

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Equazioni di stato della materia in Astrofisica

Tesi di laurea

Presentata da:
Paolo Castronovo

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Anno Accademico 2021-2022

Indice

1	Cenni di Termodinamica Statistica	1
1.1	Funzioni ed equazioni di stato (EdS)	2
1.2	Gas perfetto	3
1.3	Gas degenere	5
1.4	Parametro di degenerazione Ψ	7
2	Interni stellari	8
2.1	Plasma stellare come gas perfetto	8
2.2	Degenerazione del plasma stellare	9
2.3	Pressione di radiazione	11
2.4	Diagramma $\log(\rho) - \log(T)$	12
3	EdS in stelle nane bianche	14
	Appendice	16
	Modelli politropici	16
	Tabella delle costanti	17

Introduzione

Connaturata ad ogni sistema fisico termodinamico esiste una speciale funzione che racchiude tutte le informazioni dinamiche sul sistema, chiamata *funzione di distribuzione nello spazio delle fasi*. Ogni grandezza termodinamica del sistema si può definire a partire da questa funzione.

Nello studio di un sistema termodinamico, la condizione di equilibrio rappresenta un caso speciale: quando questa condizione è soddisfatta, le grandezze termodinamiche che descrivono il sistema "si parlano" mediante una (o più) relazioni chiamate Equazioni di Stato (EdS).

Una delle sette equazioni fondamentali di ogni modello stellare è proprio una EdS, che esplicita il comportamento della pressione interna alla stella in ogni sua regione. Per comprendere quanto sia importante questa informazione, si pensi al fatto che ogni fase evolutiva di una stella dipende in modo profondo dalla presenza o assenza di equilibrio tra pressione stellare interna e pressione di autogravità della stella.

Lo studio dell'EdS in un interno stellare deve avvenire nel contesto dello stato di materia del plasma, e deve continuamente affacciarsi alle condizioni imposte dai principi della Meccanica Quantistica e dalle implicazioni della Relatività Ristretta. Queste condizioni pongono delle vere e proprie "linee di confine" tra diversi regimi di comportamento del gas stellare; il passaggio da un regime ad un altro modifica l'entità e la sensibilità della pressione interna alle variazioni delle grandezze termodinamiche (temperatura e densità), con conseguenze dirette sull'equilibrio dell'intera stella.

Verrà quindi affrontato il problema di determinare le EdS necessarie alla completa descrizione della materia all'interno di una stella, partendo dai fondamenti teorici della Termodinamica Statistica.

Si vedrà inoltre che le EdS non si limitano al solo studio di una stella in sequenza principale, bensì hanno una notevole potenza applicativa per oggetti compatti che sono stadi evolutivi successivi alla sequenza principale, come le nane bianche.

(Per avere un riferimento sulle costanti fisiche che compariranno nel corso della trattazione, si veda la Tabella A in Appendice.)

Capitolo 1

Cenni di Termodinamica Statistica

Lo stato termodinamico di un sistema è di *equilibrio* quando le grandezze termodinamiche (o *funzioni di stato*) che lo descrivono non dipendono dal tempo. Delle funzioni di stato, si ricorda che esse rappresentano grandezze fisiche che dipendono unicamente dallo stato del sistema, e non dal modo in cui il sistema ha raggiunto tale stato.

In uno stato di equilibrio esiste, in generale, una precisa relazione tra alcune funzioni di stato che prende il nome di *Equazione di Stato* (EdS). Se ad esempio indichiamo con P la pressione, T la temperatura e V il volume del sistema, una eventuale EdS si presenta, in forma implicita, in questo modo:

$$f(P, V, T) = 0$$

Vogliamo arrivare a EdS di questo tipo per studiare due tipi di sistemi termodinamici: un gas perfetto e un gas degenere. In questo capitolo vengono definite le principali funzioni di stato di un sistema termodinamico; alcune di queste diventano, in maniera naturale, delle relazioni generali che, se studiate in casi particolari d'interesse (gas perfetto, gas degenere), sono le EdS cercate.

Nella trattazione che segue, entrano in gioco proprietà di un sistema termodinamico quali la canonicità e la distinguibilità delle sue sotto-parti. Si lasciano qui, in forma di enunciato, le nozioni da considerare per una comprensione di quanto si dirà nelle prossime sezioni.

Un sistema *canonico* è in grado di scambiare soltanto calore con l'ambiente circostante, senza potere scambiare lavoro, né materia.

Lo *Spazio delle Fasi* (SdF) è rappresentato dalle $2N$ -ple $\mathbf{z} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Lo SdF di un sistema globale, scomposto in N sotto-parti ognuna relativa ad un piccolo SdF individuale $\{\mathbf{z}_j\}$, considera le N -ple $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N)$ se i sotto-sistemi sono *distinguibili*, cioè se scambiando tra loro \mathbf{z}_j e \mathbf{z}_n (diversi) si ottiene uno stato globale diverso.

Lo SdF è espresso qui in funzione delle coordinate generalizzate \mathbf{q} e dei momenti coniugati \mathbf{p} nel formalismo hamiltoniano.

1.1 Funzioni ed equazioni di stato (EdS)

Studiamo un sistema microcanonico, ovvero suddiviso in N sotto-sistemi canonici, distinguibili e identici. Sia n_α il numero di sotto-sistemi che, ad un dato istante, occupano il livello energetico ϵ_α (α è un indice intero non negativo), avente molteplicità g_α .

Le principali funzioni di stato del sistema si definiscono a partire dalla *funzione di partizione canonica* (FPC) Z_c e sono così formalizzate:

$$Z_c(T, V) = \sum_{\alpha} g_{\alpha} e^{-\beta \epsilon_{\alpha}} \quad (1.1)$$

$$E(T, V) = - \left(\frac{\partial \ln(Z_c)}{\partial \beta} \right)_V = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \quad (1.2)$$

$$S(T, V) = k \ln(Z_c) + \frac{E}{T} = k \sum_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \ln \left(\frac{g_{\alpha}}{\tilde{\rho}_{\alpha}} \right) \quad (1.3)$$

$$\Phi(T, V) = E - TS = -kT \ln(Z_c) \quad (1.4)$$

$$P(T, V) = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_T = kT \left(\frac{\partial \ln(Z_c)}{\partial V} \right)_T \quad (1.5)$$

con k costante di Boltzmann e $\beta = \left(\frac{1}{kT} \right)$; in particolare

- $\tilde{\rho}_{\alpha}$ è la probabilità che il singolo sistema canonico si trovi nel livello energetico ϵ_{α}
- $S(T, V)$ è l'entropia del sistema microcanonico
- $\Phi(T, V)$ è l'energia libera di Helmholtz del sistema microcanonico.

Se si considera un volume V di confinamento del sistema arbitrariamente grande, i livelli energetici diventano arbitrariamente ravvicinati; considerati il primo livello eccitato ϵ_1 e il livello fondamentale ϵ_0 , se vale la condizione

$$(\epsilon_1 - \epsilon_0) \ll kT$$

si può considerare valida l'approssimazione del Limite del Continuo (LC). Nel LC le funzioni in gioco subiscono delle trasformazioni:

$$V \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

$$\epsilon_{\alpha} \rightarrow \epsilon \quad (1.7)$$

$$g_{\alpha} \rightarrow g(\epsilon; T, V) d\epsilon \quad (1.8)$$

$$\tilde{\rho}_{\alpha} \rightarrow \frac{g(\epsilon; T, V) e^{-\beta \epsilon}}{Z_c} d\epsilon = \rho_c d\epsilon \quad (1.9)$$

$$Z_c \rightarrow \int e^{-\beta \epsilon} g(\epsilon; T, V) d\epsilon \quad (1.10)$$

La quantità $g(\epsilon; T, V) d\epsilon$ rappresenta il numero di stati quantici compresi tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$; $\rho_c d\epsilon$ è la probabilità che il singolo sistema canonico abbia energia compresa tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$ e prende il nome di *distribuzione canonica*.

Infine, se è valido il Limite Termodinamico (LT)

$$\lim_{N, V \rightarrow \infty} \frac{N}{V} < \infty$$

il numero N di sotto-sistemi canonici può essere arbitrariamente grande, in modo compatibile con la dimensione arbitrariamente grande del volume V .

Studiare un gas perfetto o un gas degenere significa qui studiare un sistema di N particelle massive, puntiformi, libere di muoversi in un determinato volume V .

1.2 Gas perfetto

In questa trattazione, un gas perfetto è un sistema che, oltre ad essere definito come appena enunciato, vede come ipotesi l'assenza di campi esterni e l'assenza di struttura interna (nel caso di oggetti subatomici significa trascurare lo spin) per le sue particelle, aventi massa indicata con m . Le particelle scambiano energia solo mediante urti.

Un gas perfetto, in quanto tale, rispetta la condizione di non-degenerazione

$$\frac{n_\alpha}{g_\alpha} \ll 1$$

ovvero il numero di particelle con energia ϵ_α è molto minore del numero g_α di stati possibili per l'energia ϵ_α ; in altre parole, è molto piccola la probabilità che due particelle di energia ϵ_α occupino *lo stesso* stato energetico.

Nel LC le funzioni di stato di un gas perfetto si scrivono in questo modo:

$$\begin{aligned} Z_c^{gp} &= \left[\frac{V(2\pi mkT)^{3/2} e}{Nh^3} \right]^N & E &= \frac{3}{2} NkT \\ S &= Nk \ln \left(\frac{V(2\pi mkT)^{3/2} e^{5/2}}{Nh^3} \right) & \Phi &= -NkT \ln \left(\frac{V(2\pi mkT)^{3/2} e}{Nh^3} \right) \\ P &= \frac{NkT}{V} = \frac{nRT}{V} \end{aligned} \quad (1.11)$$

con h costante di Planck.

La (1.11) è l'EdS del gas perfetto, dove n è il numero di moli ed $R = kN_A$ è la costante dei gas (N_A è il numero di Avogadro).

Un'altra quantità importante da considerare è il potenziale chimico μ , che è la quantità di energia libera che si aggiunge o toglie al sistema per inserirvi un ulteriore sotto-sistema, mantenendo costanti la temperatura e il volume

$$\mu = -kT \ln \left(\frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{Nh^3} \right) \quad (1.12)$$

Di fondamentale importanza, nello studio di un gas, è la funzione di distribuzione canonica (DC) ρ_c , espressa in termini di coordinate nello SdF (\mathbf{p}, \mathbf{r}) . Essendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottoinsieme dello spazio delle configurazioni, di volume V , in cui il sistema è confinato, la funzione di distribuzione ha questa espressione

$$\rho_c(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{e^{-\beta \mathbf{p}^2/(2m)}}{V(2\pi m k T)^{3/2}} & \text{per } \mathbf{r} \in \Omega \\ 0 & \text{per } \mathbf{r} \notin \Omega \end{cases} \quad (1.13)$$

Se integrata sugli impulsi \mathbf{p} questa funzione descrive la distribuzione delle particelle di gas nello spazio delle configurazioni, nulla al di fuori di Ω e uniforme all'interno di Ω ; questa uniformità è dovuta all'assenza di campi esterni, che non causa disomogeneità nello spazio di confinamento. Se invece ρ_c è integrata sul vettore posizione \mathbf{r} , ciò che si ottiene è la distribuzione di Maxwell-Boltzmann (MB)

$$\rho(p) dp = \frac{1}{(2\pi m k T)^{3/2}} e^{-p^2/2mkT} 4\pi p^2 dp \quad (1.14)$$

espressa in funzione di $p = \|\mathbf{p}\|$. Indica la probabilità che, *alla temperatura* T , una particella del gas abbia impulso di modulo compreso tra p e $p + dp$. Per via delle relazioni esplicite (non-relativistiche) tra impulso p , energia cinetica ϵ e velocità v , la MB si può scrivere in modo equivalente in funzione di queste altre due grandezze fisiche; sarà sufficiente ricorrere alla legge di trasformazione $|\rho(p) dp| = |\rho(v) dv| = |\rho(\epsilon) d\epsilon|$.

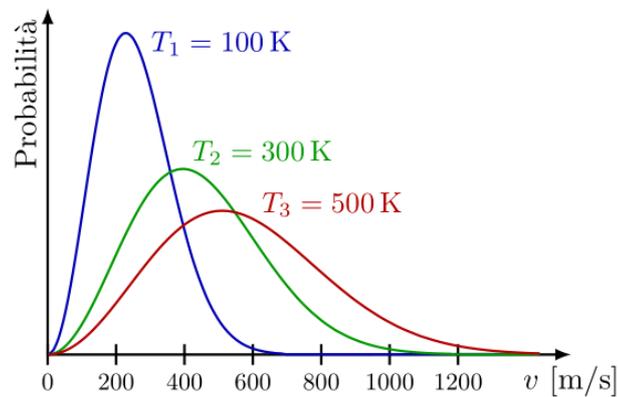


Figura 1.1: distribuzione di Maxwell-Boltzmann al variare della temperatura T . Con l'aumentare di T , il picco di probabilità si sposta a velocità maggiori e la curva si allarga e si abbassa; aumentano quindi la velocità più probabile $v_T = \sqrt{2kT/m}$ e la dispersione di velocità.

La sezione seguente mostrerà quale distribuzione seguano le particelle di un gas degenere; nel prossimo capitolo, sarà evidenziato il ruolo chiave giocato dalle distribuzioni statistiche per la determinazione formale delle EdS nell'ambito degli interni stellari.

1.3 Gas degenere

Come è immediato pensare, un gas degenere non rispetta la condizione di non-degenerazione: il numero di particelle con energia ϵ_α è ora paragonabile al numero g_α di stati quantici di energia ϵ_α .

Un'altra differenza sostanziale dal gas perfetto è che per un gas degenere non si può trascurare la struttura interna (spazio dello spin e ulteriori gradi di libertà interni) di una particella. A tal proposito, in fisica si distinguono due categorie di oggetti anche in base ai loro spin: i *bosoni* sono oggetti con spin intero e seguono la statistica di Bose-Einstein (BE) (un esempio è dato dai fotoni); i *fermioni* hanno spin semi-intero e seguono la statistica di Fermi-Dirac (FD) (è il caso degli elettroni, dei protoni e dei neutroni).

Anche qui, ci poniamo nell'approssimazione di LC.

In assenza di campi esterni e omettendo il potenziale di confinamento in Ω , l'hamiltoniana di una particella di gas degenere si può scrivere così:

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) = \frac{p^2}{2m} + h_{int}(\xi)$$

dove ξ è il termine di riferimento per la struttura interna della particella.

Nel LC le grandezze cambiano in questo modo:

$$\epsilon_\alpha \rightarrow h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) \quad (1.15)$$

$$g_\alpha \rightarrow g_\xi \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{r}}{h^3} \quad (1.16)$$

$$n_\alpha \rightarrow n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) d\mathbf{p} d\mathbf{r} \quad (1.17)$$

e alcune delle funzioni di stato diventano

$$n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) d\mathbf{p} d\mathbf{r} = \frac{1}{h^3} \frac{g_\xi}{e^{\beta(h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) - \mu)} \pm 1} \quad (1.18)$$

$$\Phi = \mu N \mp \frac{kT}{h^3} \sum_\xi g_\xi \int \ln(1 \pm e^{\beta(h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) - \mu)}) d\mathbf{p} d\mathbf{r} \quad (1.19)$$

$$N = \frac{1}{h^3} \sum_\xi \int \frac{g_\xi}{e^{\beta(h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) - \mu)} \pm 1} d\mathbf{p} d\mathbf{r} \quad (1.20)$$

In tutte le formule che compaiono in questa sezione, nella notazione dei doppi segni \pm e \mp quelli superiori si riferiscono ai fermioni, quelli inferiori ai bosoni.

È interessante osservare che il potenziale chimico $\mu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{T,V}$ nel caso dei fermioni può essere positivo e si tradurrebbe in una resistenza del gas all'aggiunta di ulteriori particelle (quindi ad un aumento di densità); tale resistenza è la pressione di degenerazione. Nel caso dei bosoni, μ è negativo o nullo ed è responsabile della pressione di radiazione. Entrambe le pressioni saranno trattate nel Capitolo 2.

Nello studio di un gas degenere, è necessario considerare due principi fondamentali della Meccanica Quantistica. Il primo, noto come *principio d'indeterminazione di Heisenberg*, delimita per ogni particella un volume minimo nello SdF all'interno del quale è impossibile conoscerne contemporaneamente posizione e impulso; formalmente (per ordini di grandezza) $\Delta V \Delta^3 p \geq h^3$. Il numero di stati quantici nel volume V di impulso compreso tra p e $p + dp$ è dato da

$$g(p) dp = g_\xi \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (1.21)$$

Il secondo enunciato vale solo per i fermioni ed è il *principio di esclusione di Pauli*, che postula l'impossibilità che due particelle occupino lo stesso stato quantico. L'indice di occupazione di un livello energetico ϵ , graficato per i fermioni in figura 1.2, si scrive

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} \pm 1} \quad (1.22)$$

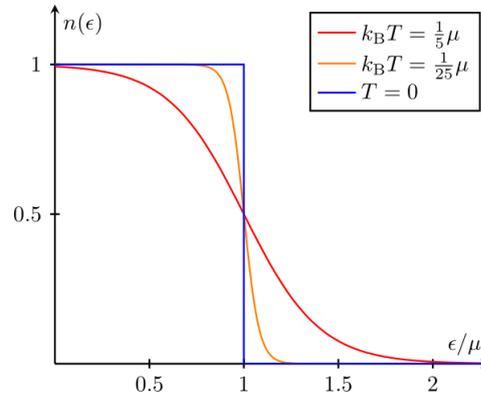


Figura 1.2: distribuzione di Fermi-Dirac al variare della temperatura T . Per $T = 0K$, i livelli di energia inferiore all'energia di Fermi (punto di ascissa 1) sono completamente occupati (ogni stato quantico è occupato da una sola particella).

1.4 Parametro di degenerazione Ψ

È possibile parametrizzare il *grado di degenerazione* di un gas in equilibrio termodinamico mediante l'introduzione del *parametro di degenerazione* Ψ . Si tratta di un numero reale che dipende dalla temperatura T e dalla densità (numerica) del gas n

$$\Psi \propto \frac{1}{kT} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}$$

Più il parametro è grande, maggiore è il grado di degenerazione del gas e quindi maggiori sono le differenze da un gas perfetto. Ψ entra in gioco nella formalizzazione dell'indice di occupazione $\Pi(\epsilon) = n(\epsilon)/g(\epsilon)$ ($n(\epsilon)$ è il numero di particelle con energia ϵ , $g(\epsilon)$ la molteplicità del livello ϵ), per entrambe le statistiche di MB e FD

$$\Pi_{MB}(\epsilon) \propto \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon}{kT} - \Psi\right)} \quad \Pi_{FD}(\epsilon) \propto \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon}{kT} - \Psi\right) + 1} \quad (1.23)$$

Si può definire una distribuzione *generalizzata* che racchiuda entrambe le statistiche, in cui Ψ determina quale regime sia dominante:

$$N(p) dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p^2}{\exp\left(\frac{p^2}{2mkT} - \Psi\right) + 1} dp \quad (1.24)$$

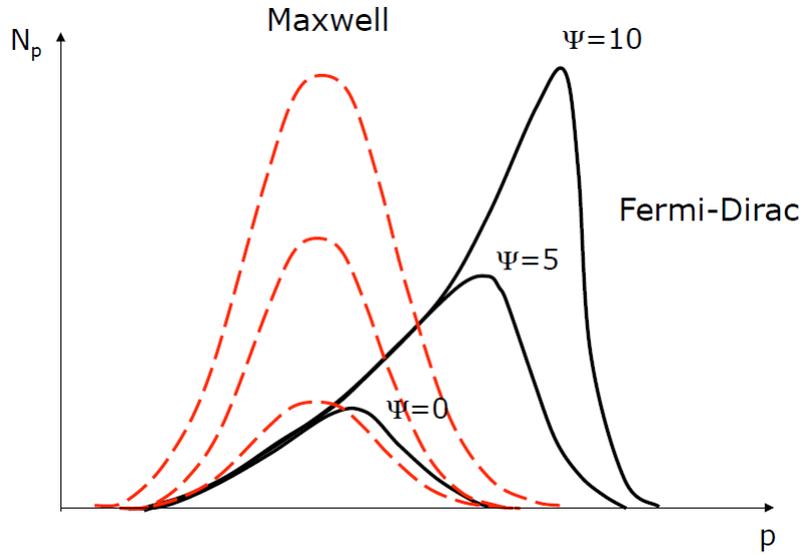


Figura 1.3: distribuzione statistica generalizzata (curve nere continue) in funzione del parametro di degenerazione Ψ , a confronto con il regime di Maxwell-Boltzmann. (Fonte: F. R. Ferraro, *Astrofisica Stellare, Dispense, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna (2021)*)

Capitolo 2

Interni stellari

Dal punto di vista teorico, un modello che descriva completamente la struttura interna di una stella è formulato in un sistema di sette equazioni fondamentali. Una di queste è una EdS. Il gas oggetto di questa EdS per gli interni stellari è un plasma di ioni ed elettroni: le temperature tipiche nelle regioni più interne di una stella in sequenza principale raggiungono le decine o anche le centinaia di milioni di Kelvin, e a queste temperature la totalità degli atomi è ionizzata almeno una volta. Si vedrà in seguito, con la condizione di degenerazione, che questo fatto porterà alla distinzione del comportamento degli ioni da quello degli elettroni.

La storia evolutiva di una stella è la storia del continuo opporsi della pressione interna all'autogravità della stella. Da qui l'importanza cruciale di una EdS che espliciti in ogni punto della struttura stellare la pressione risultante, che è una combinazione tra la pressione del gas P_g (pressione ionica e pressione elettronica) e la pressione di radiazione P_r . Viene indicata formalmente con $P = P_g + P_r$.

L'argomento delle prossime sezioni è lo studio approfondito della pressione in un interno stellare, che si può ricavare nei due regimi di gas (perfetto e degenere) sia dalla Termodinamica Statistica (Capitolo 1), sia introducendo alcuni *momenti* della funzione di distribuzione del gas (sarà il caso del gas degenere).

2.1 Plasma stellare come gas perfetto

La trattazione ha inizio con l'assunzione che il plasma stellare si comporti come un gas perfetto. Sotto questa ipotesi, l'interazione coulombiana tra le particelle cariche si considera trascurabile rispetto alla loro energia cinetica. Nel Capitolo 1 è stata ricavata, da trasformazioni delle funzioni di stato, l'EdS del gas perfetto $PV = nRT$. Si può scrivere una forma alternativa di questa EdS più adatta agli interni stellari.

Considerando che $R = kN_A$ e che il numero totale di particelle $N = nN_A$

$$P = \frac{N_A n k T}{V} = \frac{N}{V} k T$$

Moltiplicando e dividendo questa equazione per la massa della *particella media* del gas $\bar{m} = \mu H$ (μ peso molecolare medio), e vedendo che la massa totale del gas è ad essa legata come $M = N \bar{m}$, si ha

$$P = \frac{M}{V} \frac{k T}{\bar{m}} = \rho \frac{k T}{\mu H} \quad (2.1)$$

con ρ densità del gas.

Il peso molecolare medio μ dipende dal grado di ionizzazione del gas e può essere trattato in modo approssimativo assumendo la completa ionizzazione degli atomi di ogni elemento. Un atomo con carica nucleare Z e peso atomico A quindi produce $Z + 1$ particelle libere (il nucleo e gli Z elettroni). μ è così formulato:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_j \frac{1 + Z_j}{A_j} X_j \quad (2.2)$$

dove j è l'indice che scorre sulle specie atomiche e X_j è la frazione relativa in massa dell'elemento j .

Per gli elementi più pesanti dell'elio (detti "metalli") è sufficiente considerare $Z + 1 \simeq A/2$. Si ha quindi

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \quad (2.3)$$

In Astrofisica, la frazione relativa in massa dell'idrogeno è indicata con X , quella dell'elio con Y e quella dei metalli con Z (da non confondere con il numero atomico, indicato con Z_j per ogni specie atomica), in modo che $X + Y + Z = 1$.

Per un gas di elettroni

$$\frac{1}{\mu_e} = \frac{1}{2}(X + 1) \quad (2.4)$$

Se una stella ha bruciato tutto l'idrogeno a disposizione, $\mu_e = 2$.

2.2 Degenerazione del plasma stellare

Nelle regioni della stella in cui la densità del plasma aumenta, la condizione di non-degenerazione già esposta nel Capitolo 1 può non essere del tutto rispettata. In queste condizioni, gli effetti quantistici (principio di indeterminazione di Heisenberg e principio di esclusione di Pauli) potrebbero non essere più trascurabili; è quindi importante domandarsi entro quali limiti il plasma stellare è ancora considerabile come un gas perfetto.

Si ricorda a tal proposito che in Meccanica Quantistica ad una particella è associata un'onda localizzata ($\neq 0$ entro una regione finita di spazio). Se la distanza media r tra due particelle è maggiore della loro lunghezza d'onda termica di de Broglie $\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$ allora gli effetti quantistici sono trascurabili

$$r > \frac{h}{\sqrt{3mkT}} \quad (2.5)$$

che se espressa in termini di temperatura e densità dell'ambiente stellare locale e della massa m della particella di gas diventa la condizione di non-degenerazione

$$T > 2.4 \times 10^{-22} \frac{\rho^{2/3}}{m} \quad (2.6)$$

A parità di condizioni ambientali (ρ, T) , più leggera è la particella di massa m e maggiore sarà la soglia di temperatura T da superare per rimanere in regime di gas perfetto. Può succedere che questa soglia diventi più elevata della reale temperatura T nel punto della stella considerato, traducendosi nella degenerazione del gas di particelle di massa m .

Proprio per questa dipendenza della relazione (2.6) dalla massa della particella di gas, alle condizioni tipiche della materia stellare i protoni soddisfano ancora la relazione (2.6), mentre lo stesso non avviene per gli elettroni. Da qui in avanti si distinguerà quindi la componente del gas di ioni da quella del gas di elettroni, soprattutto in vista della formulazione della pressione risultante interna P .

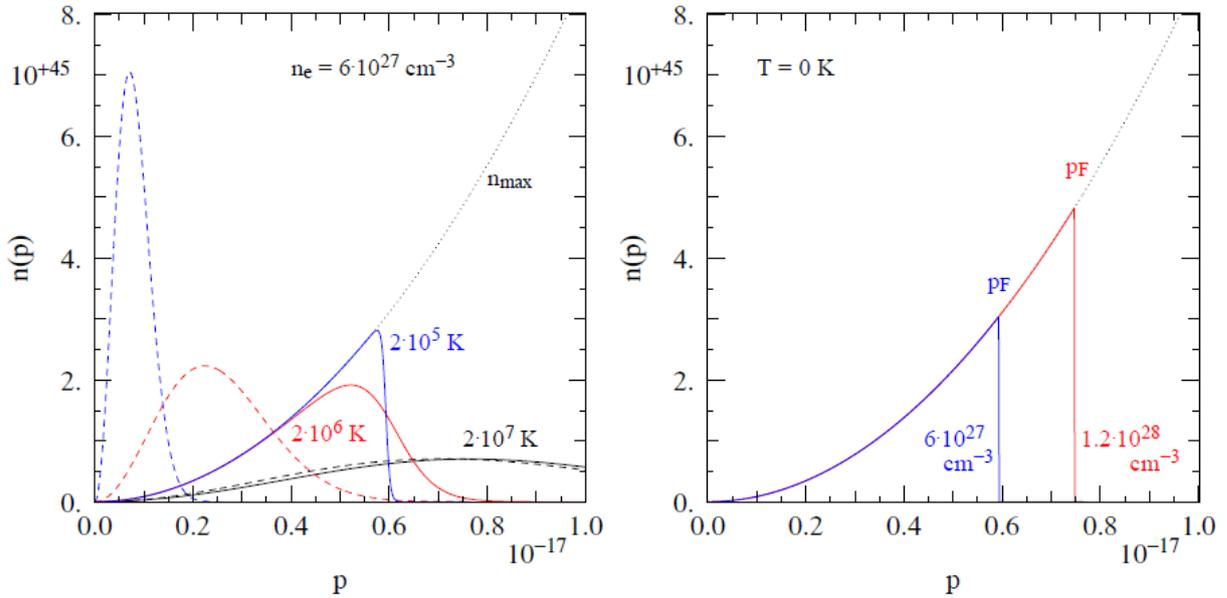


Figura 2.1: *Sinistra:* distribuzione degli impulsi per un gas di elettroni di densità numerica $n_e = 6 \times 10^{27} \text{ cm}^{-3}$ (corrispondente ad una densità $\rho_e = 2 \times 10^4 \text{ g cm}^{-3}$ se $\mu_e = 2$) e per tre diverse temperature. Le distribuzioni *reali*, governate dagli effetti quantistici, sono mostrate con linee continue, mentre le distribuzioni di Maxwell-Boltzmann per le stesse n_e e T sono mostrate con linee tratteggiate. La linea puntata n_{max} rappresenta il caso di completa degenerazione (tutti gli stati quantici di impulso p sono occupati). *Destra:* distribuzioni *reali* nel limite di $T = 0$ (degenerazione completa) al variare della densità. (Fonte: O. R. Pols, *Stellar Structure and Evolution*, Astronomical Institute Utrecht (2011))

Come si può vedere nel grafico a sinistra di Figura 2.1, con il diminuire della temperatura il picco della distribuzione di MB si sposta a p minori e aumenta il proprio valore. Il numero di elettroni con piccoli valori di p previsto dalla Fisica Classica (MB) eccede il massimo imposto dal principio di esclusione di Pauli ($n_{max}(p)$). Nella distribuzione reale, questi elettroni sono forzati ad occupare stati quantici a p più elevati: il picco della distribuzione reale $n_e(p)$ si trova a p più elevati. Per via di questi impulsi più elevati, il gas di elettroni esercita una pressione maggiore rispetto ad un gas perfetto. Questa viene chiamata *pressione di degenerazione*.

Se la temperatura diminuisce ulteriormente, la distribuzione degli elettroni si avvicina sempre più alla curva di completa degenerazione: in questa condizione di forte degenerazione, ulteriori diminuzioni di T modificano sempre meno la distribuzione reale di elettroni, al punto che la pressione di degenerazione diventa pressoché *indipendente dalla temperatura*.

Quanto detto sulla pressione di degenerazione ha un riscontro formale nella prima, vera, EdS per un gas degenero ad essere mostrata in questa trattazione. Tale relazione si ricava ricordando che, in generale, la pressione P di un sistema termodinamico è uno dei *momenti* della sua funzione di distribuzione:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty N(p) p v dp \quad (2.7)$$

Nel nostro caso, la distribuzione che compare nell'integrale (2.7) è la distribuzione di Fermi-Dirac, che in termini di numero N_e di particelle per unità di volume è

$$N_e(p) dp = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp \quad (2.8)$$

La quantità N (numero di particelle per unità di volume) si può anche scrivere come $N = \frac{\rho}{\mu H}$. Integrando la (2.8) fino all'impulso di Fermi p_F si ha

$$N_e = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 = \frac{\rho}{\mu H} \quad (2.9)$$

Da questa relazione si ricava in modo esplicito p_F .

L'integrale da trattare è quindi il seguente:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi}{h^3} p^3 v dp \quad (2.10)$$

La velocità v è lasciata esplicita per distinguere due sotto-regimi: degenerazione non-relativistica e degenerazione relativistica.

Degenerazione non-relativistica: in questo caso $p_F \ll m_e c$ e quindi $p = mv$. Sostituendo questa espressione per p nell'integrale (2.10), la pressione che si ottiene è

$$P = k_1 \rho^{5/3} = 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (2.11)$$

Degenerazione relativistica: in questo caso $p_F \sim m_e c$ e quindi si deve ricorrere, per l'integrale (2.10), all'espressione relativistica $p = \gamma m_e v$, con risultato:

$$P = k_2 \rho^{4/3} = 1.2 \times 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad (2.12)$$

2.3 Pressione di radiazione

I fotoni possono essere studiati come particelle quantistiche che trasportano impulso e che quindi esercitano una pressione quando interagiscono con la materia (nei processi di scattering Thomson o Compton). La singola interazione di un fotone con la materia è tanto più favorita quanto più è grande la sezione d'urto σ della particella coinvolta. Questa dipende dalla massa della particella come $\sigma_T \propto m^{-2}$; per tale ragione, le interazioni con gli elettroni influiscono maggiormente.

Da considerazioni di Termodinamica Statistica, la *pressione di radiazione* è

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4 \quad (2.13)$$

È quindi dominante per T molto elevate ed è alla base del vento stellare che ha origine nell'atmosfera della stella.

2.4 Diagramma $\log(\rho) - \log(T)$

A questo punto, sono noti tutti i contributi alla pressione interna in una stella. L'EdS per un interno stellare è la seguente:

$$P = \frac{1}{3} aT^4 + \frac{k\rho T}{\mu_e H} + \begin{cases} \frac{k\rho T}{\mu_e H} & \text{elettroni non degeneri} \\ k_1 \rho^{5/3} & \text{elettroni degeneri non-relativistici} \\ k_2 \rho^{4/3} & \text{elettroni degeneri relativistici} \end{cases} \quad (2.14)$$

I vari contributi alla pressione possono avere entità molto diverse tra loro (interi ordini di grandezza di differenza): a seconda della posizione nell'interno stellare in cui si sta studiando l'EdS, la materia stellare può variare il proprio *regime* di pressione e quindi il proprio comportamento fisico, con conseguenze determinanti sull'intera evoluzione della stella (se cambia la pressione interna, cambia il modo in cui questa si oppone all'auto-gravità della stella).

Per capire, date le condizioni ambientali (ρ, T) nella stella nel punto considerato, il tipo di regime dominante è utile vedere dove questo punto si localizza in un *piano* $\log \rho - \log T$ come quello in Figura 2.2.

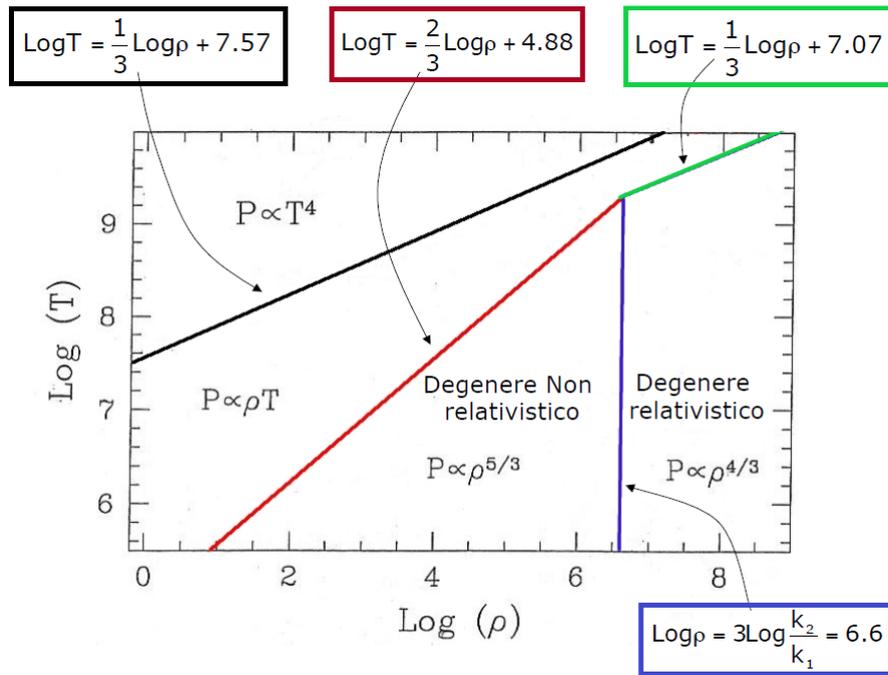


Figura 2.2: piano $\log \rho - \log T$. Ad ogni regione del piano corrisponde un regime di pressione dominante. Ogni linea che separa un generico regime x dal regime y è il grafico di una relazione che si trova uguagliando i contributi alla pressione nei due regimi, $P_x = P_y$. (Fonte: F. R. Ferraro, *Astrofisica Stellare, Dispense, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna (2021)*)

Una regione in particolare dell'interno stellare si distingue per la portata dei fenomeni che in essa avvengono e il loro impatto sull'evoluzione dell'intera struttura stellare: il nucleo. Nel nucleo avvengono le reazioni termonucleari che costituiscono una fonte energetica cruciale per la vita della stella. È quindi molto utile studiare il posizionamento

del punto rappresentante il nucleo di una stella nel piano $\log \rho - \log T$ e la sua evoluzione in tale piano, per capire se e come variano i regimi di pressione nel nucleo durante le fasi evolutive della stella.

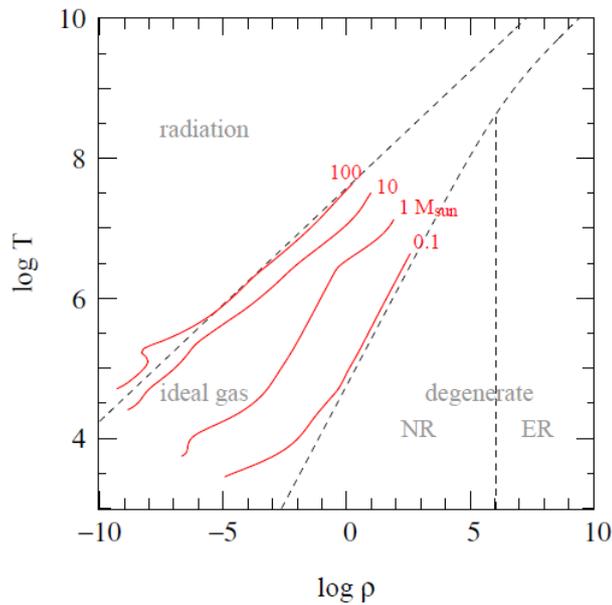


Figura 2.3: evoluzione del nucleo stellare nel piano $\log \rho - \log T$ in funzione della massa della stella (in figura compaiono quattro masse stellari diverse, in un range compreso tra $0.1M_{\odot}$ e $100M_{\odot}$). Le linee in figura si riferiscono soltanto al periodo di bruciamento dell'idrogeno all'interno del nucleo e non mostrano le fasi evolutive successive, dove le stelle possono entrare nel regime di degenerazione. (Fonte: O. R. Pols, *Stellar Structure and Evolution*, Astronomical Institute Utrecht (2011))

Da studi di questo tipo emerge che le stelle di sequenza principale si trovano nel regime di gas perfetto; a cavallo tra il regime di gas perfetto e di gas degenerare non-relativistico si trovano le stelle giganti rosse; in pieno regime di degenerazione (relativistica e non-) si dispongono le nane bianche e le stelle di neutroni.

Capitolo 3

EdS in stelle nane bianche

Siccome nel limite di forte degenerazione la pressione non dipende più dalla temperatura, questa pressione può sostenere una stella degenerare contro la sua autogravità a prescindere dalla temperatura. Pertanto, una stella degenerare non ha bisogno di essere calda per rimanere in equilibrio idrostatico, e può rimanere in tale stato per sempre, anche raffreddandosi. È questo il caso delle *nane bianche*.

Una stella nana bianca è la fase evolutiva successiva al termine dell'ultimo ciclo di reazioni termonucleari in una stella di massa $M < 8M_\odot$. È un oggetto compatto, di massa dell'ordine di $1M_\odot$ e dimensioni paragonabili a quelle della Terra, con temperature superficiali $T_{\text{eff}} \simeq 25\,000\text{K}$ e luminosità molto inferiore a $1L_\odot$.

Dal punto di vista termodinamico, una nana bianca è con buona approssimazione una struttura interamente degenerare (gli strati eventualmente non degeneri sono i più esterni e occupano una frazione trascurabile del volume della stella).

Una nana bianca può essere studiata con un modello politropico (vedi Appendice): ponendo in modo opportuno l'indice politropico n si ottiene la dipendenza della pressione dalla densità tipica di un gas degenerare relativistico e non-.

È interessante vedere come lo studio delle EdS si può applicare al problema della condizione di equilibrio per una nana bianca, che formalmente è

$$P_e + P_g = 0 \quad (3.1)$$

che mette a confronto la pressione di degenerazione P_e (relativistica o non-relativistica) con la pressione gravitazionale P_g dovuta all'autogravità della stella. Si vuole quindi trovare un'espressione per la P_g in modo da procedere nello studio di questo problema. Per una nana bianca di raggio R , massa M_t e densità ρ (si supponga ρ costante), la forma differenziale esatta dell'energia potenziale di autogravità è

$$dU = -\frac{GM(r) dM}{r} = -\frac{M(r)G}{r} 4\pi r^2 \left(\frac{M_t}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right) dr = -\frac{3GM_t^2 r^4}{R^6} dr \quad (3.2)$$

che integrata su tutto R dà

$$U(R) = -\frac{3GM_t^2}{5R} \quad (3.3)$$

da cui si ricava la forza gravitazionale F_g e di conseguenza anche la pressione gravitazionale $P_g = F_g/4\pi R^2$

$$F_g = -\frac{dU}{dR} \quad P_g = -\frac{3GM_t^2}{20\pi R^4} \quad (3.4)$$

Per avere un paragone più diretto con P_g , si esprime la pressione di degenerazione P_e in funzione del raggio R della nana bianca: nel caso non-relativistico $P_e \propto \rho^{5/3} \propto M_t^{5/3} R^{-5}$; nel caso relativistico $P_e \propto \rho^{4/3} \propto M_t^{4/3} R^{-4}$. Considerando il rapporto tra P_e e P_g si valutano i tre casi

$$\left| \frac{P_e}{P_g} \right| > 1 \rightarrow \text{espansione} \quad \left| \frac{P_e}{P_g} \right| < 1 \rightarrow \text{collasso} \quad \left| \frac{P_e}{P_g} \right| = 1 \rightarrow \text{equilibrio}$$

L'importanza della distinzione tra caso relativistico e non-relativistico è cruciale per le nane bianche più massive: se la nana bianca ha una massa sufficiente da comprimere il gas degenerare non-relativistico fino a farlo entrare in regime relativistico, quando ciò avviene la pressione del gas vede diminuire la propria sensibilità all'aumento di densità per compressione gravitazionale, e ciò può avere conseguenze devastanti per la struttura stellare in caso di collasso, che esploderebbe dando origine ad una Supernova di tipo Ia. Anche solo questa osservazione fa intuire che esiste un limite massimo per la massa affinché una nana bianca possa esistere in modo stabile, sancito dal limite di Chandrasekhar $M_{Ch} = 1.44M_\odot$. L'equilibrio è quindi raggiungibile soltanto per masse $M_t \leq M_{Ch}$. Se ad esempio una nana bianca ha $M_t < M_{Ch}$ e non è in equilibrio, essa può comunque raggiungerlo mediante un'espansione (se $|P_e/P_g| > 1$): se in partenza il gas è degenerare relativistico, con l'espansione la densità diminuisce, con la possibilità di un passaggio al regime non-relativistico, che ha una sensibilità maggiore alle variazioni di ρ ; anche la pressione di gravità diminuisce con un'espansione, ma se l'espansione aumenta ulteriormente, la pressione del gas diminuisce in modo più sensibile della pressione di gravità, raggiungendo così la condizione di equilibrio.

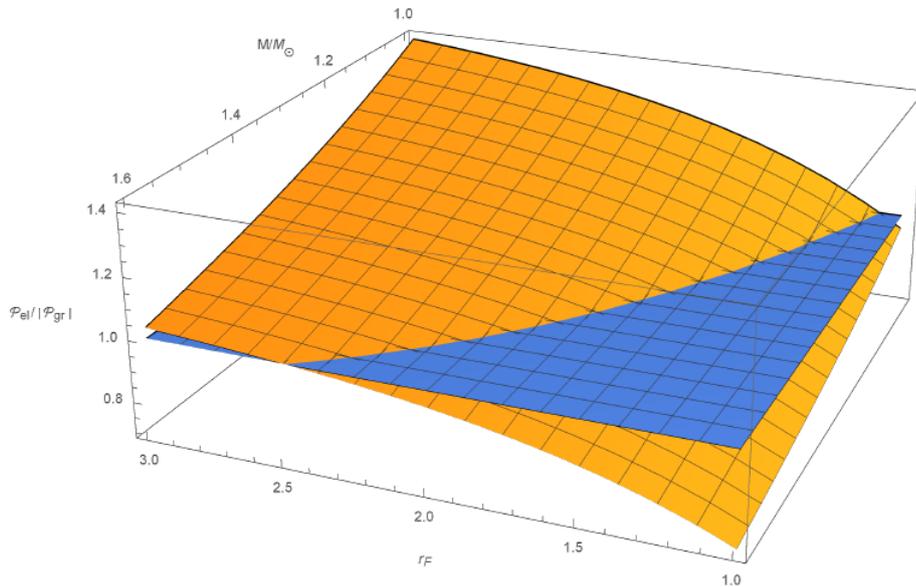


Figura 3.1: grafico del rapporto tra pressione degenerare relativistica e pressione gravitazionale (giallo), confrontato con la condizione di equilibrio (blu), in funzione di $r_F = p_F/mc$ e di M/M_\odot . r_F serve come parametro relativistico: più è grande, maggiore è il carattere relativistico della pressione degenerare. (Fonte: G. N. Di Gesu, *Nane Bianche e Limite di Chandrasekhar*, Corso di Laurea in Fisica, Università di Bologna (2020))

Appendice

Modelli politropici

Un sistema politropico è un sistema descritto da una EdS in cui la pressione dipende soltanto dalla densità. Con questa EdS, l'equazione dell'equilibrio idrostatico e l'equazione di continuità della massa si può costruire un sistema chiuso di equazioni, ovvero un *modello politropico* completamente risolvibile:

$$\begin{cases} \frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \\ \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \\ P(r) = K \rho^{1+\frac{1}{n}}(r) \quad n \rightarrow \text{indice politropico} \end{cases}$$

Furono Emden e Lane a studiare per primi il problema della struttura di una sfera gassosa in equilibrio idrostatico nel caso politropico. Si trovò che questo modello può parametrizzare casi astrofisici particolari. Ad esempio, un modello politropico può descrivere correttamente stelle in equilibrio convettivo (come le protostelle nella traccia di Hayashi), stelle costituite da materia degenere come le nane bianche (per $n = 1.5$ si ha la pressione degenere non-relativistica, per $n = 3$ quella relativistica), sotto-strutture del core e nuclei isotermi ($n = \infty$) durante la contrazione in tempi-scala termodinamici, al termine di un ciclo di reazione termonucleare.

Tabella delle costanti

Quantità	Simbolo	Valore
Numero di Avogadro	N_A	$6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Costante di Boltzmann	k	$1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$
Costante dei gas	R	$8.31 \times 10^7 \text{ erg mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
Massa dell'atomo di idrogeno	H	$1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$
Costante della pressione di radiazione	a	$7.6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{K}^{-4}$
Costante di Planck	h	$6.626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$
Massa dell'elettrone	m_e	$9.109 \times 10^{-28} \text{ g}$
Carica dell'elettrone	e	$4.803 \times 10^{-10} \text{ sC}$
Raggio del Sole	R_\odot	$6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$
Massa del Sole	M_\odot	$1.98 \times 10^{33} \text{ g}$
Costante di gravitazione universale	G	$6.67 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$
Velocità della luce nel vuoto	c	$2.998 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$

Tabella A: alcune costanti fisiche e astrofisiche di riferimento.

Bibliografia

- [1] L. Ferrari, *Elementi di Termodinamica Statistica*, Dispense, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2019.
- [2] F. R. Ferraro, *Astrofisica Stellare*, Dispense, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2021.
- [3] M. Cianfaglione, *Equazioni di stato della materia in Astrofisica*, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2022.
- [4] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, Sesta Edizione, Springer, 2017.
- [5] O. R. Pols, *Stellar Structure and Evolution*, Astronomical Institute Utrecht, 2011.
- [6] G. N. Di Gesu, *Nane bianche e limite di Chandrasekhar*, Corso di Laurea in Fisica, Università di Bologna, 2020.
- [7] P. Castronovo *Appunti personali dal corso di Astrofisica Extragalattica*, Prof. Luca Ciotti, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, A.A. 2021-2022.