per quanto riguarda la terza proprietà, consideriamo l'omomorfismo

$$\varphi\colon F(S) \to G,$$

indotto dalla proprietà universale da $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$. Per costruzione φ è una contrazione rispetto alla metrica delle parole. Inoltre, notiamo che φ è suriettivo. Otteniamo così che:

$$\beta_{G,S}(r) = |B_r^{G,S}(1_G)| = |\varphi(B_r^{F(S),S}(1_G))| \leq |B_r^{F(S),S}(1_G)| = \beta_{F(S),S}(r),$$

per ogni $r \in \mathbb{N}$. La tesi si ottiene usando quanto mostrato nell'Esempio 2.3.3. $\square$

Definizione 2.3.5 (Quasi-dominanza)**.** Siano $f, g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ due funzioni crescenti. Diciamo che g *quasi-domina* f se esistono due costanti $A, B \geq 0$ tali che $f(r) \leq A \cdot g(B \cdot r)$ con r sufficientemente grande. Scriveremo $f \prec g$. Se $f \prec g$ e $g \prec f$ allora diremo che f è *quasi-equivalente* a g e scriveremo $f \sim g$.

Proposizione 2.3.6. Siano G, H due gruppi generati da R, S rispettivamente. Se G è quasi-isometrico ad H allora $\beta_{G,R} \sim \beta_{H,S}$.

Dimostrazione. Siano $b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ e sia $f\colon G \to H$ una (c,b)-quasi-isometria. Si ha che per ogni $g, h \in G$ vale:

$$\frac{1}{c} \cdot d_R(g,h) - b \leq d_S(f(g), f(h)) \leq c \cdot d_R(g,h) + b.$$

Allora, per ogni $g \in G$ tale che $d_R(1_G, g) \leq r$, abbiamo:

$$d_S(f(1_G), f(g)) \leq c \cdot r + b.$$

Sia $d := d_S(f(1_G), 1_H)$. Abbiamo ora che:

- per ogni $g \in G$ che abbia distanza minore o uguale ad r da 1_G, esiste un elemento $f(g) \in H$ che abbia distanza minore o uguale a $c \cdot r + b + d$ da 1_H per disuguaglianza triangolare.
- In generale, osserviamo che una quasi-isometria potrebbe non essere iniettiva ma è *"quasi iniettiva"*: se $f(g) = f(h)$ allora $d_R(g, h) \leq b \cdot c$.
- Per ogni $f(g) \in f(B_r^{G,R}(1_G))$ scegliamo $g \in G$ nella preimmagine di $f(g)$. Allora ci sono al più $|N_{b \cdot c}^{G,R}(g)| = |B_{b \cdot c}^{G,R}(1_G)|$ elementi la cui immagine sia proprio $f(g)$.

Pertanto, per r sufficientemente grande, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\beta_{H,S}(2 \cdot c \cdot r) &\geq \beta_{H,S}(c \cdot r + b + d) \\
&= |B_{c \cdot r + b + d}^{H,S}(1_H)| \\
&\geq |f(B_r^{G,R}(1_G))| \\
&\geq \frac{1}{|B_{b \cdot c}^{G,R}(1_G)|} \cdot |B_r^{G,R}(1_G)| \\
&= \frac{1}{|N_{b \cdot c}^{G,S}(1_G)|} \cdot \beta_{G,R}(r),
\end{aligned}$$

il che implica $\beta_{G,R} \prec \beta_{H,S}$. L'altra direzione è analoga. $\square$

Si osservi che se tra i due gruppi G ed H non c'è una quasi-isometria ma solamente un monomorfismo quasi-isometrico, allora si ha che la funzione del tasso di crescita del gruppo che costituisce il dominio del monomorfismo è controllata dalla seconda. In altre parole: se $f\colon (G, d_R) \to (H, d_S)$ è un monomorfismo quasi isometrico, allora $\beta_{G,R} \prec \beta_{H,S}$.

Osserviamo anche che avere un determinato tipo di crescita è una proprietà fortemente geometrica dei gruppi. Infatti se due gruppi sono quasi-isometrici, e quindi hanno un legame geometrico che li avvicina, allora questi devono avere la "stessa tipologia di crescita".

Corollario 2.3.7. Sia G un gruppo e siano R, S due insiemi di generatori finiti. Allora $\beta_{G,R} \sim \beta_{G,S}$

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.2.5, (G, d_R) e (G, d_S) sono in equivalenza bilipschitz tra loro e, pertanto, sono quasi-isometrici. Applicando la Proposizione 2.3.6 sopra si conclude. $\square$

Quindi, in generale, non si parlerà più di tasso di crescita di un gruppo rispetto ad un dato insieme di generatori ma solo di tasso di crescita del gruppo.

Definizione 2.3.8 (Crescita esponenziale, polinomiale e intermedia)**.** Sia G un gruppo finitamente generato.

- Il gruppo G ha *crescita esponenziale* se ha il tipo di crescita della mappa esponenziale $(x \mapsto e^x)$
- Il gruppo G ha *crescita polinomiale* se per un insieme finito di generatori S (e quindi tutti), esiste $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che $\beta_{G,S} \prec (x \mapsto x^a)$.
- Il gruppo G ha *crescita intermedia* se non è né polinomiale né esponenziale.

Notiamo che per la Proposizione 2.3.4, i gruppi finitamente generati crescono al più in maniera esponenziale. Inoltre, le funzioni di tipo polinomiale e di tipo esponenziale non sono quasi-equivalenti. Infatti, se così fosse, esisterebbero due costanti positive A, B tali che $e^x \leq A \cdot (x + B)^p$, con $p \in \mathbb{N}$. Ma ciò implicherebbe che $\frac{e^x}{(x+B)^p} \leq A$ che è ovviamente falso, in quanto tale frazione tende a più infinito per x che tende a più infinito.

Proposizione 2.3.9. Per ogni $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ si ha che $\mathbb{Z}^m \sim \mathbb{Z}^n$ se e solo se $m = n$.

Dimostrazione. Calcoliamo il tasso di crescita di $\mathbb{Z}^n$. Consideriamo $e_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$, dove l'1 è all'$i$-esima posizione. Allora $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ genera $\mathbb{Z}^n$.

Sia $X(r) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| \leq r\}$. Osserviamo che tale insieme, geometricamente, in $\mathbb{R}^2$ consiste in un quadrato passante per (r,0),(0,r), (-r,0) e (0,-r), in $\mathbb{R}^3$ in un ottaedro per punti analoghi e così via. Per definizione $|B_r^{\mathbb{Z}^n}(0)|$ coincide esattamente con il numero di soluzioni intere dell'equazione:

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq r.$$

Infatti, tale numero è proprio il numero di possibili modi in cui posso scegliere i punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ in modo tale che distino dall'origine proprio r.

Sia vol(A) il volume di una generica regione $A \subset \mathbb{R}^n$. Per ogni punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a distanza $\leq r$ da 0 rispetto a d_S consideriamo il quadrato unitario $Q_x := \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq y_i \leq x_i{+}1\}$. Si verifica facilmente che se due punti x, y nella palla di raggio r sono distinti, otteniamo che $\mathrm{int}(Q_x) \cap \mathrm{int}(Q_y) = \varnothing$. Sia Q l'insieme di tali quadrati. Si ha che:

$$X(r-2) \subset Q \subset X(r+2) \Rightarrow \mathrm{vol}(X(r-2)) \leq \mathrm{vol}(Q) \leq \mathrm{vol}(X(r+2)$$

per monotonia della misura, ma vol(Q)=$1 \cdot |B_r^{\mathbb{Z}^n}(0)|$ per linearità della misura di Lebesgue rispetto ad insiemi con intersezione di misura nulla. Inoltre $\mathrm{vol}(X(r)) = r^n \cdot \mathrm{vol}(X(1)) = r^n \cdot c$, con c costante. Pertanto otteniamo che $|B_r^{\mathbb{Z}^n}(0)| = \beta_{\mathbb{Z}^n}(r) \sim r^n$.

Analogamente si mostra che $\beta_{\mathbb{Z}^m}(r) \sim r^m$ e, pertanto, $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{Z}^m$ non possono essere quasi-isometrici se $n \neq m$ in quanto r^n e r^m non sono quasi-equivalenti.

$\square$

Corollario 2.3.10. Per ogni $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ si ha che $\mathbb{R}^m \sim \mathbb{R}^n$ se e solo se $m = n$.

Proposizione 2.3.11 (Crescita dei sottogruppi)**.** Sia G un gruppo finitamente generato e sia H un sottogruppo di G finitamente generato. Se T è un insieme di generatori finito per H e S è un insieme di generatori finito per G, allora:

$$\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S}$$

Dimostrazione. Sia $S' := S \cup T$, allora S' è chiaramente un insieme di generatori finito per G. Sia $r \in \mathbb{N}$, allora per ogni $h \in B_r^{H,T}(1_G)$ abbiamo:

$$d_{S'}(h, 1_G) \leq d_T(h, 1_G) \leq r,$$

pertanto $B_r^{H,T}(1_G) \subset B_r^{G,S'}(1_G)$. In particolare,

$$\beta_{H,T}(r) \leq \beta_{G,S'}(r),$$

e quindi $\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S'}$. Poiché per il Corollario 2.3.7, le funzioni di crescita $\beta_{G,S'}$ e $\beta_{G,S}$ sono quasi-equivalenti, si ottiene che $\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S}$. □

Osservazione 2.3.12 (Il gruppo di una superficie di genere $g \geq 2$ non è quasi-isometrico a $\mathbb{Z}^2$)**.** Questa osservazione, che a priori sembra sconnessa da quanto sopra, riveste un'importanza fondamentale, invece, per quanto riguarda gli scopi di questa tesi. Sia S una superficie chiusa, connessa e orientabile di genere 2 e dimensione 2 (il lettore o la lettrice possono immaginare tale superficie come il toro con due buchi). Indichiamo con $[a, b]$ il commutatore, ovvero $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Un risultato classico in topologia [Act13, Teorema 6.3], afferma che il gruppo $\pi_1(S)$ ammette la seguente presentazione:

$$\pi_1(S) = \left\langle a_1, a_2, b_1, b_2 \;\middle|\; [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = 1 \right\rangle.$$

In altre parole, $\pi_1(S)$ è il gruppo libero generato da quattro elementi quozientato rispetto al sottogruppo normale generato da $[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2]$.

Vogliamo mostrare che tale gruppo ha come sottogruppo il gruppo libero generato da 2 elementi. Mostrando ciò possiamo concludere, grazie alla Proposizione 2.3.9, che $\beta_{\pi_1(S)}$ ha crescita di tipo esponenziale e, quindi, $\pi_1(S)$ non può essere quasi isometrico a $\mathbb{Z}^2$ che ha, invece, crescita polinomiale (come mostrato nell'Esempio 2.3.3).

Sia $F_2 = \langle a_1, b_1 \rangle$ il gruppo libero generato dai due elementi considerati precedentemente e sia F_4 il gruppo libero generato da a_1, b_1, a_2, b_2, senza la relazione di equivalenza. Consideriamo il seguente omomorfismo di inclusione:

$$\begin{aligned} i\colon F_2 &\to \pi_1(S) \\ a_1 &\mapsto [a_1] \\ b_1 &\mapsto [b_1]. \end{aligned}$$

Definiamo una mappa p nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} p\colon F_4 &\to F_2 \\ a_1 &\mapsto a_1 \\ a_2 &\mapsto 1_{F_2} \\ b_1 &\mapsto b_1 \\ b_2 &\mapsto 1_{F_2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che tale mappa è compatibile con il quoziente in quanto, sfruttando le proprietà di omomorfismo:

$$p(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}) = a_1 1_{F_2} a_1^{-1} 1_{F_2} b_1 1_{F_2} b_1^{-1} 1_{F_2} = 1_{F_2}.$$

Osserviamo inoltre che $p \circ i = id_{F_2}$, infatti $p(i(a_1b_1)) = p(a_1b_1) = a_1b_1$. Per la proprietà universale del quoziente, esiste una mappa $\tilde{p}$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} F_4 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & F_2 \\ \pi_1(S) \arrow[ur, "\tilde{p}"'] & \end{tikzcd}$$

Abbiamo quindi ottenuto che $p \circ i = (\tilde{p} \circ \pi) \circ i = \tilde{p} \circ (\pi \circ i) = id_{F_2}$. Quindi $\pi \circ i$ è iniettiva. Ciò assicura che F_2 sia un sottogruppo di $\pi_1(S)$. È possibile svolgere un ragionamento analogo per ogni superficie di genere $g \geq 2$.

Capitolo 3

Il lemma di Milnor-Švarc

Questo capitolo è il cuore centrale della tesi. Infatti, la domanda che potrebbe sorgere naturalmente, relativamente a quanto svolto sino ad ora, è: perché i gruppi finitamente generati vengono studiati a meno di quasi-isometria?

La risposta si trova proprio nel Lemma di Milnor-Švarc, talvolta chiamato "lemma centrale della teoria geometrica dei gruppi". Tale teorema, infatti, consente di mettere in stretta relazione i gruppi finitamente generati e gli spazi metrici. Volendo riassumere in breve, tale lemma dice che data un' azione "bella" di un gruppo G su di uno spazio metrico "bello" (X, d), possiamo concludere che G è finitamente generato e che G è quasi-isometrico ad (X, d). In particolare, se vogliamo conoscere meglio la struttura geometrica del gruppo basta studiare un'azione "bella" di tale gruppo su di uno spazio metrico, di cui già conosciamo le proprietà geometriche. Analogamente, se si vogliono avere più informazioni sullo spazio metrico, basta studiare un'azione "bella" da parte di un gruppo noto.

Introduciamo, tramite alcuni passaggi, cosa si intende per spazio metrico "bello".

3.1 Spazi (quasi-)geodetici

Definizione 3.1.1 (Geodetica e spazio geodetico)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Una *geodetica di lunghezza* L su X è un **embedding isometrico** $\gamma : [0, L] \to X$, dove l'intervallo $[0, L]$ è dotato della metrica indotta dalla metrica di $\mathbb{R}$.

Uno spazio metrico (X, d) si dice geodetico se per ogni $x, x' \in X$ esiste una geodetica che collega x e x'.

Si può immediatamente osservare come questa definizione di geodetica sia più restrittiva rispetto quella utilizzata in geometria differenziale, la quale, invece, richiede che la curva soddisfi l'isometria **solo** localmente.

Esempio 3.1.2 (Spazi geodetici)**.** I seguenti sono esempi di spazi geodetici:

1. In $\mathbb{R}^n$ con la metrica standard le geodetiche sono i segmenti. Poichè ogni coppia di punti può essere connessa da un segmento, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio geodetico.

2. Lo spazio $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ con la metrica indotta da $\mathbb{R}^n$ non è uno spazio geodetico. Infatti, presi due punti opposti rispetto allo 0 a distanza L, non esiste una curva γ isometrica definita su $[0, L]$ che li connetta.

3. La sfera $\mathbb{S}^2$ con la metrica standard è uno spazio geodetico in quanto le geodetiche su tale spazio sono le circonferenze massimali e, dati due punti, è sempre possibile trovare un arco di circonferenza che li connetta.

Chiaramente, i gruppi finitamente generati *non sono spazi geodetici* (a meno che il gruppo non sia banale), in quanto lo spazio metrico ad essi associato è uno spazio discreto e, pertanto, non può esistere un embedding isometrico da un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in G. Tuttavia, si può ampliare la definizione di geodetica al mondo della geometria su larga scala:

Definizione 3.1.3 (Quasi-geodetica e spazio quasi-geodetico)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $c, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Si definisce una *(c,b)-quasi-geodetica* in X un embedding quasi-isometrico $\gamma : I \to X$, dove $I = [t, t'] \in \mathbb{R}$ è un intervallo chiuso.

Uno spazio metrico si dice *(c,b)-quasi-geodetico* se $\forall x, x' \in X$ esiste una (c,b)-quasi-geodetica che li collega.

Chiaramente, ogni spazio geodetico è anche uno spazio quasi geodetico (in particolare (1,0)-quasi-geodetico) mentre il contrario, in generale, non è vero.

Esempio 3.1.4 (Spazi quasi-geodetici)**.** Consideriamo i seguenti esempi:

1. Se $G = (V, E)$ è un grafo connesso, allora la metrica associata a G su V rende V uno spazio (1,1)-quasi-geodetico in quanto la distanza tra due generici vertici è realizzata dalla lunghezza di un qualche percorso nel grafo G e ogni cammino nel grafo G che realizza la distanza tra due vertici è una (1,1)-quasi-geodetica.

   Per esempio, consideriamo un insieme V e $x_0, x_1, x_2, x_3 \in V$ vertici distinti connessi tra loro tramite un percorso in G. Sia $\gamma\colon [0,3] \to V$ tale che $\gamma(t) = x_{\lfloor t \rfloor}$. Allora per ogni $t_0 < t_1 \in [0,3]$ si ha:

$$d(t_0, t_1) - 1 \leq d(x_{\lfloor t_0 \rfloor}, x_{\lfloor t_1 \rfloor}) \leq d(t_0, t_1) + 1,$$

   in quanto

$$(t_1 - t_0) - 1 \leq \lfloor t_0 \rfloor - \lfloor t_1 \rfloor \leq (t_1 - t_0) + 1.$$

   Allo stesso modo si conclude per numero arbitrario di elementi di V. In particolare, se G è un gruppo e S è un insieme generatore per G allora (G, d_S) è uno spazio (1,1)-quasi-geodetico. Inoltre, notiamo che le quasi-geodetiche (così come le quasi-isometrie) non sono, in generale, applicazioni continue.

2. Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ è uno spazio (1,ε)-quasi-geodetico rispetto alla metrica indotta dalla metrica Euclidea di $\mathbb{R}^2$

3.2 Il Lemma di Milnor-Švarc

Passiamo ora al vero e proprio Lemma di Milnor-Švarc. Daremo prima la versione relativa al mondo della quasi-geometria per passare poi, nel prossimo capitolo, alla sua versione topologica e a trarne alcune delle principali conseguenze.

Teorema 3.2.1 (Lemma di Milnor-Švarc)**.** Sia G un gruppo e si consideri un'azione per isometrie di G su uno spazio metrico (X, d) non vuoto. Supponiamo che esistano due costanti $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che X sia uno spazio (c,b)-quasi-geodetico e supponiamo che esista un sottoinsieme $B \subset X$ con le seguenti proprietà:

(i) Il diametro di B è finito;

(ii) I G-traslati di B ricoprono X, ossia $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$;

(iii) L'insieme $S := \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \varnothing\}$ è finito, dove B' è l'insieme dei punti che hanno distanza da B minore o uguale a $2b$:

$$B' := B_{2 \cdot b}(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B \text{ tale che } d(x, y) \leq 2 \cdot b\}.$$

Allora sono verificate le seguenti:

1. Il gruppo G è generato da S. Quindi, in particolare, è finitamente generato.

2. Per ogni $x \in X$ la mappa

$$G \to X$$
$$g \mapsto g \cdot x$$

   è una quasi-isometria rispetto alla metrica delle parole d_S su G. In altre parole, G ed X sono quasi-isometrici.

Dimostrazione. Procediamo per punti:

1. **L'insieme S genera G :** Sia $g \neq 1_G \in G$. Mostriamo che $g \in \langle S \rangle_G$, ossia che S genera G. Per farlo utilizziamo una quasi-geodetica appropriata e "seguiamo" i G-traslati di B lungo tale quasi-geodetica.

   Sia $x \in B$. Poiché X è uno spazio (c, b)-quasi-geodetico, esiste una (c, b)-quasi-geodetica $\gamma\colon [0, L] \to X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(L) = g \cdot x$. Studiamo ora i punti *"sufficientemente vicini"* che giacciono nell'immagine di γ. Sia $n := \lfloor L \cdot c/b \rfloor$. Per ogni $j \in \{0, \ldots, n\}$ definiamo
$$t_j := j \cdot \frac{b}{c}$$
   e poniamo
$$t_n := L.$$
   Inoltre, definiamo
$$x_j := \gamma(t_j).$$
   Notiamo che $x_0 = \gamma(0) = x$ e $x_n = \gamma(L) = g \cdot x$. Poiché i traslati di B ricoprono tutto X, esistono elementi, non necessariamente distinti, $g_j \in G$ tali che $x_j \in g_j \cdot B$. In particolare possiamo scegliere $g_0 := 1_G$ e $g_n := g$.

   Mostriamo che per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$, l'elemento $s_j := g_{j-1}^{-1} \cdot g_j$ appartiene ad S. Infatti, poiché γ è una (c, b)-quasi-geodetica, abbiamo
$$d(x_{j-i}, x_j) \leq c \cdot |t_{j-1} - t_j| + b \leq c \cdot \frac{b}{c} + b \leq 2 \cdot b,$$
   dove nella penultima disuguaglianza si è sfruttata la definizione di t_j. Pertanto, poiché $x_{j-1} \in g_{j-1} \cdot B$ per quanto sopra, abbiamo che
$$x_j \in B_{2 \cdot b}(g_{j-1} \cdot B) = g_{j-1} \cdot B_{2 \cdot b}(B) = g_{j-1} \cdot B',$$
   sfruttando il fatto che G agisce per isometrie su X. Infatti, poiché G agisce per isometrie, l'insieme dei punti che hanno distanza $\leq 2 \cdot b$ da $g_{j-1} \cdot B$ sono esattamente i punti che hanno distanza $\leq 2 \cdot b$ da B traslati, poi, da g_{j-1} stesso. Nel dettaglio:
$$\begin{aligned} x \in B_{2 \cdot b}(g_{j-1} \cdot B) \Leftrightarrow d(x, g_{j-1} \cdot B) \leq 2 \cdot b \Leftrightarrow d(g_{j-1}^{-1} x, B) \leq 2 \cdot b \\ \Leftrightarrow g_{j-1}^{-1} x \in B_{2 \cdot b}(B) \Leftrightarrow x \in g_{j-1} \cdot B_{2 \cdot b}(B). \end{aligned}$$

D'altra parte, $x_j \in g_j \cdot B \subset g_j \cdot B'$, quindi

$$g_{j-1} \cdot B' \cap g_j \cdot B' \neq \varnothing;$$

ottenendo così che $g_{j-1}^{-1} \cdot g_j \in S$, per definizione di S.

In particolare, sfruttando $g_0 = 1_G$ otteniamo che

$$g = g_n = g_{n-1} \cdot g_{n-1}^{-1} \cdot g_n = \dots = g_0 \cdot s_1 \cdots s_n = s_1 \dots s_n,$$

appartiene al sottogruppo generato da S, come volevasi dimostrare.

2. **Il gruppo G è quasi-isometrico ad X**: Sia $x \in X$. Mostriamo che la mappa

$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\to X \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

è una quasi isometria mostrando che è un embedding quasi-isometrico con immagine quasi-densa, sfruttando la Proposizione 2.1.9. Notiamo che, poiché G agisce per isometrie su X e poiché i G-traslati di B ricoprono tutto X, possiamo assumere come prima che $x \in B$.

Iniziamo mostrando che la mappa φ ha immagine quasi-densa. Dato $x' \in X$, per ipotesi, esiste un elemento $g \in G$ tale che $x' \in g \cdot B$. Allora, il fatto che $g \cdot x \in g \cdot B$ implica

$$d(x', \varphi(g)) = d(x', g \cdot x) \leq \operatorname{diam}(g \cdot B) = \operatorname{diam}(B).$$

Poiché per ipotesi il diametro di B è finito, abbiamo provato che φ ha immagine quasi-densa.

Mostriamo ora che φ è un embedding quasi-isometrico. Sia $g \in G$. Diamo prima un limite inferiore per $d(\varphi(1_G), \varphi(g))$ in termini di $d_S(1_G, g)$. Sia $\gamma\colon [0, L] \to X$, come nel punto 1, una (c, b)-quasi-geodetica da x a $g \cdot x$. Allora, per quanto svolto nel punto 1 e per la definizione di

$n = \lfloor L \cdot c/b \rfloor$, abbiamo che:

$$\begin{aligned} d(\varphi(1_G), \varphi(g)) &= d(x, g \cdot x) = d(\gamma(0), \gamma(L)) \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot L - b \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot \frac{b \cdot (n-1)}{c} - b \\ &= \frac{b}{c^2} \cdot n - \frac{b}{c^2} - b \\ &\geq \frac{b}{c^2} \cdot d_S(1_G, g) - \frac{b}{c^2} - b, \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che $n \geq d_S(1_G, g)$. D'altra parte, cerchiamo ora un limite superiore per $d(\varphi(1_G), \varphi(g))$ in termini di $d_S(1_G, g)$. Supponiamo $d_S(1_G, g) = n$; esistono quindi $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1} = S$ con $g = s_1 \cdots s_n$. Usando il fatto che G agisce per isometrie su X, il fatto che $s_j \cdot B' \cap B' \neq \varnothing$ e la disuguaglianza triangolare, otteniamo che per ogni $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ si ha:

$$\begin{aligned} d(\varphi(1_G), \varphi(g)) &= d(x, g \cdot x) \\ &\leq d(x, s_1 \cdot x) + d(s_1 \cdot x, s_1 \cdot s_2 \cdot x) + \ldots \\ &\quad + d(s_1 \cdots s_{n-1} \cdot x, s_1 \cdots s_n \cdot x) \\ &= d(x, s_1 \cdot x) + d(x, s_2 \cdot x) + \cdots + d(x, s_n \cdot x) \\ &\leq n \cdot 2 \cdot (\mathrm{diam}(B) + 2 \cdot b) \\ &= 2 \cdot (\mathrm{diam}(B) + 2 \cdot b) \cdot d_S(1_G, g). \end{aligned}$$

Chiaramente, dato che per ipotesi $\mathrm{diam}(B) < +\infty$, l'upper bound è limitato. Poiché si ha che

$$d(\varphi(g), \varphi(h)) = d(\varphi(1_G), \varphi(g^{-1} \cdot h)) \quad \text{e} \quad d_S(g, h) = d_S(1_G, g^{-1} h)$$

per ogni $g, h \in G$, il limiti superiori ed inferiori sopra trovati mostrano che φ è un embedding quasi-isometrico.

$\square$

Osservazione 3.2.2. Notiamo che il Lemma di Milnor-Švarc afferma unicamente che esiste una quasi isometria tra G ed X, mentre in generale non sappiamo se G e X saranno bilipschitz equivalenti. Infatti, un controesempio è dato dall'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$. Tale azione rispetta le ipotesi del Lemma di Milnor-Švarc ma, come si è già mostrato in precedenza nell'Esempio 2.1.4, non esiste un'equivalenza bilipschitz tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$.

Capitolo 4

Conseguenze geometriche e topologiche del Lemma di Milnor-Švarc

4.1 La versione topologica del lemma di Milnor-Švarc

Le applicazioni del lemma di Milnor-Švarc sono molteplici, passando dalla geometria alla topologia fino alla teoria dei gruppi. In particolare, alcune delle conseguenze che si hanno sono:

- I sottogruppi dei gruppi finitamente generati sono finitamente generati [Löh17, Corollario 5.3.10].
- La possibilità di determinare se alcune categorie di gruppi siano o meno finitamente generati, come per esempio alcuni gruppi fondamentali di determinati spazi topologici.
- I gruppi fondamentali di varietà chiuse e compatte sono quasi-isometrici al loro rivestimento universale.

Quest'ultima conseguenza è proprio l'implicazione su cui maggiormente vogliamo concentrare la nostra attenzione. Infatti, grazie ad un risultato che apparentemente non ha nulla a che fare con la teoria delle superfici si riescono a trarre importanti conclusioni sulla geometria delle varietà 2-dimensionali.

Introduciamo quindi il Lemma di Milnor-Švarc nella sua formulazione topologica. Il lettore o la lettrice interessati possono trovare approfondimenti sulle altre implicazioni del Lemma di Milnor- Švarc nel Capitolo 5 del libro *'Geometric group theory, an introduction'* di Clara Löh [Löh17].

Prima di mostrare la relazione tra la formulazione quasi-geometrica del lemma e la sua applicazione topologico-geometrica, introduciamo alcune definizioni e nozioni utili all'enunciato:

Definizione 4.1.1 (Spazio metrico proprio)**.** Uno spazio metrico si dice *proprio* se tutte le palle di raggio finito sono compatte, rispetto alla topologia indotta dalla metrica.

Osservazione 4.1.2. Uno spazio metrico proprio è localmente compatto. Infatti, per ogni punto nello spazio metrico esiste sempre una palla di raggio finito che lo contiene. Poiché tale palle è compatta in uno spazio metrico proprio, abbiamo la tesi.

Definizione 4.1.3 (Azione cocompatta)**.** Sia G un gruppo, X uno spazio topologico e $G \curvearrowright X$ l'azione di G su X. Tale azione si dice *cocompatta* se lo spazio quoziente $X \backslash G$ rispetto alla topologia quoziente è compatto.

Esempio 4.1.4 (Azione cocompatta)**.** Consideriamo i seguenti esempi:

- La traslazione indotta da $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ è cocompatta, in quanto il quoziente è omeomorfo ad S^1, che è compatto.

- In generale, l'azione per *deck transformations* del gruppo fondamentale di uno spazio topologico X compatto, connesso per archi e che ammette rivestimento universale sul suo rivestimento universale è cocompatta perchè il quoziente è omeomorfo ad X. Infatti, per la Proposizione 1.2.39, $E/G(E) \cong X$ e questo conclude la dimostrazione.

- La traslazione orizzontale di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}^2$ *non è cocompatta* (rispetto alla topologia standard su $\mathbb{R}^2$) perchè il quoziente è omeomorfo al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, che non è compatto perchè non è limitato in $\mathbb{R}^2$.

Lemma 4.1.5 (Azione propria $\Rightarrow$ la proiezione è un omeomorfismo locale)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico proprio e sia G un gruppo che agisce per isometrie su di esso tramite un'azione propria. Allora la proiezione al quoziente $\pi\colon X \to X\backslash G$ è un omeomorfismo locale.

Dimostrazione. È noto il fatto che π sia una mappa aperta perché proiezione al quoziente rispetto ad un'azione di gruppo. Resta da mostrare che sia una funzione localmente iniettiva. Se X è uno spazio discreto ciò che si vuole mostrare risulta immediatamente verificato. Studiamo il caso in cui X non sia discreto. Sia $r \geq 0$ un numero reale positivo e sia $\overline{B}_r(x)$ un intorno di x, poiché lo spazio metrico è proprio abbiamo che $\overline{B}_r(x)$ è compatto. Poiché l'azione è propria abbiamo che l'insieme

$$S := \{g \in G \mid g \cdot \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(x) \neq \varnothing\}$$

è finito. Inoltre, $\{g \in G \mid d(x, g \cdot x) \leq r\}$ è un sottoinsieme di S e quindi è anch'esso finito. Pertanto il numero di elementi $y \in X$ contenuti in $B_r(x)$ tali che $y = g \cdot x$ per qualche $g \in G$ è finito. Quindi risulta sempre possibile trovare un ε sufficientemente piccolo tale che nessuno di tali elementi sia contenuto in $B_\varepsilon(x)$; in altre parole per ogni $x \in X$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che non esista $y \in B_\varepsilon(x)$ che soddisfi $y = g \cdot x$ per qualche $g \in G$. Abbiamo così mostrato che la proiezione al quoziente è localmente iniettiva e, così, terminato la dimostrazione. $\square$

Corollario 4.1.6 (Formulazione topologica del Lemma di Milnor-Švarc)**.** Sia G un gruppo che agisce tramite isometrie su di uno spazio metrico proprio, geodetico e non vuoto (X, d). Supponiamo inoltre che tale azione sia propria e cocompatta. Allora G è finitamente generato e $\forall x \in X$ la mappa:

$$\begin{aligned} G &\to X \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

è una quasi isometria.

Dimostrazione. Si osservi, come prima cosa, che per ipotesi lo spazio X è $(1, \varepsilon)$-quasi-geodetico per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Ora, al fine di applicare il Lemma di Milnor-Švarc, dobbiamo trovare un sottoinsieme $B \subset X$ che soddisfi le ipotesi del Teorema 3.2.1.

Sia $x \in X$ sia U_x un intorno di x di diametro finito. Allora U_x è relativamente compatto in quanto X è uno spazio metrico proprio. Al variare di $x \in X$ l'insieme $\{U_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento di X. Pertanto, poiché la proiezione al quoziente è aperta e suriettiva, $\{\pi(U_x)\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X/G. Essendo l'azione di gruppo cocompatta, X/G è compatto e, quindi, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito $\{\pi(U_{x_i})\}_{i=1,\dots,n}$. Definiamo $B := \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{x_i}$. L'insieme B ha diametro finito poiché è unione finita di insiemi di diametro finito ed è compatto essendo X uno spazio metrico proprio. Inoltre, abbiamo che $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$ in quanto l'insieme $\{\pi^{-1}(\pi(U_{x_i}))\}_{i=1,\dots,n}$ è un ricoprimento di X ed è contenuto nell'unione dei $G-$traslati di B. Per concludere, $B' := B_{2 \cdot \varepsilon}(B)$ ha diametro finito e poiché X è proprio si ha che B' è compatto. Essendo l'azione di G su X propria, abbiamo che l'insieme $\{g \in G | g \cdot B' \cap B' \neq \varnothing\}$ è finito. Possiamo, quindi, applicare il lemma di Milnor-Švarc e concludere. $\square$

4.2 Applicazioni geometriche e topologiche di Milnor-Švarc

La formulazione topologica del Lemma di Milnor-Švarc risulta cruciale in quanto consente, tramite il seguente corollario, di mostrare un fatto di estrema importanza per quanto riguarda la geometria delle superfici e delle varietà Riemanniane. Per quanto riguarda gli scopi di questa tesi, considereremo unicamente varietà orientabili. Ricordiamo, inoltre, che essendo M localmente Euclidea, allora M è localmente connessa per archi e semilocalmente semplicemente connessa.

Prima di passare al Lemma di Milnor-Švarc per le varietà Riemanniane, enunciamo il Teorema di Hopf-Rinow nella sua versione classica. Il Teorema di Hopf-Rinow è considerato un risultato centrale per quanto riguarda la geometria Riemanniana e, in particolare, afferma quanto segue:

Teorema 4.2.1 (Hopf-Rinow, [DCFF92, Teorema 2.8])**.** Sia M una varietà Riemanniana. Allora le seguenti sono equivalenti:

- Gli insiemi chiusi e limitati di M sono compatti;
- M è uno spazio metrico completo;
- M è geodeticamente completo.

In particolare, il teorema ci porta a fornire la definizione di varietà Riemanniana geodeticamente completa.

Definizione 4.2.2 (Varietà Riemanniana geodeticamente completa)**.** Sia M una varietà Riemanniana. Allora M si dice *geodeticamente completa* se ogni geodetica è estendibile indefinitamente, ovvero se per ogni $p \in M$ ogni geodetica $\gamma(t)$ passante per p è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Diamo ora due versioni del Teorema di Hopf-Rinow meno generali ma maggiormente indicate per gli scopi di questa tesi:

Teorema 4.2.3 (Hopf-Rinow II, [Lee18, Teorema 6.19])**.** Una varietà Riemanniana connessa M è metricamente completa se e solo se è geodeticamente completa.

Teorema 4.2.4 (Hopf-Rimow III, [BH91, Proposizione 3.7])**.** Sia (X, d) uno spazio metrico. Se (X, d) è completo e localmente compatto allora:

- ogni sottoinsieme chiuso e limitato di X è compatto;
- X è uno spazio geodetico.

Siamo ora pronti ad enunciare e dimostrare il seguente teorema:

Corollario 4.2.5 (Gruppi fondamentali e quasi-isometrie)**.** Sia M una varietà Riemanniana compatta e connessa e sia $\widetilde{M}$ il suo rivestimento universale Riemanniano considerato con la metrica Riemanniana pull-back. Allora il gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ è finitamente generato e per ogni $x \in \widetilde{M}$, la mappa:

$$\pi_1(M) \to \widetilde{M}$$
$$g \mapsto g \cdot x$$

data dall'azione del gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ su $\widetilde{M}$ tramite *deck transformations* è una quasi-isometria.

Dimostrazione. Abbiamo che M è uno spazio metrico compatto e, pertanto, è uno spazio metrico completo [Man14, Teorema 6.33].

Inoltre M è localmente compatta, come già mostrato nella dimostrazione del Lemma 1.3.24. Per il Teorema 4.2.4, M è uno spazio metrico geodetico proprio. Ora queste proprietà passano al rivestimento universale. Per prima cosa osserviamo che anche $\widetilde{M}$ è localmente compatta dato che è una varietà Riemanniana. Mostriamo che è completa. Per il Teorema 4.2.3 risulta sufficiente mostrare che sia geodeticamente completa. Sia $c\colon [a, b] \to \widetilde{M}$ è una geodetica in $\widetilde{M}$ e mostriamo che si può estendere. Osserviamo che $\pi \circ c\colon [a, b] \to M$ è una geodetica in M. Essendo M completa (e quindi geodeticamente completa per il Teorema 4.2.3), $\pi \circ c$ si estende a $[a, b+\varepsilon] \to M$. per ogni $\varepsilon > 0$. Sollevando questa geodetica a $\widetilde{M}$, si ottiene l'estensione cercata. Osserviamo che proiettando e sollevando curve geodetiche queste rimangono curve geodetiche per le proprietà della metrica pull-back di cui è dotata $\widetilde{M}$. A questo punto possiamo applicare nuovamente il Teorema 4.2.4 e concludere che $\widetilde{M}$ è uno spazio metrico geodetico proprio.

L'azione di $\pi_1(M)$ su $\widetilde{M}$ è isometrica (Osservazione 1.3.30), propria (Osservazione 1.3.32) e cocompatta, in quanto il quoziente $\widetilde{M}/\pi_1(M)$ è omeomorfo ad M (Proposizione 1.2.39) che è uno spazio compatto. Applicando la versione topologica del lemma di Milnor-Švarc la dimostrazione è terminata. □

Per comprendere a pieno la potenza di tale corollario, si considerino le seguenti definizioni:

Definizione 4.2.6 (Varietà piatta)**.** Data una varietà Riemanniana (M, g) di dimensione n diremo che (M, g) è *piatta* se $(\widetilde{M}, p^*g)$ è isometrico a $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$

Per quanto riguarda gli scopi di questa tesi, concentreremo la nostra attenzione unicamente sulle superfici, ovvero limiteremo la trattazione alle varietà di dimensione minore o uguale a due.

In merito alla definizione di varietà piatta, risulta necessario precisare alcuni punti.

Osservazione 4.2.7. Se M è una varietà Riemanniana sufficientemente regolare e $\widetilde{M}$ è il suo rivestimento universale, abbiamo che $M \cong \widetilde{M}/\pi_1(M)$. Sappiamo inoltre che l'azione di $\pi_1(M)$ è propriamente discontinua ed isometrica.

- Se h è una metrica Riemanniana su $\widetilde{M}$ e $(\widetilde{M}, h)$ è isometrica ad $(\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle)$, allora è possibile indurre una metrica su M tale che la proiezione al quoziente sia un'isometria locale per la Proposizione 1.3.28 presentata nei preliminari. In particolare, avremo che la metrica su $\widetilde{M}$ coincide con il pull-back della metrica indotta su M. Essendo $\widetilde{M}$ isometrica allo spazio Euclideo, allora $\widetilde{M}$ ha curvatura Gaussiana nulla. Pertanto, abbiamo che, a causa dell'isometria locale, anche M avrà la stessa curvatura. Questo, come già visto in precedenza, deriva dal fatto che le isometrie locali preservano la curvatura Gaussiana in dimensione 2.

- D'altra parte, per la Proposizione 1.3.29 della sezione preliminare, se è data una metrica g su M è possibile dotare $\widetilde{M}$ della metrica del pull-back e, rispetto a tale metrica, la proiezione è una isometria locale. Se rispetto alla metrica del pull-back $\widetilde{M}$ è isometrica allo spazio Euclideo munito del prodotto scalare standard, allora, per quanto sopra, M avrà curvatura Gaussiana nulla.

Per tali ragioni possiamo osservare che la definizione di *varietà piatta* è ben posta, sia che la metrica su M sia indotta dal rivestimento, sia che la metrica sul rivestimento sia indotta da M.

Il concetto di curvatura Gaussiana può essere generalizzato in dimensione più alta sfruttando la *curvatura sezionale* e, pertanto, con opportune modifiche le argomentazioni sopra riportate possono essere trasportate anche in dimensione più alta.

Esempio 4.2.8 (Superfici compatte orientate)**.** Osserviamo che:

1. La superficie compatta ed orientata di genere 0 coincide con la sfera di dimensione due. La sfera è semplicemente connessa e il suo rivestimento universale coincide con la sfera stessa. Pertanto, nessuna metrica Riemanniana su S^2 può essere piatta.

2. La superficie orientata di genere 1 è il toro di dimensione due, il cui gruppo fondamentale è $\mathbb{Z}^2$. In particolare, il suo rivestimento universale coincide con $\mathbb{R}^2$ e, per questo, ammette metrica una Riemanniana piatta.

3. Le superfici orientate con genere $g \geq 2$ hanno gruppo fondamentale isomorfo a
$$\left\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \middle| \prod_{j=1}^{g} [a_j, b_j] \right\rangle.$$
Mostreremo a breve che non possono ammettere una metrica piatta. Invece ammetteranno una metrica Riemanniana iperbolica [Mar16, Corollario 6.2.5] che esula dagli scopi di questa tesi.

Per il teorema di classificazione delle superfici compatte orientate connesse [Mar16, Teorema 6.1.6] abbiamo che ogni superficie compatta connessa ed orientata è diffeomorfa ad una superficie di genere g, per qualche $g \geq 0$. Pertanto, conoscendo la metrica che ammettono le superfici di genere g è possibile conoscere la metrica che ammettono tutte le superfici.

Mentre il precedente esempio mostra come sia possibile conoscere quali tipologie di metriche possono essere ammesse da determinate superfici, il seguente corollario mostra, invece, quali tipologie di metriche *non* possono essere ammesse su determinate varietà. In particolare, essendo il seguente risultato di carattere generale, non ci limitiamo a riportarlo unicamente per le superfici ma consideriamo le varietà Riemanniane di dimensione arbitraria.

Corollario 4.2.9 ((Non-)Esistenza di strutture piatte)**.** Se M è una varietà Riemanniana compatta e connessa n-dimensionale *piatta*, allora il suo gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ è quasi-isometrico allo spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ (e quindi a $\mathbb{Z}^n$). In altre parole: se il gruppo fondamentale di una varietà Riemanniana n-dimensionale compatta e connessa non è quasi isometrico a $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{Z}^n$), allora tale varietà non ammette alcuna metrica Riemanniana piatta.

Dimostrazione. Per il Corollario 4.2.5, $\pi_1(M)$ è quasi isometrico al rivestimento universale di M e tale rivestimento è quasi isometrico ad $\mathbb{R}^n$. Poiché la relazione di quasi-isometria è una relazione di equivalenza, otteniamo la tesi. □

Osservazione 4.2.10 ((Non-)Esistenza di strutture iperboliche)**.** Ragionamenti simili si possono fare per le varietà *iperboliche*, ossia varietà (M, g) tali che $(\widetilde{M}, p^*g)$ sia isometrico allo spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$ dotato della metrica iperbolica [Mar16, Löh17] Quindi si avrà che: se M è una varietà Riemanniana *iperbolica* compatta e connessa n-dimensionale, allora il suo gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ è quasi-isometrico allo spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$. In altre parole: se il gruppo fondamentale di una varietà Riemanniana compatta e connessa n-dimensionale non è quasi-isometrico ad $\mathbb{H}^n$, allora tale varietà non può ammettere una metrica iperbolica Riemanniana.

Esempio 4.2.11. Notiamo che per quanto mostrato nell'Osservazione 2.3.12, le superfici di genere $g \geq 2$ hanno gruppo fondamentale che non è quasi-isometrico a $\mathbb{Z}^2$, pertanto non possono ammettere alcuna metrica piatta. Come abbiamo accennato in precedenza le superfici di genere $g \geq 2$ ammetteranno invece una metrica iperbolica, ossia una metrica h su S_g (dove per

S_g indichiamo la superficie di genere g) tale che $(\widetilde{S}_g, p^*h)$ sia isometrica al piano iperbolico.

Pertanto, classificare e conoscere i gruppi finitamente generati a meno di quasi-isometria e studiarne la loro quasi-geometria riesce a fornire fondamentali implicazioni nello studio delle varietà Riemanniane e delle superfici.

Conclusioni

Per quanto riguarda la conclusione di questa tesi, abbiamo deciso di introdurre alcuni risultati notevoli che seguono quelli sino ad ora presentati.

Prima di presentare il prossimo teorema, ricordiamo al lettore o alla lettrice che esistono tre modelli principali di superfici 2-dimensionali semplicemente connesse con curvatura Gaussiana costante. In particolare, queste sono: la sfera S^2 (dotata di curvatura Gaussiana positiva), il piano Euclideo $\mathbb{R}^2$ (dotato di curvatura Gaussiana nulla) ed il piano iperbolico $\mathbb{H}^2$ (dotato di curvatura Gaussiana negativa). Questi tre modelli rivestono un ruolo fondamentale per quanto riguarda la geometria delle superfici.

Il **Teorema di Uniformizzazione** [Lee18, Teorema 1.7], infatti, afferma che ogni varietà 2-dimensionale orientata, compatta e connessa è diffeomorfa al quoziente di uno dei tre modelli a curvatura costante descritti sopra per l'azione del gruppo delle deck transformations della superficie stessa. In particolare, ogni varietà orientata, compatta e connessa 2-dimensionale ammette una metrica Riemanniana completa con curvatura Gaussiana costante.

Il Teorema di Uniformizzazione viene considerato il risultato centrale per quanto riguarda la classificazione delle superfici, in quanto consente di affermare che ogni 2-varietà orientata, compatta e connessa ammette una geometria e tali geometrie sono esattamente tre: sferica, piana ed iperbolica.

Inoltre, sfruttando tecniche più raffinate, è possibile generalizzare il precedente risultato alle varietà di dimensione 3. Nel 1982, infatti, William Thurston congetturò un risultato analogo per le 3-varietà compatte, connesse ed orientabili, il quale fu poi dimostrato da Perelman nel 2003. Il **Teorema**

di Thurston-Perelman [Lee18] afferma che in dimensione 3 esistono 8 differenti geometrie, ed ogni varietà orientabile, compatta e connessa può essere *"tagliata in parti"* che ammettono una di tali geometrie.

Per quanto riguarda lo studio delle varietà piatte, il **Teorema di Bieberbach** [Mar16, Corollario 4.4.11] costituisce un risultato di notevole rilevanza. Il Teorema di Bieberbach consente di affermare che ogni varietà piatta M orientabile, compatta e connessa è finitamente rivestita da un toro piatto.

Il risultato segue dal fatto che risulta sempre possibile scrivere M come quoziente di $\mathbb{R}^n$ per un certo gruppo *cristallografico* Γ, dove per gruppo cristallografico si intende un sottogruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbb{R}^n/\Gamma$ sia compatto. A questo punto, poiché ogni gruppo cristallografico ammette un sottogruppo delle tralsazioni T di indice finito isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, è possibile concludere sfruttando la *corrispondenza di Galois* per i rivestimenti.

Bibliografia

[Act13] Mattew Actipes, *On the foundamental group of surfaces*, lecture notes, https://math.uchicago.edu/~may/REU2013/REUPapers/Actipes.pdf, 2013.

[BH91] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, vol. 319, Springer Science & Business Media, 1991.

[Bre13] Glen E. Bredon, *Topology and geometry*, vol. 139, Springer Science & Business Media, 2013.

[DCFF92] Manfredo Perdigao Do Carmo and J. Flaherty Francis, *Riemannian geometry*, vol. 6, Springer, 1992.

[Hat01] Allan Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, 2nd edition.

[Hat02] ______, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Lee06] John M. Lee, *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, vol. 176, Springer Science & Business Media, 2006.

[Lee13] ______, *Introduction to smooth manifolds*, Springer Science & Business Media, 2013.

[Lee18] ______, *Introduction to riemannian manifolds*, vol. 2, Springer, 2018.

[Löh17] Clara Löh, *Geometric group theory*, Springer, 2017.

[Löh21] ______, *Differential Geometry I*, lecture notes, https://loeh.app.uni-regensburg.de/teaching/diffgeo_ws2021/lecture_notes.pdf, 2021.

[Man14] Marco Manetti, *Topologia*, vol. 78, Springer Science & Business Media, 2014.

[Mar16] Bruno Martelli, *An introduction to geometric topology*, arXiv preprint arXiv:1610.02592 (2016).

[Pre10] Andrew N. Pressley, *Elementary differential geometry*, Springer Science & Business Media, 2010.

[Voi21] John Voight, *Quaternion algebras*, Springer Nature, 2021.