

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Simmetrie dello spaziotempo nella formulazione di Penrose

Relatore:
Prof.ssa Rita Fioresi

Presentata da:
Andrea Labate

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

In questa tesi descriviamo l'azione del gruppo di Poincaré sullo spazio di Minkowski, per approdare alla descrizione proposta dal fisico e cosmologo britannico Roger Penrose. In tale formulazione, lo spazio di Minkowski è visto come un sottoinsieme della Grassmanniana $Gr(2, 4)$, su cui agisce il gruppo di Poincaré.

Per discutere questo approccio, trattiamo prima i concetti basilari della teoria delle varietà differenziabili, dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie, con particolare riguardo ai gruppi di Lie di matrici e ai concetti di azione e rappresentazione. Richiamiamo inoltre le principali motivazioni che rendono lo spazio di Minkowski l'oggetto matematico più opportuno su cui formulare la relatività ristretta.

I concetti illustrati sono corredati da numerosi esempi riguardanti i principali gruppi di matrici.

Alla mia mamma e al mio papà.

Ad Angela Misiano.

Indice

Introduzione	1
1 Varietà differenziabili in \mathbb{R}^n	3
1.1 Varietà differenziabili	3
1.2 Parametrizzazione locale di varietà	6
1.3 Spazio tangente	7
1.4 Differenziale di una funzione e campi vettoriali	9
2 Gruppi di Lie e Algebre di Lie	13
2.1 Gruppi di Lie	13
2.2 Il gruppo di Lorentz	15
2.3 Algebre di Lie	17
2.4 Algebra di Lie di un gruppo di Lie	18
2.5 L'algebra di Lie delle matrici e l'esponenziale di matrice	21
2.6 Azioni e rappresentazioni di gruppi di Lie	23
2.7 Rappresentazioni di algebre di Lie	25
3 Lo spazio di Minkowski	28
3.1 La relatività ristretta e lo spazio di Minkowski	28
3.2 Il gruppo di Poincaré	30
3.3 Lo spazio di Minkowski e il gruppo di Lorentz ristretto	32
3.4 L'isomorfismo $SL_2\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 \cong SO(1,3)^+$	33
3.5 La visione di Penrose del gruppo di Poincaré	35
A Quozienti di gruppi	39
A.1 Premessa: classi di equivalenza e insieme quoziente	39
A.2 Gruppo quoziente	40
A.3 Orbite e stabilizzatori	43
Bibliografia	45

Introduzione

Nel suo *annus mirabilis*, il 1905, con l'articolo *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (*Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*), Albert Einstein (1879-1955) introdusse i fondamenti della teoria della relatività ristretta. Con l'aggettivo “ristretta” si indica il fatto che essa si applica solo a sistemi di riferimento inerziali.

La pubblicazione dell'articolo di Einstein è il culmine di un periodo in cui un gran numero di illustri personalità del mondo della fisica si interrogava sul problema dell'invarianza delle leggi naturali per sistemi di riferimento inerziali in moto relativo. Infatti, le trasformazioni di Galileo, usate per descrivere il passaggio da un sistema di riferimento all'altro, non lasciavano invarianti le equazioni dell'elettromagnetismo scritte dal fisico scozzese James Clerk Maxwell (1831-1879).

A partire dal 1892, il fisico olandese Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) tentò di trovare le trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali che mantenessero invarianti le equazioni di Maxwell. Egli giunse nel 1904 a una soluzione parziale del problema (in assenza di cariche libere o correnti) che portò alla pubblicazione delle trasformazioni che oggi portano il suo nome. La soluzione completa a questo problema fu ottenuta nel 1905 dal matematico e fisico francese Jules Henri Poincaré (1854-1912) e pubblicata in un articolo dal titolo *Sur la dynamique de l'électron* (*Sulla dinamica dell'elettrone*). Nel medesimo lavoro, Poincaré dimostrò che tali trasformazioni godevano delle proprietà di gruppo e usò, per la prima volta, i termini *trasformazioni di Lorentz* e *gruppo di Lorentz*. Allo scienziato francese si deve anche l'introduzione del *gruppo di Poincaré*, descritto matematicamente come il prodotto semidiretto del gruppo di Lorentz con le traslazioni spaziali e temporali.

Poincaré arrivò molto vicino alla formulazione della relatività ristretta. Nel 1904 formulò quello che lui chiamò “principio di relatività”, secondo cui le leggi della fisica devono essere le stesse per un osservatore in quiete e per uno in moto rettilineo uniforme, e arrivò addirittura a ipotizzare l'avvento di una nuova dinamica caratterizzata dal fatto che nessuna velocità potesse superare quella della luce nel vuoto, ma non compì il salto radicale che avrebbe messo in discussione i concetti di spazio e tempo ritenuti allora ormai consolidati.

La pubblicazione dell'articolo di Einstein portò il matematico tedesco Hermann Minkowski (1864-1909) a proporre nel 1908 un modo di rappresentare gli eventi nello spazio

e nel tempo, adottando uno spazio reale quadridimensionale noto oggi come *spazio di Minkowski*. Tale spazio è *pseudo-euclideo*: *euclideo* perché tale spazio è piatto, *pseudo*-perché la distanza tra due eventi non è definita positiva.

Negli anni '60 del secolo scorso il matematico, fisico e cosmologo britannico Roger Penrose (1931-vivente) introdusse una nuova formulazione delle simmetrie spaziotemporali. Per fare ciò, Penrose concepì lo spazio di Minkowski come sottoinsieme della Grassmanniana $Gr(2, 4)$, ossia l'insieme dei sottospazi bidimensionali di \mathbb{C}^4 , e interpretò l'azione del gruppo di Poincaré su di esso in termini del prodotto del gruppo lineare speciale $SL_2\mathbb{C}$ con le traslazioni spaziotemporali.

In questo lavoro intendiamo analizzare tale formulazione di Penrose dello spazio di Minkowski e del gruppo di Poincaré, articolando la trattazione in tre capitoli:

- nel Capitolo 1 descriviamo i concetti basilari della teoria delle varietà differenziabili in \mathbb{R}^n e introduciamo le importanti nozioni di spazio tangente e di differenziale;
- nel Capitolo 2 introduciamo i gruppi di Lie e l'algebra di Lie ad essi associata, con particolare riguardo ai gruppi di Lie di matrici, definendo in tale contesto l'esponenziale di matrice. Trattiamo infine i concetti di azione e rappresentazione di un gruppo di Lie e rappresentazione di un'algebra di Lie;
- nel Capitolo 3 trattiamo lo spazio di Minkowski e i gruppi di Lorentz e Poincaré che su di esso agiscono. Attraverso l'identificazione dello spazio di Minkowski con lo spazio vettoriale reale delle matrici hermitiane 2×2 e l'isomorfismo tra il gruppo di Lorentz ristretto $SO(1, 3)^+$ con il quoziente $SL_2\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2$, descriviamo infine la visione di Penrose del gruppo di Poincaré che agisce sullo spazio di Minkowski.

In appendice a questo lavoro riassumiamo sintenticamente il concetto di gruppo quoziente e le nozioni di orbita e stabilizzatore.

Capitolo 1

Varietà differenziabili in \mathbb{R}^n

In questo capitolo sarà introdotto il concetto di varietà differenziabile, o regolare, in \mathbb{R}^n . Successivamente si discuterà la possibilità di effettuare parametrizzazioni locali di varietà. Infine, si introdurrà lo spazio tangente ad una varietà differenziabile in un suo punto, e i concetti di campo vettoriale e differenziale di una funzione.

In realtà, è possibile definire il concetto di varietà differenziabile prescindendo dal fatto che essa sia immersa o meno in \mathbb{R}^n . Tuttavia, la scelta di limitarci allo studio di varietà in \mathbb{R}^n è motivata dal fatto che la definizione che daremo sarà sufficiente per descrivere i gruppi di Lie di matrici. Questi ultimi sono infatti inclusi nello spazio vettoriale $M_p\mathbb{K} \cong \mathbb{K}^{p^2}$ delle matrici quadrate $p \times p$ a coefficienti nel campo \mathbb{K} , con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Per maggiori dettagli si consultino [1, sez. 12.2] per la trattazione delle varietà differenziabili in \mathbb{R}^n e [6, cap. 3] per la descrizione dello spazio tangente a una varietà in un suo punto e del differenziale di una funzione.

1.1 Varietà differenziabili

Iniziamo con la definizione di varietà differenziabile in \mathbb{R}^n . Per la definizione di funzione di classe C^∞ si veda [6, pag. 4].

Definizione 1.1.1. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e $g_k : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $k = 1, \dots, r (< n)$, funzioni di classe C^∞ ; l'insieme

$$M = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in A : g_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, \dots, r \}$$

è detto *varietà differenziabile* (o *regolare*) in \mathbb{R}^n di dimensione $n - r$, se la matrice jacobiana di $(g_1, \dots, g_r) : A \rightarrow \mathbb{R}^r$, ossia

1. Varietà differenziabili in \mathbb{R}^n

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_r)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_r(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ha rango massimo r , per ogni $x \in M$.

Vediamo qualche esempio che illustri la definizione appena data.

Esempio 1.1.2. La circonferenza di raggio unitario in \mathbb{R}^2 , ossia l'insieme $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ è una varietà differenziabile di dimensione 1. Infatti, notiamo anzitutto che

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : g(x_1, x_2) = 0\},$$

con $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dal momento che $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1$ e $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$, la matrice jacobiana di g cessa di avere rango massimo 1 quando $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, ovvero nell'origine. Ma il punto $(0, 0) \notin S^1$, perciò S^1 soddisfa la definizione appena data. La Fig. 1.1 mostra graficamente l'insieme S^1 .

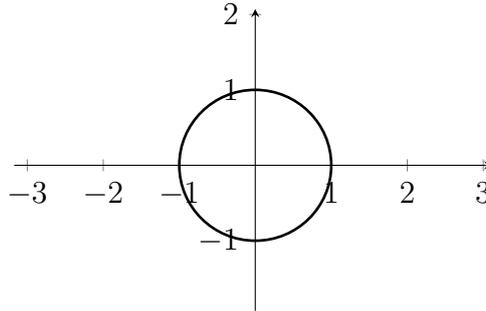


Figura 1.1: L'insieme dell'Es. 1.1.2

Esempio 1.1.3. L'insieme $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ non è invece una varietà differenziabile di dimensione 1. Infatti $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2$ sono entrambe nulle nell'origine. Questa volta però $(0, 0) \in M$, perciò la definizione non è soddisfatta. La Fig. 1.2 mostra graficamente l'insieme M .

I due esempi che seguono coinvolgono insiemi di matrici in $M_n\mathbb{R}$: è dunque necessario ricordare quanto detto nell'introduzione di questo capitolo riguardo, più in generale, lo spazio $M_n\mathbb{K}$. Esso è isomorfo a \mathbb{K}^{n^2} attraverso la seguente applicazione, che denotiamo con φ : data una matrice $M = (a_{ij}) \in M_n\mathbb{K}$, ad essa è possibile associare il vettore di \mathbb{K}^{n^2} espresso da $\varphi(M) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, \dots, a_{nn})$. φ induce su $M_n\mathbb{K}$ una topologia: essa è costruita dichiarando aperto un sottoinsieme A di $M_n\mathbb{K}$ se $\varphi(A) \subseteq \mathbb{K}^{n^2}$ è aperto in \mathbb{K}^{n^2} secondo la topologia standard. Nel seguito, pertanto, considereremo $M_n\mathbb{K}$ dotato di tale topologia.

1.1. Varietà differenziabili

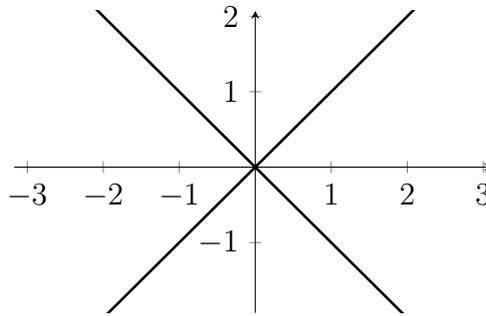


Figura 1.2: L'insieme dell'Es. 1.1.3

Esempio 1.1.4. Consideriamo l'insieme di matrici

$$GL_n\mathbb{R} = \{M \in M_n\mathbb{R} : \det(M) \neq 0\}.$$

Tale insieme è chiamato *gruppo lineare generale*. La funzione che associa ad una matrice di $M_n\mathbb{R}$ il suo determinante, ossia $\det : M_n\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è chiaramente di classe C^∞ in quanto il determinante di una matrice è un polinomio negli elementi matriciali; tale funzione, essendo C^∞ , è pertanto continua. Inoltre notiamo che $GL_n\mathbb{R} = M_n\mathbb{R} \setminus \det^{-1}(\{0\})$. È noto dalla topologia che la retroimmagine di un insieme chiuso per mezzo di una funzione continua tra spazi topologici è essa stessa chiusa: dunque, essendo $\{0\}$ un insieme chiuso nella topologia standard su \mathbb{R} , abbiamo che $\det^{-1}(\{0\})$ è chiuso nella topologia su $M_n\mathbb{R}$ precedentemente discussa, e perciò $GL_n\mathbb{R} = M_n\mathbb{R} \setminus \det^{-1}(\{0\})$ è un aperto. La Def. 1.1.1 in questo caso è soddisfatta, dal momento che $GL_n\mathbb{R}$ è un aperto di $M_n\mathbb{R}$ dove un insieme vuoto di funzioni ha matrice jacobiana con rango massimo, perciò $GL_n\mathbb{R}$ è una varietà differenziabile in $M_n\mathbb{R}$.

Esempio 1.1.5. Consideriamo l'insieme

$$SL_n\mathbb{R} = \{M \in M_n\mathbb{R} : \det(M) = 1\},$$

detto *gruppo lineare speciale*. $SL_n\mathbb{R}$ è definito dall'annullarsi della funzione g che associa a una matrice $B \in M_n\mathbb{R}$ il numero reale $g(B) = \det(B) - 1$. Abbiamo già notato nell'Es. 1.1.4 che il determinante di una matrice è un polinomio negli elementi matriciali, per cui g è una funzione C^∞ di tali elementi. Supponiamo di voler calcolare la derivata parziale $\frac{\partial g(B)}{\partial b_{ij}}$ di g in B rispetto all' (i, j) -esimo elemento matriciale b_{ij} . Denotiamo con m_{pq} il determinante del minore che si ottiene dalla matrice eliminando la p -esima riga e la q -esima colonna, e applichiamo lo sviluppo di Laplace rispetto alla i -esima riga. Avremo

$$g(B) := \det(B) - 1 = \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} b_{ik} m_{ik} \right) - 1, \quad (1.1)$$

perciò

$$\frac{\partial g(B)}{\partial b_{ij}} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \delta_{kj} m_{ik} = (-1)^{i+j} m_{ij}. \quad (1.2)$$

La matrice jacobiana di g in B , che denotiamo sinteticamente con $J_g(B)$, si scrive

$$\begin{aligned} J_g(B) &= \left(\frac{\partial g(B)}{\partial b_{11}}, \dots, \frac{\partial g(B)}{\partial b_{1n}}, \frac{\partial g(B)}{\partial b_{21}}, \dots, \dots, \frac{\partial g(B)}{\partial b_{nn}} \right) \\ &= (m_{11}, \dots, (-1)^{1+n} m_{1n}, -m_{21}, \dots, \dots, m_{nn}). \end{aligned}$$

Se $B \in SL_n \mathbb{R}$, almeno uno dei determinanti dei minori che compaiono nella matrice jacobiana è non nullo (il determinante di B è non nullo essendo unitario), quindi la matrice jacobiana di g in B ha rango massimo 1. Per questo motivo, $SL_n \mathbb{R}$ è una varietà differenziabile di dimensione $n^2 - 1$ in $M_n \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

1.2 Parametrizzazione locale di varietà

Consideriamo una varietà differenziabile M di \mathbb{R}^n , di dimensione $n - r$, con $r < n$ e con $g = (g_1, \dots, g_r)$ definita su un aperto A di \mathbb{R}^n , come nella Def. 1.1.1. Poiché, su M , la matrice jacobiana di g ha rango massimo r , abbiamo che, scelto un punto generico $\bar{p} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in M$, esiste un minore d'ordine r a determinante non nullo. Possiamo scrivere tale minore nel seguente modo

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_r)}{\partial(y_1, \dots, y_r)}(\bar{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\bar{p})}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1(\bar{p})}{\partial y_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r(\bar{p})}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_r(\bar{p})}{\partial y_r} \end{pmatrix},$$

dove y_1, \dots, y_r sono le r variabili fra le x_1, \dots, x_n che soddisfano la condizione appena espressa. Ridefiniamo con i simboli s_1, \dots, s_{n-r} le restanti variabili. Indichiamo con $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r$ e $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-r}$ i valori che assumono le variabili ridefinite in \bar{p} .

Dal momento che, per definizione, le funzioni g_1, \dots, g_r sono di classe C^∞ , è possibile applicare il Teorema del Dini (il cui enunciato non riportiamo), affermando che esistono un intorno I di $(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-r})$ e un intorno J di $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r)$ e una funzione $f = (f_1, \dots, f_r) : I \rightarrow J$ di classe C^∞ , tale che, per $(s_1, \dots, s_{n-r}, y_1, \dots, y_r) \in I \times J$

$$g(p) = 0 \iff (y_1, \dots, y_r) = f(s_1, \dots, s_{n-r})$$

dove p è il punto di \mathbb{R}^n corrispondente a $(s_1, \dots, s_{n-r}, y_1, \dots, y_r)$.

La condizione $g(p) = 0$ appena vista è sicuramente soddisfatta se $p \in M$. Chiamiamo W l'insieme che si ottiene da $I \times J$ riordinando nel modo originario le variabili: allora, per ogni punto in $W \cap M$, r variabili sono esprimibili in funzione delle restanti $n - r$. Il

1.3. Spazio tangente

ragionamento è replicabile per ogni punto di M , e sostanzialmente esprime il fatto che *localmente*, ossia in un opportuno intorno di ogni punto, una varietà in \mathbb{R}^n si comporta come un grafico.

Siamo in grado di affermare qualcosa in aggiunta a quanto già mostrato. Definiamo su $W \cap M$, intorno di \bar{p} nella topologia indotta sulla varietà da \mathbb{R}^n , la funzione ϕ :

$$\begin{aligned}\phi : W \cap M &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-r} \\ p &\longmapsto (s_1, \dots, s_{n-r})\end{aligned}$$

L'applicazione ϕ è invertibile: infatti, l'iniettività e la suriettività discendono dal fatto che i valori delle restanti r variabili sono completamente determinati dalle s_1, \dots, s_{n-r} . Inoltre essa è di classe C^∞ con la sua inversa, ossia un diffeomorfismo. Abbiamo perciò mostrato la validità della seguente proposizione [6, Def. 5.9 e Prop. 6.10].

Proposizione 1.2.1. *Sia M una varietà differenziabile in \mathbb{R}^n di dimensione $n-r$. Allora per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno $V \subset M$ di p che è diffeomorfo a \mathbb{R}^{n-r} .*

□

Vogliamo dare la seguente definizione.

Definizione 1.2.2. Chiamiamo la coppia (V, ϕ) , con ϕ il diffeomorfismo associato a V , una *carta* della varietà differenziabile M . Se M ha dimensione d , indichiamo con (r_1, \dots, r_d) le componenti di ϕ . Indicheremo, per non generare confusione, le coordinate usuali in \mathbb{R}^d con (x_1, \dots, x_d) . Se $p \in V$, diremo che (V, ϕ) è una *carta su p* .

Esempio 1.2.3. Riprendiamo in considerazione la circonferenza di raggio unitario S^1 , descritta dall'equazione $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ e consideriamo, per semplicità, il punto $(0,1)$. Nell'Es. 1.1.2 abbiamo già mostrato che S^1 è una varietà differenziabile. Dal momento che $\frac{\partial g(0,1)}{\partial y} = 2 \neq 0$, il Teorema del Dini stabilisce che è possibile, per i punti di S^1 "vicini" a $(0,1)$, esprimere la variabile y in funzione di x . Infatti, per $x \in]-1, 1[$, $y = \sqrt{1-x^2}$. Non è possibile proseguire oltre, includendo, ad esempio, i punti $(\pm 1, 0)$: in questo caso, infatti $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$. Il suddetto teorema, tuttavia, ci assicura l'esistenza, per ogni punto di S^1 , di un aperto contenente il punto in corrispondenza biunivoca con un intervallo aperto di \mathbb{R} .

1.3 Spazio tangente

Ora discutiamo alcuni aspetti relativi al concetto di spazio tangente a una varietà differenziabile in un suo punto. In seguito, tali caratteristiche generali saranno utili per poter introdurre lo spazio tangente nell'identità a un gruppo di Lie, che riveste un'importanza fondamentale nella nostra trattazione.

1. Varietà differenziabili in \mathbb{R}^n

Definizione 1.3.1. Sia M una varietà differenziabile (in \mathbb{R}^n) e p un suo punto; consideriamo U e V , due intorni di p in M e siano $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni di classe C^∞ . Diciamo che f è *equivalente* a g , o in simboli $f \sim g$, se esiste un aperto $W \subseteq U \cap V$ e contenente p tale che $f|_W = g|_W$.

La relazione data nella precedente definizione è una relazione di equivalenza, essendo chiaramente riflessiva, simmetrica e transitiva. Data la funzione $h : T \rightarrow \mathbb{R}$, con T un intorno di p , la classe di equivalenza di h secondo la relazione appena descritta, indicata con $[h]_\sim$ prende il nome di *germe* di h in p . Risulta chiaro che due funzioni appartenenti allo stesso germe in p hanno derivate coincidenti in p , in quanto coincidono su un aperto contenente p . L'insieme dei germi in un punto p in M di funzioni di classe C^∞ si denota con il simbolo $C_p^\infty(M)$.

Definizione 1.3.2. Un'applicazione lineare $D : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ è detta una *derivazione* in p se soddisfa la *regola di Leibniz*, ovvero date $f, g \in C_p^\infty(M)$:

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g) \quad (1.3)$$

dove, con abuso di notazione, abbiamo ommesso le parentesi quadre per indicare le classi di equivalenza delle funzioni f e g .

Introduciamo una nuova definizione per poter fare un esempio di derivazione in un punto di una varietà differenziabile, specificando comunque che avrà un importante ruolo in seguito.

Definizione 1.3.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty(A)$, e $M \subseteq A$ una varietà differenziabile di dimensione d . Per $p \in M$, sia (V, ϕ) , con $\phi = (r_1, \dots, r_d)$ una carta su p . Definiamo nel seguente modo la *derivata parziale* in p di f rispetto a r_i , $i = 1, \dots, d$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r_i} \right)_p = \frac{\partial f(p)}{\partial r_i} := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} (\phi(p)). \quad (1.4)$$

La derivata appena introdotta è chiaramente lineare, e soddisfa la regola di Leibniz 1.3. Dunque $(\partial/\partial r_i)_p$ è una derivazione in p .

Siamo pronti per definire il concetto di spazio tangente.

Definizione 1.3.4. Sia M una varietà differenziabile in \mathbb{R}^n e $p \in M$ un suo punto. Lo *spazio tangente* a M in p , denotato con il simbolo $T_p M$, è l'insieme di tutte le derivazioni in p , ovvero

$$T_p M = \{ D : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid D \text{ è una derivazione in } p \}.$$

Notiamo quindi che le derivate parziali in un punto di una varietà, essendo derivazioni, appartengono allo spazio tangente alla varietà in quel punto. Inoltre, la somma di due

1.4. Differenziale di una funzione e campi vettoriali

derivazioni in un punto, e il prodotto di una derivazione in un punto per uno scalare, sono ancora delle derivazioni nel medesimo punto; più in particolare, possiamo affermare che lo spazio tangente a una varietà differenziabile in un suo punto è uno spazio vettoriale. Sorge dunque spontanea la questione se sia possibile esibire esplicitamente una base per tale spazio; in effetti, è possibile dimostrare che è valido il seguente teorema [6, Prop. 8.9]:

Teorema 1.3.5 (Base per lo spazio tangente). *Se T_pM è lo spazio tangente in p a una varietà differenziabile M di dimensione d , allora una sua base è data da*

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \right)_p \mid i = 1, \dots, d \right\}$$

dove le derivate sono calcolate rispetto a una qualche carta (V, ϕ) di M su p .

□

Il Teorema 1.3.5 afferma sostanzialmente che un generico elemento di T_pM , ossia una derivazione in p , è esprimibile come combinazione lineare delle derivate parziali in p . Inoltre, esso afferma che la dimensione dello spazio tangente a una varietà in un suo punto è data dalla dimensione della varietà stessa.

1.4 Differenziale di una funzione e campi vettoriali

Abbiamo notato come lo spazio tangente a una varietà in un punto sia uno spazio vettoriale; per tale motivo, è possibile definire applicazioni lineari tra due spazi tangenti a due varietà in due loro punti. Il differenziale di una funzione riveste un ruolo fondamentale proprio in tale contesto.

Definizione 1.4.1. Data una funzione F di classe C^∞ tra due varietà differenziabili N ed M , di dimensioni d ed s rispettivamente, essa induce in ogni punto $p \in N$ una funzione tra spazi tangenti, chiamata *differenziale* di F in p ,

$$(dF)_p : T_pN \longrightarrow T_{F(p)}M$$

nel modo seguente. Se $X_p \in T_pN$, allora $(dF)_p(X_p)$ è definito da:

$$(dF)_p(X_p)f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R}, \quad f \in C_{F(p)}^\infty(M). \quad (1.5)$$

Osserviamo dalla definizione appena data che il differenziale di una funzione in un punto è un'applicazione lineare.

Risulta evidente che, fissate le basi di T_pN e $T_{F(p)}M$ date dal Teorema 1.3.5, al differenziale di F in p è associata univocamente una matrice $s \times d$. Se (V, r_1, \dots, r_d) è

1. Varietà differenziabili in \mathbb{R}^n

una carta su p e (W, y_1, \dots, y_s) è una carta su $F(p)$, allora in virtù del medesimo teorema possiamo scrivere

$$(dF)_p \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \right)_p = \sum_{j=1}^s a_{ji} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)}. \quad (1.6)$$

Vediamo ora di ricavare i coefficienti a_{ji} . Dal momento che una generica componente y_k è una funzione da W a \mathbb{R} , allora possiamo applicare tale componente ad ambo i membri dell'Eq. 1.6, ottenendo:

$$(dF)_p \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \right)_p y_k = \sum_{j=1}^s a_{ji} \left(\frac{\partial y_k}{\partial y_j} \right)_{F(p)} \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{\partial y_k \circ F}{\partial r_i} \right)_p = \sum_{j=1}^s a_{ji} \delta_{kj} \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial r_i} \right)_p = a_{ki} \quad (1.9)$$

dove abbiamo usato la notazione $F_k = y_k \circ F$ per la k -esima componente di F . Dal calcolo precedente è evidente che la matrice associata al differenziale di una funzione F in un punto è la *matrice jacobiana* di F calcolata in quel determinato punto (relativamente alle carte indicate).

Il differenziale gode di un'importante proprietà rispetto alla composizione di due funzioni, la regola della catena. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 1.4.2 (Regola della catena). *Siano N, M, P varietà differenziabili e $F : N \rightarrow M, G : M \rightarrow P$ due funzioni C^∞ . Allora*

$$d(G \circ F)_p = (dG)_{F(p)} \circ (dF)_p \quad \forall p \in N.$$

Dimostrazione. Consideriamo un generico punto $p \in N$. Siano $X_p \in T_p N$ e f di classe C^∞ definita in un intorno di $G(F(p))$. Allora

$$d(G \circ F)_p(X_p)f = X_p(f \circ G \circ F),$$

$$((dG)_{F(p)} \circ (dF)_p)(X_p)f = (dG)_{F(p)}((dF)_p(X_p))f = (dF)_p(X_p)(f \circ G) = X_p(f \circ G \circ F).$$

□

Un risultato molto utile che discende come corollario del Teorema 1.4.2, che verrà impiegato nel prossimo capitolo, è che un diffeomorfismo tra varietà differenziabili induce, per mezzo del suo differenziale, un isomorfismo tra spazi tangenti. Più formalmente abbiamo il seguente risultato.

1.4. Differenziale di una funzione e campi vettoriali

Teorema 1.4.3. *Sia $F : N \rightarrow M$ una funzione C^∞ tra le varietà differenziabili N e M , e $p \in N$. Allora*

$$(dF)_p : T_p N \longrightarrow T_{F(p)} M$$

è un isomorfismo se e solo se esistono due aperti $U \subseteq N$, $V \subseteq M$ contenenti p e $F(p)$ tali che $F : U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo.

Dimostrazione. Vediamo solo l'implicazione inversa, per l'implicazione diretta vedi [7, Teorema 1.30, Cor. (a)]. Abbiamo già notato in precedenza che il differenziale di una funzione è un'applicazione lineare. Vogliamo mostrare che esiste un'applicazione lineare da $T_{F(p)} M$ a $T_p N$ che è l'inversa di $(dF)_p$. Dal momento che, per ipotesi, F è un diffeomorfismo, significa che esiste una funzione $G : M \rightarrow N$ di classe C^∞ tale che $G \circ F = \mathbf{1}_N$ e $F \circ G = \mathbf{1}_M$. L'applicazione cercata è proprio $(dG)_{F(p)}$: infatti per la regola della catena si ha

$$d(G \circ F)_p = (dG)_{F(p)} \circ (dF)_p = d(\mathbf{1}_N)_p = \mathbf{1}_{T_p N},$$

$$d(F \circ G)_{F(p)} = (dF)_{G(F(p))} \circ (dG)_{F(p)} = (dF)_p \circ (dG)_{F(p)} = d(\mathbf{1}_M)_{F(p)} = \mathbf{1}_{T_{F(p)} M}.$$

□

Vogliamo introdurre, alla fine di questo capitolo, il concetto di campo vettoriale definito su una varietà; per maggiore chiarezza, introduciamo prima il fibrato tangente a una varietà differenziabile.

Definizione 1.4.4. Sia M una varietà differenziabile. Il *fibrato tangente* a M , denotato comunemente con TM , è l'unione disgiunta degli spazi tangenti a M in ogni suo punto, ossia

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Non è difficile mostrare che è possibile dotare tale insieme di una struttura di varietà differenziabile: si consulti [6, Sez. 12.2].

Possiamo dare la definizione di campo vettoriale.

Definizione 1.4.5. Sia M una varietà differenziabile e p un suo punto. Una funzione X che fa corrispondere a ogni punto p di M una derivazione in tale punto, ossia

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X_p \in T_p M \end{aligned}$$

è detta *campo vettoriale*.

1. Varietà differenziabili in \mathbb{R}^n

Osserviamo che se M è una varietà di dimensione n , come conseguenza del Teorema 1.3.5 avremo che, presa una carta (V, ϕ) di M , un generico campo vettoriale X su M si potrà rappresentare nel modo seguente sui punti di V :

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \right)_p, \quad p \in V \quad (1.10)$$

ossia definire un campo vettoriale su V corrisponde all'assegnare n funzioni reali definite su V , fissate le basi per gli spazi tangenti ai suoi punti. In particolare, diremo che il campo vettoriale è C^∞ se le funzioni $a_i, i = 1, \dots, n$ lo sono. Quest'ultima definizione è indipendente dalla carta scelta [6, Prop. 14.2].

Possiamo pensare un campo vettoriale X di classe C^∞ anche come un operatore differenziale che agisce sulle funzioni definite sulla varietà. Sia $f \in C^\infty(M)$, indichiamo con $X(f)$ la funzione il cui valore in $p \in M$ è dato dalla derivazione $X_p = X(p)$ applicata ad f , ovvero

$$X(f)(p) = X_p(f).$$

In coordinate possiamo scrivere

$$X(f) = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial r_i},$$

scrittura che mostra chiaramente che $X(f)$ è essa stessa una funzione di classe C^∞ .

L'insieme di tutti i campi vettoriali C^∞ su M si denota con il simbolo $\mathfrak{X}(M)$ ed è uno spazio vettoriale reale.

Capitolo 2

Gruppi di Lie e Algebre di Lie

In questo capitolo prenderemo in esame i gruppi di Lie e le algebre di Lie. Una volta data la definizione di gruppo di Lie e di morfismo tra gruppi di Lie, si proseguirà con svariati esempi inerenti i gruppi di Lie di matrici, sottoinsiemi di $GL_n\mathbb{K}$. In uno di questi esempi si introdurrà il gruppo di Lorentz $O(1,3)$ con particolare riferimento alla Relatività Ristretta: si illustrerà infatti un insieme di trasformazioni in $O(1,3)$, i boost di Lorentz, in un caso semplificato. Successivamente, dopo aver dato la definizione di algebra di Lie, ci soffermeremo sulla descrizione di come sia possibile dotare lo spazio tangente nell'identità a un gruppo di Lie di una struttura di algebra di Lie per mezzo dei campi vettoriali invarianti a sinistra. Come esempio si considererà l'algebra di Lie di $GL_n\mathbb{K}$ e si definirà la mappa esponenziale. In seguito verranno descritti i concetti di azione e rappresentazione di un gruppo di Lie e di un'algebra di Lie, prendendo in considerazione rappresentazioni su spazi vettoriali di dimensione finita. Tale scelta è motivata dal fatto che vorremo applicare tale teoria allo spazio di Minkowski, quadridimensionale e perciò di dimensione finita. Per una trattazione esauriente relativa ai contenuti di questo capitolo si consultino [6, Cap. 4], [7, Cap. 3] (gruppi e algebre di Lie), [3, Cap. 3] (trasformazioni di Lorentz), [5, Sez. 2.6] (corrispondenza gruppi di Lie - algebre di Lie per mezzo della mappa esponenziale), [2, Sez. 2.1 e Sez. 2.9] (azioni e rappresentazioni di gruppi di Lie e algebre di Lie) e [2, Cap. 2, pag. 18] (rappresentazioni aggiunte).

2.1 Gruppi di Lie

Diamo la definizione di gruppo di Lie e vediamo alcuni esempi salienti.

Definizione 2.1.1. L'insieme G è detto *gruppo di Lie* se è un gruppo dotato di una struttura di varietà differenziabile ed è tale che l'operazione di moltiplicazione

$$\begin{aligned}\mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto ab\end{aligned}$$

2. Gruppi di Lie e Algebre di Lie

e l'operazione che a ogni elemento associa il suo inverso

$$\begin{aligned} i : G &\longrightarrow G \\ c &\longmapsto c^{-1} \end{aligned}$$

sono entrambe di classe C^∞ .

Definiamo immediatamente anche il concetto di morfismo di gruppi di Lie.

Definizione 2.1.2. Siano G e H due gruppi di Lie. Un'applicazione $f : G \rightarrow H$ è detta *morfismo* se è un omomorfismo differenziabile, ovvero è un omomorfismo di gruppi, per cui vale

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

ed è C^∞ .

Prima di proseguire possiamo fare degli esempi che mostrano la varietà di applicazioni di questa teoria, senza addentrarci nel mostrare volta per volta la validità della Def. 2.1.1: ai nostri fini risultano di particolare interesse i gruppi di Lie di matrici, contenuti in $GL_n\mathbb{K}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Esempio 2.1.3. Riprendiamo l'Es. 1.1.2 a pag. 4 riguardante l'insieme S^1 in \mathbb{R}^2 . La circonferenza di raggio unitario nel piano può essere parametrizzata attraverso l'angolo ϑ con vertice nell'origine che un suo punto forma con il semiasse positivo delle ascisse, valutato in senso antiorario. Operando in questo modo S^1 viene messo in corrispondenza biunivoca col seguente insieme di matrici:

$$S = \{ (\cos \vartheta \quad \sin \vartheta), \vartheta \in \mathbb{R} \}.$$

Esso è un gruppo di Lie se dotato della seguente operazione di moltiplicazione:

$$(\cos \vartheta \quad \sin \vartheta) \times (\cos \varphi \quad \sin \varphi) = (\cos(\vartheta + \varphi) \quad \sin(\vartheta + \varphi)).$$

Esempio 2.1.4. Consideriamo il gruppo speciale ortogonale di ordine 2, così definito:

$$SO(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2\mathbb{R} : A^t A = I, \det(A) = 1 \right\}.$$

È possibile anche in questo caso verificare, attraverso la definizione 1.1.1 che $SO(2)$ è una varietà differenziabile: impostiamo una tale verifica senza però scendere nei dettagli. La condizione di ortogonalità $A^t A = I$ si può esplicitare come

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

2.2. Il gruppo di Lorentz

mentre la condizione sul determinante della matrice A si scrive

$$ad - cb = 1. \quad (2.2)$$

Svolgendo il prodotto righe per colonne si ottengono le seguenti tre equazioni nelle componenti matriciali:

$$a^2 + c^2 - 1 = 0 \quad (2.3)$$

$$ab + cd = 0 \quad (2.4)$$

$$b^2 + d^2 - 1 = 0. \quad (2.5)$$

Tali relazioni forniscono i vincoli espressi dall'annullarsi delle funzioni g_i nella definizione suddetta.

La condizione 2.3 implica che possiamo esprimere $a = \cos \vartheta$ e $c = \sin \vartheta$; dalle 2.2, 2.4 troviamo allora che deve essere $b = -\sin \vartheta$ e $d = \cos \vartheta$. Una generica matrice $M \in SO(2)$ sarà allora esprimibile come

$$M = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

per un'opportuna scelta di $\vartheta \in \mathbb{R}$. M è la matrice di una rotazione in \mathbb{R}^2 in senso antiorario rispetto all'origine di un angolo ϑ , fissata la base canonica di tale spazio: gli elementi di $SO(2)$ rappresentano perciò rotazioni in \mathbb{R}^2 . Sulla scorta di quanto affermato, possiamo mettere in relazione il gruppo S dell'Es. 2.1.3 con $SO(2)$ attraverso il seguente morfismo:

$$\begin{aligned} h : S &\longrightarrow SO(2) \\ (\cos \vartheta \quad \sin \vartheta) &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che lega un elemento della circonferenza, identificato da un angolo, con la corrispondente rotazione antioraria di quell'angolo, attorno all'origine del piano.

2.2 Il gruppo di Lorentz

Vediamo adesso un esempio di gruppo di Lie tratto dalla Fisica, che rivestirà un ruolo fondamentale nel seguente capitolo. Siano $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. Il *prodotto di Minkowski* di \mathbf{x} e \mathbf{y} , denotato con $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M$, è definito nel modo seguente:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4. \quad (2.6)$$

Se vediamo \mathbf{x} e \mathbf{y} come vettori colonna, allora più compattamente possiamo scrivere

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M = \mathbf{x}^t \eta \mathbf{y} \quad (2.7)$$

2. Gruppi di Lie e Algebre di Lie

dove la matrice η è data da

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

ed è detta *matrice metrica*.

Consideriamo ora l'insieme

$$O(1, 3) = \{A \in M_4\mathbb{R} : A^t \eta A = \eta\}.$$

È facile vedere che tale insieme contiene le matrici che rappresentano trasformazioni le quali mantengono inalterato il prodotto di Minkowski di due elementi \mathbf{x} e \mathbf{y} di \mathbb{R}^4 : infatti, se $A \in O(1, 3)$

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle_M = (A\mathbf{x})^t \eta (A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t (A^t \eta A) \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \eta \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M.$$

L'insieme $O(1, 3)$ è detto *gruppo di Lorentz*. È possibile verificare che tutte le proprietà della Def. 2.1.1 sono verificate. Notiamo inoltre che se $\Lambda \in O(1, 3)$, allora $\det(\Lambda) = \pm 1$.

Il gruppo di Lorentz riveste un'importanza fondamentale nella Fisica, in quanto “codifica” le trasformazioni lineari che permettono di descrivere come varia la misura del tempo e dello spazio tra due sistemi di riferimento inerziali. Sia S un sistema di riferimento inerziale, in cui un osservatore dotato di regoli e orologi opportunamente sincronizzati misura la posizione e l'istante di tempo in cui si verificano determinati eventi. Un generico evento è descritto da quattro coordinate, una temporale (l'istante t di accadimento rispetto a un istante scelto come zero) e tre spaziali (x, y, z); per maggiore omogeneità delle coordinate si sceglie di moltiplicare la coordinata temporale per il valore della velocità della luce nel vuoto c , che per postulato della Teoria della Relatività Speciale è la medesima in ogni sistema inerziale. In questo caso quindi, i vettori di \mathbb{R}^4 rappresentano eventi (ct, x, y, z) osservati in uno specifico sistema di riferimento.

Riferendoci alla Fig. 2.1, supponiamo adesso che un altro sistema di riferimento S' si muova rispetto a S con velocità costante $v = \beta c$ nella direzione positiva dell'asse delle ascisse di S , mantenendo i suoi assi paralleli a quelli di S ; inoltre supponiamo che le origini dei due sistemi coincidano a $t = t' = 0$. Immaginiamo che un evento A in S abbia coordinate spaziotemporali date da $A = (ct, x, y, z)$: le corrispondenti coordinate (ct', x', y', z') nel sistema di riferimento S' sono date da [3, Eq. 3.22]:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.9)$$

2.3. Algebre di Lie

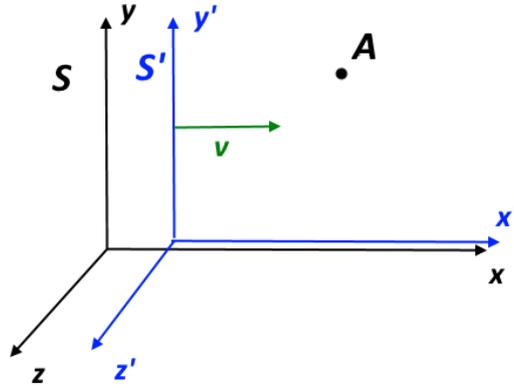


Figura 2.1: Il sistema di riferimento inerziale S' si muove rispetto a S a velocità costante v nella direzione del semiasse positivo delle x di S .

dove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ è detto *fattore di Lorentz*. Le trasformazioni 2.9 possono essere rappresentate in notazione matriciale come

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Una semplice verifica mostra che $\Lambda \in O(1, 3)$; le trasformazioni del tipo appena descritto sono dette *boost di Lorentz*.

2.3 Algebre di Lie

Diamo innanzitutto la definizione di algebra di Lie. Come vedremo, gruppi di Lie ed algebre di Lie sono collegati: lo spazio tangente a un gruppo di Lie ha naturalmente una struttura di algebra di Lie.

Definizione 2.3.1. Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale \mathfrak{g} su un campo \mathbb{K} con un operatore binario $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, detto *prodotto di Lie* o *bracket*, che soddisfa le seguenti proprietà $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

- è bilineare, cioè $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$ e $[z, \alpha x + \beta y] = \alpha[z, x] + \beta[z, y]$;
- è antisimmetrico, ossia $[x, y] = -[y, x]$;
- soddisfa l'*identità di Jacobi*, ovvero $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$.

2. Gruppi di Lie e Algebre di Lie

La proprietà di antisimmetria implica immediatamente la proprietà di nilpotenza, ossia $[x, x] = 0 \forall x \in \mathfrak{g}$.

Esempio 2.3.2. Un esempio elementare di algebra di Lie è rappresentato dallo spazio delle matrici quadrate a coefficienti in \mathbb{K} , ovvero $M_n\mathbb{K}$, dotato della seguente operazione detta *commutatore*:

$$[A, B] := AB - BA.$$

La verifica della Def. 2.3.1 è banale.

Nella Sez. 2.1 abbiamo definito il concetto di morfismo tra gruppi di Lie; adesso diamo la definizione di omomorfismo di algebre di Lie.

Definizione 2.3.3. Siano $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ due algebre di Lie. L'applicazione lineare $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ è detta *omomorfismo* tra \mathfrak{g} e \mathfrak{h} se è compatibile con l'operazione di parentesi di Lie:

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Vedremo nella Sez. 2.4 che dato un morfismo di gruppi di Lie è possibile, attraverso l'operazione di differenziazione, ottenere un omomorfismo di algebre di Lie.

Per questo lavoro risulta particolarmente importante la descrizione dell'algebra di Lie di un gruppo di Lie, argomento della prossima sezione.

2.4 Algebra di Lie di un gruppo di Lie

È possibile dotare lo spazio tangente nell'identità a un gruppo di Lie di un opportuno prodotto in maniera da costruire un'algebra di Lie. Prima di illustrare il modo per cui ciò è possibile, introduciamo i concetti di traslazione sinistra e destra e di campo vettoriale invariante a sinistra.

Definizione 2.4.1. Sia G un gruppo di Lie e σ un suo elemento. Chiamiamo *traslazione sinistra* (di σ) la funzione

$$\begin{aligned} l_\sigma : G &\longrightarrow G \\ \tau &\longmapsto \sigma\tau \end{aligned}$$

Equivalentemente si definisce *traslazione destra* (di σ) la funzione

$$\begin{aligned} r_\sigma : G &\longrightarrow G \\ \tau &\longmapsto \tau\sigma \end{aligned}$$

2.4. Algebra di Lie di un gruppo di Lie

Tali traslazioni permettono di descrivere lo spazio tangente a un gruppo di Lie in un suo qualsiasi elemento conoscendo lo spazio tangente nell'identità al medesimo gruppo. Infatti, dalla differenziabilità del prodotto richiesta dalla Def. 2.1.1 segue che le traslazioni sono funzioni differenziabili. Inoltre, le traslazioni sono invertibili e la loro inversa è ancora una traslazione: infatti, data una traslazione destra (risp. sinistra) di σ , si ha che la sua inversa è data dalla traslazione destra (risp. sinistra) di $-\sigma$. Essendo una traslazione, la funzione inversa è essa stessa differenziabile, per cui le traslazioni sono diffeomorfismi. Per il Teorema 1.4.3 i differenziali delle traslazioni calcolati nell'identità e , $(dl_\sigma)_e$ e $(dr_\sigma)_e$ inducono un isomorfismo tra lo spazio tangente al gruppo nell'identità e lo spazio tangente al gruppo in $l_\sigma(e) = r_\sigma(e) = \sigma$. Inoltre, l_σ e r_σ mappano gli intorni di e in intorni di σ , per cui possiamo affermare che tutta l'informazione "locale" del gruppo risulta contenuta in un intorno dell'identità.

Per costruire l'algebra di Lie di un gruppo di Lie, scegliamo di riferirci alle traslazioni sinistre, e perciò diamo di seguito la definizione di campo vettoriale invariante a sinistra.

Definizione 2.4.2. Sia X un campo vettoriale (non necessariamente C^∞) sul gruppo di Lie G . Diciamo che X è *invariante a sinistra* se

$$dl_\sigma \circ X = X \circ l_\sigma \quad \forall \sigma \in G.$$

Questo significa che $\forall \tau \in G$

$$(dl_\sigma)_\tau(X_\tau) = X_{\sigma\tau}.$$

Notiamo che la Def. 2.4.2 implica che la conoscenza del valore assunto da un campo vettoriale X invariante a sinistra nell'identità e del gruppo comporta la conoscenza del valore X_σ del campo vettoriale in ogni altro punto σ . Infatti

$$X_\sigma = (X \circ l_\sigma)(e) = (dl_\sigma)_e(X_e).$$

Denotiamo l'insieme di tutti i campi vettoriali invarianti a sinistra su G con il simbolo $L(G)$. Tale insieme gode delle proprietà sintetizzate nel teorema che stiamo per enunciare e che è di importanza decisiva per la nostra costruzione.

Teorema 2.4.3. *Sia G un gruppo di Lie e $L(G)$ l'insieme di tutti i campi vettoriali invarianti a sinistra su G .*

- $L(G)$ è uno spazio vettoriale reale, e l'applicazione lineare $\alpha : L(G) \rightarrow T_e G$, definita da $\alpha(X) = X_e$, è un isomorfismo di $L(G)$ con lo spazio tangente nell'identità a G , $T_e G$. Per questo motivo, $\dim L(G) = \dim T_e G = \dim G$;
- I campi vettoriali invarianti a sinistra sono C^∞ , per cui $L(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$;
- La parentesi di Lie di due campi vettoriali invarianti a sinistra è ancora un campo vettoriale invariante a sinistra;

2. Gruppi di Lie e Algebre di Lie

- $L(G)$ forma un'algebra di Lie con l'operazione di parentesi di Lie così definita:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad X, Y \in L(G), f \in C^\infty(G).$$

Dimostrazione. Riportiamo esclusivamente la dimostrazione del primo punto perché è molto utile per quanto diremo in seguito; per le altre affermazioni si veda [7, Prop. 3.7].

Dalla Def. 2.4.2 segue che se $X, Y \in L(G)$ e $c \in \mathbb{R}$, allora $\forall \sigma \in G$

$$dl_\sigma \circ (X + Y) = dl_\sigma \circ X + dl_\sigma \circ Y = X \circ l_\sigma + Y \circ l_\sigma = (X + Y) \circ l_\sigma,$$

$$dl_\sigma \circ (cX) = c dl_\sigma \circ X = (cX) \circ l_\sigma.$$

Ciò mostra che $L(G)$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma tra campi vettoriali e prodotto di un numero reale per un campo vettoriale. In modo analogo si possono dimostrare le altre proprietà che mostrano che $L(G)$ è uno spazio vettoriale reale.

L'applicazione α è chiaramente lineare in quanto, per $a, b \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in L(G)$, si ha

$$\alpha(aX + bY) = (aX + bY)(e) = aX_e + bY_e = a\alpha(X) + b\alpha(Y).$$

L'applicazione α è iniettiva: infatti siano X, Y tali che $\alpha(X) = \alpha(Y)$, ossia $X_e = Y_e$. Allora $\forall \sigma \in G$

$$X_\sigma = X(l_\sigma(e)) = (dl_\sigma)_e(X_e) = (dl_\sigma)_e(Y_e) = Y(l_\sigma(e)) = Y_\sigma$$

il che prova che $X = Y$.

Infine, α è suriettiva. Sia infatti $x \in T_e G$ e sia X il campo vettoriale su G definito su un generico $\sigma \in G$ come $X_\sigma = (dl_\sigma)_e(x)$. Allora

$$X_e = (dl_e)_e(x) = \mathbf{1}_{T_e G}(x) = x$$

e $\forall \tau, \rho \in G$

$$(X \circ l_\rho)(\tau) = X_{\rho\tau} = (dl_{\rho\tau})_e(x),$$

$$(dl_\rho \circ X)(\tau) = (dl_\rho)_\tau(X_\tau) = (dl_\rho)_\tau((dl_\tau)_e(x)) = d(l_\rho \circ l_\tau)_e(x) = (dl_{\rho\tau})_e(x).$$

Nel penultimo passaggio si è utilizzato il Teorema 1.4.2. Per cui $X \in L(G)$ e dal momento che $\alpha(X) = X_e = x$ ciò conclude la dimostrazione della suriettività di α . In particolare, $X = \alpha^{-1}(x)$.

L'isomorfismo $L(G) \cong T_e G$ implica che $\dim L(G) = \dim T_e G$ e per il Teorema 1.3.5 si ha $\dim T_e G = \dim G$, il che conclude la dimostrazione del primo punto del teorema. \square

L'isomorfismo α consente di introdurre una parentesi di Lie su $T_e G$. Dati $x, y \in T_e G$, consideriamo $X = \alpha^{-1}(x)$ e $Y = \alpha^{-1}(y)$. La parentesi di Lie di x e y risulta così definita:

$$[x, y] = [X, Y]_e. \tag{2.10}$$

Con tale operazione, $T_e G$ diventa un'algebra di Lie, detta l'algebra di Lie del gruppo di Lie G [6, Sez. 16.3].

2.5 L'algebra di Lie delle matrici e l'esponenziale di matrice

Vediamo un esempio molto importante di algebra di Lie, ossia l'algebra di Lie delle matrici.

Consideriamo il gruppo di Lie $G = GL_n\mathbb{K}$. Possiamo identificare lo spazio tangente nell'identità a tale gruppo con lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$, $M_n\mathbb{K}$. Infatti a una generica derivazione nell'identità X_e possiamo associare la matrice dei coefficienti della sua espansione in termini di una base; vale cioè la seguente corrispondenza:

$$X_e = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial r_{ij}} \right)_e \longleftrightarrow (a_{ij}). \quad (2.11)$$

Nell'Es. 2.3.2 abbiamo mostrato in che modo si può dotare $M_n\mathbb{K}$ di una struttura di algebra di Lie, indipendentemente dal fatto che tale insieme possa essere visto come lo spazio tangente nell'identità a G , semplicemente definendo in maniera esplicita la parentesi di Lie di due matrici. D'altro canto, però, il fatto che G sia un gruppo di Lie comporta che T_eG abbia una struttura di algebra di Lie attraverso l'introduzione della parentesi definita dall'Eq. 2.10. $M_n\mathbb{K}$, per via della corrispondenza 2.11, "eredita" tale struttura: risulta quindi piuttosto spontaneo chiedersi se essa coincida con quella descritta nell'Es. 2.3.2. La risposta a questa domanda è affermativa. Si può infatti dimostrare [6, Prop. 16.11] che, date le due derivazioni

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial r_{ij}} \right)_e, \quad B = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial r_{ij}} \right)_e \in T_eG,$$

se

$$[A, B] = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial r_{ij}} \right)_e$$

allora

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} - b_{ik}a_{kj},$$

ossia, se le derivazioni sono identificate con le matrici attraverso la relazione 2.11,

$$[A, B] = AB - BA.$$

L'algebra di Lie di $GL_n\mathbb{K}$ si denota con $\mathfrak{gl}_n\mathbb{K}$.

Data l'algebra di Lie delle matrici, possiamo definire la mappa esponenziale, che riveste un ruolo fondamentale, come si vedrà nel seguito.

2. Gruppi di Lie e Algebre di Lie

Definizione 2.5.1. Sia $X \in M_n\mathbb{K}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . L'esponenziale di X , denotato con e^X o con $\exp(X)$, è definito attraverso la seguente serie:

$$e^X := I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}X^k. \quad (2.12)$$

Affinché una tale definizione abbia senso è necessario verificare la convergenza, in senso opportuno, della serie appena scritta. Non ci addentriamo in tale verifica, rimandando alla consultazione di [6, Sez. 15.3] per i dettagli e per la dimostrazione delle proprietà di cui gode tale funzione. Evidenziamo solamente che, tra le proprietà consultabili nel riferimento appena citato, vale $e^X \in GL_n\mathbb{K}$, dunque abbiamo che $\exp : M_n\mathbb{K} \rightarrow GL_n\mathbb{K}$. Questa proprietà rende l'esponenziale di matrice particolarmente adatto a costruire curve in $GL_n\mathbb{K}$.

La mappa esponenziale permette di evidenziare un legame tra morfismi di gruppi di Lie e omomorfismi tra le corrispondenti algebre di Lie. Siano G, H due gruppi di Lie di matrici e $f : G \rightarrow H$ un morfismo tra di essi. Denotiamo con e, e' le identità dei gruppi G, H rispettivamente. Il differenziale di f nell'identità di G , $(df)_e$, è un'applicazione lineare tra lo spazio tangente nell'identità a G , T_eG , e lo spazio tangente in $f(e) = e'$ ad H , $T_{e'}H$. Indichiamo con \mathfrak{g} e \mathfrak{h} , rispettivamente, T_eG e $T_{e'}H$ dotati della struttura di algebra di Lie descritta nella sezione precedente. Il risultato veramente notevole è il seguente, consultabile in [5, Teorema 2.21].

Teorema 2.5.2. *Siano $G, H, f, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ come sopra. Allora:*

- $(df)_e$ è un omomorfismo di algebre di Lie, per cui

$$(df)_e([X, Y]) = [(df)_e(X), (df)_e(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g};$$

- si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \uparrow \text{exp} & & \uparrow \text{exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{(df)_e} & \mathfrak{h} \end{array}$$

dove con $\exp(\cdot)$ si intende l'esponenziale di matrice. Il diagramma indica che $f(\exp(X)) = \exp((df)_e(X))$.

□

2.6 Azioni e rappresentazioni di gruppi di Lie

In questa sezione verranno esaminati i concetti di azione e rappresentazione di un gruppo di Lie.

La teoria dei gruppi è uno strumento potente per l'analisi di simmetrie di oggetti matematici. In particolare, le rappresentazioni sono simmetrie di alcuni degli oggetti più basilari in algebra, ossia gli spazi vettoriali.

Diamo innanzitutto la definizione di azione di un generico gruppo su un insieme.

Definizione 2.6.1. Sia A un insieme e G un gruppo. Si dice *azione (sinistra) di G su A* o *G -azione* un'applicazione

$$\begin{aligned} a : G \times A &\longrightarrow A \\ (g, p) &\longmapsto a(g, p) := g \cdot p \end{aligned}$$

e che verifica le seguenti condizioni:

- $e \cdot p = p \quad \forall p \in A$;
- $g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p \quad \forall g, h \in G, p \in A$.

Definiamo in maniera analoga un'azione destra. In particolare, se l'insieme A è uno spazio vettoriale, chiediamo come condizione aggiuntiva che $\forall g \in G$, l'applicazione

$$\begin{aligned} a_g : A &\longrightarrow A \\ v &\longmapsto a(g, v) = g \cdot v \end{aligned}$$

sia lineare.

Mostriamo immediatamente un semplice esempio.

Esempio 2.6.2. Il gruppo lineare generale $GL_n \mathbb{K}$ agisce su \mathbb{K}^n attraverso il prodotto di una matrice per un vettore colonna:

$$GL_n \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

La prima proprietà della Def. 2.6.1 è banalmente verificata in quanto il prodotto righe per colonne della matrice identità con un vettore qualsiasi restituisce il vettore stesso. La seconda proprietà vale per l'associatività del prodotto stesso, mentre la sua linearità garantisce la linearità $\forall g \in GL_n \mathbb{K}$ dell'applicazione a_g , per cui tale mappa costituisce un'azione del gruppo $GL_n \mathbb{K}$ sullo spazio vettoriale \mathbb{K}^n .

2. Gruppi di Lie e Algebre di Lie

Definiamo adesso il concetto di rappresentazione di un gruppo di Lie su uno spazio vettoriale finito dimensionale.

Definizione 2.6.3. Sia G un gruppo di Lie e V uno spazio vettoriale finito dimensionale sul campo \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}). Una *rappresentazione* ϱ di G su V è un omomorfismo differenziabile

$$\varrho : G \longrightarrow GL(V)$$

dove $GL(V)$ denota il gruppo di tutte le applicazioni lineari invertibili da V in se stesso.

Osservazione 2.6.4. Dare un'azione differenziabile di un gruppo di Lie G su uno spazio vettoriale V equivale a dare una rappresentazione di G stesso su V . Cerchiamo di capire come ciò sia possibile. Notiamo innanzitutto che attraverso le funzioni a_g introdotte nella Def. 2.6.1 le condizioni della medesima definizione assumono la forma seguente:

$$a_e = \mathbb{1}_V \quad \text{e} \quad a_g \circ a_h = a_{gh}.$$

Da queste due condizioni discende immediatamente che a_g è invertibile $\forall g \in G$ e la sua inversa è data da $a_{g^{-1}}$ (infatti $a_g \circ a_{g^{-1}} = a_{gg^{-1}} = a_e = \mathbb{1}_V$ e analogamente $a_{g^{-1}} \circ a_g = a_{g^{-1}g} = a_e = \mathbb{1}_V$): ciò dunque significa che $a_g \in GL(V)$. Perciò possiamo definire la seguente mappa

$$\begin{aligned} \varrho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto a_g \end{aligned}$$

che è un omomorfismo di gruppi. Infatti $\forall g, h \in G, \forall v \in V$

$$\begin{aligned} \varrho(gh)(v) &= a_{gh}(v) = a_g(a_h(v)) \\ &= \varrho(g)(\varrho(h)(v)) = (\varrho(g) \circ \varrho(h))(v). \end{aligned}$$

Viceversa, dato un omomorfismo $\varrho : G \rightarrow GL(V)$, è possibile definire un'azione $a : G \times V \rightarrow V$ data da $a(g, v) = g \cdot v = \varrho(g)(v)$. Le due proprietà della Def. 2.6.1 sono verificate: infatti, ricordando che essendo ϱ un omomorfismo si ha $\varrho(e) = \mathbb{1}_V$, allora

$$\begin{aligned} e \cdot v &= \varrho(e)(v) = \mathbb{1}_V(v) = v, \\ g \cdot (h \cdot v) &= \varrho(g)(\varrho(h)(v)) = (\varrho(g) \circ \varrho(h))(v) \\ &= \varrho(gh)(v) = (gh) \cdot v. \end{aligned}$$

Dato un gruppo di Lie G è possibile definire una particolare rappresentazione di G sulla sua algebra di Lie \mathfrak{g} , che ora introduciamo. Denotiamo con $\text{Aut}(G)$ l'insieme degli automorfismi di G , ossia gli isomorfismi (omomorfismi invertibili) di G in se stesso. Consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} \Psi : G &\longrightarrow \text{Aut}(G) \\ g &\longmapsto \Psi_g : G \longrightarrow G \\ &\quad h \longmapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

2.7. Rappresentazioni di algebre di Lie

È facile vedere che Ψ_g è un omomorfismo, e tramite una verifica diretta si vede anche che esso è invertibile e in particolare $\Psi_g^{-1} = \Psi_{g^{-1}}$, perciò $\Psi_g \in \text{Aut}(G)$. Dal momento che l'operazione di moltiplicazione e di inverso in G sono differenziabili, allora anche Ψ_g e $\Psi_{g^{-1}}$ sono funzioni differenziabili, per cui Ψ_g è un diffeomorfismo.

Consideriamo ora il differenziale di Ψ_g nell'identità e di G e denotiamolo con Ad_g invece che con l'usuale notazione $(d\Psi_g)_e$. Combinando il Teorema 1.4.3 con il Teorema 2.5.2 si ha che Ad_g è un automorfismo di \mathfrak{g} , cioè $\text{Ad}_g \in GL(\mathfrak{g})$. Possiamo allora introdurre la seguente mappa tra G e $GL(\mathfrak{g})$:

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto \text{Ad}_g \end{aligned}$$

Tale mappa è un omomorfismo: infatti

$$\begin{aligned} \text{Ad}(gk) &= \text{Ad}_{gk} = (d\Psi_{gk})_e \\ &= (d(\Psi_g \circ \Psi_k))_e \\ &= (d\Psi_g)_{\Psi_k(e)} \circ (d\Psi_k)_e && \text{(regola della catena)} \\ &= (d\Psi_g)_e \circ (d\Psi_k)_e \\ &= \text{Ad}_g \circ \text{Ad}_k = \text{Ad}(g) \circ \text{Ad}(k). \end{aligned}$$

Dal momento che Ad è un omomorfismo tra G e $GL(\mathfrak{g})$, allora tale mappa costituisce una rappresentazione di G sulla sua algebra di Lie \mathfrak{g} ; essa è chiamata *rappresentazione aggiunta* di G .

Se $G \in GL_n(\mathbb{K})$ allora è possibile dimostrare che $\text{Ad}(g)(X) = gXg^{-1} \forall X \in \mathfrak{g}$ (si veda al riguardo [2, Eq. 2.10, pag. 21]).

2.7 Rappresentazioni di algebre di Lie

Introduciamo ora il concetto di rappresentazione di un'algebra di Lie su uno spazio vettoriale. Prima di darne la definizione, notiamo che, se V è uno spazio vettoriale, l'insieme degli endomorfismi su V (ossia l'insieme delle applicazioni lineari da V in se stesso), che si denota con $\text{End}(V)$, costituisce un'algebra di Lie con la parentesi di Lie data ancora una volta dal commutatore: $[\rho, \sigma] = \rho \circ \sigma - \sigma \circ \rho$ per $\sigma, \rho \in \text{End}(V)$. Denotiamo tale algebra di Lie con il simbolo $\mathfrak{gl}(V)$. Se V è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} tale che $\dim V = n$, allora $V \cong \mathbb{K}^n$ e $\text{End}(V) \cong M_n\mathbb{K}$. Con questa precisazione la definizione seguente di rappresentazione di un'algebra di Lie risulterà più chiara.

Definizione 2.7.1. Una *rappresentazione* dell'algebra di Lie \mathfrak{g} su uno spazio vettoriale V è un omomorfismo ρ di algebre di Lie tra \mathfrak{g} e l'algebra di Lie degli endomorfismi su V

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ \rho([X, Y]) &= [\rho(X), \rho(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

2. Gruppi di Lie e Algebre di Lie

Un esempio importante di rappresentazione di un'algebra di Lie è dato dalla rappresentazione aggiunta. La *rappresentazione aggiunta* di un'algebra di Lie \mathfrak{g} è l'applicazione

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto (Y \longmapsto [X, Y]) \end{aligned}$$

La funzione $Y \longmapsto [X, Y]$ è chiaramente lineare per linearità della parentesi di Lie rispetto ai suoi argomenti, in particolare il secondo. Mostriamo che l'applicazione appena definita costituisce una rappresentazione di \mathfrak{g} su se stessa. La linearità è immediata: siano $X, Y \in \mathfrak{g}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (ove \mathbb{K} è il campo su cui è definita \mathfrak{g} come spazio vettoriale), allora:

$$\begin{aligned} \text{ad}(\alpha X + \beta Y)(Z) &= [\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] = \\ &= \alpha \text{ad}(X)(Z) + \beta \text{ad}(Y)(Z) \quad \forall Z \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

da cui

$$\text{ad}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \text{ad}(X) + \beta \text{ad}(Y).$$

La dimostrazione del fatto che tale applicazione preserva l'operazione di bracket richiede qualche calcolo in più. Dobbiamo dimostrare che:

$$\text{ad}([X, Y]) = [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)] = \text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y) - \text{ad}(Y) \circ \text{ad}(X).$$

Mostriamo che ciò vale facendo vedere che se applichiamo un elemento $Z \in \mathfrak{g}$ arbitrario ad ambo i membri otteniamo due espressioni identiche. Per il primo membro abbiamo

$$\text{ad}([X, Y])(Z) = [[X, Y], Z] = -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y]$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'identità di Jacobi. Per il secondo membro, invece, utilizzando le proprietà di antisimmetria della parentesi di Lie si ha

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)(\text{ad}(Y)(Z)) - \text{ad}(Y)(\text{ad}(X)(Z)) &= \text{ad}(X)([Y, Z]) - \text{ad}(Y)([X, Z]) \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = -[[Y, Z], X] + [Y, [Z, X]] = -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y] \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione.

Concludiamo tale capitolo mettendo in evidenza il legame tra una rappresentazione di un gruppo di Lie su uno spazio vettoriale finito dimensionale e le rappresentazioni sul medesimo spazio dell'algebra di Lie di tale gruppo. Sostanzialmente, una rappresentazione di un gruppo di Lie induce attraverso l'operazione di differenziazione una rappresentazione della sua algebra di Lie. Diamo pertanto la seguente proposizione.

Proposizione 2.7.2. *Sia $\varrho : G \rightarrow GL(V)$ una rappresentazione del gruppo di Lie G sullo spazio vettoriale finito dimensionale V . Allora*

- $(d\varrho)_e$ è una rappresentazione dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di G su V ;

2.7. Rappresentazioni di algebre di Lie

- si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varrho} & GL(V) \\ \uparrow \text{exp} & & \uparrow \text{exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{(d\varrho)_e} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Dimostrazione. Tale proposizione è una conseguenza del Teorema 2.5.2, sostituendo nel corrispondente enunciato $f = \varrho$, $H = GL(V)$ e $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. \square

Sulla base della Prop. 2.7.2, il differenziale nell'identità della rappresentazione aggiunta Ad di un gruppo è una rappresentazione della sua algebra di Lie. Si può dimostrare che quest'ultima rappresentazione è proprio la rappresentazione aggiunta di tale algebra, ossia $(d\text{Ad})_e = \text{ad}$ [2, Eq. 2.10 e 2.11, pag. 18].

Capitolo 3

Lo spazio di Minkowski

In questo capitolo, dopo qualche breve richiamo su alcuni aspetti fondamentali della Teoria della Relatività Ristretta, volti a motivare l'introduzione dello spazio di Minkowski, descriveremo il gruppo di Poincaré. Successivamente studieremo il gruppo di Lorentz ristretto $SO(1, 3)^+$ e la sua azione sullo spazio di Minkowski come spazio vettoriale reale \mathbb{H}_2 delle matrici hermitiane 2×2 . Mostreremo che esiste un isomorfismo tra $SL_2\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2$ e $SO(1, 3)^+$, con $\mathbb{Z}_2 = \{\pm I_2\}$, che ci permetterà di stabilire una corrispondenza tra $SL_2\mathbb{C}$ e $SO(1, 3)^+$. Nell'ultima sezione di questo capitolo completeremo tale corrispondenza considerando l'azione del gruppo di Poincaré sullo spazio di Minkowski in termini dell'azione di $SL_2\mathbb{C} \times \mathbb{H}_2$ su un opportuno sottoinsieme della Grassmanniana $Gr(2, 4)$, attraverso una trattazione dovuta al matematico, fisico e cosmologo Roger Penrose.

Per una trattazione avanzata dei contenuti del presente capitolo si consulti [4, Cap. 2].

3.1 La relatività ristretta e lo spazio di Minkowski

In questa sezione vogliamo richiamare alcuni concetti, alcuni dei quali già introdotti brevemente nella Sez. 2.2.

Lo spazio di Minkowski costituisce la più semplice struttura matematica su cui la Teoria della Relatività Ristretta di Einstein può essere formulata. Tale teoria si basa su due semplici postulati [3, pag. 44]:

- Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali;
- La velocità c della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Com'è noto, Einstein dimostrò che da tali postulati discende il fatto che spazio e tempo non possono essere considerati come due entità assolute e indipendenti: risulta innaturale, pertanto, nella descrizione di fenomeni fisici, disaccoppiare l'“informazione”

3.1. La relatività ristretta e lo spazio di Minkowski

temporale da quella spaziale, e conviene invece adottare un'impostazione che metta in luce la loro interconnessione. Consideriamo un sistema di riferimento inerziale di origine O e assi x , y e z , in cui ciascun punto (x, y, z) è dotato di orologi opportunamente sincronizzati¹ al fine di poter misurare il tempo t trascorso da un istante di riferimento $t_0 = 0$. Supponiamo che due eventi A e B si verifichino in tale sistema di riferimento nelle posizioni (x_A, y_A, z_A) , (x_B, y_B, z_B) ai tempi t_A , t_B rispettivamente. Ai due eventi A , B potranno essere rispettivamente associate le quaterne di numeri reali (ct_A, x_A, y_A, z_A) , (ct_B, x_B, y_B, z_B) che esprimono le coordinate spaziotemporali di tali eventi. Le trasformazioni di Lorentz 2.9 permettono di individuare le coordinate $(ct'_A, x'_A, y'_A, z'_A)$, $(ct'_B, x'_B, y'_B, z'_B)$ di A e B in un altro sistema di riferimento inerziale. Attraverso le trasformazioni di Lorentz è semplice mostrare che vale la seguente uguaglianza:

$$(c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = (c\Delta t')^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2, \quad (3.1)$$

in cui $\Delta t = t_B - t_A$, $\Delta x = x_B - x_A$, $\Delta y = y_B - y_A$, $\Delta z = z_B - z_A$ e $\Delta t' = t'_B - t'_A$, $\Delta x' = x'_B - x'_A$, $\Delta y' = y'_B - y'_A$, $\Delta z' = z'_B - z'_A$.

L'Eq. 3.1 mostra che la quantità al primo o al secondo membro è invariante per trasformazioni di Lorentz, ossia è la stessa per tutti gli osservatori inerziali: ciò suggerisce l'introduzione della forma quadratica

$$Q(\mathbf{x}) = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (\mathbf{x})^t \eta \mathbf{x} \quad (3.2)$$

dove $\mathbf{x} = (ct, x, y, z)$ e η è la matrice metrica precedentemente definita dalla relazione 2.8. Tale forma quadratica è associata al prodotto di Minkowski definito dall'Eq. 2.6 dal momento che

$$Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M = (\mathbf{x})^t \eta \mathbf{x}. \quad (3.3)$$

Risulta perciò naturale introdurre uno spazio quadridimensionale in cui un generico elemento (x_0, x_1, x_2, x_3) , detto *quadrivettore*, rappresenta nella sua prima componente la coordinata temporale di un evento e nelle restanti tre componenti le coordinate spaziali del medesimo evento. In particolare, lo spazio affine reale $\mathbf{A}^4(\mathbb{R})$, insieme alla forma quadratica Q o equivalentemente al prodotto di Minkowski $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$, prende il nome di *spazio di Minkowski* e si denota con \mathbf{M}_0 o $\mathbb{R}^{1,3}$ [4, Sez. 2.1, pag. 72]. In questo caso $n_+ = 1$ è il numero di autovalori positivi di Q e $n_- = 3$ il numero di autovalori negativi. Il numero $s = n_+ - n_-$ è detto *segnatura* di Q .

Osservazione 3.1.1. Abbiamo appena definito lo spazio di Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ come uno spazio affine, e non come uno spazio vettoriale. Tale scelta è dettata più da una motivazione fisica che matematica: in fisica non esiste un evento “centrale” o privilegiato, quale sarebbe l'evento corrispondente al vettore nullo di \mathbb{R}^4 , se scegliessimo di definire lo spazio

¹Per la descrizione di un'opportuna procedura di sincronizzazione si consulti [3, Sez. 2.2, pag. 50].

3. Lo spazio di Minkowski

di Minkowski in termini di uno spazio vettoriale reale quadridimensionale. Tuttavia, per poter individuare un evento nello spaziotempo e poter eseguire dei calcoli, è necessario fissare un riferimento affine in $\mathbf{A}^4(\mathbb{R})$, il che rende equivalente, per i nostri fini, definire lo spazio di Minkowski come lo spazio vettoriale \mathbb{R}^4 dotato della forma quadratica Q , approccio che adotteremo nel seguito.

3.2 Il gruppo di Poincaré

Nella Sez. 2.6 abbiamo definito il concetto di azione di un gruppo su un insieme. Vogliamo adesso trattare l'azione del gruppo di Poincaré sullo spazio di Minkowski. Per comprendere quanto segue è necessario introdurre il concetto di prodotto semidiretto tra due gruppi.

Definizione 3.2.1. Siano (G, \cdot) , $(H, *)$ due gruppi e $\psi : H \rightarrow \text{Aut}(G)$ un omomorfismo. Chiamiamo *prodotto semidiretto* di G e H secondo ψ , il prodotto cartesiano $G \times H$ dotato della seguente operazione:

$$(g_1, h_1) \star (g_2, h_2) = (g_1 \cdot \psi(h_1)(g_2), h_1 * h_2).$$

Denotiamo il prodotto semidiretto dei due gruppi G ed H secondo ψ con $G \rtimes_{\psi} H$.

Abbiamo già visto che il gruppo di Lorentz $O(1, 3)$ è formato da tutte le matrici 4×4 che conservano il prodotto di Minkowski. Esso agisce su \mathbb{R}^4 semplicemente attraverso il prodotto matrice-vettore colonna (vedi Es. 2.6.2). Il gruppo di Poincaré si ottiene dal gruppo di Lorentz tenendo conto anche delle traslazioni spaziotemporali. Vediamo come dare la forma matematica corretta a questa idea.

Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, e supponiamo di applicare a \mathbf{x} una trasformazione $\Lambda \in O(1, 3)$ del gruppo di Lorentz e una traslazione spaziotemporale $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^4$. Ciò corrisponde ad eseguire l'operazione

$$\mathbf{x} \longmapsto \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{t}. \quad (3.4)$$

Se applichiamo al quadrivettore ottenuto un'altra trasformazione $\Lambda' \in O(1, 3)$ e una nuova traslazione $\mathbf{t}' \in \mathbb{R}^4$ otterremo:

$$\Lambda \mathbf{x} + \mathbf{t} \longmapsto \Lambda'(\Lambda \mathbf{x} + \mathbf{t}) + \mathbf{t}' = (\Lambda' \Lambda) \mathbf{x} + \Lambda' \mathbf{t} + \mathbf{t}'. \quad (3.5)$$

L'Eq. 3.5 ci mostra che non è possibile ricondurre tale operazione all'applicazione della trasformazione $\Lambda \Lambda'$ al punto \mathbf{x} e alla successiva traslazione della quantità $\mathbf{t} + \mathbf{t}'$, per via della presenza della matrice Λ' , in generale diversa dall'identità, a moltiplicare il vettore \mathbf{t} . Dal momento che stiamo considerando coppie di trasformazioni di $O(1, 3)$ e traslazioni spaziotemporali, risulta piuttosto naturale lavorare con il prodotto cartesiano

3.3. Il gruppo di Poincaré

$\mathbb{R}^4 \times O(1, 3)$; vorremmo dotare tale insieme di un'operazione compatibile con quanto stabilito nell'Eq. 3.5, definendola perciò nel seguente modo:

$$(\mathbf{t}', \Lambda') \cdot (\mathbf{t}, \Lambda) = (\mathbf{t}' + \Lambda' \mathbf{t}, \Lambda' \Lambda). \quad (3.6)$$

Introdotta l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : O(1, 3) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^4) \\ \Omega &\longmapsto (\mathbf{s} \longmapsto \Omega \mathbf{s}) \end{aligned}$$

notiamo che l'operazione 3.6 si può scrivere come

$$(\mathbf{t}', \Lambda') \cdot (\mathbf{t}, \Lambda) = (\mathbf{t}' + \psi(\Lambda')(\mathbf{t}), \Lambda' \Lambda). \quad (3.7)$$

Confrontando l'Eq. 3.7 con la Def. 3.2.1 vediamo che il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^4 \times O(1, 3)$ dotato di tale operazione costituisce proprio il prodotto semidiretto di \mathbb{R}^4 e $O(1, 3)$ secondo l'omomorfismo ψ . Definiamo pertanto il *gruppo di Poincaré*, denotandolo con il simbolo \mathcal{P} , come il prodotto semidiretto del gruppo abeliano additivo delle traslazioni spaziotemporali e del gruppo di Lorentz secondo ψ , ossia

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^4 \rtimes_{\psi} O(1, 3).$$

È possibile introdurre il gruppo di Poincaré in un modo alternativo, che non richiede l'utilizzo del prodotto semidiretto. Consideriamo il seguente gruppo:

$$\mathcal{P}' = \left\{ \begin{pmatrix} \Omega & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \mid \Omega \in O(1, 3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

che agisce sull'insieme

$$\mathbf{M}' = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}' \times \mathbf{M}' &\longrightarrow \mathbf{M}' \\ \begin{pmatrix} \Omega & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \Omega \mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vediamo dunque che l'azione di \mathcal{P}' su \mathbf{M}' è la stessa di \mathcal{P} su \mathbf{M} . È facile vedere che \mathcal{P} e \mathcal{P}' sono isomorfi attraverso la mappa

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P}' \\ (\Omega, \mathbf{t}) &\longmapsto \begin{pmatrix} \Omega & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'artificio utilizzato sopra ha il vantaggio di permettere l'esecuzione di calcoli attraverso l'usuale prodotto righe per colonne tra matrici.

3.3 Lo spazio di Minkowski e il gruppo di Lorentz ristretto

È possibile descrivere in maniera equivalente lo spaziotempo di Minkowski attraverso l'insieme \mathbb{H}_2 delle matrici hermitiane 2×2 :

$$\mathbb{H}_2 = \{H \in M_2\mathbb{C} \mid H = H^\dagger\}$$

dove H^\dagger indica l'operazione di trasposizione e coniugazione complessa di H . \mathbb{H}_2 forma uno spazio vettoriale reale di dimensione 4: infatti una sua generica matrice A si può scrivere come

$$A = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$= x_0 I_2 + x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 \quad (3.9)$$

per un'opportuna scelta di $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Le matrici hermitiane $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono dette *matrici di Pauli*, e insieme alla matrice identità I formano una base di \mathbb{H}_2 . Per brevità di notazione, introdotto il vettore di matrici $\bar{\sigma} = (I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e posto $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, indichiamo la combinazione lineare 3.9 con la notazione $A = \mathbf{x} \cdot \bar{\sigma}$. Tale notazione ricorda il prodotto scalare standard tra due vettori di \mathbb{R}^n , che gode di proprietà di linearità analoghe. Lo spazio di Minkowski è dunque isomorfo a \mathbb{H}_2 in quanto a un generico quadrivettore \mathbf{x} è possibile associare in maniera biunivoca la matrice hermitiana $\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma}$.

La forma quadratica 3.2 è indotta in modo naturale su \mathbb{H}_2 , infatti se $X = \mathbf{x} \cdot \bar{\sigma} \in \mathbb{H}_2$, allora

$$Q(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma}) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (3.10)$$

e se $Y = \mathbf{y} \cdot \bar{\sigma} \in \mathbb{H}_2$, allora

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M = \frac{1}{2}[Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})] \quad (3.11)$$

$$= \frac{1}{2}[\det(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma} + \mathbf{y} \cdot \bar{\sigma}) - \det(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma}) - \det(\mathbf{y} \cdot \bar{\sigma})]. \quad (3.12)$$

Consideriamo l'azione del gruppo delle matrici 2×2 complesse a determinante unitario $SL_2\mathbb{C}$ sullo spazio \mathbb{H}_2 definita nel seguente modo

$$\begin{aligned} SL_2\mathbb{C} \times \mathbb{H}_2 &\longrightarrow \mathbb{H}_2 \\ (g, \mathbf{x} \cdot \bar{\sigma}) &\longmapsto g(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma})g^\dagger \end{aligned}$$

3.4. L'isomorfismo $SL_2\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 \cong SO(1, 3)^+$

Dal momento che $\mathbb{H}_2 \cong \mathbb{R}^4$, fissata $g \in SL_2\mathbb{C}$ l'azione appena scritta induce una trasformazione lineare su \mathbb{R}^4 ; possiamo infatti introdurre la funzione

$$\begin{aligned}\Phi : SL_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_4\mathbb{R} \\ g &\longmapsto \Lambda_g\end{aligned}$$

dove la matrice Λ_g è definita dalla relazione

$$(\Lambda_g \mathbf{x}) \cdot \bar{\sigma} = g(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma})g^\dagger \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4. \quad (3.13)$$

Nella prossima sezione determineremo l'immagine della funzione Φ e le sue proprietà.

Introduciamo un sottogruppo di $O(1, 3)$ di centrale importanza in questa trattazione. Chiamiamo *gruppo di Lorentz ristretto*, e lo denotiamo con $SO(1, 3)^+$, il sottogruppo del gruppo di Lorentz formato dalle matrici a determinante unitario e con il primo elemento positivo:

$$SO(1, 3)^+ = \{\Pi \in O(1, 3) \mid \det(\Pi) = +1, \Pi_{00} > 0\}.$$

Tale sottogruppo contiene le matrici che rappresentano trasformazioni di Lorentz che mantengono inalterata l'orientazione spaziale e la direzione temporale, dette rispettivamente *trasformazioni proprie* e *ortocrone*. Esso costituisce la componente connessa del gruppo di Lorentz contenente l'identità I_4 [8, Sez. 12.4].

3.4 L'isomorfismo $SL_2\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 \cong SO(1, 3)^+$

Esiste un'importante relazione tra il gruppo $SL_2\mathbb{C}$ e il gruppo di Lorentz ristretto $SO(1, 3)^+$. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 3.4.1. *Consideriamo la mappa*

$$\begin{aligned}\Phi : SL_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_4\mathbb{R} \\ g &\longmapsto \Lambda_g\end{aligned}$$

con Λ_g definita dall'Eq. 3.13. Allora valgono le seguenti affermazioni:

- $\Lambda_g \in SO(1, 3)^+ \quad \forall g \in SL_2\mathbb{C}$;
- Φ è un omomorfismo suriettivo 2:1.

Dimostrazione. In tale dimostrazione non proveremo la suriettività di Φ , in quanto sarebbe necessario introdurre ulteriori prerequisiti matematici che appesantirebbero la discussione, e rimandiamo alla consultazione di [8, Prop. 16.6.7] per una trattazione completa. Mostriamo invece le restanti affermazioni contenute nell'enunciato della proposizione.

3. Lo spazio di Minkowski

Dimostriamo innanzitutto che $\Phi(g) = \Lambda_g$ preserva il prodotto di Minkowski per cui $\Lambda_g \in O(1, 3)$. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$, dall'Eq. 3.12 e sfruttando la relazione 3.13 si ha

$$\begin{aligned} 2 \langle \Lambda_g \mathbf{x}, \Lambda_g \mathbf{y} \rangle_M &= \det((\Lambda_g \mathbf{x}) \cdot \bar{\sigma} + (\Lambda_g \mathbf{y}) \cdot \bar{\sigma}) - \det((\Lambda_g \mathbf{x}) \cdot \bar{\sigma}) - \det((\Lambda_g \mathbf{y}) \cdot \bar{\sigma}) \\ &= \det(g(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma} + \mathbf{y} \cdot \bar{\sigma})g^\dagger) - \det(g(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma})g^\dagger) - \det(g(\mathbf{y} \cdot \bar{\sigma})g^\dagger) \\ &= \det(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma} + \mathbf{y} \cdot \bar{\sigma}) - \det(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma}) - \det(\mathbf{y} \cdot \bar{\sigma}) \\ &= 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M. \end{aligned}$$

Nel calcolo abbiamo sfruttato il fatto che $\det(gg^\dagger) = |\det(g)|^2 = 1$ dal momento che $g \in SL_2\mathbb{C}$.

Per dimostrare che $\Lambda_{g00} > 0$, consideriamo nuovamente l'Eq. 3.13 con $\mathbf{x} = \mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$. Essendo $\mathbf{e}_0 \cdot \bar{\sigma} = I_2$ otteniamo

$$\Lambda_{g00}I_2 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{gi0} \sigma_i = gg^\dagger.$$

Dal momento che $g \in SL_2\mathbb{C}$, i due elementi della diagonale principale di gg^\dagger sono strettamente positivi, per cui

$$\begin{aligned} \Lambda_{g00} + \Lambda_{g30} &> 0, \\ \Lambda_{g00} - \Lambda_{g30} &> 0. \end{aligned}$$

Sommando le due espressioni otteniamo perciò $\Lambda_{g00} > 0$.

Per dimostrare che $\det(\Lambda_g) = +1$, notiamo che essendo $\Lambda_g \in O(1, 3)$ allora $\det(\Lambda_g) = +1$ o -1 . Sappiamo che il determinante è continuo e dall'Eq. 3.13 notiamo che anche la funzione Φ è continua. Dal momento che $\Phi(I_2) = I_4$, Φ può associare a $g \in SL_2(\mathbb{C})$ solo una matrice Λ_g con $\det(\Lambda_g) = +1$. Quest'argomento unito ai precedenti dimostra che $\Phi(g) \in SO(1, 3)^+ \forall g \in SL_2\mathbb{C}$.

Mostriamo adesso che Φ è un omomorfismo, ossia che $\Phi(gg') = \Phi(g)\Phi(g')$ o equivalentemente $\Lambda_{gg'} = \Lambda_g\Lambda_{g'}$. Abbiamo $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ la relazione

$$\begin{aligned} (\Lambda_{gg'} \mathbf{x}) \cdot \bar{\sigma} &= (gg')(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma})(gg')^\dagger = gg'(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma})g'^\dagger g^\dagger \\ &= g((\Lambda_{g'} \mathbf{x}) \cdot \bar{\sigma})g^\dagger = (\Lambda_g(\Lambda_{g'} \mathbf{x})) \cdot \bar{\sigma} \\ &= (\Lambda_g\Lambda_{g'} \mathbf{x}) \cdot \bar{\sigma}. \end{aligned}$$

Data la lineare indipendenza delle matrici che compongono $\bar{\sigma}$ si ha che

$$\Lambda_{gg'} \mathbf{x} = \Lambda_g\Lambda_{g'} \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$$

ossia

$$\Lambda_{gg'} = \Lambda_g\Lambda_{g'}$$

3.5. La visione di Penrose del gruppo di Poincaré

che era quanto volevamo dimostrare.

Se $\Phi(g) = I_4$, dall'Eq. 3.13 si ottiene

$$\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma} = g(\mathbf{x} \cdot \bar{\sigma})g^\dagger$$

per cui, scegliendo $\mathbf{x} \in \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^4$ abbiamo

$$gg^\dagger = I_2, \quad g\sigma_i g^\dagger = \sigma_i.$$

Notiamo che la prima condizione implica che $g^\dagger = g^{-1}$, quindi sostituendo nella seconda condizione e moltiplicando a destra ambo i membri per g si ottiene $g\sigma_i = \sigma_i g$. Le uniche possibilità per g affinché tale equazione sia soddisfatta sono $g = \pm I_2$, ossia $\ker \Phi = \{\pm I_2\}$. \square

Introduciamo la notazione $\mathbb{Z}_2 = \{\pm I_2\}$. Dalla Prop. 3.4.1 discende il seguente risultato.

Proposizione 3.4.2. *Il gruppo di Lorentz ristretto $SO(1,3)^+$ è isomorfo a $SL_2\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2$ attraverso l'isomorfismo*

$$\begin{aligned} SL_2\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 &\longrightarrow SO(1,3)^+ \\ g\mathbb{Z}_2 &\longmapsto \Phi(g) \end{aligned}$$

dove $\Phi : SL_2\mathbb{C} \rightarrow SO(1,3)^+$ è l'omomorfismo precedentemente introdotto.

Dimostrazione. La Prop. 3.4.1 stabilisce che $\Phi : SL_2\mathbb{C} \rightarrow SO(1,3)^+$ è un omomorfismo suriettivo. Per il Teorema fondamentale di isomorfismo tra gruppi (Teorema A.2.5) si ha $SL_2\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 \cong SO(1,3)^+$, dove l'isomorfismo corrisponde a quello dato nell'enunciato della presente proposizione. \square

Abbiamo dimostrato che se rappresentiamo lo spazio di Minkowski come lo spazio vettoriale reale delle matrici hermitiane 2×2 in cui scegliamo la base $\bar{\sigma}$, con il prodotto di Minkowski definito attraverso il determinante, allora il gruppo $SL_2\mathbb{C}$ ricopre il ruolo del gruppo di Lorentz ristretto $SO(1,3)^+$. Tale corrispondenza tra $SO(1,3)^+$ e $SL_2\mathbb{C}$ non è però "perfetta", in quanto Φ non è 1:1. Ogni trasformazione di $SO(1,3)^+$ è quindi rappresentata in questa corrispondenza da due elementi di $SL_2\mathbb{C}$. Per ovviare a tale fatto, come abbiamo appena mostrato, è necessario considerare il gruppo quoziente $SL_2\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2$.

3.5 La visione di Penrose del gruppo di Poincaré

La corrispondenza che abbiamo delineato nella sezione precedente si può estendere anche al gruppo di Poincaré, che abbiamo introdotto nella sez. 3.2, grazie a un'idea del matematico, fisico e cosmologo britannico Roger Penrose (1931 - vivente).

3. Lo spazio di Minkowski

Poiché ci interessa il gruppo di Lorentz ristretto $SO(1, 3)^+$ analizzato nella precedente sezione, prendiamo come gruppo di Poincaré l'insieme $\mathcal{P} = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(1, 3)^+$.

Innanzitutto, notiamo che, fissata $L \in SL_2\mathbb{C}$, la mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_2 &\longrightarrow \mathbb{H}_2 \\ X &\longmapsto (L^{-1})^\dagger X L^{-1} \end{aligned}$$

conserva il determinante di X : infatti, per il teorema di Binet, si ha

$$\det((L^{-1})^\dagger X L^{-1}) = \det((L^{-1})^\dagger) \det(X) \det(L^{-1}) = \det(X).$$

La proprietà di conservazione del determinante da parte di tale mappa è fondamentale se ricordiamo la corrispondenza evidenziata nell'ultimo paragrafo della sezione precedente: il determinante di una matrice hermitiana è infatti legato alla metrica di Minkowski in \mathbb{R}^4 attraverso l'Eq. 3.10.

Introduciamo adesso la *Grassmanniana* contenente i sottospazi bidimensionali di \mathbb{C}^4 ossia l'insieme

$$\text{Gr}(2, 4) = \{ \pi \subset \mathbb{C}^4 \mid \pi \text{ sottospazio vettoriale, } \dim \pi = 2 \}.$$

Osservazione 3.5.1. Notiamo che dato $\pi \in \text{Gr}(2, 4)$, allora è possibile trovare due vettori $u = (u_1, u_2, u_3, u_4), v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{C}^4$ linearmente indipendenti tali che $\pi = \text{span}\{u, v\}$. Tale coppia di vettori non è però unica. Infatti, è un fatto elementare dell'algebra lineare che possiamo scegliere infinite coppie di vettori linearmente indipendenti $u' = (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4), v' = (v'_1, v'_2, v'_3, v'_4) \in \mathbb{C}^4$ tali che $\pi = \text{span}\{u', v'\}$ e che soddisfano la relazione

$$\begin{pmatrix} u'_1 & v'_1 \\ u'_2 & v'_2 \\ u'_3 & v'_3 \\ u'_4 & v'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A \in GL_2\mathbb{C}. \quad (3.14)$$

che esprime un cambio di base per il sottospazio π . L'Eq. 3.14 si può compattamente scrivere come

$$(u' \ v') = (u \ v) A, \quad (3.15)$$

dove abbiamo interpretato u, v, u', v' come vettori colonna.

Introduciamo ora un'azione del gruppo $SL_4\mathbb{C}$ su $\text{Gr}(2, 4)$ definita da

$$\begin{aligned} SL_4\mathbb{C} \times \text{Gr}(2, 4) &\longrightarrow \text{Gr}(2, 4) \\ (g, \text{span}\{u, v\}) &\longmapsto \text{span}\{gu, gv\} \end{aligned}$$

3.5. La visione di Penrose del gruppo di Poincaré

Notiamo che tale azione è ben definita sulla base di quanto affermato nell'Oss. 3.5.1. Infatti, dati u, v e u', v' linearmente indipendenti tali che $\text{span}\{u, v\} = \text{span}\{u', v'\}$, allora dall'Eq. 3.15 abbiamo

$$\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} A, \quad A \in GL_2\mathbb{C}$$

per cui

$$\begin{pmatrix} gu' & gv' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gu & gv \end{pmatrix} A,$$

che mostra chiaramente che $\text{span}\{gu, gv\} = \text{span}\{gu', gv'\}$.

Se $g = (g_{ij})$, determiniamo l'insieme $\mathcal{S} = \text{Stab}(\text{span}\{e_1, e_2\})$, dove $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ed $e_2 = (0, 1, 0, 0)$. È necessario imporre che

$$\text{span}\{ge_1, ge_2\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \\ g_{41} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ g_{32} \\ g_{42} \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.16)$$

Dall'Eq. 3.16 si deduce che

$$\mathcal{S} = \{g \in SL_4\mathbb{C} \mid g_{31} = g_{41} = g_{32} = g_{42} = 0\}.$$

Dal momento che l'orbita $O = \mathcal{O}_{\text{span}\{e_1, e_2\}}$ è uguale a $\text{Gr}(2, 4)$, grazie alla Prop. A.3.4 deduciamo che $SL_4\mathbb{C}/\mathcal{S}$ e $\text{Gr}(2, 4)$ sono in corrispondenza biunivoca.

L'idea di Penrose è di considerare lo spazio di Minkowski come “sottoinsieme” di $\text{Gr}(2, 4)$, identificato per mezzo della corrispondenza biunivoca appena evidenziata con il quoziente $SL_4\mathbb{C}/\mathcal{S}$. Introduciamo l'insieme

$$\mathbf{M} = \left\{ \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ X & I_2 \end{pmatrix} \mathcal{S} \mid X \in \mathbb{H}_2 \right\} \subset SL_4\mathbb{C}/\mathcal{S}.$$

Consideriamo ora la mappa

$$\begin{aligned} SL_2\mathbb{C} \times \mathbb{H}_2 &\longrightarrow SL_4\mathbb{C} \\ (L, H) &\longmapsto \begin{pmatrix} L & 0_2 \\ HL & (L^{-1})^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che è chiaramente iniettiva. Notiamo inoltre che l'immagine di tale mappa, ossia il sottoinsieme di $SL_4\mathbb{C}$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} L & 0_2 \\ HL & (L^{-1})^\dagger \end{pmatrix} \mid L \in SL_2\mathbb{C}, H \in \mathbb{H}_2 \right\}$$

è un sottogruppo di $SL_4\mathbb{C}$.

3. Lo spazio di Minkowski

Costruiamo infine l'azione

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}} \times \mathbf{M} &\longrightarrow \mathbf{M} \\ \left(\begin{array}{cc} L & 0_2 \\ HL & (L^{-1})^\dagger \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} I_2 & 0_2 \\ X & I_2 \end{array} \right) \mathcal{S} &\longmapsto \left(\begin{array}{cc} L & 0_2 \\ HL & (L^{-1})^\dagger \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} I_2 & 0_2 \\ X & I_2 \end{array} \right) \mathcal{S} \\ &= \left(\begin{array}{cc} L & 0_2 \\ HL + (L^{-1})^\dagger X & (L^{-1})^\dagger \end{array} \right) \mathcal{S} \end{aligned}$$

Osservazione 3.5.2. Notiamo che la mappa appena definita ha effettivamente \mathbf{M} come codominio. Infatti, sapendo che la moltiplicazione per un elemento $s \in \mathcal{S}$ del rappresentante r di una classe laterale $r\mathcal{S}$ non altera la classe stessa, ossia si ha comunque $r\mathcal{S} = rs\mathcal{S}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc} L & 0_2 \\ HL + (L^{-1})^\dagger X & (L^{-1})^\dagger \end{array} \right) \mathcal{S} &= \left(\begin{array}{cc} L & 0_2 \\ HL + (L^{-1})^\dagger X & (L^{-1})^\dagger \end{array} \right) \underbrace{\left(\begin{array}{cc} L^{-1} & 0_2 \\ 0_2 & L^\dagger \end{array} \right)}_{\in \mathcal{S}} \mathcal{S} \\ &= \left(\begin{array}{cc} I_2 & 0_2 \\ H + (L^{-1})^\dagger XL^{-1} & I_2 \end{array} \right) \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Abbiamo pertanto trovato che $\tilde{\mathcal{P}}$ agisce su \mathbf{M} in maniera analoga al gruppo di Poincaré sullo spazio di Minkowski, azione descritta nella Sez. 3.2. Infatti abbiamo la mappa

$$X \longmapsto H + (L^{-1})^\dagger XL^{-1}$$

in cui la matrice H assume il ruolo di una traslazione, e il restante termine, come osservato all'inizio di tale sezione, conserva il determinante della matrice X .

Appendice A

Quozienti di gruppi

In questo lavoro abbiamo utilizzato il concetto di relazione di equivalenza. Tali relazioni soddisfano proprietà di riflessività, simmetria e transitività. Esamineremo più in dettaglio le conseguenze che l'introduzione di una relazione di equivalenza su un insieme comporta, e applicheremo tali concetti alla teoria dei gruppi. Dimostreremo un importante risultato che va sotto il nome di Teorema fondamentale di isomorfismo tra gruppi. Infine, definiremo i concetti di orbita e stabilizzatore e ne analizzeremo qualche proprietà.

A.1 Premessa: classi di equivalenza e insieme quoziente

Denoteremo l'insieme su cui è definita la relazione di equivalenza con A e la relazione di equivalenza con il simbolo \sim .

Non appena introduciamo una relazione di equivalenza su un insieme possiamo considerare l'insieme degli elementi equivalenti tra loro. Tale insieme è detto classe di equivalenza; diamo quindi la seguente definizione.

Definizione A.1.1. Sia $a \in A$. Chiamiamo *classe di equivalenza* di a per la relazione di equivalenza \sim , e lo denotiamo con $[a]_\sim$, l'insieme di tutti gli elementi di A equivalenti ad a tramite \sim , ovvero

$$[a]_\sim = \{ b \in A : b \sim a \}.$$

L'insieme di tutte le classi di equivalenza degli elementi di A si dice *insieme quoziente*. Più formalmente possiamo dare la definizione che segue.

Definizione A.1.2. L'insieme quoziente di A per la relazione \sim , indicato con A/\sim , è l'insieme delle classi di equivalenza degli elementi di A , cioè

$$A/\sim = \{ [a]_\sim, a \in A \}.$$

A. Quozienti di gruppi

Notiamo pertanto che $A/\sim \subseteq \mathcal{P}(A)$, dove $\mathcal{P}(A)$ denota l'insieme delle parti di A .

L'insieme quoziente A/\sim costituisce una partizione di A . Infatti, una classe di equivalenza $[a]_\sim \in A/\sim$ è non vuota, in quanto contiene sicuramente l'elemento a ; inoltre abbiamo evidentemente

$$\bigcup_{a \in A} [a]_\sim = A.$$

Infine, se $[a]_\sim \neq [b]_\sim$, allora $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$. Sia infatti per assurdo $c \in [a]_\sim \cap [b]_\sim$, quindi $c \sim a$ e $c \sim b$, per cui $a \sim b$. Se $d \in [a]_\sim$, allora $d \sim a \sim b$, cioè $d \in [b]_\sim$ e $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$, mentre prendendo $d \in [b]_\sim$ con un ragionamento analogo otteniamo $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$, concludendo che $[a]_\sim = [b]_\sim$, il che contraddice l'ipotesi.

Abbiamo sintetizzato le conseguenze principali che comporta l'introduzione di una classe di equivalenza su un insieme generico: infatti, non abbiamo richiesto su A l'esistenza di una qualche struttura aggiuntiva. Vediamo di approfondire la nostra trattazione nel caso in cui l'insieme sia dotato della struttura algebrica di gruppo, e vengano introdotte su di esso delle particolari relazioni di equivalenza.

A.2 Gruppo quoziente

Sia G un gruppo rispetto all'operazione $*$: $G \times G \rightarrow G$. Diamo la definizione di sottogruppo.

Definizione A.2.1. $H \subseteq G$ è detto *sottogruppo* (di G) se sono verificate le seguenti condizioni:

- L'elemento neutro $e \in G$ appartiene anche ad H ;
- Se $a, b \in H$ allora $a * b \in H$ (chiusura rispetto a $*$);
- Se $a \in H$ allora $a^{-1} \in H$ (chiusura rispetto all'operazione di inverso).

Notiamo che se H è un sottogruppo di G , allora H stesso è un gruppo con l'operazione $*$ ristretta a $H \times H$.

Sia dunque H un sottogruppo di G . Introduciamo la seguente relazione indicandola con il simbolo \sim :

$$a \sim b \iff b^{-1} * a \in H.$$

Mostriamo che si tratta di una relazione di equivalenza. $a \sim a$ in quanto $a^{-1} * a = e \in H$ (l'ultimo passaggio discende dalla prima proprietà della Def. A.2.1), il che rende evidente la riflessività della relazione. Se $a \sim b$ allora $b^{-1} * a \in H$; per la proprietà di chiusura rispetto all'inverso si ha che $(b^{-1} * a)^{-1} = a^{-1} * b \in H$, cioè $b \sim a$, per cui \sim è riflessiva.

A.2. Gruppo quoziente

Infine, se $a \sim b$, ossia $b^{-1} * a \in H$ e $b \sim c$, ossia $c^{-1} * b \in H$ allora per la proprietà di chiusura rispetto all'operazione $*$ avremo che $(c^{-1} * b) * (b^{-1} * a) = c^{-1} * (b * b^{-1}) * a = c^{-1} * a \in H$, ovvero $a \sim c$, il che conclude la dimostrazione della transitività di \sim .

Ci possiamo chiedere come siano fatte le classi di equivalenza per questa particolare relazione. Supponiamo di prendere $a \in G$ e sia $[a]_{\sim}$ la sua classe di equivalenza. Dal modo con cui abbiamo definito la relazione di equivalenza \sim , deduciamo che se $b \in [a]_{\sim}$ allora $\exists h \in H$ t.c. $a^{-1} * b = h$, o equivalentemente $b = a * h$. Perciò

$$[a]_{\sim} = \{ a * h, h \in H \}.$$

Una classe di equivalenza siffatta prende il nome di *classe laterale (sinistra)* di H in G rappresentata da a e si denota solitamente con aH . L'insieme quoziente per tale relazione di equivalenza si denota con G/H .

Sorge spontaneo chiedersi se la struttura di gruppo di G induca una struttura di gruppo anche sull'insieme quoziente G/H . Per discutere questa possibilità diamo anzitutto la definizione di sottogruppo normale.

Definizione A.2.2. Un sottogruppo H di un gruppo G è detto *normale* se

$$g^{-1} * h * g \in H \quad \forall h \in H, \forall g \in G.$$

La condizione di normalità di H è cruciale per poter dotare della struttura di gruppo il quoziente G/H : infatti vale il seguente teorema.

Teorema A.2.3. *Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. L'insieme quoziente G/H rispetto alla relazione di equivalenza \sim è un gruppo se H è normale.*

Dimostrazione. Dobbiamo introdurre una operazione binaria tra le classi laterali di G/H e mostrare che con essa l'insieme quoziente soddisfa tutte le proprietà di gruppo. Siano $a, b \in G$ e consideriamo le classi laterali aH e bH . Definiamo il loro prodotto nel seguente modo:

$$aH \cdot bH = (a * b)H.$$

Dobbiamo in primo luogo controllare che tale operazione sia ben definita, ossia che scelti altri due rappresentanti $a' \in aH$ e $b' \in bH$, si abbia $(a * b)H = (a' * b')H$. Per verificare ciò basta mostrare che $a * b \sim a' * b'$. Ricordiamo che $a' \in aH$ e $b' \in bH$ significa che $\exists h, h' \in H$ t.c. $a' = a * h$ e $b' = b * h'$. Verifichiamo perciò che $(a' * b')^{-1} * (a * b) \in H$:

$$\begin{aligned} (a' * b')^{-1} * (a * b) &= b'^{-1} * (a'^{-1} * a) * b \\ &= b'^{-1} * h^{-1} * b \\ &= h'^{-1} * (b^{-1} * h^{-1} * b). \end{aligned}$$

A. Quozienti di gruppi

Il termine evidenziato tra parentesi tonde nell'ultimo passaggio appartiene ad H perché esso è un sottogruppo normale (vedi Def. A.2.2) ed è moltiplicato per un elemento di H ($h'^{-1} \in H$), per cui $(a' * b')^{-1} * (a * b) \in H$.

L'operazione introdotta è chiaramente associativa:

$$\begin{aligned} (aH \cdot bH) \cdot cH &= ((a * b) * c)H = (a * (b * c))H \\ &= aH \cdot (bH \cdot cH). \end{aligned}$$

L'elemento neutro è chiaramente dato da $eH = H$, con e elemento neutro di G , e ogni classe laterale $aH \in G/H$ ammette come inverso la classe laterale $a^{-1}H$; ciò in definitiva dimostra che G/H dotato dell'operazione \cdot è un gruppo. \square

Il risultato più importante di questa trattazione elementare va sotto il nome di Teorema fondamentale di omomorfismo tra gruppi. Richiamiamo innanzitutto la definizione di nucleo o kernel di un omomorfismo.

Definizione A.2.4. Sia $f : G \rightarrow F$ un omomorfismo tra due gruppi G ed F . Il *nucleo* o *kernel* di f è l'insieme degli elementi di G che vengono mappati da f nell'identità e_F di F :

$$\ker f = \{g \in G : f(g) = e_F\}.$$

È facile vedere che il nucleo di un omomorfismo è un sottogruppo. Enunciamo adesso il teorema.

Teorema A.2.5 (Teorema fondamentale di omomorfismo tra gruppi). *Siano $(G, *)$ e (F, \star) due gruppi, e $f : G \rightarrow F$ un omomorfismo suriettivo. Allora $G/\ker f \cong F$.*

Dimostrazione. Per semplicità denotiamo $K = \ker f$. Dimostriamo innanzitutto che K è un sottogruppo normale. Sia $g \in G$ e $a \in K$, allora

$$f(g^{-1} * a * g) = f(g^{-1}) \star f(a) \star f(g) = f(g)^{-1} \star f(a) \star f(g).$$

Dal momento che $a \in K$, $f(a) = e_F$ per cui possiamo sostituire nella precedente espressione ottenendo:

$$f(g^{-1} * a * g) = f(g)^{-1} \star e_F \star f(g) = f(g)^{-1} \star f(g) = e_F.$$

Ciò implica che $g^{-1} * a * g \in K$, per cui per la Def. A.2.2 K è un sottogruppo normale. Per il Teorema A.2.3 G/K è un gruppo.

Introduciamo ora la mappa ϕ tra G/K e F così definita:

$$\begin{aligned} \phi : G/K &\longrightarrow F \\ gK &\longmapsto f(g) \end{aligned}$$

A.3. Orbite e stabilizzatori

la cui definizione è ben posta: infatti se $g' \in gK$, allora $g' = g * k$ con $k \in K$, e $f(g') = f(g) * f(k) = f(g)$ in quanto $f(k) = e_F$.

ϕ è un omomorfismo. Infatti, presi $aK, bK \in G/K$,

$$\begin{aligned}\phi(aK \cdot bK) &= \phi((a * b)K) = f(a * b) = f(a) * f(b) \\ &= \phi(aK) * \phi(bK).\end{aligned}$$

ϕ è iniettiva. Supponiamo infatti che $\phi(aK) = \phi(bK)$, ossia $f(a) = f(b)$. Allora $f(a) * f(b)^{-1} = f(a * b^{-1}) = e_F$, per cui $a * b^{-1} \in K$, cioè $a \sim b$. L'equivalenza tra a e b implica l'uguaglianza delle rispettive classi laterali, ovvero $aK = bK$, concludendo la prova dell'injectività di ϕ .

ϕ è suriettiva. Sia infatti $c \in F$; dal momento che per ipotesi f è suriettivo, $\exists g \in G$ t.c. $f(g) = c$. Notiamo immediatamente che $\phi(gK) = f(g) = c$, per cui c è immagine di un elemento di G/K (gK appunto), il che comporta la suriettività di ϕ .

Essendo ϕ un omomorfismo biiettivo, esso è un isomorfismo. □

A.3 Orbite e stabilizzatori

Concludiamo la presente appendice discutendo i concetti di orbita e stabilizzatore.

Definizione A.3.1. Sia G un gruppo e consideriamo un'azione di G su un generico insieme X ,

$$\begin{aligned}G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

L'*orbita* di $x \in X$ è l'insieme così definito:

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Il seguente esempio mostra che, anche se X è uno spazio vettoriale, da ciò non segue che l'orbita di un suo elemento è un suo sottospazio.

Esempio A.3.2. Consideriamo $SL_2\mathbb{C}$ che agisce su \mathbb{C}^2 attraverso l'usuale prodotto righe per colonne di una matrice per un vettore colonna. Allora

$$\mathcal{O}_{(1,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

Notiamo che $(0, 0) \notin \mathcal{O}_{(1,0)}$, per cui $\mathcal{O}_{(1,0)}$ non è un sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^2 .

Introduciamo il concetto di stabilizzatore.

A. Quozienti di gruppi

Definizione A.3.3. Sia G un gruppo che agisce sull'insieme X e $x \in X$. Lo *stabilizzatore* di x è l'insieme

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

È facile vedere che $\text{Stab}(x)$ è un sottogruppo di G . Vale inoltre la seguente proposizione, che esprime un legame tra orbita e stabilizzatore.

Proposizione A.3.4. *Siano G , X , x come sopra. Allora esiste una biiezione tra $G/\text{Stab}(x)$ e \mathcal{O}_x .*

Dimostrazione. Chiamiamo per comodità $S = \text{Stab}(x)$ e introduciamo la mappa

$$\begin{aligned} \Psi : G/S &\longrightarrow \mathcal{O}_x \\ gS &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Mostriamo che Ψ è ben definita. Preso $g' \in gS$, allora $g' = gs$ per un qualche $s \in S$. Abbiamo

$$g' \cdot x = gs \cdot x = g \cdot (s \cdot x) = g \cdot x. \tag{A.1}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la Def. A.3.3. L'Eq. A.1 implica che $\Psi(gS) = \Psi(g'S)$ e perciò Ψ risulta ben definita.

La dimostrazione della suriettività di Ψ è banale, in quanto preso un generico elemento $g \cdot x \in \mathcal{O}_x$ esso ha come controimmagine $gS \in G/S$.

Mostriamo l'iniettività di Ψ . Se $\Psi(gS) = \Psi(hS)$, allora $g \cdot x = h \cdot x$, per cui $x = (g^{-1}h) \cdot x$. L'ultimo passaggio implica che $g^{-1}h \in S$, per cui $g \sim h$ o equivalentemente, $gS = hS$. \square

Bibliografia

- [1] Simonetta Abenda. *Analisi matematica*. Società Editrice Esculapio, 1998.
- [2] Theodor Bröcker e Tammo tom Dieck. *Representations of Compact Lie Groups*. Springer-Verlag New York, 1985.
- [3] Costas Christodoulides. *The Special Theory of Relativity. Foundation, Theory, Verification, Applications*. Springer, 2016.
- [4] Rita Fioresi e María Antonia Lledó. *The Minkowski and Conformal Superspaces. The Classical and Quantum Descriptions*. World Scientific Publishing, 2015.
- [5] Brian C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction*. Springer-Verlag New York, 2003.
- [6] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Seconda edizione. Springer, 2007.
- [7] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1983.
- [8] Roberto Zucchini. *Group Theory: Lecture Notes*. Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2023.