

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Instabilità gravitazionale in dischi gassosi politropici

Relatore:
Prof. Carlo Nipoti

Presentata da:
Cristina Caprioglio

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

La frammentazione di sistemi gassosi dovuta alla loro instabilità gravitazionale è un meccanismo fondamentale alla base di diversi processi astrofisici. Nipoti (2023)[1] ha presentato un criterio analitico di instabilità basato su un parametro adimensionale chiamato Q_{3D} ed ha presentato l'applicazione del criterio a dischi con distribuzione verticale isoterma. Questa tesi espande la trattazione svolta per un disco stratificato con distribuzione isoterma ad uno con distribuzione politropica con un generico indice politropico n . Nel primo capitolo trattiamo dei criteri di instabilità gravitazionali per dischi stratificati verticalmente generici, per poi concentrarci sul caso con perturbazione puramente radiale. Nel secondo capitolo vengono poi presentate le equazioni e le relazioni fondamentali per descrivere il fluido, tra cui l'equazione di Lane-Emden, le cui soluzioni (sia analitiche che numeriche) vengono presentate nel terzo capitolo. Il quarto capitolo è dedicato al ricavare, sempre numericamente, i parametri necessari per calcolare il criterio di instabilità Q_{3D} , che ci ha portato ad affermare che la regione di instabilità aumenta al diminuire dell'indice politropico n e che le condizioni di instabilità si trovano vicino al piano di simmetria del sistema.

Indice

Introduzione	1
1 Criteri di instabilità gravitazionale per dischi stratificati verticalmente	2
1.1 Equazioni di base e perturbazione lineare	2
1.2 Relazioni di dispersione per dischi stratificati verticalmente	4
1.3 Criterio di stabilità per dischi stratificati verticalmente	4
1.3.1 Caso $k_R = 0$	6
1.3.2 Caso $k_z = 0$	6
2 Strato autogravitante politropico: equazioni fondamentali	9
2.1 Equilibrio idrostatico	9
2.2 Equazione di Poisson per Φ	10
2.3 Distribuzione politropica	10
2.4 L'equazione di Lane-Emden	11
2.5 Relazione tra $m(z)$ e $ \theta'(\xi) $	13
2.6 Relazione tra θ e $ \theta'(\xi) $	13
3 Strato autogravitante politropico: soluzioni analitiche e numeriche	15
3.1 Soluzioni analitiche dell'equazione di Lane-Emden	15
3.2 Soluzione numerica dell'equazione di Lane-Emden	15
3.3 Relazione tra p e θ	17
4 Instabilità gravitazionale in dischi con distribuzione verticale politropica	19
4.1 Determinazione di $h_{70\%}$ e ν	19
4.2 Profili di Q_{3D} e determinazioni delle regioni instabili	21
5 Conclusioni	25
A L'operatore di Laplace in coordinate polari	27
B Considerazioni sull'equazione di Lane-Emden	28

C	Lane-Emden generica: caso $n = +\infty$	29
D	Metodo di Runge-Kutta 4	30

Introduzione

Nel campo dell'astrofisica vi sono diversi oggetti che possono essere descritti da strutture gassose rotanti confinate da potenziali gravitazionali. Esempi classici sono i dischi gassosi delle galassie, i dischi di accrescimento, nonché i dischi protostellari, ma la rotazione può essere non trascurabile anche nelle stelle o nelle nubi molecolari. Questi sistemi sono distribuiti su scale di grandezza che vanno dalle decine, centinaia di chilometri fino al megaparsec e lo studio della loro instabilità gravitazionale è fondamentale, in quanto essa può contribuire a processi fondamentali nel nostro universo. In particolare, l'instabilità gravitazionale diventa specialmente rilevante nel caso in cui il potenziale autogravitante del fluido non sia trascurabile rispetto a quello esterno: in questo caso, infatti, l'evoluzione del sistema dipenderà fortemente dalla sua stabilità (o instabilità) gravitazionale. Basti pensare al fatto che nei dischi protostellari l'instabilità gravitazionale può contribuire direttamente o indirettamente alla formazione di pianeti (Kratte e Lodato, 2016[2]). In particolare, lo studio dell'instabilità gravitazionale per dischi infinitesimalmente sottili è stato ampiamente studiato e sufficientemente compreso; purtroppo in molti casi questa approssimazione non è giustificata, pertanto occorre svolgere lo stesso lavoro per sistemi con spessore non trascurabile. Diversi autori hanno approcciato lo studio di questo tipo di strutture, limitandosi però a casi specifici, in particolare a sistemi rotanti omogenei di spessore finito o infinito. Nella tesi da noi proposta si analizzerà uno strato autogravitante caratterizzato dall'equazione di stato politropica, la cui soluzione dipende da n , l'indice politropico, e le cui soluzioni sono per lo più numeriche. I fluidi politropici sono stati studiati da diversi autori a partire dal lavoro pionieristico di Emden del 1907[3]: tra i principali ricordiamo Chandrasekhar (1939[4]), che si è occupato in dettaglio del caso a simmetria sferica, e Ostriker (1964a-b[5][6]) per la simmetria cilindrica. La simmetria planare invece, che è quella presa in considerazione da questo lavoro, è stata trattata da Spitzer (1942[7]), che ha ricavato la soluzione analitica per il caso isoterma, e Ibáñez e Sigalotti (1983[8]), che hanno fornito anche delle soluzioni numeriche per valori di n da 0 a 5. La trattazione più completa sull'applicazione dei sistemi politropici è svolta dal libro "Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields" di George P. Horedt[9], che racchiude anche un capitolo sui sistemi politropici relativistici e altri argomenti che esulano però dallo scopo di questa tesi.

Questo lavoro parte dalla trattazione svolta da Nipoti (2023)[1] su relazioni di dispersione e criteri di instabilità gravitazionale. Nipoti (2023) ha presentato l'applicazione a dischi stratificati verticalmente con distribuzione isoterma, mentre qui mostriamo quella relativa al caso di una generica distribuzione politropica, fornendo una trattazione valida per tutti gli indici $0 < n < \infty$.

Capitolo 1

Criteri di instabilità gravitazionale per dischi stratificati verticalmente

In questo capitolo verrà seguita la trattazione sui criteri di instabilità gravitazionale per dischi stratificati verticalmente svolta da Nipoti (2023)[1].

1.1 Equazioni di base e perturbazione lineare

Innanzitutto occorre determinare un set di equazioni che descriva il nostro fluido. Dato che studieremo un sistema rotante è naturale utilizzare le coordinate cilindriche (R, ϕ, z) per descriverlo, inoltre per semplicità considereremo un fluido asimmetrico non perturbato e perturbazioni asimmetriche, in modo da avere $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ per tutte le variabili considerate. Il fluido sarà assunto non viscoso ed adiabatico, il che ci permetterà di annullare sia il tensore di sforzo sia la funzione relativa alla perdita di energia dovuta ai processi di riscaldamento e raffreddamento sia il flusso di conduzione del calore. In questo modo riusciamo a riscrivere le equazioni dei fluidi e, aggiungendo anche l'equazione (2.2.3) in

coordinate cilindriche, otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial R \rho u_R}{\partial R} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial u_R}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_R}{\partial z} - \frac{u_\phi^2}{R} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial R}, \\
\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_\phi}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{u_\phi u_R}{R} &= 0, \\
\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_z}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial z}, \\
\frac{p}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \ln(p \rho^{-\gamma}) &= 0, \\
\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 4\pi G \rho,
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

dove ρ , p e Φ sono la densità, la pressione e il potenziale gravitazionale, mentre $\mathbf{u} = (u_R, u_\phi, u_z)$ è la velocità e γ è l'indice adiabatico. Infine, Φ_{ext} è un potenziale gravitazionale esterno fisso. A questo punto, possiamo riscrivere ognuna delle quantità $q = q(R, z, t)$ che descrivono le proprietà del fluido come $q = q_{imp} + \delta q$, dove q_{imp} descrive il fluido in stato stazionario e δq dà la perturbazione euleriana (quindi in un dato punto dello spazio) dipendente dal tempo. Assumiamo inoltre che il sistema imperturbato sia una soluzione stazionaria rotante del sistema (1.1.1) senza moti meridionali, abbiamo quindi che $u_R = u_z = 0$, mentre $u_\phi \neq 0$. Ci limiteremo allo studio di stabilità lineare, considerando delle piccole ($|\delta q / q| \ll 1$) perturbazioni date da onde piane con dipendenza spaziale e temporale $\delta q \propto \exp[i(k_R R + k_z z - \omega t)]$, dove ω è la frequenza e k_R e k_z sono le componenti radiale e verticale del vettore d'onda. A questo punto possiamo definire la velocità angolare Ω come $\Omega = \Omega(R, z)$ data da $u_\phi = \Omega R$ e, perturbando e linearizzando il set di equazioni (1.1.1), otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
-i\omega \delta \rho + ik_z \rho \delta u_z + \delta u_z \rho'_z + \frac{\rho \delta u_R}{R} + ik_R \rho \delta u_R + \delta u_R \rho'_R &= 0, \\
-i\omega \delta u_R - 2\Omega \delta u_\phi &= -i \frac{k_R}{\rho} \delta p + \frac{p'_R}{\rho^2} \delta \rho - ik_R \delta \Phi, \\
-i\omega \delta u_\phi + \frac{\partial \Omega R}{\partial R} \delta u_R + R \frac{\partial \Omega}{\partial z} \delta u_z + \Omega \delta u_R &= 0, \\
-i\omega \delta u_z &= -i \frac{k_z}{\rho} \delta p + \frac{p'_z}{\rho^2} \delta \rho - ik_z \delta \Phi, \\
-i\omega \frac{\delta p}{p} + i\gamma \omega \frac{\delta \rho}{\rho} + \sigma'_R \delta u_R + \sigma'_z \delta u_z &= 0, \\
-\left((k_R^2 + k_z^2) - i \frac{k_R}{R} \right) \delta \Phi &= 4\pi G \delta \rho,
\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

dove $\rho'_R = \frac{\partial \rho}{\partial R}$, $\rho'_z = \frac{\partial \rho}{\partial z}$, $p'_R = \frac{\partial p}{\partial R}$, $p'_z = \frac{\partial p}{\partial z}$, $\sigma'_R = \frac{\partial \sigma}{\partial R}$, $\sigma'_z = \frac{\partial \sigma}{\partial z}$, mentre $\sigma \equiv \ln(p\rho^{-\gamma})$ è l'entropia specifica normalizzata.

1.2 Relazioni di dispersione per dischi stratificati verticalmente

Vogliamo ora ricavare la relazione di dispersione per dischi stratificati verticalmente con spessore finito: questi sistemi possono essere descritti da un fluido rotante stazionario con gradienti radiali di pressione e densità trascurabili se paragonati a quelli verticali, inoltre assumiamo $\Omega = \Omega(R)$. Questa approssimazione è giustificata per uno studio locale del nostro modello. Per proseguire nella nostra analisi assumiamo $k \gg \frac{1}{R}$ e, in seguito allo svolgimento di diversi passaggi algebrici che qui omettiamo, otteniamo a partire dal set di equazioni (1.1.2) la seguente relazione di dispersione:

$$\omega^4 + (4\pi G\rho - \kappa^2 - \nu^2 - c_s^2 k^2)\omega^2 + N_z^2 c_s^2 k_R^2 + \kappa^2 c_s^2 k_z^2 - 4\pi G\rho\kappa^2 \frac{k_z^2}{k^2} + \kappa^2 \nu^2 = 0, \quad (1.2.1)$$

dove $N_z^2 \equiv -\sigma'_z p'_z / (\gamma\rho)$ è la frequenza di Brunt-Väisälä al quadrato, $c_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$ è la velocità del suono adiabatica al quadrato, ν è una frequenza definita da

$$\nu^2 \equiv \frac{\rho'_z p'_z}{\rho^2} = \frac{c_s^2}{\gamma} \frac{\rho'_z p'_z}{\rho p}, \quad (1.2.2)$$

mentre κ è la frequenza di epicyclo definita da

$$\kappa^2 \equiv 4\Omega^2 + \frac{d\Omega^2}{d \ln(R)}. \quad (1.2.3)$$

1.3 Criterio di stabilità per dischi stratificati verticalmente

Prima di ricavare i criteri di stabilità dobbiamo commentare i segni di κ^2 , ν^2 e N_z^2 , su cui non abbiamo fatto ipotesi nella sezione precedente. Dato che a noi interessa studiare l'instabilità gravitazionale è necessario $\kappa^2 > 0$ per evitare instabilità rotazionale, mentre $N_z^2 > 0$ ci serve per assicurarci stabilità rispetto alla convezione. Possiamo notare che

$$N_z^2 = -\frac{p'_z}{\gamma\rho} \left(\frac{p'_z}{p} - \gamma \frac{\rho'_z}{\rho} \right) = \nu^2 - \frac{p'^2_z}{\gamma\rho p} < \nu^2, \quad (1.3.1)$$

il che implica che imporre $N_z^2 > 0$ sia sufficiente per avere anche $\nu^2 > 0$.

Ci è inoltre permesso di imporre ulteriori restrizioni su k derivanti dal fatto che la

grandezza della perturbazione sia più piccola della grandezza di scala caratteristica del sistema imperturbato. Perciò, con l'eccezione della sezione 1.3.2, l'analisi della stabilità sarà ristretta¹ a situazioni con:

$$k^2 > k_J^2 + \frac{\nu^2}{c_s^2}, \quad (1.3.2)$$

dove $k_J = \sqrt{4\pi G\rho/c_s}$ è il numero d'onda di Jeans.

A questo punto studiamo la (1.2.1) nella forma $P(\omega, s) = 0$, dove definiamo $s \equiv c_s^2 k^2$. Per un dato s avremo che gli zeri di P saranno ω_1^2 e $\omega_2^2 \geq \omega_1^2$, inoltre definiamo il discriminante di P come Δ_ω , il cui calcolo ci darà un polinomio $Q(s)$ di secondo grado, il cui discriminante sarà chiamato Δ_s e i suoi zeri s_1 e $s_2 \geq s_1$. Possiamo inoltre notare che, quando ω^2 è reale è necessario $\omega_1^2 > 0$ per avere stabilità, mentre situazioni con ω^2 non reale sono sicuramente instabili perchè esiste almeno una soluzione con parte immaginaria positiva.

Per semplificare la notazione possiamo quindi definire le seguenti quantità positive, tutte con la dimensione di una frequenza al quadrato: $A \equiv 4\pi G\rho$, $B \equiv \kappa^2$, $C \equiv \nu^2$ e $D \equiv N_z^2$. Definiamo inoltre la grandezza adimensionale $\zeta \equiv k_z^2/k^2$, compresa tra 0 ed 1. Possiamo ora riscrivere la (1.2.1) nella forma seguente:

$$\omega^4 + (A - B - C - s)\omega^2 + (1 - \zeta)Ds + \zeta Bs - \zeta AB + BC = 0. \quad (1.3.3)$$

È immediato trovare il discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta_\omega &= (A - B - C - s)^2 - 4((1 - \zeta)Ds + \zeta Bs - \zeta AB + BC) = \\ &= s^2 - 2[A - B - C + 2(1 - \zeta)D + 2\zeta B]s + (A - B - C)^2 + 4\zeta AB - 4BC, \end{aligned}$$

che per $s \rightarrow \infty$ è positivo. Il discriminante di Δ_s

$$\begin{aligned} \Delta_s &= 4[A - B - C + 2(1 - \zeta)D + 2\zeta B]^2 - 4(A - B - C)^2 - 16\zeta AB + 16BC = \\ &= 16(1 - \zeta) [(A - B - C + D)D + BC - \zeta(B - D)^2]. \end{aligned}$$

A questo punto ricaviamo ω_1^2 :

$$\omega_1^2 = \frac{s - (A - B - C) - \sqrt{\Delta_\omega}}{2}, \quad (1.3.4)$$

che deve essere positivo per la stabilità. Quando $\Delta_\omega > 0$ la condizione di stabilità diventa

$$s > \frac{A - \zeta^{-1}C}{1 + (-1 + \frac{1}{\zeta})(\frac{D}{B})}, \quad (1.3.5)$$

che è sempre soddisfatta. Noi abbiamo $\Delta_\omega > 0$ quando $\Delta_s < 0$; per ottenere ciò per qualunque valore di ζ è sufficiente verificare

$$(A - B - C + D)D + BC < 0 \Rightarrow AD < (C - D)(D - B), \quad (1.3.6)$$

¹Vedasi Appendice A di Nipoti (2023)[1] per le giustificazioni sulle restrizioni del vettore d'onda

che sarà la nostra condizione sufficiente per avere stabilità.

Sostituendo A , B , C e D con i parametri fisici ad esse assegnati otteniamo il criterio di stabilità per dischi stratificati verticalmente:

$$4\pi G\rho N_z^2 < (\nu^2 - N_z^2)(N_z^2 - \kappa^2), \quad (1.3.7)$$

che ricordiamo riferirsi alla stabilità nei confronti di perturbazioni con lunghezze d'onda piccole.

1.3.1 Caso $k_R = 0$

Sostituendo nella (1.2.1) $k_R = 0$ e utilizzando le quantità A , B , C e s precedentemente definite otteniamo

$$\omega^4 + (A - B - C - s)\omega^2 + Bs - AB + BC = 0, \quad (1.3.8)$$

che ha come discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta_\omega &= (A - B - C - s)^2 - 4Bs + 4AB - 4BC = \\ &= [s - (A + B - C)]^2, \end{aligned}$$

che, essendo sempre maggiore o uguale di zero, ci permette di affermare che ω^2 sia sempre reale. Per avere $\omega_1^2 > 0$ occorre verificare

$$s - (A - B - C) - \sqrt{[s - (A + B - C)]^2} > 0, \quad (1.3.9)$$

che per $s > A + C > A - B - C$ diventa

$$[s - (A - B - C)]^2 > [s - (A + B - C)]^2 > 0. \quad (1.3.10)$$

È evidente che nel caso si abbia $s > (A + B - C)$ la disuguaglianza è sempre verificata in quanto è sufficiente avere $B > 0$, che è garantito dalla sua stessa definizione. Per il caso $s < (A + B - C)$ otteniamo come condizione $s > A + C$, anche questa sempre verificata. Possiamo quindi concludere che nel caso si abbia $k_R = 0$ tutte le configurazioni sono stabili.

1.3.2 Caso $k_z = 0$

Avendo $k_z = 0$ e gradienti radiali nulli sia per la pressione che per la densità, possiamo modificare la restrizione (1.3.2) limitandoci a richiedere $|k_R| > \frac{1}{R}$. Come però fatto notare in altri articoli, quando si considerano situazioni con $|k_R| < \frac{1}{h_z}$, dove h_z è lo spessore del disco, occorre fare attenzione quando si perturba l'equazione di Poisson,

in modo da evitare di avere divergenza nel caso k_R sia piccolo. L'equazione di Poisson perturbata diventerà allora

$$-(k_R^2 + h_z^{-2}) \delta\Phi = 4\pi G \delta\rho, \quad (1.3.11)$$

che ci permette di tenere in considerazione lo spessore finito del disco (si veda Goldreich & Lynden-Bell, 1965a[10]). A questo punto, combinando la (1.3.11) con le prime cinque equazioni del (1.1.2) e tenendo conto del fatto che $k_z = \rho'_R = p'_R = \sigma'_R = 0$ otteniamo la seguente relazione di dispersione:

$$\omega^4 + \left(4\pi G \rho \frac{k_R^2}{k_R^2 + h_z^{-2}} - \kappa^2 - \nu^2 - c_s^2 k_R^2 \right) \omega^2 + N_z^2 c_s^2 k_R^2 + \kappa^2 \nu^2 = 0. \quad (1.3.12)$$

A questo punto per studiare la stabilità utilizzeremo una logica simile a quella presentata nella sezione (1.3), ma dovremo definire una nuova grandezza positiva E , con $E \equiv c_s^2 h_z^{-2}$, così da poter riscrivere la (1.3.12) nel modo seguente:

$$\omega^4 + \left(\frac{As}{s + E} - B - C - s \right) \omega^2 + Ds + BC = 0, \quad (1.3.13)$$

ricordandoci che qui, al contrario delle sezioni precedenti, possiamo considerare anche i casi dove $s < A + C$. Il discriminante di questa relazione diventa

$$\Delta_\omega = \left(A \frac{s}{s + E} - B - C - s \right)^2 - 4Ds - 4BC \quad (1.3.14)$$

che, ai fini del nostro studio, ci interessa avere maggiore di zero, mentre questa volta vogliamo verificare la condizione per instabilità monotona, ovvero $\omega_1^2 < 0$. Definendo $g(s)$ come

$$g(s) \equiv A \frac{s}{s + E} - B - C - s, \quad (1.3.15)$$

possiamo affermare $\omega_1^2 < 0$ quando:

$$-g(s) < \sqrt{g^2(s) - 4Ds - 4BC}, \quad (1.3.16)$$

che per essere soddisfatta richiede $g(s) > 0$. Possiamo quindi dire che la condizione sufficiente per l'instabilità sia $g(s) > 0$, ovvero:

$$s^2 - (A - B - C - E)s + E(B + C) < 0, \quad (1.3.17)$$

il cui discriminante è

$$\Delta_s = A^2 - 2(B + C + E)A + (B + C - E)^2, \quad (1.3.18)$$

che ci permette di definire la radice col valore maggiore, ovvero s_2 , come

$$s_2 = \frac{A - B - C - E + \sqrt{\Delta_s}}{2}. \quad (1.3.19)$$

Abbiamo chiaramente instabilità quando $s_2 > 0$ e $\Delta_s > 0$, quindi imponendo queste due condizioni otteniamo

$$\frac{\sqrt{B+C} + \sqrt{E}}{\sqrt{A}} < 1, \quad (1.3.20)$$

che è una condizione sufficiente per l'instabilità, che può essere riscritta come

$$Q_{3D} \equiv \frac{\sqrt{\kappa^2 + \nu^2} + c_s h_z^{-1}}{\sqrt{4\pi G \rho}} < 1. \quad (1.3.21)$$

Quando questo criterio è soddisfatto abbiamo instabilità per valori intermedi di $|k_R|$. Per stabilire il parametro h_z Nipoti (2023)[1] ha confrontato la (1.3.21) con i criteri ottenuti da Goldreich & Lynden-Bell (1965a)[10], trovando che occorre avere $h_{60\%} \lesssim h_z \lesssim h_{80\%}$, dove $h_{X\%}$ è l'altezza centrata sul piano di simmetria centrale che contiene $X\%$ della massa per unità di superficie. Da questo momento in poi quindi useremo $h_{70\%}$ come valore per h_z .

Capitolo 2

Strato autogravitante politropico: equazioni fondamentali

In questo capitolo presentiamo le principali proprietà di strati fluidi autogravitanti con distribuzione politropica. In particolare, seguendo la trattazione di Ibáñez & Sigalotti (1984)[11], introduciamo l'equazione di Lane-Emden e riportiamo in forma adimensionale le principali equazioni che permettono di calcolare le proprietà di questi sistemi.

2.1 Equilibrio idrostatico

Un fluido è in equilibrio idrostatico quando il vettore velocità \mathbf{u} è nullo ovunque e tutte le derivate parziali rispetto al tempo sono pari a zero. Le due quantità che occorre bilanciare sono pressione e gravità, relazionate dall'equazione seguente:

$$\nabla p = \rho \nabla \Phi, \quad (2.1.1)$$

dove p , ρ e Φ sono rispettivamente la pressione, la densità e il potenziale gravitazionale.¹ Nel nostro caso specifico di un disco gassoso in rotazione possiamo, studiando localmente l'andamento di p e ρ , assumere che esse dipendano solo dalla coordinata z e lo stesso dicasi per Φ . Allora l'eq. (2.1.1) si riduce a

$$\frac{dp}{dz} = \rho \frac{d\Phi}{dz}. \quad (2.1.2)$$

In questo caso si parla di equilibrio idrostatico verticale.

¹Qui assumiamo che il segno di Φ sia tale che il campo gravitazionale sia $\mathbf{g} = \nabla \Phi$

2.2 Equazione di Poisson per Φ

L'equazione di Poisson è un'equazione ellittica alle derivate parziali, che nello spazio euclideo prende la seguente formulazione:

$$\nabla^2 \phi = f, \quad (2.2.1)$$

con ϕ ed f due generiche funzioni a valori reali o complessi.

Nel caso di un campo gravitazionale dovuto ad un oggetto di densità ρ , l'equazione di Poisson ha la ben nota forma

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G\rho. \quad (2.2.2)$$

Nel caso dei sistemi presi da noi in considerazione, la (2.2.2) si riduce a

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} = -4\pi G\rho. \quad (2.2.3)$$

2.3 Distribuzione politropica

Scegliendo z in modo da avere il piano di simmetria per $z = 0$ e che tutta la massa sia contenuta tra $-z_1$ e z_1 , per simmetria otteniamo che la massa di una colonna con area della sezione trasversale unitaria che si estende tra $-z$ e z vale

$$M(z) = \int_{-z}^z \rho dz' = 2 \int_0^z \rho dz' = 2m(z), \quad (2.3.1)$$

che in forma differenziale diventa

$$\frac{dM}{dz} = 2\rho. \quad (2.3.2)$$

Data la simmetria del sistema, da qui in avanti considereremo solo la regione corrispondente a $z > 0$, dove quindi la variabile z assume solo valori positivi. Dalla (2.3.1) è immediato ricavare la massa totale per unità di superficie:

$$\Sigma = 2m_1, \quad \text{con} \quad m_1 = \int_0^{z_1} \rho dz'. \quad (2.3.3)$$

Inserendo la (2.3.2) nella (2.2.3) e integrando si ottiene

$$\frac{d\Phi}{dz} = -2\pi GM(z), \quad (2.3.4)$$

che, sostituita nella (2.1.1), con l'aiuto della (2.3.2) ci permette di ricavare una relazione tra p e M :

$$\frac{dp}{dM} = -\pi GM(z). \quad (2.3.5)$$

Date le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} z = 0 : & \quad p = p_0 \quad \text{e} \quad M = 0; \\ z = z_1 : & \quad p = 0 \quad \text{e} \quad M = \Sigma; \end{aligned}$$

integrando la (2.3.5) tra z e z_1 otteniamo

$$p = \frac{\pi G}{2} (\Sigma^2 - M^2) = 2\pi G (m_1^2 - m^2). \quad (2.3.6)$$

La pressione a $z = 0$ é

$$p_0 = 2\pi G m_1^2, \quad (2.3.7)$$

quindi la (2.3.6) si può riscrivere come

$$p = p_0 \left(1 - \frac{m^2}{m_1^2} \right). \quad (2.3.8)$$

Per ricavare una relazione tra p e ρ assumiamo che la distribuzione sia politropica:

$$p(z) = K_n \rho^{1+1/n}(z), \quad (2.3.9)$$

dove n è l'indice politropico e K_n è una costante. Eguagliando la (2.3.8) e la (2.3.9) è immediato trovare la relazione

$$\rho = \left[\frac{2\pi G m_1^2}{K_n} \left(1 - \frac{m^2}{m_1^2} \right) \right]^{n/(1+n)}. \quad (2.3.10)$$

2.4 L'equazione di Lane-Emden

Prima di passare alla trattazione vera e propria, vogliamo far presente che essa riguarda i casi con indice politropico $n \geq 0$ ed $n \neq +\infty$, in quanto $n = +\infty$ corrisponde, nel caso di un gas perfetto, al caso isoterma, per il quale occorre svolgere una trattazione a parte (cfr. Horedt G.P. "Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields" [9], pag. 28).

Inserendo la (2.3.9) nella (2.1.1) otteniamo

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right) K_n \rho^{1/n} \nabla \rho = \rho \nabla \Phi, \quad (2.4.1)$$

che una volta integrata porta a

$$\Phi - \Phi_0 = (n+1) K_n (\rho^{1/n} - \rho_0^{1/n}) = (n+1) K_n^{n/(n+1)} \left[p^{1/(n+1)} - p_0^{1/(n+1)} \right]. \quad (2.4.2)$$

Inserendo la precedente equazione nella (2.2.2) arriviamo a

$$K_n(n+1)\nabla^2\rho^{1/n} = -4\pi G\rho, \quad (2.4.3)$$

che corrisponde all'equazione differenziale di un fluido politropico auto-gravitante in equilibrio statico. Definendo la funzione θ come:

$$\rho = \rho_0\theta^n \quad \text{con} \quad \rho_0 = \text{densità centrale}, \quad (2.4.4)$$

l'eq. (2.4.3) diventa

$$\left[(n+1)K_n/(4\pi G\rho_0^{1-1/n}) \right] \nabla^2\theta = -\theta^n. \quad (2.4.5)$$

Assumendo simmetria tale che $\theta = \theta(z)$, sostituendo l'operatore di Laplace $\nabla^2\theta$ con la sua formulazione in coordinate polari², l'equazione precedente diventa

$$\left[(n+1)K_n/(4\pi G\rho_0^{1-1/n}z^{j-1}) \right] \frac{d(z^{j-1}\frac{d\theta}{dz})}{dz} = -\theta^n. \quad (2.4.6)$$

Definendo la variabile ξ come

$$z = a_n\xi \quad \text{con} \quad a_n = \left[\frac{(n+1)K_n}{4\pi G\rho_0^{1-1/n}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.4.7)$$

la (2.4.6) diventa l'equazione di Lane-Emden:

$$\xi^{1-j} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{j-1} \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad (2.4.8)$$

che descrive l'equilibrio di un fluido politropico con simmetria radiale con indice politropico $0 \leq n < \infty$.³

Le condizioni al contorno per la (2.4.8) sono

$$\theta(0) = 1 \quad \text{e} \quad \theta'(0) = 0,$$

inoltre si ha che

$$\theta(\xi_1) = 0,$$

con ξ_1 primo zero della funzione. L'eq. (2.4.8) corrisponde, per $j = 1$, al caso planare, mentre per $j = 2$ a quello cilindrico e per $j = 3$ a quello sferico. In questo lavoro ci concentriamo sul caso planare, ovvero quello con $j = 1$, con $0 < n < +\infty$; la (2.4.8) si riduce quindi a:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = -\theta^n \quad (2.4.9)$$

la quale ha soluzioni analitiche per $n = 0, 1$ e $+\infty$.⁴

²Vedasi Appendice A per l'espressione completa

³Vedasi Appendice B per commenti sulla (2.4.8)

⁴La soluzione ottenuta per $n = +\infty$ è in realtà valida anche nel caso $n = -\infty$

2.5 Relazione tra $m(z)$ e $|\theta'(\xi)|$

Vogliamo ora ricavare la massa per unità di area in funzione della derivata prima di $\theta(\xi)$. Usando

$$m(z) = \int_0^z \rho dz' \quad (2.5.1)$$

ed eseguendo un cambio di variabile utilizzando la (2.4.4) e la (2.4.7), troviamo che il precedente integrale diventa

$$m(z) = \rho_0 a_n \int_0^\xi \theta^n d\xi', \quad (2.5.2)$$

che, grazie alla (2.4.9), può essere integrato facilmente:

$$m(z) = \rho_0 a_n \int_0^\xi \frac{d}{d\xi'} [-\theta'(\xi)] d\xi' = \rho_0 a_n |\theta'(\xi)|, \quad (2.5.3)$$

da cui si evince anche che la densità media vale

$$\langle \rho(z) \rangle = \frac{m(z)}{z} = \frac{\rho_0 a_n |\theta'(\xi)|}{a_n \xi} = \rho_0 \left| \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right|. \quad (2.5.4)$$

2.6 Relazione tra θ e $|\theta'(\xi)|$

Inserendo la (2.5.3) nella (2.3.10) ed uguagliandola alla (2.4.4) otteniamo

$$\rho_0 \theta^n = \left[\frac{2\pi G m_1^2}{K_n} \left(1 - \frac{|\theta'(\xi)|^2}{|\theta'(\xi_1)|^2} \right) \right]^{n/(1+n)}, \quad (2.6.1)$$

che, valutata in $\xi = 0$, ci permette di ricavare K_n :

$$\rho_0 = \left[\frac{2\pi G m_1^2}{K_n} \right]^{n/(1+n)} \implies K_n = 2\pi G m_1^2 \rho_0^{-(1+1/n)}. \quad (2.6.2)$$

Sostituendo K_n nella (2.6.1) possiamo quindi scrivere la relazione tra θ e $|\theta'(\xi)|$ come

$$|\theta'(\xi)|^2 = |\theta'(\xi_1)|^2 (1 - \theta^{n+1}). \quad (2.6.3)$$

Un altro modo per ricavare una relazione tra θ e la sua derivata prima è integrare una volta la (2.4.9):

$$\theta'^2(\xi) = -\frac{2}{n+1} \theta^{n+1} + C, \quad (2.6.4)$$

dove C é una costante. Per le condizioni al contorno si ha che

$$C = \frac{2}{n+1}$$

e quindi la (2.6.4) diventa

$$\theta'(\xi)^2 = \frac{2}{n+1}(1 - \theta^{n+1}). \quad (2.6.5)$$

Uguagliandola alla (2.6.3) possiamo ora trovare una relazione analitica per $|\theta'(\xi_1)|$, che diventa

$$|\theta'(\xi_1)| = \sqrt{\frac{2}{n+1}}. \quad (2.6.6)$$

Capitolo 3

Strato autogravitante politropico: soluzioni analitiche e numeriche

3.1 Soluzioni analitiche dell'equazione di Lane-Emden

Come precedentemente detto, l'eq.(2.4.9) possiede tre soluzioni analitiche. Nel caso di $n = 0$ ed $n = 1$ la risoluzione è banale e porta alle (3.1.1) e (3.1.2):

$$n = 0 : \quad \theta(\xi) = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 \quad \text{con} \quad \xi_1 = \sqrt{2}; \quad (3.1.1)$$

$$n = 1 : \quad \theta(\xi) = \cos \xi \quad \text{con} \quad \xi_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (3.1.2)$$

Per il caso isoterma con $n = +\infty$ occorre eseguire una trattazione a parte.¹ Riportiamo qui direttamente la funzione della densità ricavata da Spitzer (1942)[7] per il caso planare quando $n = +\infty$:

$$\rho = \rho_0 \frac{4 \exp(\sqrt{2}\xi)}{[\exp(\sqrt{2}\xi) + 1]^2} = \rho_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{b}\right) \quad \text{con} \quad b = \frac{2a_n}{\sqrt{2}}. \quad (3.1.3)$$

3.2 Soluzione numerica dell'equazione di Lane-Emden

L'equazione (2.4.9) non permette soluzioni analitiche oltre alla (3.1.1), alla (3.1.2) e alla (3.1.3), descritte nella sezione (3.1); possiamo però ricavare numericamente la soluzione per ogni n compreso tra 0 e ∞ , ad esempio utilizzando il metodo di Runge-Kutta al quarto ordine (RK4)², per trovare una soluzione approssimata delle equazioni differenziali. Essendo la (2.4.9) un'equazione differenziale al secondo ordine abbiamo dovuto

¹Vedasi Appendice C per un generico caso j -dimensionale

²Vedasi appendice D

riscriverla come il seguente sistema di equazioni:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \varphi \quad \text{con} \quad \theta(0) = 1, \quad (3.2.1)$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = -\theta^n \quad \text{con} \quad \varphi(0) = 0 \quad (3.2.2)$$

ed applicare RK4 due volte. In Fig.3.1 sono riportati alcuni grafici con i profili di densità $\rho(z)/\rho_0$ per $n = 0.5, 1.5, 5, 20$ in funzione di $z/z_{1/2}$. Nello stesso grafico è mostrata anche la curva relativa al caso isoterma.

Andamento di ρ/ρ_0 per $n=0.5, 1.5, 5$ e 20

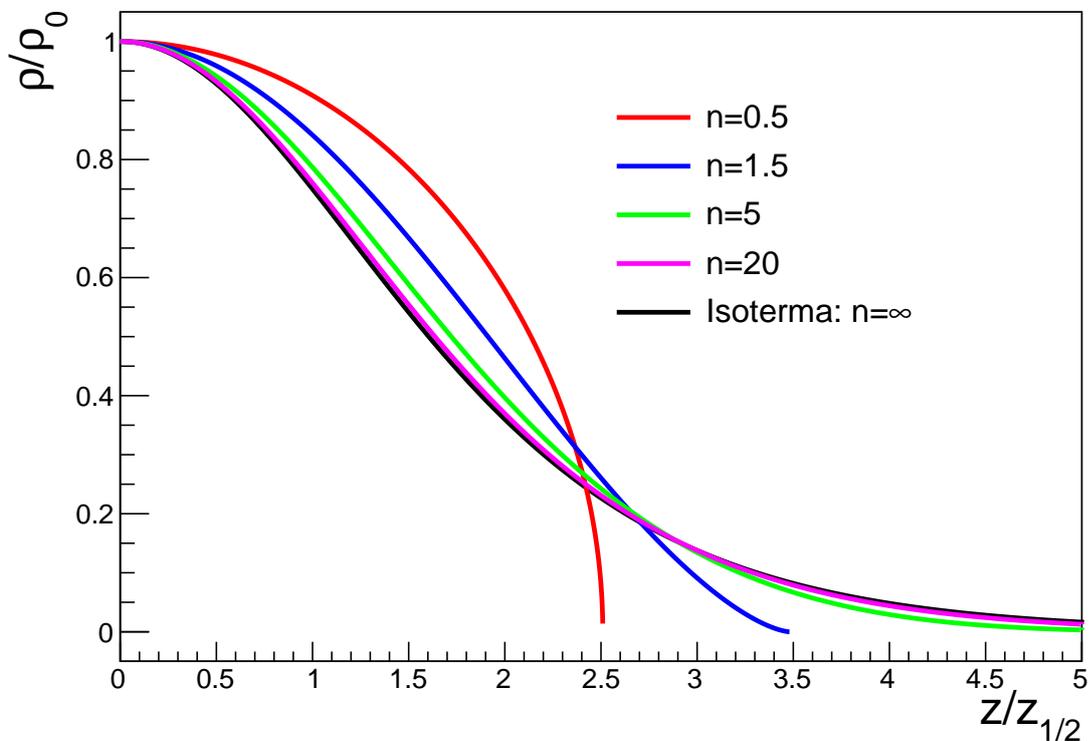


Figura 3.1: Profili di densità $\rho(z)/\rho_0$ per strati politropici con indice $n = 0.5, 1.5, 5, 20$ in funzione di $z/z_{1/2}$ calcolati numericamente tramite Runge-Kutta al quarto ordine. È mostrato per confronto anche il profilo analitico del caso isoterma. ρ_0 è la densità centrale, $z_{1/2}$ è la distanza dal piano di simmetria tale che metà della massa nella regione $z > 0$ è compresa tra $z = 0$ e $z = z_{1/2}$.

Si può notare come la curva corrispondente ad $n = 20$ si avvicini molto a quella del caso isoterma come ci aspettavamo, inoltre dal grafico è evidente come per valori di n più bassi la densità raggiunga lo zero più rapidamente.

Tramite RK4 è stato inoltre possibile ricavare per ogni n i valori di ξ_1 e di $|\theta'(\xi_1)|$. Riportati nella Tab. (3.1) vi sono quelli per n intero con $2 \leq n \leq 20$ e quelli per $n = 0.5, 1.5$.

n	ξ_1	$ \theta'(\xi_1) $
0.5	1.49367	1.154700
1.5	1.64534	0.894427
2	1.71732	0.816497
3	1.85407	0.707107
4	1.98232	0.632456
5	2.10327	0.57735
6	2.21795	0.534522
7	2.32719	0.500000
8	2.43166	0.471405
9	2.53192	0.447214
10	2.62843	0.426401
11	2.72158	0.408248
12	2.81168	0.392232
13	2.89902	0.377964
14	2.98382	0.365148
15	3.0663	0.353553
16	3.14664	0.342997
17	3.22499	0.333333
18	3.30150	0.324443
19	3.37628	0.316228
20	3.44944	0.308607

Tabella 3.1: Valori di ξ_1 e $|\theta'(\xi_1)|$ per strati politropici con indice $2 \leq n \leq 20$ ed $n = 0.5, 1.5$.

3.3 Relazione tra p e θ

Una volta ottenuta la (2.6.2) abbiamo potuto determinare una relazione tra p e θ , che ha permesso di ottenere gli andamenti della pressione per diversi indici politropici n .

A partire dalla (2.3.9), sostituendo ρ con la (2.4.4) e K_n con la sua definizione data dalla (2.6.2) si ottiene

$$p = 2\pi G m_1^2 \theta^{n+1}(\xi). \quad (3.3.1)$$

In Fig.3.2 sono riportati i profili di pressione per $n = 0.5, 1.5, 5, 20$, calcolati numericamente e, per confronto, il profilo analitico relativo al caso isoterma. I profili sono normalizzati alla pressione centrale $p_0 = 2\pi Gm_1^2 = \frac{\pi}{2}G\Sigma^2$.

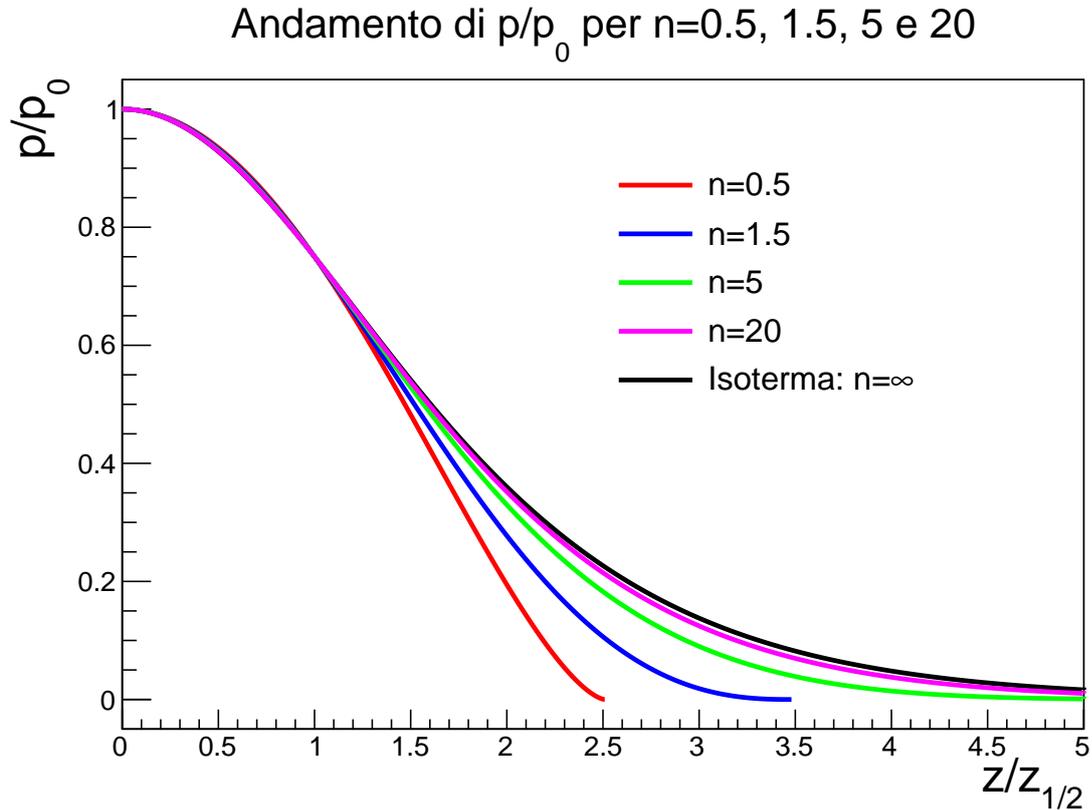


Figura 3.2: Profili di pressione $\frac{p}{p_0}$ per $n = 0.5, 1.5, 5, 20$ in funzione di $z/z_{1/2}$ calcolati numericamente tramite Runge-Kutta al quarto ordine. È mostrato per confronto anche il profilo analitico del caso isoterma. p_0 è la densità centrale, $z_{1/2}$ è la distanza dal piano di simmetria tale che metà della massa nella regione $z > 0$ è compresa tra $z = 0$ e $z = z_{1/2}$.

Anche qui possiamo osservare che per n grandi l'andamento tende a quello isoterma.

Capitolo 4

Instabilità gravitazionale in dischi con distribuzione verticale politropica

Consideriamo qui l'instabilità gravitazionale locale di dischi rotanti con stratificazione verticale politropica. In particolare, applichiamo il criterio di instabilità descritto nel capitolo 1 alla sezione 1.3.2.

4.1 Determinazione di $h_{70\%}$ e ν

Utilizzando i dati calcolati nel capitolo 3 possiamo ora proseguire nello studio del criterio di instabilità gravitazionale. Prima di tutto dobbiamo determinare $h_{70\%}$ in funzione di n . È immediato vedere che

$$h_{70\%} = 2z_{70\%} = 2\frac{z_1}{\xi_1}\xi_{70\%}. \quad (4.1.1)$$

Per ricavare $\xi_{70\%}$ utilizziamo il rapporto tra le masse per unità di area della metà superiore del nostro sistema e la relazione (2.5.3):

$$\frac{m(z_{70\%})}{m_1} = \frac{|\theta'(\xi_{70\%})|}{|\theta'(\xi_1)|} = 0.7. \quad (4.1.2)$$

È chiaro che per trovare il valore di $\xi_{70\%}$ è necessario di nuovo eseguire delle integrazioni numeriche. Nella Tab. 4.1 sono riportati i valori di $\xi_{70\%}$ e $h_{70\%}/z_1$ per $2 \leq n \leq 20$ e per $n = 0.5, 1.5$.

n	$\xi_{70\%}$	$h_{70\%}/z_1$	$h_{70\%}/z_{1/2}$
0.5	0.864432	1.15746203	2.9043944
1.5	0.708682	0.86144140	2.99804976
2	0.656463	0.76452297	3.02299494
3	0.579144	0.624726211	3.05509149
4	0.523862	0.528533976	3.07485201
5	0.481845	0.458186102	3.08823878
6	0.448528	0.404453125	3.09790446
7	0.421276	0.362047866	3.10522087
8	0.39845	0.327719187	3.11092633
9	0.37897	0.299354087	3.11553497
10	0.362091	0.275518846	3.11931427
11	0.347281	0.255205807	3.12246898
12	0.334151	0.237687873	3.12514087
13	0.322406	0.222424513	3.12744328
14	0.311817	0.209005165	3.12944164
15	0.302207	0.197114897	3.1311979
16	0.293433	0.186505547	3.13273155
17	0.285382	0.176981524	3.13412625
18	0.277959	0.168383717	3.13534793
19	0.271086	0.160582891	3.13646882
20	0.264699	0.153473474	3.13747081

Tabella 4.1: Valori di $\xi_{70\%}$, $h_{70\%}/z_1$ e $h_{70\%}/z_{1/2}$ per $2 \leq n \leq 20$ ed $n = 0.5, 1.5$

Per quanto riguarda ν^2 possiamo riscrivere la (1.2.2) come

$$\nu^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dz} \frac{dp}{dz} = \frac{\xi_1^2}{z_1^2 \rho^2} \frac{d\rho}{d\xi} \frac{dp}{d\xi}. \quad (4.1.3)$$

Grazie alla (2.4.4) e alla (3.3.1) è immediato ottenere le derivate di ρ e di p rispetto a ξ , grazie alle quali possiamo scrivere la precedente equazione come

$$\nu^2 = 2\pi G \rho_0 |\theta'(\xi_1)|^2 n(n+1) \theta^{-1} \theta'(\xi)^2. \quad (4.1.4)$$

In Fig.4.1 è mostrato l'andamento di $\frac{\nu^2(z)}{\nu_0^2}$ per $n = 0.5, 1.5, 5, 20$ in funzione di $z/z_{1/2}$, dove $\nu_0^2 = 2\pi G \rho_0$.

Andamento di v^2/v_0^2 per $n=0.5, 1.5, 5$ e 20

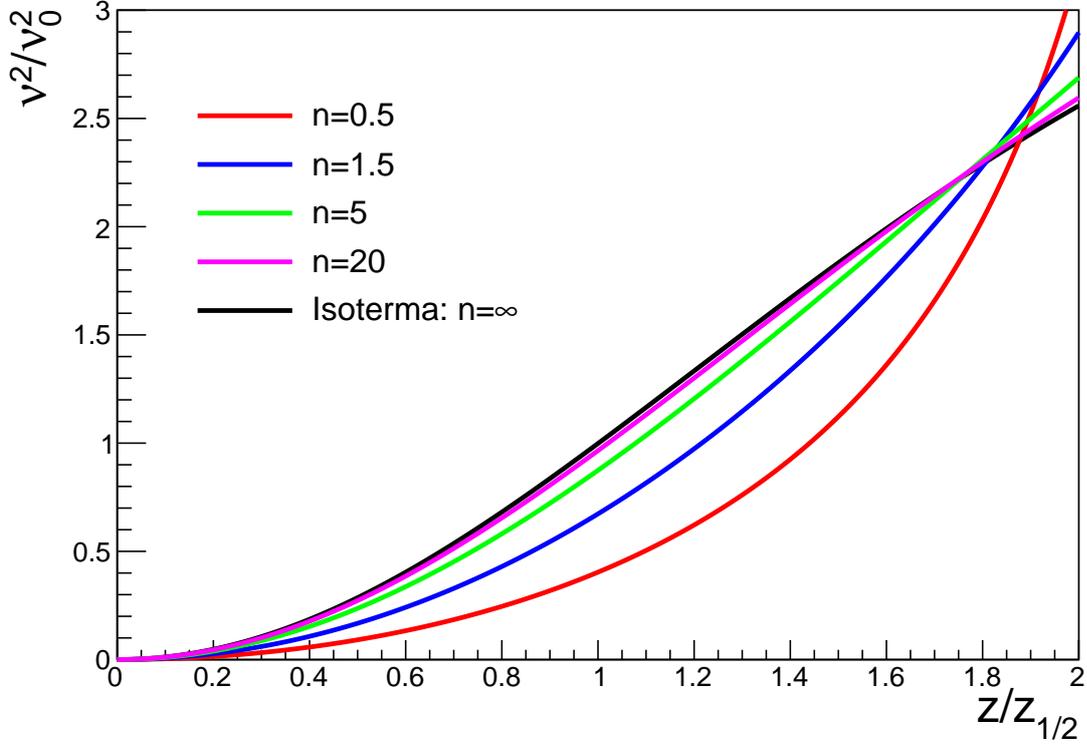


Figura 4.1: Profili della frequenza $\frac{\nu^2}{\nu_0^2}$ per $n = 0.5, 1.5, 5, 20$ in funzione di $z/z_{1/2}$ calcolati numericamente tramite Runge-Kutta al quarto ordine. È mostrato per confronto anche il profilo analitico del caso isoterma. $z_{1/2}$ è la distanza dal piano di simmetria tale che metà della massa nella regione $z > 0$ è compresa tra $z = 0$ e $z = z_{1/2}$.

4.2 Profili di Q_{3D} e determinazioni delle regioni instabili

Determinate ν^2 e $h_{70\%}$, vogliamo ora riscrivere l'eq. (1.3.21) in funzione del parametro adimensionale Q definito come

$$Q = \frac{\kappa C_{0(s,iso)}}{\pi G \Sigma} \quad \text{con} \quad C_{0(s,iso)} = \sqrt{p_0/\rho_0}. \quad (4.2.1)$$

Il parametro Q è di fatto il parametro Q di Toomre che compare nel criterio di instabilità $Q < 1$ per dischi infinitamente sottili (Toomre 1964[12]).

Prendiamo quindi il primo termine della (1.3.21) e moltiplichiamo e dividiamo per

$\pi G \Sigma^2 c_{0(s,iso)}^2$:

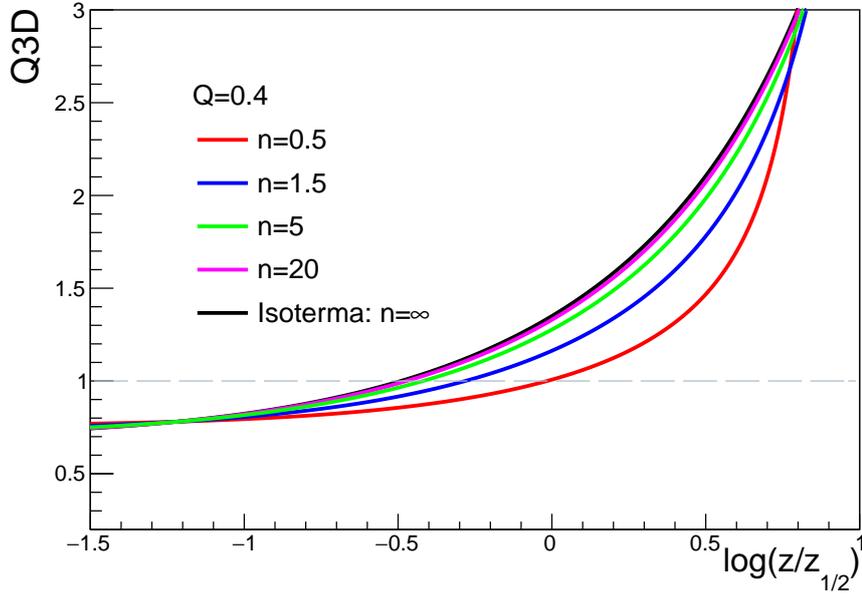
$$\frac{\kappa^2 \pi G \Sigma^2 c_{0(s,iso)}^2}{4 \pi^2 G^2 \rho \Sigma^2 c_{0(s,iso)}^2} = \frac{\pi G \Sigma^2 \rho_0}{4 \rho_0 \theta^n p_0} Q^2.$$

Andiamo quindi a riscrivere la (1.3.21) in funzione di Q , ricordandoci che $p_0 = \frac{\pi}{2} G \Sigma^2$ e $\frac{\Sigma}{2} = \rho_0 a_n |\theta'(\xi_1)|$ e sostituendo ν^2 e $h_{70\%}$ usando rispettivamente la (4.1.4) e la (4.1.1):

$$\begin{aligned} Q_{3D} &= \sqrt{\frac{1}{2} \theta^{-n} Q^2 + \frac{2 \pi G \rho_0 n (n+1) |\theta'(\xi_1)|^2 \theta^{-1} \theta'^2}{4 \pi G \rho_0 \theta^n}} + \frac{1}{2 a_n \xi_{70\%} \sqrt{4 \pi G \rho_0 \theta^n}} \sqrt{\frac{\gamma p_0 \theta^{n+1}}{\rho_0 \theta^n}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \theta^{-n} \left(Q^2 + n(n+1) \frac{|\theta'(\xi_1)|^2 \theta'^2}{\theta} \right)} + \frac{|\theta'(\xi_1)|}{2 \xi_{70\%}} \sqrt{\frac{\gamma \theta^{1-n}}{2}}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Nella Fig.4.2 mostriamo gli andamenti di Q_{3D} in funzione di $\log(z/z_{1/2})$ per $n = 0.5, 1.5, 5, 20$ per due diversi Q , rispettivamente 0.4 e 0.25.

Andamento di Q_{3D} per $n=0.5, 1.5, 5$ e 20



Andamento di Q_{3D} per $n=0.5, 1.5, 5$ e 20

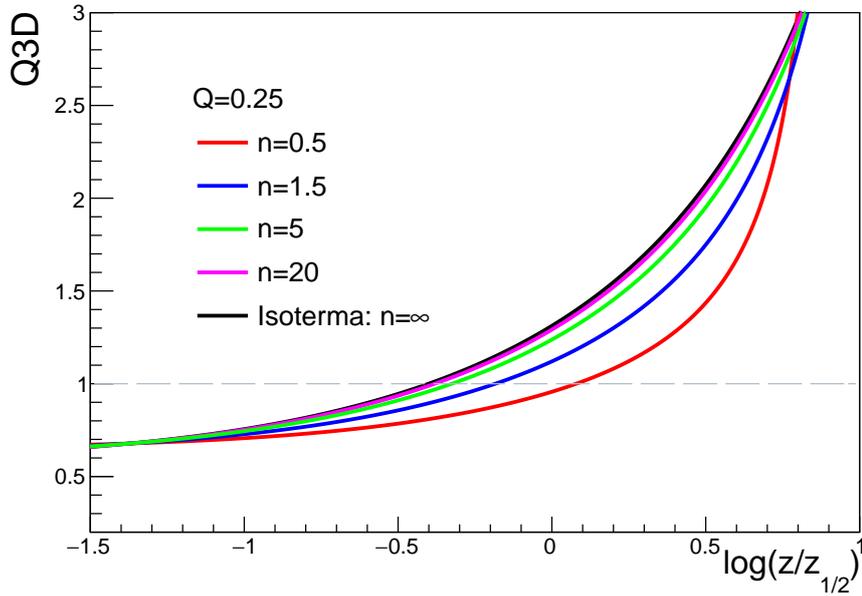


Figura 4.2: Andamento di Q_{3D} in funzione di $\log(z/z_{1/2})$ per $n = 0.5, 1.5, 5, 20$ per diversi valori di Q . È mostrato per confronto anche il profilo analitico del caso isoterma. $z_{1/2}$ è la distanza dal piano di simmetria tale che metà della massa nella regione $z > 0$ è compresa tra $z = 0$ e $z = z_{1/2}$.

La (1.3.21) esprime la condizione sufficiente per l'instabilità: avere $Q_{3D} < 1$. Dai grafici possiamo ricavare per ogni n il valore del logaritmo sotto il quale si ha sicuramente instabilità gravitazionale. Riportiamo nella seguente tabella i valori di $\log(z_{crit}/z_{1/2})$ e di z_{crit}/a_n tali per cui per $|z/a_n| < z_{crit}/a_n$ si ha che il sistema da noi studiato è instabile.

Q=0.4			Q=0.25		
n	$\log(z_{crit}/z_{1/2})$	z_{crit}/a_n	n	$\log(z_{crit}/z_{1/2})$	z_{crit}/a_n
0.5	-0.0154183	0.586875044	0.5	0.0790884	0.6442477293
1.5	-0.281567	0.3567463734	1.5	-0.183682	0.3934327262
5	-0.418854	0.20527577007	5	-0.325038	0.22651887957
20	-0.472086	0.10524997717	20	-0.380968	0.11529064129
Isoterma	-0.491023	0.47542375223	Isoterma	-0.400776	0.52032494795

Tabella 4.2: I valori di $\log(z_{crit}/z_{1/2})$ e z_{crit}/a_n per $n = 0.5, 1.5, 5, 20$ e per il caso isoterma per $Q = 0.4$ e $Q = 0.25$.

Capitolo 5

Conclusioni

In questa tesi ci siamo occupati di studiare il criterio di instabilità gravitazionale per sistemi descritti da dischi gassosi autogravitanti stratificati verticalmente descritti da una distribuzione politropica data da un generico indice politropico n compreso tra zero ed ∞ . Abbiamo prima di tutto riportato la derivazione delle relazioni di dispersione e i criteri di stabilità per dischi stratificati verticalmente generici e abbiamo poi utilizzato la relazione trovata nel caso si abbia una perturbazione puramente radiale per svolgere la nostra analisi. Abbiamo quindi presentato le equazioni di base necessarie per descrivere il fluido preso da noi in considerazione, ovvero quella di equilibrio idrostatico, quella di Poisson nel caso vi sia un campo gravitazionale e, ovviamente, la relazione tra la pressione e la densità dovuta al fatto che la distribuzione è politropica. Abbiamo proseguito utilizzando le equazioni sopra menzionate per ricavare le relazioni adimensionali necessarie per poter calcolare le proprietà di questi sistemi e l'equazione di Lane-Emden, di cui abbiamo presentato sia le soluzioni analitiche che numeriche. Di queste ultime abbiamo riportato i grafici con gli andamenti adimensionali e normalizzati sia della densità che della pressione al variare di n e li abbiamo messi a confronto con il profilo isoterma corrispondente ad $n = \infty$, constatando che all'aumentare di n ci si avvicinava sempre di più al caso isoterma. Sempre numericamente abbiamo ricavato i valori di $h_{70\%}$ e degli andamenti (sempre adimensionali e normalizzati) di ν^2 , verificando anche qui che all'aumentare di n le curve si avvicinavano al caso isoterma. Una volta ottenute tutte le componenti necessarie abbiamo potuto verificare gli andamenti del criterio di instabilità gravitazionale Q_{3D} in funzione della distanza dal piano di simmetria normalizzata per fluidi con diverso indice politropico e con due diversi valori di Q , calcolando anche il valore di z_{crit}/a_n , tale che per $z < z_{crit}$ il sistema è instabile. Dai grafici e dalle tabelle si evince quindi che il caso politropico ha un comportamento simile a quello isoterma, ma la sua regione di instabilità aumenta al diminuire di n e al diminuire di Q , inoltre possiamo affermare che le condizioni di instabilità sono più facilmente raggiungibili vicino al piano di simmetria del sistema e che di conseguenza si avrà maggiore stabilità nelle regioni distanti da esso.

Bibliografia

- [1] Nipoti C., 2023, MNRAS, 518, 5154-5162
- [2] Kratter K. & Lodato G., 2016, ARA&A, 54, 271
- [3] Emden R., 1907, “Gaskugeln”, Leipzig: Teubner
- [4] Chandrasekhar S., 1939, “An Introduction to the Study of Stellar Structure”, Chicago: University of Chicago Press, chap. 4
- [5] Ostriker J., 1964a, Ap. J., 140, 1056
- [6] Ostriker J., 1964b, Ap. J., 140, 1067
- [7] Spitzer L. Jr., 1942, Ap. J., 95, 329S
- [8] Ibáñez S. M. H. e Sigalotti L., 1983, Ap. Space Sci., 96, 145
- [9] Horedt G. P.: 2004, “Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields”, Springer Science & Business Media
- [10] Goldreich P. & Lynden-Bell D., 1965a, MNRAS, 130, 97
- [11] Ibáñez S. M. H. e Sigalotti L., 1984, Ap. J., 285, 784-790
- [12] Toomre A., 1964, Ap. J., 139, 1217
- [13] Harrison, E. R. & Lake, R. G., 1972, Ap. J., 171, 323H
- [14] Hunter C., 2001, Mon. Not. R. Astron. Soc. 328, 839–847

Appendice A

L'operatore di Laplace in coordinate polari

L'operatore di Laplace in coordinate polari é definito dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f &= \sum_{i=1}^j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = (1/z^{j-1}) \frac{\partial(z^{j-1} \frac{\partial f}{\partial z})}{\partial z} + (1/z^2) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + (j-2) \cot \phi_1 \frac{\partial f}{\partial \phi_1} \right] + \\ &+ \sum_{i=3}^j \left\{ \left[1/(z^2 \prod_{k=1}^{i-2} \sin^2(\phi_k)) \right] \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_{i-1}^2} + (j-i) \cot \phi_{i-1} \frac{\partial f}{\partial \phi_{i-1}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.0.1})$$

Appendice B

Considerazioni sull'equazione di Lane-Emden

L'eq. (2.4.8) trovata nel capitolo 2 è in realtà valida per valori di n compresi tra -1 ed $+\infty$, con $n = -1, \infty$ esclusi, il secondo per le ragioni già dette nel capitolo 2, mentre il primo non viene trattato perchè corrisponde al caso speciale isobaro, per il quale non è possibile fornire una soluzione idrostatica in termini di variabili fisiche. In questo lavoro si sono considerati solo valori di n positivi per semplicità, ma le stesse formule e considerazioni potevano essere fatte per $-1 < n < 0$. Inoltre, la (2.4.8) è facilmente estendibile anche ai casi con $-\infty < n < -1$, basta infatti cambiare il segno davanti a θ^n da $-$ a $+$ e ricavare tutte le restanti relazioni di conseguenza.

Appendice C

Lane-Emden generica: caso $n = +\infty$

Per valori di n pari a $+\infty$ l'eq. (2.3.9) si riduce a:

$$p = K_n \rho, \quad (\text{C.0.1})$$

pertanto l'integrazione dell'eq. (2.1.1) porterà a:

$$\Phi - \Phi_0 = K_n \ln(\rho/\rho_0) = K_n \ln(p/p_0). \quad (\text{C.0.2})$$

L'eq. (2.2.2) diventa quindi

$$K_n \nabla^2 \rho = -4\pi G \rho. \quad (\text{C.0.3})$$

Definendo la funzione θ come

$$\rho = \rho_0 \exp(-\theta) \quad (\text{C.0.4})$$

e considerando come espressione dell'operatore di Laplace l'eq. (A.0.1), assumendo $\theta = \theta(z)$, la (C.0.3) assume la forma semplificata per il caso j -dimensionale

$$(K_n/(4\pi G \rho_0 z^{j-1})) \frac{d(z^{j-1} \frac{d\theta}{dz})}{dz} = \exp(-\theta). \quad (\text{C.0.5})$$

Definendo la variabile ξ come

$$z = (K_n/(4\pi G \rho_0))^{1/2} \xi = \alpha \xi \quad (\text{C.0.6})$$

e sostituendola nella (C.0.5) otteniamo l'equazione di Lane-Emden per l'indice politropico $n = +\infty$

$$\xi^{1-j} \frac{d\xi^{j-1} \frac{d\theta}{d\xi}}{d\xi} = \exp(-\theta), \quad (\text{C.0.7})$$

che ha come condizioni al contorno:

$$\theta(0) = 0 \quad \text{e} \quad \theta'(0) = 0,$$

nel caso di sistemi politropi completi a simmetria radiale.¹

¹Questa soluzione è in realtà valida anche per $n = -\infty$

Appendice D

Metodo di Runge-Kutta 4

Per l'integrazione numerica si è usato il metodo Runge-Kutta al quarto ordine, detto così perchè l'errore accumulato totale è dell'ordine di $\mathcal{O}(h^4)$, mentre l'errore locale di troncamento è dell'ordine di $\mathcal{O}(h^5)$. In generale, sia dato il seguente problema:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{D.0.1})$$

dove x è la funzione che si intende approssimare, scegliamo un intervallo $h > 0$ e definiamo:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad t_{n+1} = t_n + h, \quad (\text{D.0.2})$$

per $0 < n < t_f/h$, dove t_f è il tempo finale, usando:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n); \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2}\right); \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_2}{2}\right); \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3). \end{aligned} \quad (\text{D.0.3})$$

Per ogni n , il valore successivo x_{n+1} dipenderà da quello attuale x_n e dalla media pesata di quattro incrementi, i quali sono il prodotto dell'intervallo h e la pendenza data da f . In particolare:

- k_1 è la pendenza all'inizio dell'intervallo, usando solo x ;
- k_2 è quella a metà intervallo, usando x e k_1 ;
- k_3 è di nuovo a metà, ma usando x e k_2 ;
- k_4 è quella alla fine, usando x e k_3 .

Nella media pesata si è dato un peso maggiore a k_2 e k_3 .