ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

TEOREMA DI DE GIORGI SULLA CONTINUITÀ HÖLDERIANA

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giovanni Cupini

Presentata da:
Oscar Pezzi

Anno Accademico 2022-2023

Indice

Notazioni

Nel corso della trattazione utilizzeremo le seguenti notazioni.

- se u è una funzione a valori in $\mathbb{R}^N$ indicheremo le sue componenti con
$$u = (u^1, \dots, u^N);$$
- se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ è un multi-indice, $|\alpha| \coloneqq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ indica la sua altezza;
- $A \Subset B \coloneqq \overline{A} \subseteq B$, tipicamente usato per coppie di insiemi aperti;
- $A + B \coloneqq \{a + b \,/\, a \in A,\, b \in B\}$;
- $\mathscr{L}^n$ indica la misura di Lebesgue n-dimensionale;
- H^n indica la misura di Hausdorff n-dimensionale;
- ω_n indica la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$;
- $\lceil x \rceil \coloneqq \min\{m \in \mathbb{Z} \,/\, m \geq x\}$;
- $M_n(\mathbb{R})$ indica l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali;
- se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $u : A \to \mathbb{R}$ indicheremo con $\{u \leq t\} \coloneqq \{x \in A \,/\, u(x) \leq t\}$. Similmente per $\geq, \dots,$ ecc;
- $⨍_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ indica la media integrale di f su Ω, cioè
$$⨍_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \coloneqq \frac{1}{\mathscr{L}^n(\Omega)} \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x;$$

- $$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

- se $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, u^+, u^- indicano la parte positiva e negativa di u, cioè
$$u^+ := \frac{u + |u|}{2},\ u^- := \frac{|u| - u}{2};$$

- diam indica il diametro di un insieme, cioè
$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} |x - y|;$$

- δ_{ij} indica la delta di Kronecker, cioè
$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Introduzione

L'argomento di questo elaborato è la descrizione di due fondamentali risultati di regolarità di soluzioni di equazioni differenziali lineari ellittiche in forma di divergenza, entrambi dovuti al matematico Ennio De Giorgi. Il primo è stato ottenuto nel 1957 ed è noto come Teorema di De Giorgi-Nash, essendo stato ottenuto, indipendentemente e nello stesso periodo, ma con metodi diversi, anche dal matematico americano J. Nash. Esso riguarda la regolarità Hölderiana delle soluzioni deboli dell'equazione differenziale lineare in forma di divergenza

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x) D_j u \right) = 0, \tag{1}$$

dove

$$x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto limitato,}$$

$$A \text{ matrice simmetrica di coefficienti misurabili e limitati,}$$

$$u = 0 \text{ su } \partial\Omega.$$

Si suppone inoltre che l'equazione sia ellittica, cioè che esista $\lambda > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2,$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ e per quasi ogni $x \in \Omega$.

Una funzione u è soluzione debole di (1) quando

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) D_j u D_i \varphi \, \mathrm{d}x = 0,$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Il secondo risultato di De Giorgi che qui illustreremo risale al 1968, ed è un esempio di sistema di equazioni differenziali lineari, in cui la soluzione, che non prende valori scalari, bensì vettoriali, non solo non è continua, ma addirittura non è neppure localmente limitata. Tale risultato pose fine all'aspettativa che la regolarità già ottenuta nel caso scalare potesse essere ottenuta anche nel caso vettoriale.

L'operatore differenziale considerato da De Giorgi, che è in forma di divergenza, rientra in una classe di operatori differenziali assai rilevanti per il forte legame coi problemi di minimizzazione.

Si consideri infatti il classico problema del calcolo delle variazioni di determinare una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, che minimizzi il funzionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, \mathrm{d}x$$

tra tutte le funzioni u soddisfacenti certe condizioni al bordo, nello specifico quella di assumere particolari valori

$$u = U \text{ in } \partial\Omega,$$

per una qualche funzione U assegnata. Se u è una soluzione di questo problema di minimo, data una arbitraria funzione test φ è facile osservare che $u + t\varphi$ continua a soddisfare la condizione al bordo, ossia

$$u + t\varphi = U \text{ in } \partial\Omega,$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Se si considera la funzione

$$g(t) = \mathcal{F}(u + t\varphi),$$

il fatto che u minimizza $\mathcal{F}$ implica che g ha un minimo in $t = 0$. Trascurando eventuali problemi di regolarità, per il Teorema di Fermat, dovrà essere

$$g'(0) = 0.$$

Andando a derivare sotto al segno di integrale si ha

$$\begin{aligned} g'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{F}(u+t\varphi)\right) &= \int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[F(x,u+t\varphi,Du+tD\varphi)]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{N} D_{u^\alpha}F(x,u+t\varphi,Du+tD\varphi)\varphi^\alpha\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} D_{z_i^\alpha}F(x,u+t\varphi,Du+tD\varphi)D_i\varphi^\alpha\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Valutando in $t=0$ risulta

$$0 = g'(0) = \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{N} D_{u^\alpha}F(x,u,Du)\varphi^\alpha\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} D_{z_i^\alpha}F(x,u,Du)D_i\varphi^\alpha\,\mathrm{d}x,$$

che integrando per parti possiamo riscrivere come

$$\int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{N}\left[-\sum_{i=1}^{n} D_i\left(D_{z_i^\alpha}F(x,u,Du)\right) + D_{u^\alpha}F(x,u,Du)\right]\varphi^\alpha\,\mathrm{d}x = 0,$$

in quanto $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$. Tenendo conto dell'arbitrarietà della funzione φ dovrà necessariamente essere soddisfatta

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i\left(D_{z_i^\alpha}F(x,u,Du)\right) + D_{u^\alpha}F(x,u,Du) = 0,$$

per ogni $\alpha = 1,\dots,N$. Queste ultime prendono il nome di equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale $\mathcal{F}$ e forniscono una condizione necessaria alla minimizzazione di $\mathcal{F}$. Se in aggiunta $\mathcal{F}$ è convesso, ossia se

$$\mathcal{F}((1-t)u+tv) \leq (1-t)\mathcal{F}(u) + t\mathcal{F}(v),$$

per ogni funzione u, v e per ogni $t \in (0,1)$, allora anche la funzione g è convessa e quindi possiede un punto di minimo nel punto critico $t=0$. L'importanza delle equazioni di Eulero-Lagrange cresce sotto l'ipotesi di convessità, in quanto le funzioni che minimizzano $\mathcal{F}$ sono tutte e sole le soluzioni di queste equazioni.

Il risultato di De Giorgi (1957), che riguarda il caso $N=1$, ha come applicazione la regolarità dei minimi di funzionali integrali del tipo

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(Du(x))\,\mathrm{d}x,$$

con $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ che soddisfi

$$\left|D^2 F(z)\right| \leq \Lambda,$$

ed esista $\lambda > 0$ tale che

$$\langle D^2 F(z)\xi, \xi\rangle \geq \lambda |\xi|^2,$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$. Allora l'equazione di Eulero-Lagrange di $\mathcal{F}$ è

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \left(D_{z_i} F(Du(x))\right) = 0,$$

quindi, se u minimizza $\mathcal{F}$, u soddisfa

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} D_{z_i} F(Du) D_i \varphi \,\mathrm{d}x = 0, \tag{2}$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Se si suppone che il minimo u sia una funzione localmente Lipschitziana, allora si dimostra che esso è addirittura di classe C^∞. Questo inaspettato salto di regolarità è frutto di un argomento iterativo di guadagno di regolarità, noto come *bootstrap argument*, che è reso possibile dal Teorema di De Giorgi-Nash. Infatti, posta $\phi = D_k \varphi$ e inserendola nella (2) otteniamo

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} D_{z_i} F(Du) D_i \phi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} D_{z_i} F(Du) D_i D_k \varphi \,\mathrm{d}x = 0,$$

che possiamo integrare per parti, ottenendo

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} D_{z_j} D_{z_i} F(Du) D_j (D_k u) D_i \varphi \,\mathrm{d}x = 0. \tag{3}$$

Dalla (3) segue che $v := D_k u$ è una soluzione debole di

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i (A_{ij}(x) D_j v) = 0, \tag{4}$$

dove i coefficienti di questo operatore lineare in forma di divergenza sono $A_{ij}(x) = D_{z_j} D_{z_i} F(Du(x))$. Essendo u localmente Lipschitziana, allora i coefficienti $A_{ij}(x)$ sono misurabili e localmente limitati. È quindi possibile applicare a (4) il Teorema di De Giorgi, ottenendo perciò che le funzioni $D_k u$ sono localmente Hölderiane per ogni k. Si è così pervenuti ad affermare che il minimo u è in $C^{1,\alpha}(\Omega)$, da cui si ottiene che i coefficienti A_{ij} sono in realtà $C^{0,\alpha}$. Questo dà inizio ad un processo di *bootstrap*, dovuto a Schauder, che accresce ad ogni passo la regolarità della funzione u. L'aspetto particolare è che il processo di *bootstrap* era già noto prima del risultato di De Giorgi, ma in assenza del risultato di Hölderianità della funzione u, non era possibile innescare questo processo.

La trattazione è divisa in quattro capitoli. Il primo è dedicato all'enunciazione di alcuni prerequisiti e al richiamo di risultati di base. Il secondo e il terzo sono il vero centro della tesi. In questi vengono studiate le proprietà di un particolare insieme di funzioni contenente le soluzioni cercate. Dimostreremo prima la locale limitatezza di tali funzioni, dopodiché la loro locale Hölderianità. Il quarto e ultimo capitolo contiene un controesempio, dovuto allo stesso De Giorgi, alla validità del teorema per sistemi di equazioni, ovvero per funzioni u a valori vettoriali.

Capitolo 1

Nozioni fondamentali

1.1 Spazi di Sobolev

Da qui fino a fine trattazione daremo per scontato, se non specificato diversamente, che Ω sia un generico sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1.1 (Derivata debole)**.** Siano $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Diciamo che u possiede la *derivata debole di ordine* α in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se esiste una funzione $v_\alpha \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi \, \mathrm{d}x,$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. In tal caso denotiamo la funzione v_α con $D^\alpha u$.

Definizione 1.1.2 (Derivata forte)**.** Siano $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Diciamo che u possiede la *derivata forte di ordine* α in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se esiste una successione $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $C^{|\alpha|}(\Omega)$ tale che per ogni $A \Subset \Omega$ aperto valgano

1. $u_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} u$ in $L^p(A)$.
2. $(D^\alpha u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $L^p(A)$.

In tal caso la funzione limite $v_\alpha \coloneqq \lim\limits_{i\to\infty} D^\alpha u_i$ in $L^p(A)$ è detta *derivata forte di ordine* α di u.

Proposizione 1.1.3. *Le derivate deboli sono uniche.*

Teorema 1.1.4 (Meyers-Serrin)**.** *Le derivate deboli sono derivate forti e viceversa.*

Definizione 1.1.5. Siano $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Chiamiamo *spazio di Sobolev di esponenti* k, p l'insieme

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) / \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq k,\ \exists\, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Teorema 1.1.6. *Lo spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ dotato della norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

è uno spazio di Banach.

Proposizione 1.1.7. *Siano $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione con derivata limitata, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora*

$$f \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \tag{1.1}$$

e

$$D(f \circ u) = f'(u) Du. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Se $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ si ha semplicemente la derivata di una funzione composta (in senso classico).

Nel caso generale esiste $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$u_i \xrightarrow[i \to +\infty]{} u \text{ in } W^{1,p}(\Omega),$$

e, a meno di passare ad una sotto-successione, possiamo supporre che la convergenza sia anche puntuale q.o. Per ipotesi f è di classe C^1 con derivata limitata, ne deduciamo che esiste $L > 0$ tale che

$$|f(u_i) - f(u)| \leq L|u_i - u|,$$

da cui

$$f(u_i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} f(u) \text{ in } L^p(\Omega).$$

Inoltre vale

$$\begin{aligned}|D(f\circ u_i)-f'(u)Du| &= |f'(u_i)Du_i-f'(u)Du|\\ &\le |f'(u_i)(Du_i-Du)|+|(f'(u_i)-f'(u))Du|. \qquad (1.3)\end{aligned}$$

Ora

$$|Du_i-Du| \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \text{ in } L^p(\Omega),$$

e

$$|f'(u_i)|\le L,$$

allora

$$|f'(u_i)||Du_i-Du| \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \text{ in } L^p(\Omega). \qquad (1.4)$$

D'altra parte, per la continuità di f',

$$|f'(u_i)-f'(u)| \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \text{ q.o. in } \Omega,$$

da cui

$$|f'(u_i)-f'(u)||Du|\le 2L|Du|\in L^p(\Omega).$$

Adesso, dal teorema sulla convergenza dominata di Lebesgue otteniamo

$$|f'(u_i)-f'(u)||Du| \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \text{ in } L^p(\Omega). \qquad (1.5)$$

Infine da (1.3), (1.4), (1.5) e dal teorema dei carabinieri si ha

$$|D(f\circ u_i)-f'(u)Du| \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \text{ in } L^p(\Omega).$$

La (1.1) segue ora dal Teorema 1.1.4, mentre la (1.2) segue dal fatto che

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f\circ u)D_j\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{i\to+\infty}\int_\Omega (f\circ u_i)D_j\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{i\to+\infty}-\int_\Omega D_j(f\circ u_i)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad (1.6)\\ &= -\int_\Omega f'(u)D_ju(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Proposizione 1.1.8. *Sia* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Allora*

$$|u| \in W^{1,p}(\Omega)$$

e vale

$$D|u| = \operatorname{sgn}(u)Du.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ definiamo la funzione

$$\eta_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R},\ \eta_\varepsilon(x) := \sqrt{\varepsilon^2 + (u(x)+\varepsilon)^2},$$

e osserviamo che

$$\eta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} |u| \text{ in } L^p(\Omega).$$

Per la Proposizione 1.1.7 si ha che, per quasi ogni $x \in \Omega$

$$D\eta_\varepsilon(x) = \frac{2(u(x)+\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon^2 + (u(x)+\varepsilon)^2}} Du(x) = \frac{u(x)+\varepsilon}{\eta_\varepsilon} Du(x).$$

Passiamo ora al limite $\varepsilon \to 0$. Per q.o $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{u(x)+\varepsilon}{\eta_\varepsilon(x)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{u(x)+\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + (u(x)+\varepsilon)^2}} = g_+(u(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } u(x) > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } u(x) = 0 \\ -1 & \text{se } u(x) < 0, \end{cases}$$

e

$$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{u(x)+\varepsilon}{\eta_\varepsilon(x)} = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{u(x)+\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + (u(x)+\varepsilon)^2}} = g_-(u(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } u(x) > 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \text{se } u(x) = 0 \\ -1 & \text{se } u(x) < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$g_+(u)Du = g_-(u)Du \text{ q.o. su } \Omega \cap \{u \neq 0\}.$$

Inoltre, poiché le funzioni di $W^{1,p}$ hanno derivata nulla q.o. sugli insiemi di livello vale

$$Du = 0 \text{ q.o. su } \{u = 0\}.$$

In conclusione si ha

$$D|u| = \operatorname{sgn}(u)Du.$$

□

Corollario 1.1.9. *Sia* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Allora*

$$D(u^+) = \begin{cases} Du & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \leq 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Conseguenza diretta delle Proposizioni 1.1.7 e 1.1.8. □

Dopo aver visto alcuni risultati basilari riguardanti gli spazi di Sobolev passiamo alla dimostrazione del primo teorema di immersione di Sobolev, il quale verrà utilizzato nella trattazione del teorema di De Giorgi.

Enunciamo due lemmi preliminari.

Lemma 1.1.10. *Siano* $f_1, \ldots, f_d \in L^d(\Omega)$. *Allora*

$$\int_\Omega \prod_{i=1}^{d} |f_i| \, \mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^{d} \left(\int_\Omega |f_i|^d \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{d}}.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su d.

Il caso $d = 2$ si riduce alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Supponiamo vera la tesi per d e dimostriamola per $d + 1$.

Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\int_\Omega \prod_{i=1}^{d+1} |f_i| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |f_{d+1}|^{d+1} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{d+1}} \left(\int_\Omega \prod_{i=1}^{d} |f_i|^{\frac{d+1}{d}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{d}{d+1}}, \tag{1.7}$$

e applicando l'ipotesi induttiva alle funzioni $g_i := |f_i|^{\frac{d+1}{d}}$, $i = 1, \ldots, d$ segue che

$$\left(\int_\Omega \prod_{i=1}^{d} |f_i|^{\frac{d+1}{d}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{d}{d+1}} \leq \prod_{i=1}^{d} \left(\int_\Omega |f_i|^{d+1} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{d+1}}. \tag{1.8}$$

Unendo la (1.7) e la (1.8) otteniamo la tesi. □

Lemma 1.1.11. *Siano* $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$. *Supponiamo che per ogni* $i = 1, \ldots, n$ *la funzione* f_i *non dipenda dalla variabile* x_i. *Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} f_i \, \mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i^{n-1} \, \mathrm{d}\hat{x}_i \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

dove $\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n.

Il caso $n = 2$ segue subito dal teorema di Tonelli. Supponiamo vera la tesi per n e dimostriamola per $n + 1$.

Per il teorema di Tonelli e la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} f_i \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}x_{n+1} &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1} \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} f_i \,\mathrm{d}x_{n+1} \right) \mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1}^n \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} f_i \,\mathrm{d}x_{n+1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{n-1}{n}} .\end{aligned} \tag{1.9}$$

Per il Lemma 1.1.10 si ha

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} f_i \,\mathrm{d}x_{n+1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i^n \,\mathrm{d}x_{n+1} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

quindi

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} f_i \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}x_{n+1} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1}^n \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i^n \,\mathrm{d}x_{n+1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} g_i \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1}^n \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}},\end{aligned} \tag{1.10}$$

dove

$$g_i := \left(\int_{\mathbb{R}} f_i^n \,\mathrm{d}x_{n+1} \right)^{\frac{1}{n-1}} .$$

Osservato che g_i è indipendente da x_i e da x_{n+1} possiamo applicare l'ipotesi induttiva per ottenere

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} g_i \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_i^{n-1} \,\mathrm{d}\hat{x}_i \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f_i^n \,\mathrm{d}x_{n+1} \,\mathrm{d}\hat{x}_i \right)^{\frac{1}{n}} .\end{aligned} \tag{1.11}$$

Mettendo assieme (1.9), (1.10), (1.11) otteniamo la tesi. □

Teorema 1.1.12 (Sobolev I)**.** *Siano* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < n$. *Allora*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq c(n,p)\|Du\|_{L^p},$$

ove

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto il caso $p = 1$. Per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)\,\mathrm{d}t,$$

quindi per ogni i si ha

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |D_i u|\,\mathrm{d}x_i.$$

Segue che

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} = \prod_{i=1}^n |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} |D_i u(x)|\,\mathrm{d}x_i\right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^n f_i,$$

dove

$$f_i := \left(\int_{\mathbb{R}} |D_i u|\,\mathrm{d}x_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

è una funzione indipendente dalla variabile x_i per ogni i. Per il Lemma 1.1.11 abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i^{n-1}\,\mathrm{d}\hat{x}_i\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |D_i u|\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}\hat{x}_i\right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D_i u|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n-1}},
\end{aligned}$$

cioè la tesi per $p = 1$.

Se $p > 1$ si applica ciò che abbiamo appena provato alla funzione

$$v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ v(x) := |u(x)|^{r+1},$$

per un qualche $r > 0$ da determinare. Osservato che

$$|Dv(x)| = (r+1)|u(x)|^r |Du(x)|,$$

e sfruttando la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{(r+1)n}{n-1}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{n}{n-1}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |Dv| \,\mathrm{d}x \\ =&(r+1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r |Du| \,\mathrm{d}x \leq (r+1)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{rp}{p-1}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Se scegliamo

$$r = \frac{n(p-1)}{n-p},$$

segue

$$\frac{(r+1)n}{n-1} = \frac{rp}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*,$$

quindi la tesi con

$$c(n,p) = \frac{p(n-1)}{n-p}.$$

□

Notazione. Si indica con $W_0^{k,p}(\Omega)$ la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$. In sostanza $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se e solo se esiste una successione $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ tale che

$$u_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).$$

Teorema 1.1.13. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Se $p < n$ allora*

$$u \in L^{p^*}(\Omega),$$

e

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq c(n,p)\|Du\|_{L^p}. \tag{1.12}$$

Dimostrazione. Sia $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ tale che

$$u_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} u \text{ in } W^{1,p}(\Omega).$$

In particolare $(Du_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$ e quindi per il Teorema 1.1.12 si ha

$$\|u_j - u_i\|_{L^{p^*}} \leq c(n,p)\|Du_j - Du_i\|_{L^p},$$

che implica $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $L^{p^*}(\Omega)$. Siccome

$$u_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} u \text{ in } L^p(\Omega),$$

dovrà necessariamente essere

$$u_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} u \text{ in } L^{p^*}(\Omega).$$

Dunque abbiamo

$$\|u_i\|_{L^{p^*}} \leq c(n,p)\|Du_i\|_{L^p},$$
$$u_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} u \text{ in } L^{p^*}(\Omega),$$
$$Du_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} Du \text{ in } L^p(\Omega),$$

e quindi

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq c(n,p)\|Du\|_{L^p}.$$

□

Come ultima nozione sugli spazi di Sobolev proviamo una generalizzazione al caso $u \in W^{1,1}(\Omega)$ della (1.12).

Definizione 1.1.14 (Aperto regolare)**.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che Ω è un *aperto regolare* se

1. Ω è aperto e limitato;

2. $\Omega = \operatorname{int}(\overline{\Omega})$;

3. $\partial\Omega$ è una $(n-1)$-varietà di classe C^1.

Teorema 1.1.15 (Disuguaglianza isoperimetrica)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare. Allora*

$$\min\{\mathscr{L}^n(\Omega), \mathscr{L}^n(\Omega^c)\} \leq c(n)[H^{n-1}(\partial\Omega)]^{1^*}.$$

Teorema 1.1.16 (Disuguaglianza isoperimetrica)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare, $E \subseteq \Omega$ tale che $\Omega \cap \partial E$ sia di classe C^1. Allora*

$$\min\{\mathscr{L}^n(E), \mathscr{L}^n(\Omega \setminus E)\} \leq c(\Omega)[H^{n-1}(\Omega \cap \partial E)]^{1^*}.$$

Teorema 1.1.17 (Formula della coarea)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in C^\infty(\Omega)$, $u \geq 0$. Allora*

$$\int_\Omega |Du| \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} H^{n-1}(\Omega \cap \{u = t\}) \, \mathrm{d}t.$$

Lemma 1.1.18. *Siano $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ misurabile e decrescente, $\alpha \geq 1$. Allora*

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} f(t) \, \mathrm{d}t \leq \left(\int_0^{+\infty} f^{\frac{1}{\alpha}}(t) \, \mathrm{d}t \right)^\alpha.$$

Dimostrazione. Siano $T > 0$, $t \in [0, T]$. Siccome f è decrescente si ha

$$f^{\frac{1}{\alpha}}(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^{\frac{1}{\alpha}}(s) \, \mathrm{d}s,$$

da cui

$$t^{\alpha-1} f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t) \leq \left(\int_0^t f^{\frac{1}{\alpha}}(s) \, \mathrm{d}s \right)^{\alpha-1},$$

che implica

$$\int_0^T t^{\alpha-1} f(t) \, \mathrm{d}t \leq \int_0^T \left(\int_0^t f^{\frac{1}{\alpha}}(s) \, \mathrm{d}s \right)^{\alpha-1} f^{\frac{1}{\alpha}}(t) \, \mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

Osservato che

$$\int_0^t f^{\frac{1}{\alpha}}(s) \, \mathrm{d}s \leq \int_0^T f^{\frac{1}{\alpha}}(t) \, \mathrm{d}t,$$

e inserito ciò nella (1.13) otteniamo

$$\int_0^T t^{\alpha-1} f(t) \, \mathrm{d}t \leq \left(\int_0^T f^{\frac{1}{\alpha}}(t) \, \mathrm{d}t \right)^{\alpha-1} \int_0^T f^{\frac{1}{\alpha}}(t) \, \mathrm{d}t = \left(\int_0^T f^{\frac{1}{\alpha}}(t) \, \mathrm{d}t \right)^\alpha.$$

Dall'arbitrarietà di T si ha la tesi. □

Lemma 1.1.19. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, $u : \Omega \to [0, +\infty)$ misurabile, $p \in [1, +\infty)$. Allora*

$$\int_\Omega u^p \, \mathrm{d}x = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mathscr{L}^n(\{u > t\}) \, \mathrm{d}t$$

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto il caso $p = 1$.

Sia $A \coloneqq \{(t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega \,/\, t \in (0,u(x))\}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{n+1}(A) &= \int_\Omega u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \int_0^{u(x)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \int_{\{u>t\}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathscr{L}^n(\{u>t\})\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Se $p > 1$, utilizzando quanto appena mostrato, si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^p \,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \mathscr{L}^n(\{u^p > t\})\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathscr{L}^n(\{u > t^{\frac{1}{p}}\})\,\mathrm{d}t \\ &= p\int_0^{+\infty} \mathscr{L}^n(\{u > s\}) s^{p-1}\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{1.15}$$

□

Teorema 1.1.20. *Sia $v \in W^{1,1}(B(0,R))$, $v \geq 0$. Supponiamo che valga*

$$\mathscr{L}^n(\{v = 0\}) \geq \frac{1}{2}\mathscr{L}^n(B(0,R)). \tag{1.16}$$

Allora

$$\left(\int_{B(0,R)} v^{1^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1^*}} \leq c(n) \int_{B(0,R)} |Dv|\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Supponiamo $v \in C^\infty(B(0,R))$. Per i Lemma 1.1.18 e 1.1.19 si ha

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)} v^{1^*}\,\mathrm{d}x &= \frac{n}{n-1}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n-1}} \mathscr{L}^n(\{v > t\})\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{n}{n-1}\left(\int_0^{+\infty} \mathscr{L}^n(\{v>t\})^{\frac{1}{1^*}}\,\mathrm{d}t\right)^{1^*}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Dalla (1.16) si ha, per $t \geq 0$,

$$\mathscr{L}^n(\{v \leq t\}) \geq \mathscr{L}^n(\{v = 0\}) \geq \frac{1}{2}\mathscr{L}^n(B(0,R)),$$

da cui segue

$$\mathscr{L}^n(\{v > t\}) \leq \mathscr{L}^n(\{v \leq t\}).$$

Allora dai Teoremi 1.1.16 e 1.1.17 abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{n}{n-1}\left(\int_0^{+\infty}\mathscr{L}^n(\{v>t\})^{\frac{1}{1^*}}\,\mathrm{d}t\right)^{1^*}\\
&\le\frac{n}{n-1}\left(\int_0^{+\infty}c(n)H^{n-1}(\{v=t\})\,\mathrm{d}t\right)^{1^*}\\
&=c(n)\int_{B(0,R)}|Dv|\,\mathrm{d}x. \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

□

1.2 Spazi di Hölder e di Campanato

Definizione 1.2.1 (Spazio di Hölder)**.** Sia $\alpha \in (0,1]$. Chiamiamo *spazio di Hölder di esponente* α l'insieme

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \coloneqq \{f \in C(\Omega) \,/\, \|f\|_{C^{0,\alpha}} < +\infty\},$$

dove

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{C^{0,\alpha}} &= \sup_{x\in\Omega}|f(x)| + [f]_{C^{0,\alpha}},\\
[f]_{C^{0,\alpha}} &\coloneqq \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.
\end{aligned}
$$

Più in generale, se $k \in \mathbb{N}$, definiamo

$$C^{k,\alpha}(\Omega) \coloneqq \{f \in C^k(\Omega) \,/\, \|f\|_{C^{k,\alpha}} < +\infty\},$$

dove

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} \coloneqq \sum_{|\beta|\le k}\sup_{x\in\Omega}\left|D^\beta f(x)\right| + \sum_{|\beta|=k}[D^\beta f]_{C^{0,\alpha}}.$$

Definizione 1.2.2 (Spazio di Campanato)**.** Siano $\lambda > 0$, $1 \le p < +\infty$. Chiamiamo *spazio di Campanato di esponenti* p, λ l'insieme

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \coloneqq \{f \in L^p(\Omega) \,/\, \|f\|^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} < +\infty\},$$

ove

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \coloneqq \|f\|_{L^p} + [f]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}},$$

$$[f]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} := \sup_{\substack{x_0\in\Omega \\ 0<r<d_\Omega}} r^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,r)} |f(x) - f_{x_0,r}|^p \, \mathrm{d}x,$$

e

$$d_\Omega := \operatorname{diam}(\Omega), \tag{1.19}$$

$$\Omega(x_0, r) := \Omega \cap B(x_0, r), \tag{1.20}$$

$$f_{x_0,r} := \fint_{\Omega(x_0,r)} f(x) \, \mathrm{d}x. \tag{1.21}$$

Proposizione 1.2.3. *Valgono le seguenti:*

1. $[\cdot]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}$ *è una seminorma su* $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$;

2. $\mathcal{L}^{q,\mu}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ *se* Ω *è limitato,* $p \leq q$ e $\frac{n-\lambda}{p} \geq \frac{n-\mu}{q}$;

3. $C^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Definizione 1.2.4. Diciamo che Ω non presenta *cuspidi esterne* se esiste $c_* > 0$ tale che

$$\mathscr{L}^n(\Omega(x_0, r)) \geq c_* \omega_n r^n, \tag{1.22}$$

per ogni $x_0 \in \overline{\Omega}$, per ogni $r \in (0, d_\Omega)$.

Osservazione 1.2.5. Se la frontiera di Ω è Lipschitziana allora Ω non possiede né cuspidi esterne, né interne.

Teorema 1.2.6 (Campanato)**.** *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto limitato senza cuspidi esterne,* $\lambda > 0$, $1 \leq p < +\infty$. *Se* $n < \lambda < n + p$ *allora lo spazio di Campanato* $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ *è isomorfo allo spazio di Hölder* $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *per* $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$.

La dimostrazione del teorema di Campanato si basa un importante risultato, dovuto a Lebesgue, che enunciamo di seguito.

Definizione 1.2.7. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $x \in \Omega$. Diciamo che x è un *punto di Lebesgue* per u se

$$\lim_{r\to 0^+} \fint_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \, \mathrm{d}y = 0. \tag{1.23}$$

Osservazione 1.2.8. Se x è un punto di Lebesgue per u allora

$$u(x) = \lim_{r\to 0^+} \fint_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Osservazione 1.2.9. Se u è continua in x allora x è un punto di Lebesgue per u.

Teorema 1.2.10 (Lebesgue)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Allora quasi ogni punto di Ω è un punto di Lebesgue per u, cioè*

$$\mathscr{L}^n(\{x \in \Omega \,/\, x \text{ non è un punto di Lebesgue per } u\}) = 0.$$

Siamo ora pronti a dimostrare il Teorema 1.2.6.

Dimostrazione del Teorema 1.2.6. Il punto (3) della Proposizione 1.2.3 ci assicura già una inclusione. Dimostriamo ora che vale anche $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \subseteq C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Sia $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Divideremo la dimostrazione in due passi: costruiremo una funzione v nelle classe di equivalenza di u che sarà il nostro candidato ad essere Hölderiana e poi mostreremo l'effettiva regolarità di v.

Siano $R > 0$, $x \in \Omega$ fissati e studiamo la successione $\left(u_{x,\frac{R}{2^i}}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ definita da

$$u_{x,\frac{R}{2^i}} := \fint_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Per ogni $0 < r < \rho < d_\Omega$ vale

$$\begin{aligned}
c_*\omega_n r^n |u_{x,r} - u_{x,\rho}|^p &\le \int_{\Omega(x,r)} |u_{x,r} - u_{x,\rho}|^p\,\mathrm{d}y \\
&\le 2^{p-1}\left(\int_{\Omega(x,r)} |u_{x,r} - u(y)|^p\,\mathrm{d}y + \int_{\Omega(x,r)} |u(y) - u_{x,\rho}|^p\,\mathrm{d}y\right) \\
&\le 2^{p-1}[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}(r^\lambda + \rho^\lambda) \le 2^p[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}\rho^\lambda,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

dove c_* è la costante di (1.22). Ne segue

$$|u_{x,r} - u_{x,\rho}| \le c[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} r^{-\frac{n}{p}} \rho^{\frac{\lambda}{p}} = c[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{n}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}.$$

Sostituiamo ora $\frac{R}{2^i}$, $\frac{R}{2^{i+1}}$ rispettivamente al posto di ρ, r ed otteniamo

$$\left|u_{x,\frac{R}{2^{i+1}}} - u_{x,\frac{R}{2^i}}\right| \le c[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \left(\frac{R}{2^i}\right)^{\frac{\lambda-n}{p}} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0. \tag{1.25}$$

La successione $\left(u_{x,\frac{R}{2^i}}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ è quindi di Cauchy, pertanto convergente. Possiamo perciò definire la funzione

$$v : \Omega \to \mathbb{R},\ v(x) := \lim_{i\to+\infty} u_{x,\frac{R}{2^i}} = \lim_{i\to+\infty} \fint_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} u(y)\,\mathrm{d}y, \tag{1.26}$$

e per il Teorema di Lebesgue si ha $u = v$ q.o. su Ω. Osserviamo ora che per ogni i tale che $B(x,\frac{R}{2^i}) \subseteq \Omega$ si ha

$$\begin{aligned}
&\fint_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} \left|u(y) - u_{x,\frac{R}{2^i}}\right|^p \mathrm{d}y = \frac{1}{\mathscr{L}^n(\Omega(x,\frac{R}{2^i}))} \int_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} \left|u(y) - u_{x,\frac{R}{2^i}}\right|^p \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{R}{2^i}\right)^{\lambda} \frac{1}{\mathscr{L}^n(B(x,\frac{R}{2^i}))} \left(\frac{R}{2^i}\right)^{-\lambda} \int_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} \left|u(y) - u_{x,\frac{R}{2^i}}\right|^p \mathrm{d}y \\
&\le \left(\frac{R}{2^i}\right)^{\lambda} \frac{1}{\omega_n \left(\frac{R}{2^i}\right)^n} [u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \frac{R^{\lambda-n}}{(2^{\lambda-n})^i} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0,
\end{aligned} \tag{1.27}$$

perché per ipotesi $\lambda > n$. Ne segue che

$$\fint_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} |u(y) - v(x)|^p \,\mathrm{d}y \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \tag{1.28}$$

in quanto

$$\begin{aligned}
&\fint_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} |u(y) - v(x)|^p \,\mathrm{d}y \\
&\le 2^{p-1} \fint_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} \left|u(y) - u_{x,\frac{R}{2^i}}\right|^p \mathrm{d}y + 2^{p-1} \fint_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} \left|u_{x,\frac{R}{2^i}} - v(x)\right|^p \mathrm{d}y \\
&= 2^{p-1} \fint_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} \left|u(y) - u_{x,\frac{R}{2^i}}\right|^p \mathrm{d}y + 2^{p-1} \left|u_{x,\frac{R}{2^i}} - v(x)\right|^p \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

per la (1.27) e la (1.26). D'altra parte

$$c_* \omega_n r^n \le \mathscr{L}^n(\Omega(x,r)) \le \omega_n r^n, \tag{1.30}$$

se $r \in \left(\frac{R}{2^{i+1}}, \frac{R}{2^i}\right)$. Allora, mettendo assieme (1.28) e (1.30) si ha

$$\begin{aligned}
\fint_{\Omega(x,r)} |u(y) - v(x)|^p \,\mathrm{d}y &= \frac{1}{\mathscr{L}^n(\Omega(x,r))} \int_{\Omega(x,r)} |u(y) - v(x)|^p \,\mathrm{d}y \\
&\le \frac{\mathscr{L}^n(\Omega(x,\frac{R}{2^i}))}{\mathscr{L}^n(\Omega(x,\frac{R}{2^{i+1}}))} \fint_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} |u(y) - v(x)|^p \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{2^n}{c_*} \fint_{\Omega(x,\frac{R}{2^i})} |u(y) - v(x)|^p \,\mathrm{d}y \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

da cui
$$\int_{\Omega(x,r)} |u(y) - v(x)|^p \, \mathrm{d}y \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0.$$
Osserviamo che la funzione v è indipendente dalla scelta del raggio iniziale R, purché R sia positivo.

Ora che abbiamo determinato il nostro candidato v mostriamo che $v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Per ogni $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sommando da 0 a $d-1$ nella (1.25) risulta
$$\begin{aligned} \left| u_{x,\frac{R}{2^d}} - u_{x,R} \right| &\leq \sum_{i=0}^{d-1} \left| u_{x,\frac{R}{2^{i+1}}} - u_{x,\frac{R}{2^i}} \right| \leq c[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^{\frac{\lambda-n}{p}} \sum_{i=0}^{d-1} 2^{-\frac{i(\lambda-n)}{p}} \\ &\leq c[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^{\frac{\lambda-n}{p}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{\lambda-n}{p}}} \right)^i \leq c[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^{\frac{\lambda-n}{p}}, \end{aligned} \tag{1.32}$$
per la convergenza della serie geometrica. Passando al limite per $d \to +\infty$ abbiamo
$$|v(x) - u_{x,R}| \leq c[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^{\alpha},$$
dove
$$\alpha = \frac{\lambda - n}{p}.$$
Pertanto se $x, y \in \Omega$, scelto $R = 2|x-y|$ si ha
$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| &\leq |v(x) - u_{x,R}| + |u_{x,R} - u_{y,R}| + |u_{y,R} - v(y)| \\ &\leq c|x-y|^{\alpha} + |u_{x,R} - u_{y,R}|. \end{aligned} \tag{1.33}$$
Stimiamo $|u_{x,R} - u_{y,R}|$. Data la nostra scelta di R segue che
$$\Omega\left(y, \frac{R}{2}\right) \subseteq \Omega(x, R),$$
da cui
$$\begin{aligned} c_* \omega_n \frac{R^n}{2^n} |u_{x,R} - u_{y,R}|^p &\leq \int_{\Omega(y,\frac{R}{2})} |u_{x,R} - u_{y,R}|^p \, \mathrm{d}z \\ \leq 2^{p-1} \left(\int_{\Omega(x,R)} |u - u_{x,R}|^p \, \mathrm{d}z + \int_{\Omega(y,R)} |u - u_{y,R}|^p \, \mathrm{d}z \right) &\leq 2^p [u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^{\lambda}. \end{aligned} \tag{1.34}$$
In conclusione
$$|u_{x,R} - u_{y,R}| \leq c[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^{\alpha} \leq c|x-y|^{\alpha}. \tag{1.35}$$
Mettendo assieme la (1.33) e la (1.35) abbiamo la tesi. □

1.3 Funzioni cut-off

In quest'ultima sezione di prerequisiti definiremo che cos'è una funzione cut-off e ne costruiremo esplicitamente una, in quanto tale strumento risulterà essere di grande utilità nei capitoli successivi.

Definizione 1.3.1 (Mollificatore)**.** Chiamiamo *mollificatore* ogni funzione

$$\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

tale che

1. $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, +\infty))$;
2. $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq \overline{B(0,1)}$;
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\overline{B(0,1)}} \omega(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Esempio 1.3.2. Sia

$$c = \int_{B(0,1)} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) \mathrm{d}x \in (0, +\infty).$$

Allora la funzione

$$\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{c}\exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

è un mollificatore.

Notazione. Se ω è un mollificatore poniamo, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \omega_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{1.36}$$

Definizione 1.3.3 (ε-mollificata)**.** Siano $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$. Chiamiamo ε*-mollificata* di f la funzione

$$f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f_\varepsilon(x) := (f * \omega_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\omega_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y.$$

Osserviamo che la definizione è ben posta in quanto l'integrale viene calcolato su $\mathrm{supp}(\omega_\varepsilon)$ che è compatto.

Proposizione 1.3.4. *Siano* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$. *Allora*

$$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Inoltre, se $\mathrm{supp}(f)$ *è compatto anche* $\mathrm{supp}(f_\varepsilon)$ *lo è. Precisamente*

$$\mathrm{supp}(f_\varepsilon) \subseteq \mathrm{supp}(f) + \overline{B(0,\varepsilon)}.$$

Definizione 1.3.5 (Funzione cut-off)**.** Siano $K \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, K compatto, Ω aperto. Chiamiamo *funzione cut-off* tra K e Ω ogni funzione

$$\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

tale che

1. $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$;

2. $\eta = 1$ in un aperto contenente K;

3. $\mathrm{supp}(\eta) \subseteq \Omega$.

Esempio 1.3.6. Dati $0 < r < R$, costruiamo una funzione cut-off η tra $B(0,r)$ e $B(0,R)$ tale che

$$|D\eta| \leq \frac{c}{R-r},$$

dove $c > 1$ arbitraria. Iniziamo considerando una costante

$$0 < \varepsilon < \frac{R-r}{4},$$

e successivamente scegliamo due valori a, b tali che

$$0 < a - 2\varepsilon < r < a - \varepsilon < b + \varepsilon < R < b + 2\varepsilon.$$

In particolare vale

$$r + \varepsilon < a < r + 2\varepsilon < R - 2\varepsilon < b < R - \varepsilon. \tag{1.37}$$

Definiamo la funzione

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, h(t) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < a \\ \dfrac{|t| - b}{a - b} & \text{se } a \leq |t| \leq b \\ 0 & \text{se } |t| > b. \end{cases}$$

Osserviamo che vale

$$h'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| < a \\ \dfrac{\operatorname{sgn}(t)}{a - b} & \text{se } a < |t| < b \\ 0 & \text{se } |t| > b. \end{cases}$$

Poniamo ora $g \coloneqq h_\varepsilon$. Esplicitamente si ha

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < a - \varepsilon \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(t - s)\omega_\varepsilon(s)\, \mathrm{d}s & \text{se } a - \varepsilon \leq |t| \leq b + \varepsilon \\ 0 & \text{se } |t| > b + \varepsilon, \end{cases}$$

e

$$g'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| < a - \varepsilon \\ D_t \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(t - s)\omega_\varepsilon(s)\, \mathrm{d}s \right) & \text{se } a - \varepsilon \leq |t| \leq b + \varepsilon \\ 0 & \text{se } |t| > b + \varepsilon, \end{cases}$$

con ω_ε come nella (1.36). Sia ora $|t| \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Abbiamo, usando il teorema di scambio tra derivata ed integrale,

$$g'(t) = D_t \left(\int_{\mathbb{R}} h(t - s)\omega_\varepsilon(s)\, \mathrm{d}s \right) = \int_{\mathbb{R}} D_t[h(t - s)]\omega_\varepsilon(s)\, \mathrm{d}s,$$

da cui segue

$$|g'(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |h'(t - s)|\omega_\varepsilon(s)\, \mathrm{d}s \leq \frac{1}{b - a} \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(s)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{b - a}.$$

Usando la (1.37) arriviamo alla maggiorazione

$$|g'(t)| \leq \frac{1}{b - a} \leq \frac{1}{R - r - 4\varepsilon} = \frac{c}{R - r},$$

dove

$$c = \frac{R - r}{R - r - 4\varepsilon} > 1.$$

Infine la funzione cut-off cercata è

$$\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \eta(x) \coloneqq g(|x|).$$

Capitolo 2

Limitatezza delle soluzioni

Adesso che sono stati fatti i dovuti richiami possiamo concentrarci sull'argomento centrale della trattazione. Ricordiamo che siamo interessati allo studio della regolarità delle soluzioni deboli dell'equazione ellittica lineare a coefficienti misurabili, simmetrici e limitati in forma di divergenza

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i \left(A_{ij}(x) D_j u \right) = 0, \tag{2.1}$$

che si annullano lungo la frontiera di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Ricordiamo inoltre che essendo l'equazione ellittica a coefficienti limitati esistono due costanti $0 < \lambda \leq \Lambda$ tali che

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2,$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ e per quasi ogni $x \in \Omega$. D'ora in avanti, anche se non specificato esplicitamente, si supporranno sempre verificate tali ipotesi.

2.1 Classe di De Giorgi

Definizione 2.1.1 (Soluzione debole). Diciamo che una funzione u è una *soluzione debole* di (2.1) se

1. $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$;

2. Per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, u soddisfa

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) D_j u D_i \phi \, \mathrm{d}x = 0,$$

che possiamo riscrivere in forma vettoriale come

$$\int_\Omega \langle A(x)Du, D\phi \rangle \, \mathrm{d}x = 0.$$

Inoltre diciamo che la funzione u è una *sotto-soluzione* della (2.1) se vale (1) e se u soddisfa

$$\int_\Omega \langle A(x)Du, D\phi \rangle \, \mathrm{d}x \leq 0,$$

per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\phi \geq 0$ q.o. su Ω. Similmente per la definizione di *sopra-soluzione.*

Definizione 2.1.2 (Insieme di sopralivello)**.** Siano $x \in \Omega$, $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq \Omega$. Chiamiamo *insieme di sopralivello* k di u in $B(x, r)$ l'insieme

$$A(x, k, r) := \{u > k\} \cap B(x, r),$$

dove non indicheremo esplicitamente la dipendenza da x quando ciò non creerà confusione.

Teorema 2.1.3 (Disuguaglianza di Caccioppoli)**.** *Siano u una soluzione debole di (2.1), $k \in \mathbb{R}$, $B(x, r) \Subset B(x, R) \Subset \Omega$. Allora*

$$\int_{A(k,r)} |Du|^2 \, \mathrm{d}y \leq \frac{c\Lambda^2}{\lambda^2} \frac{1}{(R-r)^2} \int_{A(k,R)} (u-k)^2 \, \mathrm{d}y. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Sia η una funzione cut-off tra $B(x, r)$ e $B(x, R)$ tale che

$$|D\eta| \leq \frac{2}{R-r}. \tag{2.3}$$

Se applichiamo la formulazione debole della nostra equazione differenziale con funzione test

$$\phi = \eta^2 (u-k)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \langle A(y)Du, D\phi\rangle \,\mathrm{d}y = \int_\Omega \langle A(y)Du, D[\eta^2(u-k)^+]\rangle \,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_\Omega \eta(u-k)^+\langle A(y)Du, D\eta\rangle \,\mathrm{d}y + \int_\Omega \eta^2\langle A(y)Du, D(u-k)^+\rangle \,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Osservato che

$$\eta = 0 \text{ al di fuori di } B(x,R),$$

e che

$$D(u-k)^+, (u-k)^+ = 0 \text{ su } \{u \le k\},$$

risulta

$$0 = 2\int_{A(k,R)} \eta(u-k)\langle A(y)Du, D\eta\rangle \,\mathrm{d}y + \int_{A(k,R)} \eta^2\langle A(y)Du, Du\rangle \,\mathrm{d}y.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{A(k,R)} \eta^2\langle A(y)Du, Du\rangle \,\mathrm{d}y &= -2\int_{A(k,R)} \eta(u-k)\langle A(y)Du, D\eta\rangle \,\mathrm{d}y \\ &\le 2\int_{A(k,R)} \eta(u-k)\|A(y)\||Du||D\eta| \,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Utilizzando ora la disuguaglianza di Young, la (2.3) e ricordando

$$\|A\| \le \Lambda,$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{A(k,R)} \eta^2\langle A(y)Du, Du\rangle \,\mathrm{d}y &\le 2\Lambda \int_{A(k,R)} \eta(u-k)|Du|\frac{2}{R-r} \,\mathrm{d}y \\ \le \frac{\Lambda}{\varepsilon}\int_{A(k,R)} \eta^2|Du|^2 \,\mathrm{d}y &+ \frac{4\varepsilon\Lambda}{(R-r)^2}\int_{A(k,R)} (u-k)^2 \,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.6}$$

In particolare, scelto

$$\varepsilon = \frac{2\Lambda}{\lambda},$$

la (2.6) diventa

$$\int_{A(k,R)} \eta^2\langle A(y)Du, Du\rangle \,\mathrm{d}y \le \frac{\lambda}{2}\int_{A(k,R)} \eta^2|Du|^2 \,\mathrm{d}y + \frac{8\Lambda^2}{\lambda(R-r)^2}\int_{A(k,R)} (u-k)^2 \,\mathrm{d}y.$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
&\frac{8\Lambda^2}{\lambda(R-r)^2}\int_{A(k,R)}(u-k)^2\,\mathrm{d}y \\
&\geq \int_{A(k,R)}\eta^2\langle A(y)Du,Du\rangle\,\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{2}\int_{A(k,R)}\eta^2|Du|^2\,\mathrm{d}y \\
&\geq \lambda\int_{A(k,R)}\eta^2|Du|^2\,\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{2}\int_{A(k,r)}\eta^2|Du|^2\,\mathrm{d}y\geq\frac{\lambda}{2}\int_{A(k,R)}|Du|^2\,\mathrm{d}y, \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

perché $\eta = 1$ su $A(k, r)$. Moltiplicando entrambi i membri per $\frac{2}{\lambda}$ si ha la (2.2) con $c = 16$. □

Definizione 2.1.4 (Classe di De Giorgi)**.** Chiamiamo *classe di De Giorgi* $DG_+(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ per cui esiste $c \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$
\int_{A(k,r)}|Du|^2\,\mathrm{d}y\leq\frac{c}{(R-r)^2}\int_{A(k,R)}(u-k)^2\,\mathrm{d}y, \qquad (2.8)
$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$, per ogni $B(x,r) \Subset B(x,R) \Subset \Omega$. In tal caso definiamo la *costante di De Giorgi* $c^+_{DG}(u)$ come la più piccola costante maggiore di 1 per cui vale la (2.8).

Inoltre chiamiamo *classe di De Giorgi* $DG_-(\Omega)$ e *costante di De Giorgi* $c^-_{DG}(u)$ gli analoghi di $DG_+(\Omega)$ e $c^+_{DG}(u)$ dove la (2.8) è sostituita da

$$
\int_{\{u<k\}\cap B(x,r)}|Du|^2\,\mathrm{d}y\leq\frac{c}{(R-r)^2}\int_{\{u<k\}\cap B(x,r)}(u-k)^2\,\mathrm{d}y.
$$

Infine poniamo

$$
DG(\Omega) := DG_+(\Omega)\cap DG_-(\Omega), \qquad (2.9)
$$

$$
c_{DG}(u) := \max(c^+_{DG}(u), c^-_{DG}(u)). \qquad (2.10)
$$

Osservazione 2.1.5. Dalla dimostrazione del Teorema 2.1.3 segue che non è necessario che la funzione u sia soluzione di (2.1) affinché u appartenga a $DG_+(\Omega)$. Risulta infatti sufficiente che u sia sotto-soluzione di (2.1) e in particolare vale

$$
c^+_{DG}(u)\leq 16\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}.
$$

Osservazione 2.1.6. La mappa

$$\begin{aligned} DG_+(\Omega) &\to DG_-(\Omega) \\ u &\mapsto -u \end{aligned}$$

è una biezione e vale

$$c^+_{DG}(u) = c^-_{DG}(-u).$$

2.2 Locale limitatezza degli elementi della classe di De Giorgi

Notazioni. Introduciamo le seguenti notazioni. Data $u \in DG_+(\Omega)$ poniamo

$$U(h,r) := \int_{A(h,r)} (u(y)-h)^2 \,\mathrm{d}y, \tag{2.11}$$

$$V(h,r) := \mathscr{L}^n(A(h,r)). \tag{2.12}$$

Teorema 2.2.1. *Valgono le seguenti:*

1. *U, V sono funzioni crescenti in r e decrescenti in h;*
2. *Per ogni $h > k$, per ogni $0 < r < R$ valgono le disuguaglianze*

$$V(h,r) \leq \frac{1}{(h-k)^2} U(k,r),$$

$$U(k,r) \leq \frac{c(n)c^+_{DG}(u)}{(R-r)^2} U(k,R) V(k,r)^{\frac{2}{n}}.$$

Dimostrazione. Il primo punto segue dal fatto che

$$\begin{aligned} U(h,r) = \int_{A(h,r)} (u(y)-h)^2 \,\mathrm{d}y &\leq \int_{A(h,r)} (u(y)-k)^2 \,\mathrm{d}y \leq \int_{A(k,r)} (u(y)-k)^2 \,\mathrm{d}y \\ &\leq \int_{A(k,R)} (u(y)-k)^2 \,\mathrm{d}y = U(k,R), \end{aligned} \tag{2.13}$$

se $h > k$ e se $0 < r < R$. Analogamente per V.

Dimostriamo ora la seconda parte. Si ha

$$\begin{aligned}(h-k)^2 V(h,r) &= (h-k)^2 \mathscr{L}^n(A(h,r)) = \int_{A(h,r)} (h-k)^2 \,\mathrm{d}y \\ &\le \int_{A(h,r)} (u(y)-k)^2 \,\mathrm{d}y \le \int_{A(k,r)} (u(y)-k)^2 \,\mathrm{d}y = U(k,R),\end{aligned} \tag{2.14}$$

da cui segue la prima disuguaglianza. Sia η una funzione cut-off tra $B(x,r)$ e $B(x,\frac{r+R}{2})$ tale che

$$|D\eta| \le \frac{4}{R-r}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\int_{B(x,\frac{r+R}{2})} \eta^2 \big|D[(u(y)-k)^+]\big|^2 \,\mathrm{d}y &\le \int_{A(k,\frac{r+R}{2})} |D(u(y)-k)|^2 \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{A(k,\frac{r+R}{2})} |Du|^2 \,\mathrm{d}y \\ &\le \frac{c^+_{DG}(u)}{(R-\frac{R+r}{2})^2} U(k,R) = \frac{4c^+_{DG}(u)}{(R-r)^2} U(k,R),\end{aligned} \tag{2.15}$$

e che

$$\begin{aligned}&\int_{B(x,\frac{r+R}{2})} ((u(y)-k)^+)^2 |D\eta(y)|^2 \,\mathrm{d}y \le \frac{16}{(R-r)^2} \int_{B(x,\frac{r+R}{2})} ((u(y)-k)^+)^2 \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{16}{(R-r)^2} \int_{A(k,\frac{r+R}{2})} (u(y)-k)^2 \,\mathrm{d}y \le \frac{16}{(R-r)^2} U(k,R).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Utilizzando la maggiorazione

$$(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2),$$

si ha

$$\begin{aligned}&\int_{B(x,\frac{r+R}{2})} \big|D[\eta(y)(u(y)-k)^+]\big|^2 \,\mathrm{d}y \\ &\le \int_{B(x,\frac{r+R}{2})} 2[\eta(y)^2 \big|D(u(y)-k)^+\big|^2 + ((u(y)-k)^+)^2 |D\eta(y)|^2] \,\mathrm{d}y \\ &\le \left(\frac{8c^+_{DG}(u)}{(R-r)^2} + \frac{32}{(R-r)^2}\right) U(k,R) \le \frac{40c^+_{DG}(u)}{(R-r)^2} U(k,R).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Adesso applichiamo il Teorema di immersione di Sobolev 1.1.16 alla funzione $\eta(u-k)^+$ per gli esponenti $2, 2^*$ ed otteniamo

$$\left(\int_{B(x,\frac{r+R}{2})} |\eta(y)(u(y)-k)^+|^{2^*}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2^*}}$$
$$\leq c(n)\left(\int_{B(x,\frac{r+R}{2})} \left|D[\eta(y)(u(y)-k)^+]\right|^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.18}$$

quindi

$$\left(\int_{A(k,r)} (u(y)-k)^{2^*}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{c(n)c^+_{DG}(u)}{(R-r)^2}U(k,R). \tag{2.19}$$

In conclusione, utilizzando la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$U(k,r) = \int_{A(k,r)} (u(y)-k)^2\,\mathrm{d}y \leq \left(\int_{A(k,r)} (u(y)-k)^{2^*}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{2}{2^*}} V(k,r)^{\frac{2}{n}}$$
$$\leq \frac{c(n)c^+_{DG}(u)}{(R-r)^2}U(k,R)V(k,r)^{\frac{2}{n}}. \tag{2.20}$$

□

Corollario 2.2.2. *Per ogni $h > k$, $0 < r < R$ valgono*

$$V(h,r) \leq \frac{1}{(h-k)^2}U(k,R), \tag{2.21}$$

$$U(h,r) \leq \frac{c(n)c^+_{DG}(u)}{(R-r)^2}U(k,R)V(k,R)^{\frac{2}{n}}. \tag{2.22}$$

Dimostrazione. Conseguenza diretta del teorema precedente data la monotonia di U e V. □

Risulta possibile unire queste due disuguaglianze per ottenere la maggiorazione della singola quantità

$$\varphi(h,r) \coloneqq U(h,r)^{\xi}V(h,r)^{\eta},$$

dove $\xi > 0$, $\eta > 0$ verranno determinati in seguito.

Dalle (2.21), (2.22), espandendo la scrittura otteniamo

$$\varphi(h,r) \leq \frac{C^{\xi}}{(h-k)^{2\eta}}\frac{1}{(R-r)^{2\xi}}U(k,R)^{\xi+\eta}V(k,R)^{\frac{2\xi}{n}}$$

con $C = c(n)c^+_{DG}(u)$.

Il nostro obiettivo è quello di stimare il comportamento di φ e un primo passo consiste nello scrivere il secondo termine della maggiorazione come una potenza di φ stesso. Cerchiamo perciò un esponente $\theta > 0$ tale che

$$U^{\xi+\eta}V^{\frac{2\xi}{n}} = U^{\theta\xi}V^{\theta\eta} = \left(U^{\xi}V^{\eta}\right)^{\theta} = \varphi^{\theta}.$$

A tal fine bisogna determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \xi + \eta = \theta\xi \\ \frac{2\xi}{n} = \theta\eta. \end{cases} \tag{2.23}$$

Siccome ξ, η sono parametri positivi arbitrari non è restrittivo supporre $\eta = 1$ e risolvere il sistema nelle incognite θ, ξ. Fatto ciò si ottengono

$$\theta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{n}}, \tag{2.24}$$

$$\xi = \frac{n\theta}{2} \tag{2.25}$$

e per questa scelta di θ è lecito scrivere

$$\varphi(h,r) \leq \frac{C^{\xi}}{(h-k)^2}\frac{1}{(R-r)^{2\xi}}\varphi(k,R)^{\theta} = \frac{C^{\frac{n\theta}{2}}}{(h-k)^2}\frac{1}{(R-r)^{n\theta}}\varphi(k,R)^{\theta}. \tag{2.26}$$

Osservazione 2.2.3. La (2.24) ci dice che θ dipende esclusivamente da n. Inoltre

$$\theta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{n}} > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 1.$$

Teorema 2.2.4. *Siano $u \in DG_+(\Omega)$, $B(x, R_0) \Subset \Omega$. Allora per ogni $h_0 \in \mathbb{R}$ esiste $d = d(h_0, R_0, c^+_{DG}(u))$ tale che*

$$\varphi\left(h_0 + d, \frac{R_0}{2}\right) = 0.$$

Inoltre è possibile scegliere d soddisfacente

$$d^2 = c(n)c^+_{DG}(u)^{\frac{n\theta}{2}}\frac{\varphi(h_0, R_0)^{\theta-1}}{R_0^{n\theta}}.$$

Dimostrazione. Definiamo le successioni $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}, (R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ come segue:

$$k_i \coloneqq h_0 + d - \frac{d}{2^i} \xrightarrow[i\to+\infty]{} h_0 + d,$$

$$R_i \coloneqq \frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{2^{i+1}} \xrightarrow[i\to+\infty]{} \frac{R_0}{2},$$

ove $d > 0$ verrà scelto successivamente. In particolare osserviamo che $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è crescente mentre $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Ora, dato che

$$k_{i+1} - k_i = \frac{d}{2^{i+1}},$$

$$R_i - R_{i+1} = \frac{R_0}{2^{i+2}},$$

per la (2.26) si ha

$$\varphi(k_{i+1}, R_{i+1}) \leq \varphi(k_i, R_i)\left[\varphi(k_i, R_i)^{\theta-1} C^{\xi}\left(\frac{2^{i+2}}{R_0}\right)^{2\xi}\left(\frac{2^{i+1}}{d}\right)^2\right].$$

Sia $\mu \in \mathbb{R}$ e poniamo

$$\psi_i \coloneqq 2^{\mu i}\varphi(k_i, R_i).$$

La maggiorazione precedente può essere riscritta in funzione di ψ_i come

$$\psi_{i+1} \leq \psi_i\left(2^{\mu}\frac{2^{i(2\xi+2)}}{2^{\mu i(\theta-1)}}\frac{C^{\xi}2^{4\xi+2}}{R_0^{2\xi}d^2}\psi_i^{\theta-1}\right).$$

Con la scelta

$$\mu = \frac{2\xi+2}{\theta-1} > 0,$$

si semplifica la frazione

$$\frac{2^{i(2\xi+2)}}{2^{\mu i(\theta-1)}} = 1,$$

ottenendo quindi

$$\psi_{i+1} \leq \psi_i\left(2^{\mu}\frac{C^{\xi}2^{4\xi+2}}{R_0^{2\xi}d^2}\psi_i^{\theta-1}\right).$$

Inoltre, scegliamo d che soddisfi

$$2^{\mu}\frac{C^{\xi}2^{4\xi+2}}{R_0^{2\xi}d^2}\psi_0^{\theta-1} = 1. \tag{2.27}$$

Allora abbiamo

$$\psi_1 \leq \psi_0,$$

che implica

$$\psi_2 \leq \psi_0,$$

in quanto

$$\psi_2 \leq \psi_1 \left(2^\mu \frac{C^\xi 2^{4\xi+2}}{R_0^{2\xi} d^2} \psi_1^{\theta-1} \right) \leq \psi_0 \left(2^\mu \frac{C^\xi 2^{4\xi+2}}{R_0^{2\xi} d^2} \psi_0^{\theta-1} \right) = \psi_0.$$

Osserviamo che quest'ultima maggiorazione è possibile perché $\theta - 1 > 0$. Dunque iterando tale ragionamento un numero finito di volte si dimostra che vale la maggiorazione

$$\psi_i \leq \psi_0,$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$. Pertanto

$$\varphi(k_i, R_i) \leq 2^{-\mu i} \varphi(k_0, R_0) \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0.$$

D'altra parte, per monotonia, si ha

$$0 \leq \varphi\left(h_0 + d, \frac{R_0}{2} \right) \leq \varphi\left(k_i, \frac{R_0}{2} \right) \leq \varphi(k_i, R_i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0,$$

cioè la tesi. In particolare osserviamo che per la (2.25), la condizione (2.27) è soddisfatta se

$$d^2 \geq \frac{c(n) c_{DG}^+(u)^{\frac{n\theta}{2}}}{R_0^{2\xi}} \psi_0^{\theta-1} = c(n) c_{DG}^+(u)^{\frac{n\theta}{2}} \frac{\varphi(h_0, R_0)^{\theta-1}}{R_0^{n\theta}}.$$

□

Osservazione 2.2.5. Si ha

$$\varphi\left(h_0 + d, \frac{R_0}{2} \right) = 0 \tag{2.28}$$

se e solo se

$$U\left(h_0 + d, \frac{R_0}{2} \right) = 0$$

oppure

$$V\left(h_0 + d, \frac{R_0}{2} \right) = 0.$$

Nel primo caso, ricordando la (2.11), deve necessariamente essere

$$\mathscr{L}^n\left(A\left(h_0+d,\frac{R_0}{2}\right)\right)=0.$$

Nel secondo, ricordando la (2.12), giungiamo alla stessa conclusione. Pertanto (2.28) equivale a

$$u\leq h_0+d \text{ q.o. in } B\left(x,\frac{R_0}{2}\right).$$

Siamo pronti ad enunciare il risultato più significativo del capitolo, ovvero il passaggio da una stima L^2 ad una stima L^∞ delle funzioni appartenenti alla classe di De Giorgi.

Corollario 2.2.6. *Sia* $u\in DG_+(\Omega)$. *Allora vale*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B(x,\frac{R}{2})} u\leq h+\tilde{c}(n)c^+_{DG}(u)^{\frac{n\theta}{4}}\left(\frac{U(h,R)}{\omega_n R^n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{V(h,R)}{R^n}\right)^{\frac{\theta-1}{2}} \tag{2.29}$$

per ogni $B(x,R)\subseteq\Omega$ *e per ogni* $h\in\mathbb{R}$.

Dimostrazione. La tesi è conseguenza diretta del Teorema 2.2.4 dopo aver espanso $\varphi(h_0,R_0)^{\theta-1}$ e dopo essersi ricordati che η,ξ,θ verificano le condizioni

$$\eta=1,$$

$$\xi+1=\theta\xi.$$

□

Osservazione 2.2.7. Nel caso in cui $h=0$ il corollario ci dice che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B(x,\frac{R}{2})} u\leq a\left(\fint_{B(x,R)}u^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

dove a può essere stimata in termini di n e $c^+_{DG}(u)$. Similmente, nel caso in cui $u\in DG_-(\Omega)$ vale

$$-\operatorname*{ess\,inf}_{B(x,\frac{R}{2})} u\leq b\left(\fint_{B(x,R)}u^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

con b dipendente da n e $c^-_{DG}(u)$. Pertanto se $u \in DG(\Omega)$ esiste $c = c(n, c_{DG}(u))$ tale che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B(x,\frac{R}{2})} u - \operatorname*{ess\,inf}_{B(x,\frac{R}{2})} u \leq c \left(\fint_{B(x,R)} u^2 \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}}$$

da cui la locale limitatezza di u.

Capitolo 3

Regolarità Hölderiana

3.1 Oscillazione essenziale

Questo capitolo verterà attorno allo studio di una nuova quantità legata alla funzione u.

Definizione 3.1.1 (Oscillazione essenziale)**.** Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile, $B(x,r) \subseteq \Omega$. Chiamiamo *oscillazione essenziale* di u su $B(x,r)$ il valore

$$\omega(B(x,r))(u) := \operatorname*{ess\,sup}_{B(x,r)} u - \operatorname*{ess\,inf}_{B(x,r)} u.$$

Quando non creerà confusione indicheremo l'oscillazione di u semplicemente con $\omega_r(u)$.

Teorema 3.1.2. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $c \geq 0$, $\alpha \in (0,1]$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile. Supponiamo che per ogni $B(x,r) \subseteq \Omega$ valga $\omega_r(u) \leq cr^\alpha$. Allora*

$$u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega).$$

Dimostrazione. Per quasi ogni $y \in B(x,r)$ vale

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B(x,r)} u \leq u(y) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{B(x,r)} u,$$

da cui

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B(x,r)} \leq u_{x,r} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{B(x,r)} u,$$

che implica

$$|u(y) - u_{x,r}| \leq \omega_r(u) \leq cr^\alpha.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$u \in \mathcal{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega).$$

Infatti per ogni $x_0 \in \Omega$, $r \in (0, d_\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} r^{-n-2\alpha} \int_{\Omega(x_0,r)} |u - u_{x_0,r}|^2 \,\mathrm{d}x &\leq r^{-n-2\alpha} \int_{\Omega(x_0,r)} (cr^\alpha)^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq c^2 r^{-n} \int_{B(x_0,r)} \mathrm{d}x = c^2 \omega_n < +\infty, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove $\Omega(x_0, r)$ è definito nella (1.20). Per il Teorema 1.2.6 si ha $u \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. □

Lemma 3.1.3 (Iterazione)**.** *Siano* $R_0 > 0$, $f : (0, 2R_0] \to \mathbb{R}^+$ *crescente tale che*

$$f\left(\frac{\rho}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha f(2\rho),$$

per ogni $\rho \in (0, R_0]$. *Allora*

$$f(r) \leq \left(\frac{4r}{R}\right)^\alpha f(R),$$

per ogni r, R *tali che* $0 < r \leq R \leq R_0$.

Dimostrazione. Siano $r, R \in (0, R_0]$ con $r \leq R$ e sia $i \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{R}{4^{i+1}} < r \leq \frac{R}{4^i}.$$

Dalle ipotesi segue immediatamente che

$$f\left(\frac{R}{4^i}\right) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha f\left(\frac{R}{4^{i-1}}\right) \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha i} f(R),$$

quindi, per monotonia

$$f(r) \leq f\left(\frac{R}{4^i}\right) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha i} f(R) = 4^\alpha \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha(i+1)} f(R) < 4^\alpha \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha f(R).$$

□

3.2 Teorema di De Giorgi

Ricordiamo che, come visto nella (2.11), data $u \in DG_+(\Omega)$ si definisce

$$V(h,r) := \mathscr{L}^n(A(h,r)).$$

Lemma 3.2.1 (Decadimento di V)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in DG_+(\Omega)$. Supponiamo esistere $B(x,2r) \Subset \Omega$, $k_0 < \operatorname*{ess\,sup}_{B(x,2r)} u \leq M < +\infty$ tali che*

$$V(k_0,r) \leq \frac{1}{2}\mathscr{L}^n(B(x,r)).$$

Allora, posto

$$k_\nu := M - \frac{M-k_0}{2^\nu}, \tag{3.2}$$

vale

$$\left(\frac{V(k_\nu,r)}{r^n}\right)^{\frac{2n-2}{n}} \leq \frac{c(n)c^+_{DG}(u)}{\nu}$$

per ogni $\nu \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Siano $h,k \in [k_0,M]$ con $k \leq h$ e definiamo la funzione

$$v : \Omega \to \mathbb{R},\ v(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } u(y) \leq k \\ u(y)-k & \text{se } k < u(y) < h \\ h-k & \text{se } u(y) \geq h. \end{cases}$$

Per costruzione $v \geq 0$ e $v \in W^{1,1}(\Omega)$ perché $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Chiaramente, può essere $Dv \neq 0$ solo su $A(k,r) \setminus A(h,r)$ e osserviamo che

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^n(\{v=0\} \cap B(x,r)) &= \mathscr{L}^n(\{u \leq k\} \cap B(x,r)) \\ &\geq \mathscr{L}^n(\{u \leq k_0\} \cap B(x,r)) \geq \frac{1}{2}\mathscr{L}^n(B(x,r)).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Allora per il Teorema 1.1.20 si ha

$$\begin{aligned}(h-k)^{1^*}\mathscr{L}^n(A(h,r)) &= \int_{A(h,r)} v^{1^*}\,\mathrm{d}y \leq \|v\|^{1^*}_{L^{1^*}} \leq c(n)\|Dv\|^{1^*}_{L^1} \\ &= c(n)\left(\int_{B(x,r)} |Dv|\,\mathrm{d}y\right)^{1^*} = c(n)\left(\int_{A(k,r)\setminus A(h,r)} |Du|\,\mathrm{d}y\right)^{1^*}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Applicando adesso la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\begin{aligned} & c(n)\left(\int_{A(k,r)\setminus A(h,r)} |Du|\,\mathrm{d}y\right)^{1^*} \\ \leq\, & c(n)\left(\int_{A(k,r)\setminus A(h,r)} |Du|^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1^*}{2}} \mathscr{L}^n(A(k,r)\setminus A(h,r))^{\frac{1^*}{2}} \\ \leq\, & c(n)\left(\int_{A(k,r)} |Du|^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1^*}{2}} \mathscr{L}^n(A(k,r)\setminus A(h,r))^{\frac{1^*}{2}} \\ =\, & c(n)\left(\int_{A(k,r)} |Du|^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1^*}{2}} (V(k,r)-V(h,r))^{\frac{1^*}{2}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Per ipotesi $u \in DG_+(\Omega)$ quindi

$$\begin{aligned} & \int_{A(k,r)} |Du|^2\,\mathrm{d}y \leq c(n)\frac{c_{DG}^+(u)}{r^2}\int_{A(k,2r)} (u-k)^2\,\mathrm{d}y \\ \leq\, & c(n)\frac{c_{DG}^+(u)}{r^2}\int_{A(k,2r)} (M-k)^2\,\mathrm{d}y \leq c(n)\frac{c_{DG}^+(u)}{r^2}\int_{B(x,2r)} (M-k)^2\,\mathrm{d}y \\ \leq\, & c(n)\frac{c_{DG}^+(u)}{r^2}(M-k)^2\omega_n r^n = c(n)c_{DG}^+(u)(M-k)^2 r^{n-2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Mettendo assieme (3.4), (3.5), (3.6) si ottiene

$$(h-k)^{1^*}V(h,r) \leq c(n)\left(c_{DG}^+(u)(M-k)^2\omega_n r^{n-2}\right)^{\frac{1^*}{2}} (V(k,r)-V(h,r))^{\frac{1^*}{2}}$$

da cui segue, elevando il tutto alla $\frac{2}{1^*}$,

$$(h-k)^2 V(h,r)^{\frac{2}{1^*}} \leq c(n)c_{DG}^+(u)(M-k)^2\omega_n r^{n-2}(V(k,r)-V(h,r)),$$

che possiamo riscrivere come

$$V(h,r)^{\frac{2}{1^*}} \leq c(n)c_{DG}^+(u)\frac{(M-k)^2}{(h-k)^2}r^{n-2}(V(k,r)-V(h,r)).$$

Sia k_ν come nella (3.2) e sostituiamo k_{i-1}, k_i al posto di k, h rispettivamente. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \nu V(k_\nu,r)^{\frac{2}{1^*}} &\leq \sum_{i=1}^{\nu} V(k_i,r)^{\frac{2}{1^*}} \\ &\leq c(n)c_{DG}^+(u)r^{n-2}\sum_{i=1}^{\nu}\frac{(M-k_{i-1})^2}{(k_i-k_{i-1})^2}(V(k_{i-1},r)-V(k_i,r)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dalla (3.2) si ha

$$\frac{(M - k_{i-1})^2}{(k_i - k_{i-1})^2} = 4,$$

quindi

$$\begin{aligned} \nu V(k_\nu, r)^{\frac{2}{1^*}} &\leq 4c(n)c^+_{DG}(u)r^{n-2} \sum_{i=1}^{\nu}(V(k_{i-1}, r) - V(k_i, r)) \\ &\leq 4c(n)c^+_{DG}(u)r^{n-2}\omega_n r^n = 4c(n)c^+_{DG}(u)r^{2n-2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

In conclusione

$$\left(\frac{V(k_\nu, r)}{r^n}\right)^{\frac{2n-2}{n}} \leq \frac{c(n)c^+_{DG}(u)}{\nu}.$$

□

Teorema 3.2.2 (De Giorgi)**.** *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto limitato,* $u \in DG(\Omega)$*, cioè* u, $-u \in DG_+(\Omega)$*. Allora*

$$u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega),$$

con

$$\begin{aligned} 2\alpha &= -\log_2(1 - 2^{-(\nu+2)}), \\ \nu &= \lceil 2C(n)c_{DG}(u)^{\frac{n\theta-1}{\theta-1}} \rceil, \\ \theta &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $R > 0$ tale che $B(x, 2R) \Subset \Omega$ e per ogni $r \in (0, R]$ definiamo

$$\begin{aligned} m(r) &:= \operatorname*{ess\,inf}_{B(x,r)} u, \\ M(r) &:= \operatorname*{ess\,sup}_{B(x,r)} u, \\ \omega(r) &:= M(r) - m(r), \\ \mu(r) &:= \frac{M(r) + m(r)}{2}. \end{aligned}$$

Vogliamo applicare il Lemma 3.2.1 al valore

$$k_\nu := M(2r) - \frac{\omega(2r)}{2^{\nu+1}}.$$

A tal fine dobbiamo prima verificare che siano soddisfatte le ipotesi di tale lemma, ossia provare che

$$V(k_0, r) \leq \frac{1}{2}\mathscr{L}^n(B(x,r)).$$

Ora

$$V(k_0, r) = \mathscr{L}^n(\{u > k_0\} \cap B(x,r)) = \mathscr{L}^n(\{u > \mu(2r)\} \cap B(x,r)).$$

Se vale

$$\mathscr{L}^n(\{u > \mu(2r)\} \cap B(x,r)) \leq \frac{1}{2}\mathscr{L}^n(B(x,r))$$

non c'è nulla da fare, altrimenti si ha

$$\mathscr{L}^n(\{u < \mu(2r)\} \cap B(x,r)) \leq \frac{1}{2}\mathscr{L}^n(B(x,r))$$

e si ragiona con $-u$ al posto di u dato che per ipotesi

$$u \in DG(\Omega)$$

e di conseguenza

$$-u \in DG(\Omega).$$

Scegliamo

$$\nu = \lceil 2C(n)c_{DG}(u)^{\frac{n\theta-1}{\theta-1}} \rceil,$$

con $C(n)$, e di conseguenza ν, abbastanza grande da verificare

$$\tilde{c}(n)c_{DG}(u)^{\frac{n\theta}{4}} \left(\frac{V(k_\nu, r)}{r^n}\right)^{\frac{\theta-1}{2}} \leq \frac{1}{2}, \tag{3.9}$$

dove $\tilde{c}(n)$ è la costante della (2.29). Ciò è sempre possibile in quanto, per il Lemma 3.2.1

$$\left(\frac{V(k_\nu, r)}{r^n}\right)^{\frac{2(n-1)}{n}} \leq \frac{c(n)c_{DG}(u)}{\nu} \leq \frac{c(n)c_{DG}(u)}{2C(n)c_{DG}(u)^{\frac{n\theta-1}{\theta-1}}}.$$

In particolare, la scelta di ν risulta indipendente dai valori r, R. Sostituendo r, k_ν rispettivamente al posto di R, h nella (2.29) si ottiene

$$M\left(\frac{r}{2}\right) \leq k_\nu + \tilde{c}(n)c_{DG}(u)^{\frac{n\theta}{4}} \left(\frac{U(k_\nu, r)}{\omega_n r^n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{V(k_\nu, r)}{r^n}\right)^{\frac{\theta-1}{2}}.$$

Ora

$$\begin{aligned}\left(\frac{U(k_\nu,r)}{\omega_n r^n}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{A(k_\nu,r)}(u-k_\nu)^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \left(\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B(x,r)}(M(2r)-k_\nu)^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= M(2r)-k_\nu. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dunque

$$\begin{aligned} M\left(\frac{r}{2}\right) &\le k_\nu + \tilde{c}(n)c_{DG}(u)^{\frac{n\theta}{4}}(M(2r)-k_\nu)\left(\frac{V(k_\nu,r)}{r^n}\right)^{\frac{\theta-1}{2}}\\ &\le k_\nu + \frac{M(2r)-k_\nu}{2} = \frac{M(2r)+k_\nu}{2}\\ &= M(2r) - \frac{1}{2^{\nu+2}}\omega(2r). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Allora

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{r}{2}\right) &= M\left(\frac{r}{2}\right) - m\left(\frac{r}{2}\right) \le M\left(\frac{r}{2}\right) - m(2r) \le \omega(2r) - \frac{1}{2^{\nu+2}}\omega(2r)\\ &= \left(1-\frac{1}{2^{\nu+2}}\right)\omega(2r) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2(1-\frac{1}{2^{\nu+2}})}\omega(2r)\\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}\log_2(1-\frac{1}{2^{\nu+2}})} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\omega(2r), \end{aligned} \tag{3.12}$$

con

$$\alpha = -\frac{1}{2}\log_2\left(1-\frac{1}{2^{\nu+2}}\right).$$

Pertanto, dal Lemma 3.1.3 segue

$$\omega(r) \le \left(\frac{4r}{R}\right)^{\alpha}\omega(R) = Cr^\alpha,$$

e per il Teorema 3.1.2 si ha la tesi. □

Capitolo 4

Regolarità per sistemi

Nel capitolo precedente abbiamo dimostrato che le soluzioni deboli in $W_0^{1,2}(\Omega)$ dell'equazione ellittica lineare con coefficienti Boreliani e limitati

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i(A_{ij}(x)D_j u) = 0,$$

sono Hölderiane. Risulta naturale porsi lo stesso problema nel caso di sistemi. Sfortunatamente, a differenza del caso scalare, il risultato di regolarità non è più valido come mostrò lo stesso De Giorgi nel 1968 in [De 68].

4.1 Il controesempio di De Giorgi

Iniziamo fornendo le notazioni che useremo in questo capitolo.

Notazioni.
- $B := B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n / \, |x| < 1\}$;
- $B^* := B(0,1) \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n / \, 0 < |x| < 1\}$.

Consideriamo il campo vettoriale $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito come

$$u(x) = x|x|^\gamma = (x_1|x|^\gamma, \dots, x_n|x|^\gamma). \tag{4.1}$$

Mostreremo nel corso di questo capitolo che per un'opportuna scelta di $\gamma = \gamma(n) \in \mathbb{R}$ nonostante la funzione u sia la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale

$$\mathcal{F}(u) := \int_B F(x, Du) \, \mathrm{d}x,$$

dove

$$F(x, Du) = \left[(n-2) \sum_{i=1}^{n} D_i u^i + n \sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{|x|^2} D_i u^j \right]^2 + \sum_{i,j=1}^{n} (D_i u^j)^2, \tag{4.2}$$

essa non risulta essere né continua né limitata se $n \geq 3$. Articoleremo la prova nei seguenti punti:

1. determineremo i coefficienti $A_{\alpha\beta}^{ij} : B \to \mathbb{R}$ tali che
$$F(x, Du) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} A_{\alpha\beta}^{ij}(x) D_i u^\alpha D_j u^\beta;$$
2. mostreremo che tali coefficienti sono misurabili, limitati e soddisfano la condizione di ellitticità
$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} A_{\alpha\beta}^{ij}(x) \xi_\alpha^i \xi_\beta^j,$$
q.o. su B, per un certo $\lambda > 0$;
3. mostreremo che il funzionale $\mathcal{F}$ è strettamente convesso;
4. determineremo le equazioni di Eulero-Lagrange di $\mathcal{F}$;
5. determineremo l'esponente γ per cui u è soluzione di tali equazioni in senso classico in B^*;
6. mostreremo che $u \in W^{1,2}(B, \mathbb{R}^n)$;
7. mostreremo che u è soluzione debole delle equazioni di Eulero-Lagrange;
8. proveremo che u non è limitata né continua in B se $n \geq 3$.

Iniziamo la dimostrazione.

1) Mediante una verifica diretta si prova che i coefficienti $A_{\alpha\beta}^{ij}$ sono dati da

$$A_{\alpha\beta}^{ij}(x) = \left[(n-2)\delta_{\alpha i} + n \frac{x_\alpha x_i}{|x|^2} \right] \left[(n-2)\delta_{\beta j} + n \frac{x_\beta x_j}{|x|^2} \right] + \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij},$$

per ogni $\alpha, \beta, i, j \in \{1, \dots, n\}$.

2) Dal punto precedente segue subito che

$$A^{ij}_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(B),$$

per ogni $\alpha, \beta, i, j \in \{1, \dots, n\}$. Inoltre, si può verificare che esistono due costanti λ, Λ tali che

$$0 < \lambda \leq \Lambda,$$

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}_{\alpha\beta}(x)\xi^i_\alpha \xi^j_\beta \leq \Lambda|\xi|^2, \tag{4.3}$$

per q.o. $x \in B$, per ogni $\xi \in M_n(\mathbb{R})$.

3) Per la linearità dell'integrale dimostrare che $F(x, \cdot)$ è strettamente convessa per q.o. $x \in \Omega$ è sufficiente per affermare che $\mathcal{F}$ è strettamente convesso. Siano allora $t \in (0, 1)$, $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$, $X \neq Y$ e proviamo che

$$(1-t)F(x, X) + tF(x, Y) - F(x, (1-t)X + tY) > 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
&(1-t)F(x, X) + tF(x, Y) - F(x, (1-t)X + tY) \\
&= \sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^{n} (t-t^2)[A^{ij}_{\alpha\beta}(x)X^i_\alpha X^j_\beta - A^{ij}_{\alpha\beta}(x)X^i_\alpha Y^j_\beta - A^{ij}_{\alpha\beta}(x)Y^i_\alpha X^j_\beta + A^{ij}_{\alpha\beta}(x)Y^i_\alpha Y^j_\beta] \\
&= \sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^{n} (t-t^2)A^{ij}_{\alpha\beta}(x)(X^i_\alpha - Y^i_\alpha)(X^j_\beta - Y^j_\beta).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dalla (4.3) e dalla scelta di t, X, Y segue

$$(t-t^2) \sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^{n} A^{ij}_{\alpha\beta}(x)(X^i_\alpha - Y^i_\alpha)(X^j_\beta - Y^j_\beta) \geq \lambda(t-t^2)|X-Y|^2 > 0,$$

dunque la stretta convessità di $\mathcal{F}$.

Osservazione 4.1.1. Poiché il funzionale $\mathcal{F}$ è strettamente convesso una funzione u soddisfa debolmente le equazioni di Eulero-Lagrange ad esso associate se e solo se u è minimo di $\mathcal{F}$, precisamente l'unico minimo.

4) Il funzionale in questione è del tipo

$$\mathcal{F}(u) := \int_B F(x, Du)\,\mathrm{d}x,$$

pertanto le equazioni di Eulero-Lagrange si ottengono ponendo

$$\sum_{j=1}^{n} D_j[F_{z_j^i}(x, Du)] = 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{4.5}$$

Espandendo la (4.5) si ha in B^*

$$\sum_{j=1}^{n} D_j \left\{ \left[(n-2) \sum_{h=1}^{n} D_h u^h + n \sum_{k,h=1}^{n} \frac{x_k x_h}{|x|^2} D_k u^h \right] \left[(n-2)\delta_{ij} + n \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right] + D_j u^i \right\}$$
$$= 0, \tag{4.6}$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$ che possiamo ulteriormente svolgere ed ottenere

$$(n-2) D_i \left[(n-2) \sum_{h=1}^{n} D_h u^h + n \sum_{k,h=1}^{n} \frac{x_k x_h}{|x|^2} D_k u^h \right] \tag{4.7}$$
$$+ n \sum_{j=1}^{n} D_j \left\{ \frac{x_i x_j}{|x|^2} \left[(n-2) \sum_{h=1}^{n} D_h u^h + n \sum_{k,h=1}^{n} \frac{x_k x_h}{|x|^2} D_k u^h \right] \right\} \tag{4.8}$$
$$+ \sum_{h=1}^{n} D_h^2 u^i = 0, \tag{4.9}$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$ in B^*.

5) In questo passaggio andremo a sostituire nelle (4.7), (4.8) e (4.9) la funzione u definita nella (4.1). Sia $i \in \{1, \ldots, n\}$ fissato e osserviamo che

$$D_i |x|^\gamma = \gamma x_i |x|^{\gamma-2}. \tag{4.10}$$

Ne segue che

$$\sum_{h=1}^{n} D_h^2 |x|^\gamma = \sum_{h=1}^{n} D_h(\gamma x_h |x|^{\gamma-2}) = \sum_{h=1}^{n} (\gamma |x|^{\gamma-2} + \gamma(\gamma-2) x_h^2 |x|^{\gamma-4})$$
$$= (n\gamma + \gamma^2 - 2\gamma)|x|^{\gamma-2}, \tag{4.11}$$

quindi

$$\sum_{h=1}^{n} D_h^2(x_i|x|^\gamma) = x_i \sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{n} D_h^2|x|^\gamma + D_i(|x|^\gamma + x_i D_i|x|^\gamma) = x_i \sum_{h=1}^{n} D_h^2|x|^\gamma + 2D_i|x|^\gamma$$
$$= (n\gamma + \gamma^2)x_i|x|^{\gamma-2}, \tag{4.12}$$

che poi andremo a sostituire nella (4.9). Nuovamente per la (4.10) abbiamo le uguaglianze

$$\sum_{h=1}^{n} D_h(x_h|x|^\gamma) = \sum_{h=1}^{n}(|x|^\gamma + x_h D_h|x|^\gamma) = \sum_{h=1}^{n}(|x|^\gamma + \gamma x_h^2|x|^{\gamma-2}) = (n+\gamma)|x|^\gamma, \tag{4.13}$$

e

$$\sum_{k,h=1}^{n} \frac{x_k x_h}{|x|^2} D_k(x_h|x|^\gamma) = \sum_{\substack{k,h=1\\k\neq h}}^{n} \frac{x_k x_h^2}{|x|^2} D_k|x|^\gamma + \sum_{h=1}^{n} \frac{x_h^2}{|x|^2}|x|^\gamma + \sum_{h=1}^{n} \frac{x_h^3}{|x|^2} D_h|x|^\gamma$$
$$= |x|^\gamma + \sum_{k,h=1}^{n} \frac{x_k^2 x_h^2}{|x|^2}\gamma|x|^{\gamma-2} = (1+\gamma)|x|^\gamma, \tag{4.14}$$

dove è stata usata l'identità

$$\sum_{k,h=1}^{n} x_h^2 x_k^2 = \left(\sum_{h=1}^{n} x_h^2\right)\left(\sum_{h=1}^{n} x_h^2\right) = |x|^4.$$

Dopo questi conti, si ha

$$(n-2)D_i\left[(n-2)\sum_{h=1}^{n} D_h(x_h|x|^\gamma) + n\sum_{k,h=1}^{n} \frac{x_k x_h}{|x|^2} D_k(x_h|x|^\gamma)\right]$$
$$= (n-2)D_i[(n-2)(n+\gamma)|x|^\gamma + n(1+\gamma)|x|^\gamma]$$
$$= \gamma(n-2)[(n-2)(n+\gamma) + n(1+\gamma)]x_i|x|^{\gamma-2}, \tag{4.15}$$

mentre

$$\begin{aligned}
&n\sum_{j=1}^{n} D_j\left\{\frac{x_ix_j}{|x|^2}\left[(n-2)\sum_{h=1}^{n}D_h(x_h|x|^\gamma)+n\sum_{k,h=1}^{n}\frac{x_kx_h}{|x|^2}D_k(x_h|x|^\gamma)\right]\right\}\\
=&\,n\sum_{j=1}^{n} D_j\left\{\frac{x_ix_j}{|x|^2}[(n-2)(n+\gamma)|x|^\gamma+n(1+\gamma)|x|^\gamma]\right\}\\
=&\,n\sum_{j=1}^{n} D_j\{x_ix_j|x|^{\gamma-2}[(n-2)(n+\gamma)+n(1+\gamma)]\}. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Per esplicitare quest'ultimo termine osserviamo anzitutto che

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} D_j(x_ix_j|x|^{\gamma-2})=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_i(|x|^{\gamma-2}+(\gamma-2)x_j^2|x|^{\gamma-4})+D_i(x_i^2|x|^{\gamma-2})\\
=&\,(n-1)x_i|x|^{\gamma-2}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\gamma-2)x_ix_j^2|x|^{\gamma-4}+2x_i|x|^{\gamma-2}+(\gamma-2)x_i^3|x|^{\gamma-4}\\
=&\,(n+1)x_i|x|^{\gamma-2}+\sum_{j=1}^{n}(\gamma-2)x_ix_j^2|x|^{\gamma-4}=(n+\gamma-1)x_i|x|^{\gamma-2}. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Pertanto da (4.16) e (4.17) si trova

$$\begin{aligned}
&n\sum_{j=1}^{n} D_j\left\{\frac{x_ix_j}{|x|^2}\left[(n-2)\sum_{h=1}^{n}D_h(x_h|x|^\gamma)+n\sum_{k,h=1}^{n}\frac{x_kx_h}{|x|^2}D_k(x_h|x|^\gamma)\right]\right\}\\
=&\,n(n+\gamma-1)[(n-2)(n+\gamma)+n(1+\gamma)]x_i|x|^{\gamma-2}. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Infine possiamo inserire le (4.12), (4.15), (4.18) rispettivamente nelle (4.9), (4.8), (4.7) ed ottenere per $i=1,\dots,n$

$$\left[(2n-2)^2\left(\gamma+\frac{n}{2}\right)^2+n\gamma+\gamma^2\right]x_i|x|^{\gamma-2}=0,$$

che è soddisfatta in senso classico in B^* se

$$\gamma=-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{(2n-2)^2+1}}\right).$$

Osservazione 4.1.2. Se $n\geq 3$ allora

$$\gamma=-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{(2n-2)^2+1}}\right)\leq-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{16+1}}\right)<-1.$$

6) Mostriamo che $u \in W^{1,2}(B)$. Anzitutto osserviamo che esiste $c = c(n)$ tale che

$$|Du| \leq c|x|^\gamma.$$

Infatti

$$\begin{aligned} |Du|^2 &\leq \sum_{i,h=1}^{n} \left|D_i u^h\right|^2 = \sum_{\substack{i,h=1 \\ i \neq h}}^{n} (x_h D_i |x|^\gamma)^2 + \sum_{i=1}^{n} (|x|^\gamma + x_i D_i |x|^\gamma)^2 \\ &\leq \sum_{i,h=1}^{n} x_h^2 x_i^2 \gamma^2 |x|^{2\gamma-4} + n|x|^{2\gamma} = c|x|^{2\gamma}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

In particolare, da ciò segue che

$$\||Du|\|_{L^2}^2 = \int_B |Du|^2 \,\mathrm{d}x \leq c \int_B |x|^{2\gamma} \,\mathrm{d}x < +\infty,$$

in quanto $2\gamma > -n$. Perciò

$$|Du| \in L^2(B). \tag{4.20}$$

Adesso, applicando una semplice integrazione per parti si ha che

$$\int_{B^*} (Du)\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_{B^*} u(D\varphi) \,\mathrm{d}x,$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B^*)$. In tal modo riusciamo a stimare la norma L^2 di u con quella di Du. Ne segue che

$$u \in L^2(B^*, \mathbb{R}^n),$$

quindi

$$u \in W^{1.2}(B^*, \mathbb{R}^n).$$

Per poter concludere che $u \in W^{1,2}(B, \mathbb{R}^n)$ dobbiamo ripetere lo stesso ragionamento con $\varphi \in C_0^\infty(B)$.

Lemma 4.1.3. *Siano $n \geq 3$, $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Allora esiste una successione $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(B^*)$ tale che*

$$\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \varphi \text{ in } W^{1,2}(B).$$

Dimostrazione. Sia ψ una funzione cut-off tra B e $B(0,2)$. Definiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ le funzioni

$$\psi_k(x) \coloneqq \psi(kx),$$

$$\varphi_k(x) \coloneqq \varphi(x)(1-\psi_k(x)).$$

Si ha

$$\varphi_k \in C_0^\infty(B^*) \cap W^{1,2}(B),$$

e

$$\varphi_k = 0 \text{ in } B\left(0, \frac{1}{k}\right).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_k\|^2_{W^{1,2}(B)} &= \|\varphi\psi_k\|^2_{W^{1,2}(B)} = \|\varphi\psi_k\|^2_{L^2(B)} + \|D(\varphi\psi_k)\|^2_{L^2(B)} \\ &\leq \|\varphi\psi_k\|^2_{L^2(B)} + 2\|(D\varphi)\psi_k\|^2_{L^2(B)} + 2\|\varphi(D\psi_k)\|^2_{L^2(B)}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Adesso

$$\|\varphi\psi_k\|^2_{L^2(B)} = \int_B \varphi^2\psi_k^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{B(0,\frac{2}{k})} \varphi^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0, \tag{4.22}$$

e

$$\|(D\varphi)\psi_k\|^2_{L^2(B)} = \int_B |D\varphi|^2\psi_k^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{B(0,\frac{2}{k})} |D\varphi|^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0, \tag{4.23}$$

per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Infine

$$\begin{aligned} \|\varphi(D\psi_k)\|^2_{L^2(B)} &= \int_B \varphi^2|D\psi_k|^2 \,\mathrm{d}x \leq \max_B \varphi^2 \int_B |D[\psi(kx)]|^2 \,\mathrm{d}x \\ = k^2 \max_B \varphi^2 \int_B |D\psi(kx)|^2 \,\mathrm{d}x &\leq k^{2-n} \max_B \varphi^2 \int_{\mathbb{R}^n} |D\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0, \end{aligned} \tag{4.24}$$

in quanto per ipotesi $n \geq 3$. Mettendo assieme (4.21), (4.22), (4.23) e (4.24) si conclude la dimostrazione. $\square$

Sia adesso $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Per il Lemma 4.1.3 esiste $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(B^*)$ convergente a φ in $W^{1,2}(B)$. Allora,

$$\int_B (Du)\varphi \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty} \int_B (Du)\varphi_k \,\mathrm{d}x = -\lim_{k\to+\infty} \int_B u(D\varphi_k) \,\mathrm{d}x = -\int_B u(D\varphi) \,\mathrm{d}x, \tag{4.25}$$

quindi u possiede derivate deboli su B. Dunque, per l'unicità delle derivate deboli e per la (4.20), si ha

$$u \in W^{1,2}(B, \mathbb{R}^n).$$

7) Ricordando che u risolve le equazioni di Eulero-Lagrange in senso classico in B^* si ha che le risolve anche in senso debole in B^*, cioè

$$\int_B \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} A_{\alpha\beta}^{ij}(x) D_i u^\alpha D_j \varphi^\beta \, \mathrm{d}x = 0,$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B^*, \mathbb{R}^n)$. Se consideriamo ora una funzione $\varphi \in C_0^\infty(B, \mathbb{R}^n)$, utilizzando ancora una volta il Lemma 4.1.3, si ha

$$\int_B \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} A_{\alpha\beta}^{ij}(x) D_i u^\alpha D_j \varphi^\beta \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty} \int_B \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} A_{\alpha\beta}^{ij}(x) D_i u^\alpha D_j \varphi_k^\beta \, \mathrm{d}x = 0.$$

Dunque u è soluzione debole delle equazioni di Eulero-Lagrange anche in $W^{1,2}(B)$.

8) A questo punto è sufficiente richiamare l'Osservazione 4.1.2 e per $n \geq 3$ si ottiene

$$\lim_{|x|\to 0} |u(x)| = \lim_{|x|\to 0} |x|^{\gamma-1} = +\infty.$$

Chiaramente u non è né localmente limitata né continua in B.

Osservazione 4.1.4. L'Osservazione 4.1.1 ci dice che il controesempio fornito da De Giorgi sfata la possibilità di ottenere regolarità Hölderiana sia per soluzioni di un sistema di equazioni alle derivate parziali sia per estremali vettoriali di un funzionale integrale del calcolo delle variazioni, a meno di non imporre ipotesi di struttura sull'operatore.

Bibliografia

[ACM19] L. Ambrosio, A. Carlotto e A. Massaccesi. *Lectures on Elliptic Partial Differential Equations*. Publications of the Scuola Normale Superiore. Scuola Normale Superiore, 2019.

[CD10] M. Carriero e L. De Luca. ≪Introduzione al calcolo delle variazioni≫. In: *Quaderni di Matematica* 2010.1 (2010).

[De 57] E. De Giorgi. ≪Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari≫. In: *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3)* 3 (1957), pp. 25–43.

[De 68] E. De Giorgi. ≪Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico≫. In: *Boll. Un. Mat. Ital. (4)* 1 (1968), pp. 135–137.

[Giu03] E. Giusti. *Direct Methods In The Calculus Of Variations*. World Scientific Publishing Company, 2003.

[Giu78] E. Giusti. *Equazioni ellittiche del secondo ordine*. Quaderni dell'Unione matematica italiana. Pitagora, 1978.