

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE STRUTTURE

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e dei Materiali

TESI DI LAUREA

in
Progetto in zona sismica LS

**VALUTAZIONE DELLE PRESSIONI SULLE PARETI DI
UN SILOS A FONDO PIATTO CONTENENTE MATERIALE
GRANULARE DURANTE SISMA**

Tesi di laurea di:

GIULIA LAVATURA

Relatore:

Chiar.mo Prof. Ing.
TOMASO TROMBETTI

Correlatore:

Dott. Ing. STEFANO SILVESTRI

Anno Accademico 2010/11
Sessione II

INDICE

INDICE	II
Organizzazione del testo	1
1 INTRODUZIONE	4
1.1 INQUADRAMENTI.....	5
1.1.1 Oggetto.....	5
1.1.2 Letteratura contemporanea.....	5
1.1.3 Inquadramento 1: storico.....	7
1.1.4 Inquadramento 2: obiettivi	11
1.2 STATO DELL'ARTE.....	17
1.2.1 Riferimenti Bibliografici.....	17
1.2.2 Quadro normativo	17
1.2.3 Formulazione Eurocodice	18
2 TEORIA	26
2.1 PREMESSA	27
2.1.1 Generalità	27
2.1.2 Sistema Ideale	29
2.1.3 Tre casi	40
2.1.4 Obiettivi progettuali del lavoro	41
2.2 SVILUPPO ANALITICO: CASO STATICO	42
2.2.1 Equilibrio alla traslazione verticale (disco D).....	44
2.2.2 Rapporto tra pressione verticale e orizzontale (D).....	46
2.2.3 Equilibrio alla traslazione orizzontale (D).....	47
2.2.4 Legge d'attrito (elemento E)	48
2.2.5 Equilibrio alla traslazione verticale e radiale (E).....	49
2.2.6 Equilibrio alla traslazione tangenziale (E)	52
2.2.7 Versione non approssimata Caso 0	53

2.3	CASO 1: PRESENZA DELL'ACCELERAZIONE VERTICALE.....	56
2.3.1	Equilibrio alla traslazione verticale (D)	59
2.3.2	Rapporto tra pressione verticale e orizzontale (D).....	61
2.3.3	Equilibrio alla traslazione orizzontale (D)	62
2.3.4	Legge d' attrito (E).....	63
2.3.5	Equilibrio alla traslazione verticale e radiale (E).....	64
2.3.6	Equilibrio alla traslazione tangenziale (E)	67
2.3.7	Versione non approssimata Caso 1	68
2.4	CASO 2: PRESENZA DELL'ACCELERAZIONE ORIZZONTALE	71
2.4.1	Note sull'accelerazione orizzontale	74
2.4.2	Caso 1: accelerazione costante.....	76
2.4.3	Caso 2: accelerazione lineare	88
2.4.4	Caso 3: accelerazione parabolica	96
2.4.5	Versione non approssimata Caso 2	104
2.5	NOTA: Riguardo a λ	109
2.6	NOTA:Sull'equilibrio del momento	112
2.7	CONFRONTO tra la formulazione esatta e approssimata.....	117
2.8	RIASSUNTO	121
2.9	INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI ANALITICI.....	129
2.9.1	Pressione radiale.....	129
2.9.2	Volumi di insilato.....	136
2.9.3	Limiti della teoria.....	141
2.10	CALCOLO DELLE AZIONI ALLA BASE DEL SILOS.....	149
2.10.1	Taglio	150
2.10.2	Momento	153
2.11	CONFRONTO con T, M tradizionali	155
3	PREPARAZIONE DELLA PROVA.....	160
3.1	DESCRIZIONE DELLA TAVOLA	161
3.2	PROVINI SCELTI.....	164
3.2.1	Provini in acciaio.....	165

3.2.2	Provini in plexiglass.....	169
3.3	KICK-OFF MEETING 14 dicembre 2010: nuove idee.....	171
3.3.1	Soluzione 1.....	171
3.3.2	Soluzione 2.....	173
3.3.3	Soluzione 3.....	174
3.3.4	Soluzione 4.....	175
3.4	Soluzione 1: MODELLO FEM.....	176
3.4.1	Risultati.....	182
3.5	Soluzione 2: METODO DELLE BANDE.....	206
3.5.1	Presentazione del metodo.....	206
3.5.2	Calcolo delle pressioni di banda.....	208
3.5.3	Studio delle forze d'attrito.....	225
3.6	Soluzione 4: SENSORI TEKSCAN.....	259
3.6.1	Valutazione preliminare della pressione da misurare.....	259
3.6.2	Sensori BPMS.....	262
3.6.3	Sensori Flexiforce.....	264
3.7	MODELLO FEM dell'insilato.....	266
3.7.1	Costruzione del modello.....	269
3.7.2	Risultati.....	281
3.7.3	Modello a 184 Masse.....	297
3.7.4	Risultati.....	300
3.7.5	Osservazioni.....	306
3.8	21 NOVEMBRE 2011 BRISTOL.....	310
3.8.1	Obiettivi principali.....	311
3.8.2	Progettazione prova.....	311
4	APPENDICI.....	319
4.1	Eurocode accurate procedure.....	320
4.2	Eurocode simplified procedure.....	323
4.3	Trombetti et al. procedure.....	324
4.3.1	For circular silos:.....	324

Organizzazione del testo

PARTE 1: INTRODUZIONE

Il primo capitolo inquadra la problematica dei silos contenenti materiale granulare e la relativa letteratura più recente e storica. Nell'ambito della letteratura storica si fa riferimento allo studio Janssen del 1895 che analizza il caso statico (primo inquadramento). Un secondo inquadramento inserisce il lettore nel contesto "sismico" del nostro studio e sottolinea gli obiettivi della tesi: schematizza le ipotesi della teoria che ci si appresta a presentare e il rapporto con la realtà fisica.

Il secondo capitolo riassume la teoria tradizionale per quanto riguarda l'identificazione delle azioni di progetto riguardanti silos a fondo piano contenenti materiale granulare soggetto ad azione sismica. Si mostra cosa prevede l'Eurocodice vigente e si riportano i principali riferimenti bibliografici riguardanti l'argomento.

PARTE 2: TEORIA

Questa seconda sezione, partendo dalle ipotesi formulate alla base, illustra lo sviluppo analitico strutturato principalmente sul legame di Poisson, sulla legge d'attrito e su relazioni di equilibrio di corpo rigido. I risultati analitici forniscono le pressioni agenti, i volumi di cereale effettivamente gravante sulle pareti, il taglio e il momento alla base. Si studiano tre casi fondamentali.

Il primo capitolo è una premessa (nomenclatura, assunzioni e ipotesi).

Il secondo capitolo è il caso statico.

Il terzo capitolo è il caso con presenza di accelerazione verticale aggiuntiva.

Il quarto capitolo è il caso di presenza di accelerazione orizzontale aggiuntiva.

Seguono una nota sul legame tra pressione verticale e orizzontale nella porzione interna dei grani (λ) e una nota sull'equilibrio del momento.

Poiché ciascuno dei tre casi contiene al suo interno due formulazioni (una approssimata e una esatta), viene fatto un confronto tra i risultati delle due formulazioni.

Per concludere l'analisi teorica si inserisce un riassunto dove sono riportati tutti i risultati ottenuti nei tre capitoli precedenti.

Il nono capitolo presenta un'interpretazione grafica dei risultati analitici. Per meglio intendere il significato fisico dei risultati ottenuti, sono fornite una rappresentazione 3D della suddivisione del materiale insilato nelle due porzioni e le espressioni analitiche delle azioni orizzontali.

Nel decimo capitolo si calcolano il taglio e il momento flettente alla base del silo usando i risultati ottenuti dalla parte analitica.

Nel capitolo undici si effettuano i confronti di T, M alla base del silo ottenuti con la teoria di *Trombetti et al.* e ottenuti con il calcolo tradizionale dell'Eurocodice. Dal confronto emerge che per sili tozzi l'Eurocodice sovrastima le azioni sul silos.

PARTE 3: PROGETTAZIONE PROVA

In questa terza sezione si descrivono le fasi prettamente di ricerca, di confronto, di incontro, di discussione, di presentazione e di scelta tra varie possibili soluzioni. Si percorrono quindi le fasi di un lavoro di équipe, di ricercatori in un ambito internazionale di scambio e di collaborazione. Oltre al D.I.C.A.M. dell'Università di Bologna, nel progetto di ricerca sono coinvolti il Politecnico di Bari, l'Università di Alicante in Spagna e l'Università di Bristol in Inghilterra.

Il primo capitolo descrive la tavola vibrante sulla quale sarà effettuata la prova.

Il secondo capitolo indica le caratteristiche dei provini (tre in acciaio e cinque in plexiglass) su cui si è deciso di lavorare.

Il terzo capitolo è il punto della situazione fatto durante il kick-off meeting a Bristol del 14 dicembre 2010: si presentano le idee sviluppatasi durante le riunioni tra i docenti e i ricercatori.

Nel quarto capitolo si riportano i risultati ottenuti tramite simulazioni numeriche con Straus7 sugli otto provini. La modellazione col programma di calcolo Straus7 è stata effettuata rappresentando l'insilato con le pressioni ottenute per via analitica nella seconda sezione sulla "Teoria". Questa fase costituisce la soluzione 1 del kick-off meeting.

Il quinto capitolo presenta la soluzione 2 del kick-off meeting del 14 dicembre a Bristol: un metodo di analisi alternativo al modello con Straus7. Lo abbiamo definito metodo delle bande: l'intento è misurare la risultante di ogni banda ritenendo trascurabile l'attrito tra le bande. A tal fine si effettua la comparazione tra le forze d'attrito e la risultante delle pressioni orizzontali, calcolata con l'espressione analitica della teoria formulata nella seconda sezione al capitolo nove, primo paragrafo.

Il sesto capitolo rappresenta la soluzione 4 del kick-off meeting del 14 dicembre a Bristol ed espone le soluzioni tecniche di misura delle pressioni con sensori Tekscan.

Il settimo capitolo descrive un tentativo di modellazione dell'insilato con SAP2000, ancora insospeso.

L'ottavo capitolo nasce a seguito di un altro incontro a Bristol tra gli studiosi coinvolti, dove emergono nuove idee e dove si decide per un nuovo provino in plexiglass da riempire con sfere di vetro chiamate "Ballottini glass". A questo punto della ricerca nasce la necessità di verificare il nuovo provino. Questo sarà il punto di partenza per il futuro di questa ricerca scientifica.

1 INTRODUZIONE

1.1 INQUADRAMENTI

1.1.1 Oggetto

Questa tesi racconta varie fasi di una ricerca scientifica sulle pressioni agenti sulle pareti di un silos a fondo piatto contenente materiale granulare durante sisma. Attualmente l'Eurocodice 8 prevede valori altamente penalizzanti per sili tozzi. L'indagine che si descriverà ha condotto a un metodo innovativo per la progettazione sismica di tale tipologia di silo. Questo metodo di progettazione di sili tozzi consente una riduzione sostanziale delle azioni sismiche, rispetto alle tradizionali, espresse nelle norme dell'EC8. Una corretta valutazione delle azioni, prodotte dal sisma, rende più sicura la progettazione in zona sismica, evitando, inoltre, sprechi di materiale.

1.1.2 Letteratura contemporanea

Sebbene ci siano molti articoli riguardanti il comportamento di sili con liquidi all'interno sotto input sismico [Hamdan 2000, Nachtigall 2003], ci sono solo pochi esempi di indagini scientifiche riguardanti il comportamento di sili a fondo piatto con materiale granulare sotto input sismico.

Come avviene per molte strutture, l'effetto dei carichi laterali può essere significativo, specialmente nei sili più grandi contenenti materiali più pesanti poiché la grandezza del carico orizzontale sismico è proporzionale al peso del silo [Dogangun et al., 2009].

È stato condotto uno studio numerico [Wagner et al., 2002] su sili riempiti con materiale granulare ed eccitati sismicamente al fine di definire il danno subito da tali sili. Le simulazioni numeriche includevano specifici modelli per (i)

il materiale granulare, (ii) l'area di contatto tra materiale e pareti del silo e infine (iii) le pareti del silo stesse. È stato valutato l'incremento di pressione conseguente allo scuotimento, dovuto anche alla compressione del materiale: è stato osservato che la distribuzione delle pressioni si dimostrava non essere la stessa su lati opposti.

È stata condotta un'approfondita indagine numerica [Holler & Meskouris, 2006] sul comportamento sismico di sili tozzi e snelli; il risultato è stato confrontato con le prescrizioni dell'Eurocodice 8. Il modello numerico di questo studio ha considerato molti fattori: la non linearità del materiale granulare, gli effetti dovuti al contatto tra materiale granulare e pareti del silo, l'interazione struttura-suolo con il silo riempito fino al colmo. Inoltre sono stati riportati i risultati dei vari tests effettuati sulla tavola vibrante, condotti su provini in scala. In conclusione i sili snelli mostrano un'ottima corrispondenza con le prescrizioni dell'Eurocodice 8, mentre per i sili tozzi dovrebbe essere assunta una massa effettiva ridotta.


Lo studio teorico di questa tesi sul comportamento dinamico di sili riempiti con materiale granulare, esplicita l'incongruenza tra le prescrizioni tradizionali dell'Eurocodice 8 e le nuove teorie [Holler & Meskouris, 2006]. Alcuni risultati sono simili a quelli ottenuti in [Wagner et al., 2002], ma ora si definisce analiticamente in modo più dettagliato una distribuzione di pressioni, lungo l'altezza delle pareti del silo. Il principale obiettivo che ci si propone in questo studio è presentare un'analisi dell'effettivo comportamento di sili a fondo piatto contenenti materiale granulare, soggetti ad accelerazioni orizzontali e verticali, a profilo verticale costante, lineare e parabolico; le accelerazioni usate simulano un sisma. Lo sviluppo che sarà presentato qui si propone di valutare, sulla base di considerazioni di equilibrio dinamico, gli effetti, sulle pareti del silo, delle azioni orizzontali generate dalle accelerazioni applicate. I risultati ottenuti mostrano come queste azioni orizzontali risultano essere inferiori a quelle ottenibili mediante l'approccio dell'Eurocodice, in particolare per sili geometricamente

tozzi (questo risultato è in accordo con la teoria numerica presentata da [Holler & Meskouris, 2006]).

1.1.3 Inquadramento 1: storico

Piero Pozzati nel testo “Teoria e tecnica delle strutture, vol. I, capitolo IV” introduce le ipotesi della sua trattazione sulle pressioni agenti sulle pareti dei silo facendo riferimento alla teoria storica di Janssen e Koenen del 1895.

Si suppone che Janssen e Koenen alla fine del 1800 abbiano proposto un metodo per calcolare le pressioni sulle pareti dei silo, contenenti materiale granulare, in caso statico. Leggendo la traduzione (ad opera di Matthias Sperl) di un articolo di Janssen dell’agosto del 1895 (titolo originale: “Versuche über Getreidedruck in Silozellen.”) abbiamo tracciato il parallelismo con la teoria di Trombetti et al.



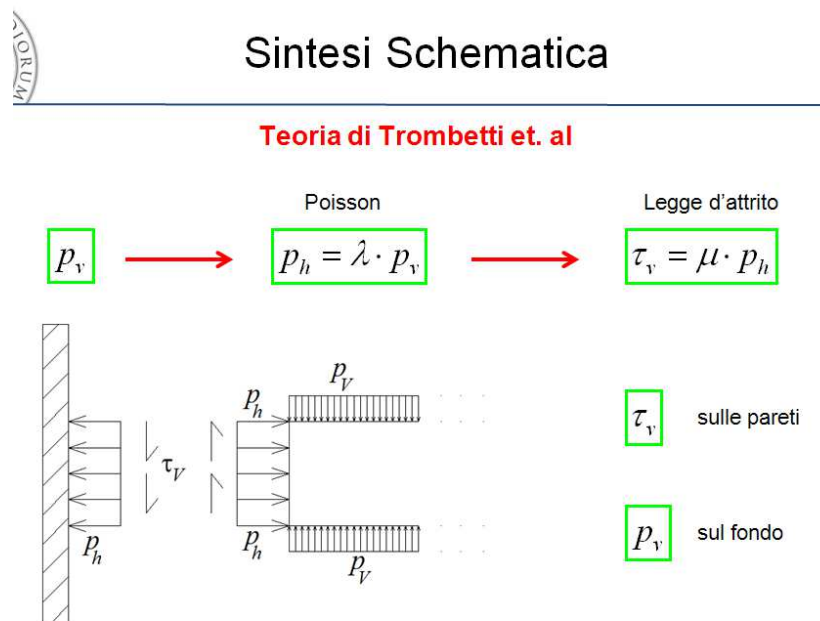
PARALLELISMO

	Teoria di Janssen Per caso statico	Teoria di Trombetti Caso Dinamico
Pressione verticale (media)	p	p_v
Pressione orizzontale	p_s	p_h
Coefficiente d'attrito	f $f_{Gran-Wall} = 0,302 - 0,346$	μ $\mu_{Grano-Acciaio} = 0,32$
Coeff. di Legame tra pressione vert. e orizz.: Poisson	$\frac{K}{f}$ $\frac{K}{f} = 0,68 - 0,75$	λ $\lambda = 0,6$
Legge di Legame tra pressione vert e orizz.	$p_s = \frac{K}{f} \cdot p$	$p_h = \lambda \cdot p_v$

Tabella 1. Parallelismo tra Teoria di Janssen e Teoria di *Trombetti et. al*

Il parallelismo riguarda i protagonisti di queste teorie: la pressione verticale, la pressione orizzontale e i coefficienti che li legano. La tabella presenta le due diverse nomenclature ed evidenzia anche come siano i valori dei coefficienti (d'attrito e di Poisson) adottati nelle due teorie.

Il filo conduttore che lega le due teorie si snoda su questa breve sintesi schematica:



Si parte dalle pressioni verticali sugli strati di materiale granulare; poi la legge di Poisson lega le pressioni verticali alle pressioni orizzontali sui grani e sulle pareti; infine la legge d'attrito permette il passaggio alle tensioni tangenziali verticali sulle pareti. Quindi se si considerassero solo le pressioni verticali il fondo sarebbe sovraccaricato: invece la base è sgravata di una parte del carico che si riversa sulle pareti per effetto sia delle tensioni tangenziali verticali, sia delle pressioni orizzontali. Inoltre ottenere le tensioni tangenziali verticali attraverso la legge d'attrito rappresenta un caso limite in quanto le tensioni tangenziali verticali sono calcolate come valore massimo, quindi come estremo superiore dei possibili valori che assumerebbero in realtà.

Janssen e Pozzati esordiscono affermando che le pressioni verticali possono considerarsi costanti su uno strato orizzontale di grani. Quindi scrivono le relazioni di equilibrio di una fascia di grani alta dh .

Successivamente puntualizzano che le pressioni verticali considerate costituiscono un valore *medio*, poiché in realtà la pressione è massima al centro e minima agli estremi., come si vede nella Figura 1.

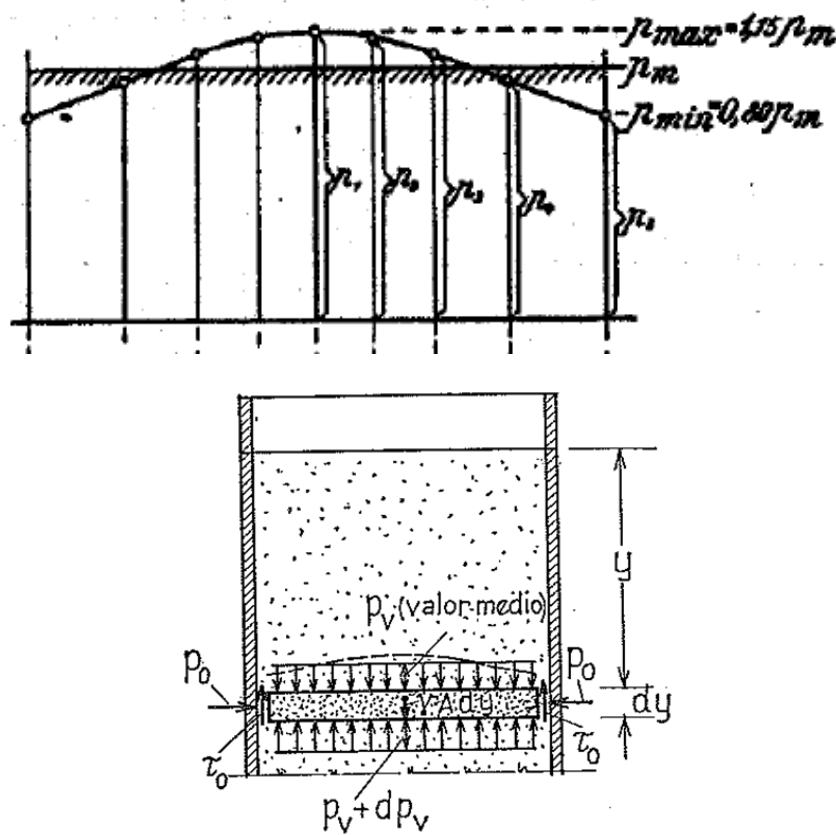


Figura 1. Andamento delle pressioni verticali nell'articolo di Janssen (1895)(in alto) nella teoria di Pozzati (1972) (in basso).

La teoria di Trombetti porta all'estremo il caso di andamento parabolico delle pressioni verticali e schematizza una brusca variazione di esse dal valore nullo a

contatto con le pareti al valore massimo all'interno dell'insialto, che risulta così diviso in una porzione centrale (blu) e in un anello esterno (rosso):

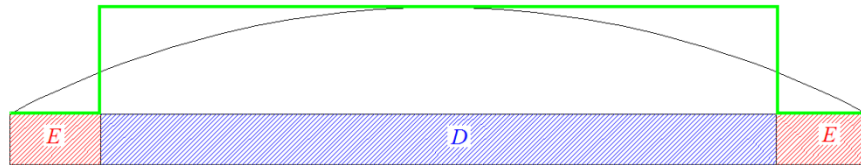


Figura 2: Andamento delle pressioni verticali nella teoria di Trombetti in verde.

L'equilibrio verticale dell'elemento rosso con le pressioni verticali nulle è comunque bilanciato in quanto le tensioni tangenziali, calcolate con la legge d'attrito, sono le massime possibili, quindi sono un estremo superiore delle tensioni tangenziali verticali reali. Questo argomento è approfondito nella nota sull'equilibrio del momento (capitolo 2.6), dove, a valle dell'esposizione della teoria, si può cogliere questo concetto.

Janssen nel suo articolo collega le pressioni verticali alle pressioni orizzontali sulle pareti mediante il rapporto $\frac{K}{f}$, tra la costante $K = 0,2$ e il coefficiente d'attrito f (con f compreso tra 0,302 e 0,340 circa). Il legame tra la pressione verticale e l'orizzontale nella teoria di Trombetti et al. è dato da un coefficiente λ ricavato, seguendo le indicazioni di Pozzati che propone una formula di Camiz (il calcolo di λ è approfondito alla fine della seconda sezione). Il λ di Camiz dà valori prossimi a quelli del $\frac{K}{f}$ di Janssen (cioè circa 0,6).

La teoria di Trombetti et al. è quindi una ricollocazione in ambito sismico di questa storica soluzione statica, infatti nella nuova teoria di Trombetti sono stati riscritti gli equilibri aggiungendo le azioni sismiche: aggiungendo cioè accelerazioni costanti verticali e orizzontali. E' importante mantenere la coerenza

con una teoria così bene consolidata nel tempo, che ricollega lo studio di Janssen, del 1895, con lo studio di Pozzati, del 1972, fino ad oggi.

1.1.4 Inquadramento 2: obiettivi

L'obiettivo principale dello sviluppo analitico è ottenere il profilo delle pressioni date da un materiale granulare, confinato in un elemento cilindrico infinitamente rigido, sotto accelerazione costante.

Sono dunque evidenti stringenti ipotesi di base.

Lo sviluppo analitico poi cederà il passo alle finalità pratiche.

Si vogliono approfondire tre problematiche principalmente:

1. Dimostrare che l'Eurocodice 8 è troppo a favore di sicurezza riguardo sili tozzi, a fondo piatto, con materiale granulare.
2. Definire un'alternativa al calcolo tradizionale.
3. Progettare/Eseguire un Test su tavola vibrante per la validazione della teoria.

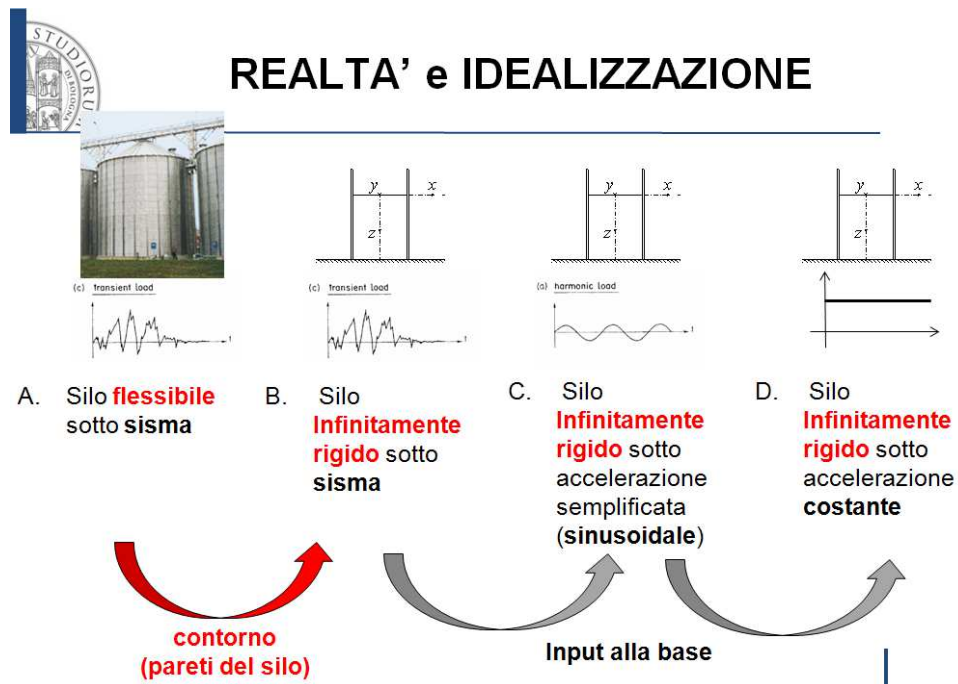
I risultati analitici ottenuti mostrano come le sollecitazioni T , M alla base di un silo siano sensibilmente inferiori a quelle ottenibili secondo il calcolo tradizionale presente nell'Eurocodice 8.

I risultati ottenuti vengono infine utilizzati per la formulazione di una procedura per la progettazione sismica di tali silos.

Un ulteriore obiettivo di questa tesi universitaria è quello di porre le basi per una prova sperimentale che avrà luogo presso il Earthquake and Large Structures Laboratory (EQUALS), laboratorio della Facoltà di Ingegneria della Università di Bristol (UK). La prova sarà effettuata su piastra vibrante al fine di validare la teoria proposta e di confrontarne i risultati ottenuti con le metodologie proposte al giorno d'oggi dalle normative vigenti.

Oltre al D.I.C.A.M. dell'Università di Bologna, nel progetto di ricerca sono coinvolti il Politecnico di Bari e l'Università di Alicante in Spagna.

La teoria di Trombetti et al. studia analiticamente un problema semplificato, ideale: quanto siamo distanti dalla realtà?



Schema: Dalla realtà al modello ideale: 4 step: A, B, C, D.

La teoria di Trombetti et al. verte su due stringenti ipotesi fondamentali:

1. Contorno (pareti, fondo) infinitamente rigido.
2. Input alla base costante (accelerazione costante).

Osservando lo schema in figura 2 capiamo quindi di essere nel caso D: il più lontano dei quattro dalla realtà). Si pone quindi il problema del passaggio dalle ipotesi ideali della teoria alla reale fisicità di un provino in fase di prova e successivamente di un silos reale.

Esistono inoltre altre ipotesi secondarie nella formulazione della teoria (verranno espone in seguito).

Si tratta ora di verificare l'efficacia del modello adottato (il D nello schema sopra) e di cogliere successivamente i comportamenti dei casi ideali C e B e infine ricondursi alla realtà (caso A).

La transizione verso la realtà fisica si può comporre di tre principali steps:

1. Restituire una certa rigidezza agli elementi.
2. Sostituire l'accelerazione costante con un input sinusoidale.
3. Definire un silo reale con input sismico.

E' utile visualizzare ancora schematicamente le differenze tra un modello teorico generico e la concretezza di un silos reale:

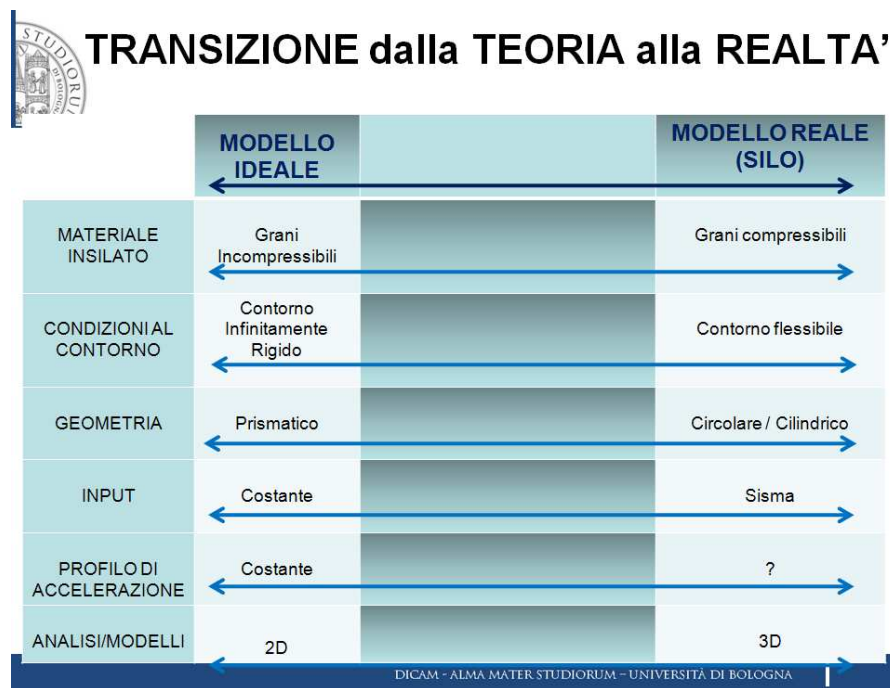


Figura 3. Schema: Transizione dal modello ideale (sinistra) alla realtà (destra).

All'estrema sinistra dello schema sono indicati gli elementi di cui si compone il modello e le ipotesi ideali su di essi; a destra invece è indicato come sono caratterizzati in realtà questi elementi compositivi. Solamente riguardo il profilo

dell'accelerazione lungo l'altezza del silos (elemnto 5) non si conosce l'effettiva distribuzione, quindi si è messo un punto interrogativo.

Tutti i modelli realizzabili si collocano in posizioni intermedie tra l'estrema sinistra (ideale puro) e l'estrema destra (realità).

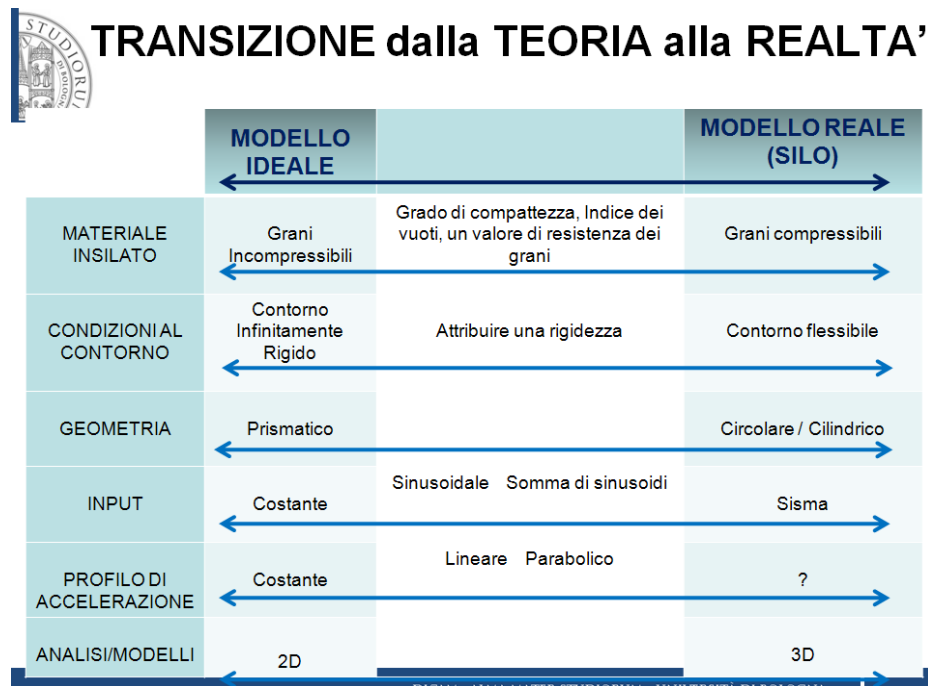


Figura 4. Schema per un modello generico

Quindi un modello generico può attribuire un grado di compattezza al materiale, un indice dei vuoti e/o una certa resistenza ai grani insilati. Un modello generico può attribuire una certa rigidezza alle pareti; può considerare l'accelerazione costante, oppure sinusoidale, oppure come somma di sinusoidi.

Esistono cioè vari livelli di schematizzazioni e di rappresentazione più o meno semplificata della realtà.

La teoria che verrà presentata nella seconda sezione si colloca in questo modo all'interno dello schema:

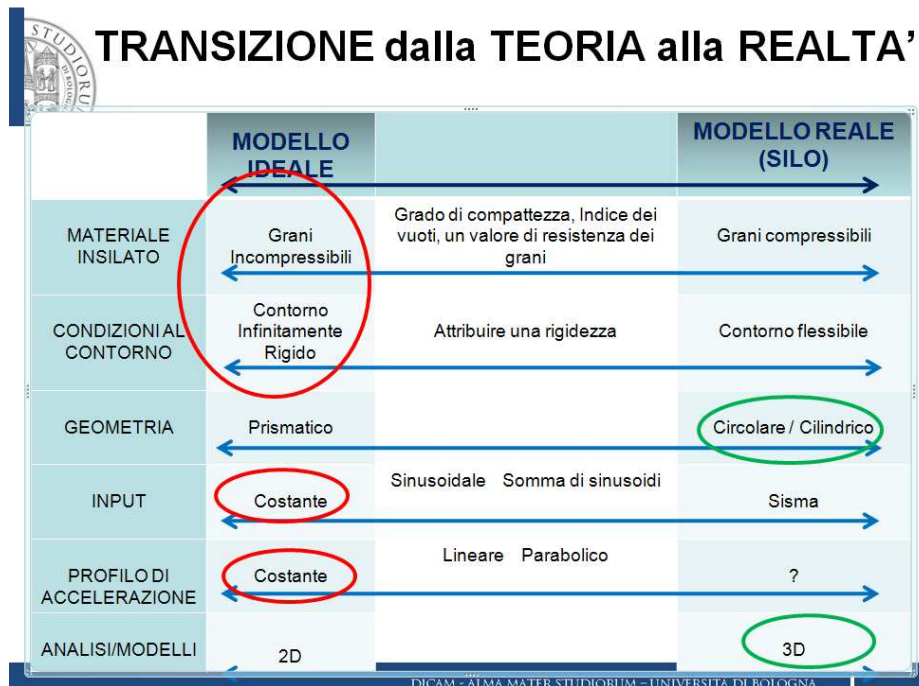


Figura 5. Collocazione del modello teorico di *Trombetti et al.* nello schema.

Ipotesi della teoria leggibili dallo schema:

1. Il materiale granulare insilato è incompressibile, compatto, privo di vuoti, composto da sfere infinitamente rigide e infinitamente resistenti.
2. Le pareti del silo sono infinitamente rigide rispetto all'insilato.
3. Il silo è cilindrico
4. L'input dell'accelerazione è costante
5. Il profilo dell'accelerazione lungo l'altezza è costante (nel seguito si trovano anche una versione con andamento lineare e un'altra con andamento parabolico-sezione 2, capitolo 3)
6. Il modello è tridimensionale.

In rosso sono cerchiare le approssimazioni ancora estremamente forti, mentre sono evidenziati in verde gli elementi aderenti alla realtà, quindi non problematici.

Ci apprestiamo ora a determinare il profilo delle pressioni indotte da un materiale granulare, sotto accelerazione orizzontale costante, di un elemento cilindrico infinitamente rigido.

1.2 STATO DELL'ARTE

1.2.1 Riferimenti Bibliografici

I testi di riferimento per il calcolo dei silos, allo stato attuale, sono:

- “*Silos, fundamentals of theory, behaviour and design*”, C.J. Brown, J. Nielsen, Taylor&Francis Group, London and New York;
- “*Circular Storage Tanks and Silos*”, A. Ghali, Taylor&Francis Group, London and New York;
- “*Structures and Granular Solids. From scientific principles to Engineering Application*”, J.F. Chen, J.Y. Oai, J.G. Teng, CRC Press.
- “*Scienza delle Costruzioni*”, Odone Belluzzi
- *Teoria e Tecnica delle Strutture*, Piero Pozzati

1.2.2 Quadro normativo

Per quanto riguarda l'aspetto normativo occorre riferirsi a:

- Decreto Ministeriale 14/01/2008: “Norme tecniche per le costruzioni”;
- Circolare 2/02/2009, n. 617 del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici;
- UNI EN 1991-4: Eurocodice 1. Azioni sulle strutture. Parte 4: Azioni su silos e serbatoi;
- UNI EN 1998-4: Eurocodice 8. Progettazione delle strutture per la resistenza sismica. Parte 4: Silos, serbatoi e condotte.

1.2.3 Formulazione Eurocodice

Prima di sviluppare ed esporre la teoria proposta risulta opportuno illustrare quanto è previsto dagli Eurocodici, ricordando che tali direttive assumono che la massa di cereale corrispondente a tutto il contenuto del silos meno il cono di base avente inclinazione pari all'angolo di attrito interno del cereale, venga equilibrata dalle spinte orizzontali fornite dalle pareti (supponendo che la forza sismica che nasce nel cono di base venga equilibrata alla base e pertanto non si scarichi sulle pareti).

Nell'ordine si riassume il calcolo in condizioni statiche e poi la valutazione degli effetti dell'azione sismica.

1.2.3.1 Condizioni Statiche

I carichi sulle pareti dei silos possono essere valutate in modo diverso in base alla snellezza del silos stesso, per tale motivo vengono classificati come segue:

- a. *silos snelli*: $2,0 \leq h_c / d_c$;
- b. *silos mediamente snelli*: $1,0 < h_c / d_c \leq 2,0$;
- c. *silos tozzi*: $0,4 < h_c / d_c \leq 1,0$;
- d. *silos molto tozzi*: $h_c / d_c \leq 0,4$.

dove:

- h_c : è la quota del pelo libero dell'insilato;
- d_c : è il diametro (o dimensione caratteristica) interno del silos.

1.2.3.2 Sili snelli

Con riferimento alla Figura 2.1 si possono calcolare i carichi agenti come segue:

$$p_{hf}(z) = \gamma \cdot K z_0 (1 - e^{-z/z_0})$$

$$p_{wf}(z) = \mu \cdot \gamma K z_0 (1 - e^{-z/z_0})$$

$$p_{vft}(z) = \gamma z_0 (1 - e^{-z/z_0})$$

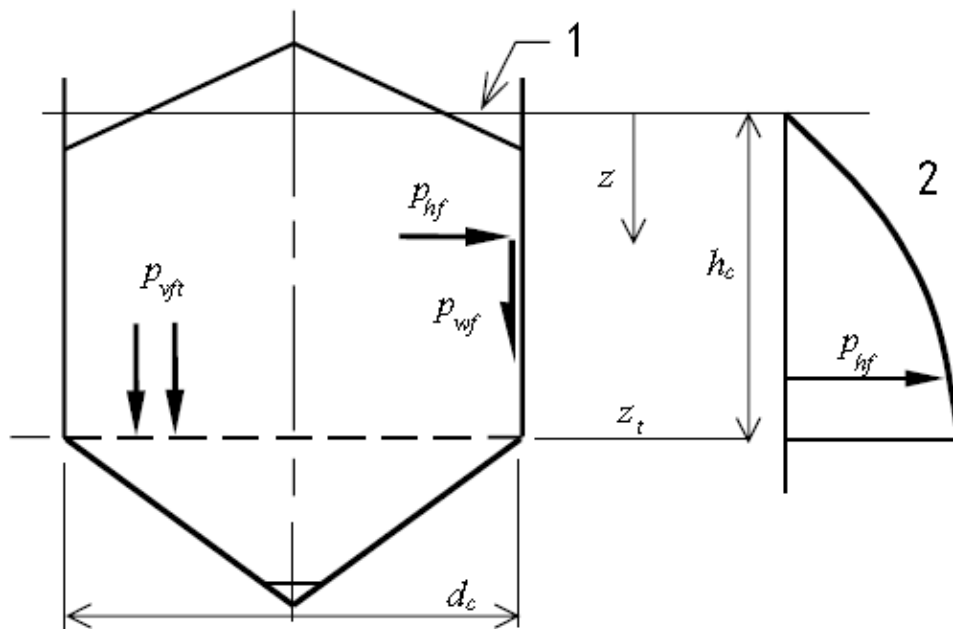


Figura 2.1 Carichi simmetrici dovuti al materiale insilato

dove:

$$z_0 = \frac{1}{K \mu} \frac{A}{U}$$

z_0 = profondità caratteristica;

A = area della sezione trasversale del silos;

U = perimetro interno della sezione trasversale del silos;

K = valore caratteristico del coefficiente di spinta orizzontale

$$K = a_K K_m = a_K \cdot 1.1 \cdot (1 - \sin \phi_{im})$$

μ = valore caratteristico del coefficiente di attrito per le pareti verticali.

Come si può notare l'Eurcodice si basa sulla teoria di Janssen e Koenen le cui ipotesi, come già notava Pozzati, sono confermate “quando il materiale è in quiete e la cella è snella (Pozzati, 1972)”.

Da qui la necessità di diversificare le formule in funzione della snellezza.

1.2.3.3 Silo mediamente snelli e tozzi

In questo caso le espressioni per la valutazione dei carichi assumono la forma:

$$p_{hf}(z) = \gamma \cdot K z_0 \left\{ \left[\left(\frac{z - h_0}{z_0 - h_0} \right) + 1 \right]^n \right\}$$

$$p_{wf}(z) = \mu \cdot p_{hf}(z)$$

dove:

- z_0 = profondità caratteristica;
- $n = -(1 + \tan \phi_r) \left(1 + \frac{h_0}{z_0} \right)$;
- $h_0 = \frac{r}{3} \tan \phi_r$.

dove:

- r = raggio del silo;
- ϕ_r = angolo di riposo

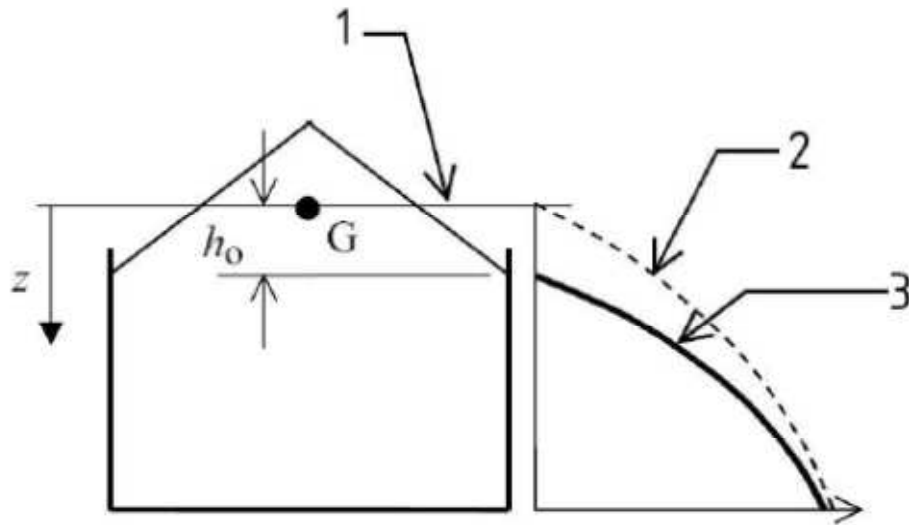


Figura 2.2 Andamento delle pressioni normali alla parete nei silos tozzi e mediamente snelli

Nella figura sono evidenziati rispettivamente:

- 1 superficie equivalente;
- 2 pressioni calcolate per silos snelli;
- 3 pressioni calcolate per silos tozzi.

1.2.3.4 Condizioni Sismiche

L'azione sismica può essere rappresentata tramite una pressione orizzontale normale agente sulle pareti.

1.2.3.4.1 Silos circolari

La sovrappressione può essere valutata come:

$$\Delta_{ph,s} = \Delta_{ph,s0} \cdot \cos \vartheta$$

dove:

- $\Delta_{ph,s0}$: la pressione di riferimento a distanza verticale x dal fondo piano
$$\Delta_{ph,s0} = \alpha(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x)$$
- ϑ : è l'angolo ($0^\circ \leq \vartheta \leq 360^\circ$) tra la linea radiale del punto di interesse sulla parete e la direzione della componente orizzontale dell'azione sismica;
- $\alpha(z)$: è il rapporto tra l'accelerazione di risposta del silos a distanza verticale z dalla superficie equivalente dei materiali insilati, e l'accelerazione di gravità;
- $r_s^* = \min\left(h_b, \frac{d_c}{2}\right)$;
- h_b : è la quota più alta raggiunta dal silos;
- d_c : è la dimensione interna del silos parallela alla componente orizzontale dell'azione sismica.
- x : distanza verticale dal fondo piano o dall'apice di una tramoggia conica o piramidale.

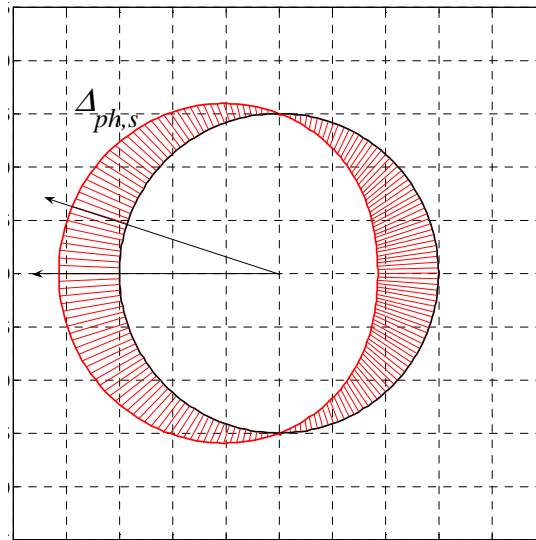


Figura 2.3 Andamento delle sovrappressioni normali dovute all'azione sismica

Il taglio totale alla base e il momento flettente totale alla base (alla fondazione del silos) possono essere valutati, tramite integrazione delle pressioni, come segue:

$$T = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \left(H - \frac{R}{6} \right)$$

$$M = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \left(H^2 - \frac{R^2}{27} \right)$$

L'Eurocodice prevede, altresì, un calcolo approssimato per la valutazione dell'azione sismica facendo le seguenti posizioni:

- si assume che il particolato contenuto si muova assieme alla struttura del silos;
- modellare il particolato con l'effettiva massa posta al centro di gravità e valutare la sua inerzia rotazionale rispetto ad esso.

Si può inoltre assumere che il silos abbia una massa effettiva uguale all' 80% della massa totale.

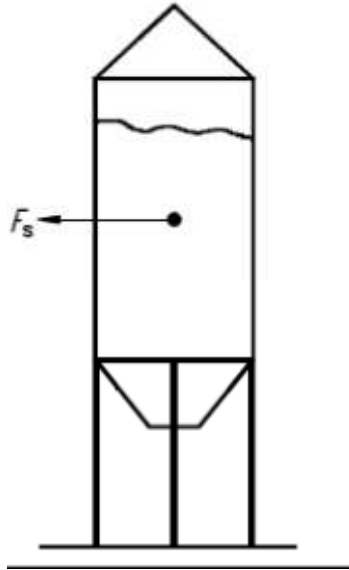


Figura 2.4 Schematizzazione approssimata dell'azione del sisma

In questo caso il taglio e il momento flettente alla base possono valutarsi rispettivamente come:

$$T = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot H) \cdot 0.8$$

$$M = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot H) \cdot 0.8 \cdot \frac{H}{2}$$

1.2.3.4.2 Silos rettangolari

Nel caso di silos rettangolari occorre distinguere tra:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{per le pareti sottovento: } \Delta_{ph,s} = \Delta_{ph,s0} \\ \text{per le pareti sopravento: } \Delta_{ph,s} = -\Delta_{ph,s0} \\ \text{per le pareti parallele: } \Delta_{ph,s} = 0 \end{array} \right.$$

Integrando le pressioni si arriva ad ottenere, analogamente al caso di silos circolare:

$$T = 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot A \cdot B \cdot \left(H - \frac{A}{6} \right)$$
$$M = 2 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot A \cdot B \cdot \left(H^2 - \frac{A^2}{27} \right)$$

dove:

- A: mezza larghezza della base rettangolare del silos;
- B: mezza lunghezza della base rettangolare del silos.

Utilizzando la metodologia semplificata si ottiene:

$$T = 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (A \cdot B \cdot H) \cdot 0.8$$
$$M = 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (A \cdot B \cdot H) \cdot 0.8 \cdot \frac{H}{2}$$

Come si può osservare, sia con la trattazione più accurata che con quella semplificata, sia nel caso di silos circolare che rettangolare, le azioni alla base non coinvolgono la totalità del volume insilato. Questo fatto rispecchia l'ipotesi che un cono alla base scarichi direttamente sul fondo senza poggiarsi alle pareti.

2 TEORIA

2.1 PREMESSA

2.1.1 Generalità

Partiamo dalla teoria di Janssen e Koenen del 1895, presentata anche sul testo di *Tecnica delle Costruzioni* di Pozzati (1972). Dall'equilibrio alla traslazione verticale di una porzione di cereale a quota generica z (vedi fig. 3.1), emerge che le pressioni verticali alla base di tale porzione di cereale sono distribuite uniformemente su tutta la superficie.

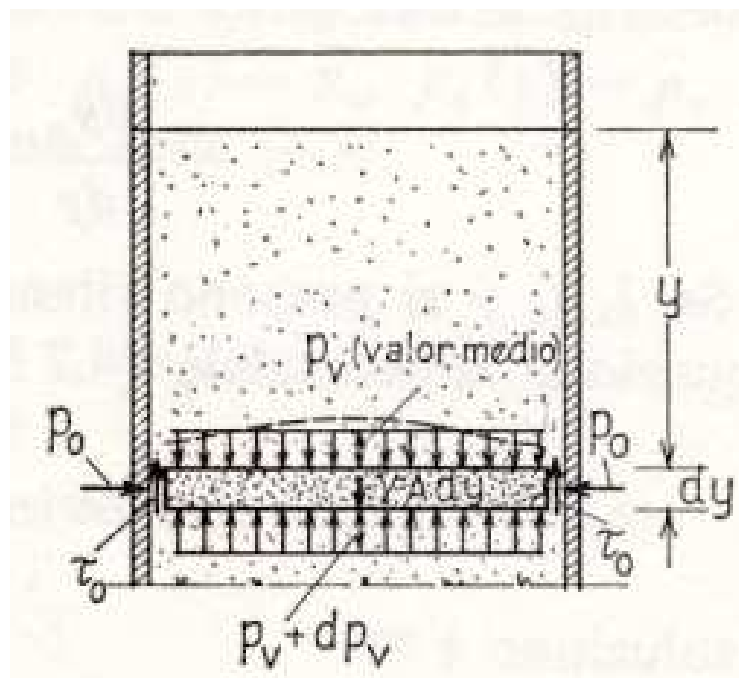


Figura 1 Distribuzione uniforme della pressione verticale sulla superficie della porzione di cereale alla generica quota z .

E' ipotizzabile secondo Pozzati che, in realtà, le pressioni verticali vadano via via decrescendo dal centro della porzione di cereale sino ad annullarsi in corrispondenza del cereale a contatto con le pareti del silos. Una schematizzazione limite (che sarà approfondita in seguito) è quella che vede il cereale suddiviso in due porzioni "equivalenti" di (i) grani che si appoggiano completamente sugli strati sottostanti (porzione centrale) e (ii) grani completamente sostenuti dalla parete (quindi caratterizzati da una pressione verticale tra grano e grano nulla).

Si considera un silo di raggio R , riempito di materiale granulare fino ad altezza H (rappresentato in figura 3.2). La superficie libera dei grani è assunta orizzontale. Si studia un sistema ideale in condizioni ideali, con l'obiettivo di ottenere una stima approssimata delle pressioni che il materiale granulare produce sulle pareti del silo a seguito di un'accelerazione sismica.

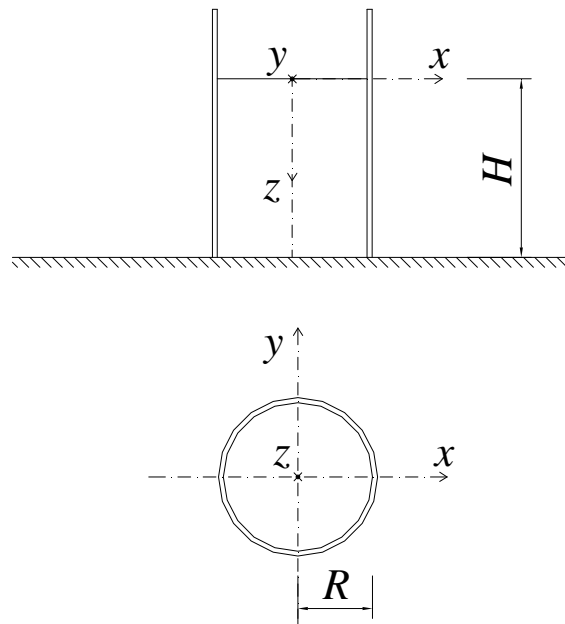


Figura 2: Geometria di un silo a fondo piatto con materiale granulare e sistema di riferimento adottato. (a) vista verticale; (b) pianta.

2.1.2 Sistema Ideale

Si considera il seguente sistema ideale, rappresentativo di un silo a fondo piatto riempito con materiale granulare:

1. le pareti del silo sono assunte infinitamente rigide rispetto al grano insilato;
2. il materiale granulare è assunto incomprimibile e compatto, senza vuoti, come se fosse composto da sfere infinitamente rigide e resistenti, come rappresentato in Fig. 3.

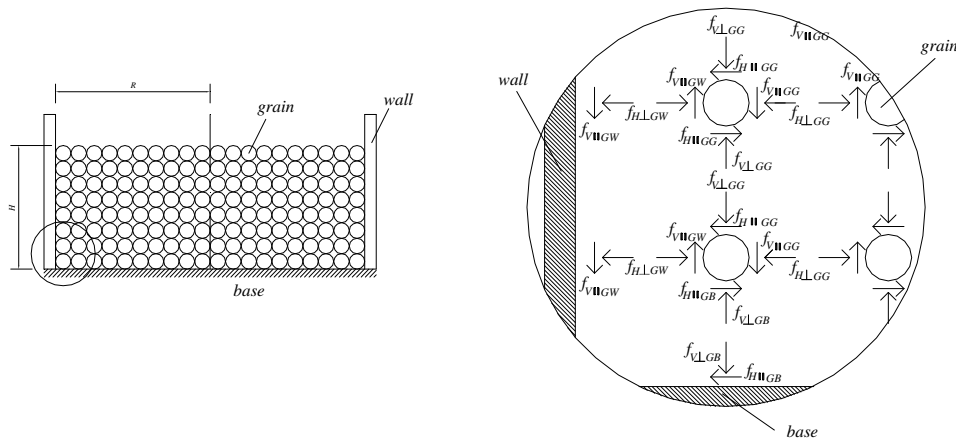


Figura 3: (sinistra) Sistema ideale. (destra) Forze mutue scambiate tra un grano e l'altro, tra un grano e la parete del silo e tra il grano e la base del silo.

E' ben noto che i grani generano pressioni sulle pareti del silo [Pozzati & Ceccoli 1972]. La Fig. 3 rappresenta le forze mutue della schematica idealizzazione adottata:

- $f_{v,\perp,GG}$ è la forza verticale normale, perpendicolare alla superficie del grano, scambiata tra un singolo grano e l'altro;
- $f_{h,\perp,GG}$ è la forza orizzontale normale, perpendicolare alla superficie del grano, scambiata tra un singolo grano e l'altro;

- $f_{H,\parallel,GG}$ è la forza orizzontale tangenziale, parallela alla superficie del grano, scambiata tra un singolo grano e l'altro;
- $f_{V,\parallel,GG}$ è la forza verticale tangenziale, parallela alla superficie del grano, scambiata tra un singolo grano e l'altro;
- $f_{H,\perp,GW}$ è la forza orizzontale normale, perpendicolare alla parete e alla superficie del grano, scambiata tra un singolo grano e la parete del silo;
- $f_{V,\parallel,GW}$ è la forza verticale tangenziale, parallela alla parete e alla superficie del grano, scambiata tra un singolo grano e la parete del silo;
- $f_{H,\parallel,GB}$ è la forza orizzontale tangenziale, parallela alla superficie del grano e alla base, scambiata tra il grano e la base del silo;
- $f_{V,\perp,GB}$ è la forza verticale normale, perpendicolare alla superficie del grano e alla base, scambiata tra il singolo grano e la base.

Si noti che per semplicità di notazione e di rappresentazione grafica, in Fig. 3 le forze orizzontali tangenziali, che hanno direzione perpendicolare al foglio, non sono riportate, ma sono presenti e vengono considerate nell'analisi (come si vedrà successivamente nel capitolo 1- caso statico-).

Si assume che:

Le forze normali ($f_{V,\perp,GG}$, $f_{H,\perp,GG}$, $f_{H,\perp,GW}$ e $f_{V,\perp,GB}$) non hanno limitazioni;

Le forze tangenziali sono limitate dalle leggi di attrito:

$$f_{H,\parallel,GG} \leq \mu_{GG} \cdot f_{V,\perp,GG}$$

$$f_{V,\parallel,GG} \leq \mu_{GG} \cdot f_{H,\perp,GG}$$

$$f_{H,\parallel,GB} \leq \mu_{GB} \cdot f_{V,\perp,GB}$$

$$f_{V,\parallel,GW} \leq \mu_{GW} \cdot f_{H,\perp,GW}$$

dove μ_{GG} , μ_{GB} e μ_{GW} sono i coefficienti di attrito rispettivamente grano-grano, grano-base, grano-parete.

Si noti che implicitamente l'Eurocodice assume $f_{H,\parallel,GG} = 0$, ciò implica che, sotto input sismico, ogni fascia di grani scivola scorrendo sulla sottostante, così che l'equilibrio è assicurato dalla reazione laterale delle pareti che prendono tutto il peso dei grani.

2.1.2.1 Passaggio dal caso discreto al continuo

Per una valutazione complessiva delle forze globali che l'insilato produce sulle pareti del silo, il materiale granulare è trattato come un insieme di strati sovrapposti, di altezza infinitesima dz (passaggio dal caso discreto dei singoli grani al continuo del materiale granulare); le forze concentrate descritte sopra divengono pressioni distribuite normali p e sforzi tangenziali τ :

- $f_{V,\perp,GG}$ diviene $p_{v,GG}(z)$;
- $f_{H,\perp,GG}$ diviene $p_{h,GG}(z)$;
- $f_{H,\parallel,GG}$ diviene $\tau_{h,GG}(z)$;
- $f_{V,\parallel,GG}$ diviene $\tau_{v,GG}(z)$;
- $f_{H,\perp,GW}$ diviene $p_{h,GW}(z)$;
- $f_{V,\parallel,GW}$ diviene $\tau_{v,GW}(z)$;
- $f_{H,\parallel,GB}$ diviene $\tau_{h,GB}(z)$;
- $f_{V,\perp,GB}$ diviene $p_{v,GB}(z)$.

Questa notazione è definita in Fig.4:

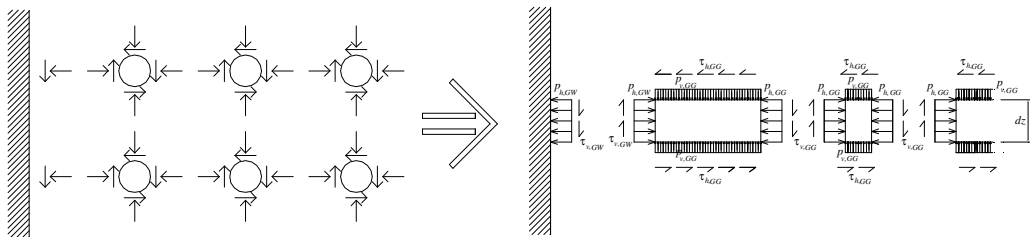


Figura 4: Rappresentazione delle forze mutue scambiate tra un grano e l'altro, tra i grani e la parete del silo e tra i grani e la base del silo.

Secondo Janssen [1895] e Koenen [1896], per l'equilibrio alla traslazione verticale di uno strato di grani alla generica quota z , le pressioni verticali, $p_{v,GG}(z)$, alla base di questa porzione sono uniformemente distribuite sull'intera superficie.

Comunque, è ragionevole assumere che le pressioni tendano a diminuire dal nucleo della porzione di grani spostandosi verso le pareti, dove il loro valore è zero.

La teoria proposta si avvale di tre assunzioni nel piano verticale e di una quarta assunzione corrispondente in pianta.

Ecco la sezione longitudinale in un formato esploso: a sinistra la parete e poi due elementi generici di insilato.

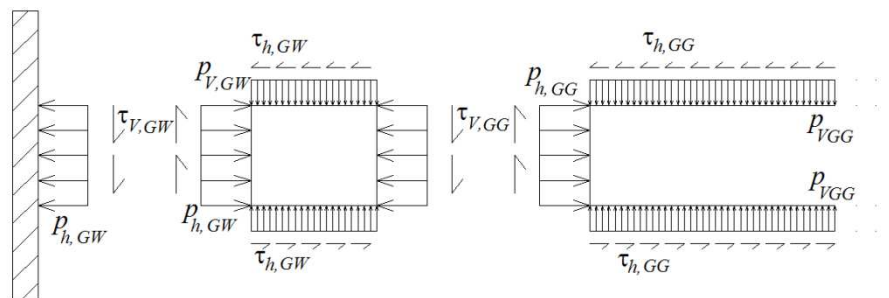


Figura 5: Rappresentazione delle forze mutue scambiate tra elementi dell'insilato.

Le tre assunzioni sono:

1. $\tau_{h,GW} = 0$
 2. $p_{v,GW} = 0$
 3. $\tau_{v,GG} = 0$
- (1)

Ecco quindi come diviene la rappresentazione dell'insilato senza le pressioni nulle:

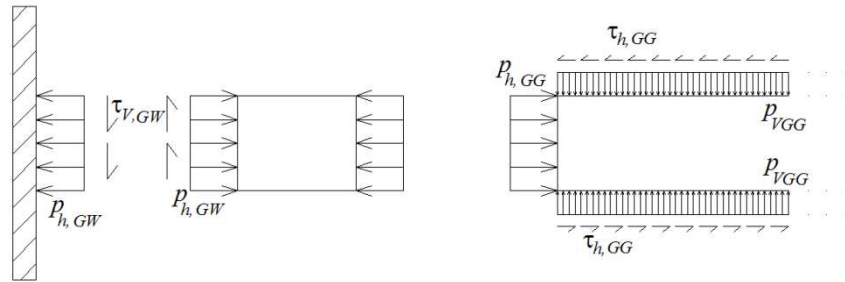


Figura 6: Rappresentazione delle forze mutue scambiate tra elementi dell'insilato, con le tre assunzioni.

L'assunzione di scorrimento si traduce in 4 specifiche ipotesi sulle tensioni granulari: 3 ipotesi descrivibili in una sezione longitudinale e una evidente in pianta. Le 4 assunzioni conducono a una divisione o differenziazione dell'insilato in due porzioni.

2.1.2.2 Due Porzioni

Dunque porre queste tre condizioni equivale a ipotizzare che esista una porzione di grani aggrappati alla parete che ammette però scorrimenti verticali al confine con gli strati interni di materiale insilato e che sia permesso lo scivolamento orizzontale tra uno strato e l'altro nella zona prossima alla parete. Questa particolare porzione, che interagisce prevalentemente con le pareti, e solo radialmente con l'insilato ($p_{h,GG} \neq 0$), viene qui denominata "Elemento E" ed evidenziata in rosso. L'insilato risulta quindi costituito da un toro o anello esterno, denominato elemento E, e da un "disco interno", denominato disco D ed

evidenziato in blu. Mentre i grani dell'elemento E si aggrappano alle pareti del silo, i grani, appartenenti al disco D, gravano sui grani sottostanti fino alla base.

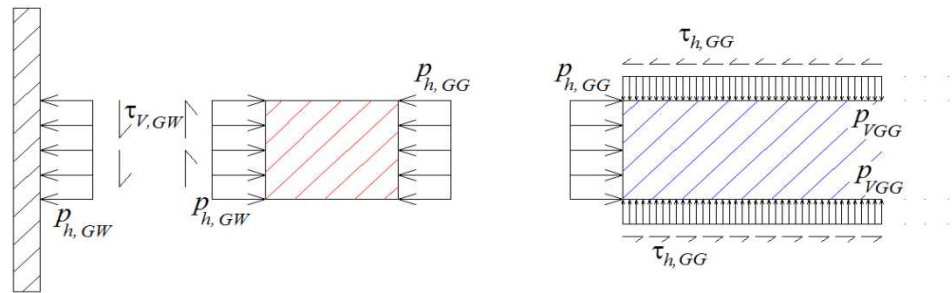


Figura 7: Rappresentazione dell'elemento E in rosso, e del disco D in blu.

La dimensione principale dell'elemento E è costituita dal suo spessore "s"; s rappresenta quanto l'elemento E si addentra nell'insilato, quindi quanto è corposa la parte di grani che grava sulle pareti del silo. Questa porzione aumenta dal pelo libero al fondo del silo, infatti s aumenta verso la base del silo. Lo spessore s è dunque l'incognita principale del problema.

In pianta l'assunzione, corrispondente alle prime tre precedenti, è quella di scorrimento tangenziale libero tra E e D e si traduce con l'assunzione:

$$\tau_{t,GG} = 0 \quad (2)$$

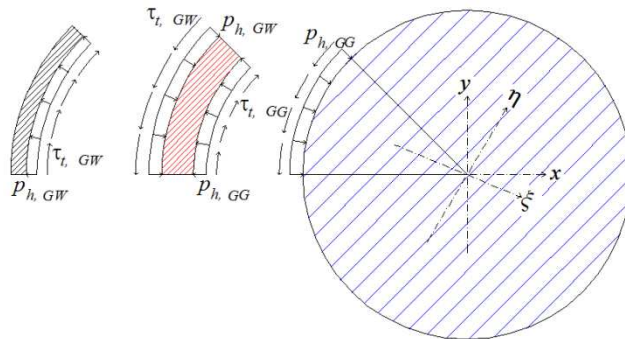


Figura 8: Rappresentazione in pianta: elemento E (rosso), disco D (blu).

Eliminando i vettori rappresentativi della tensione tangenziale la rappresentazione diviene:

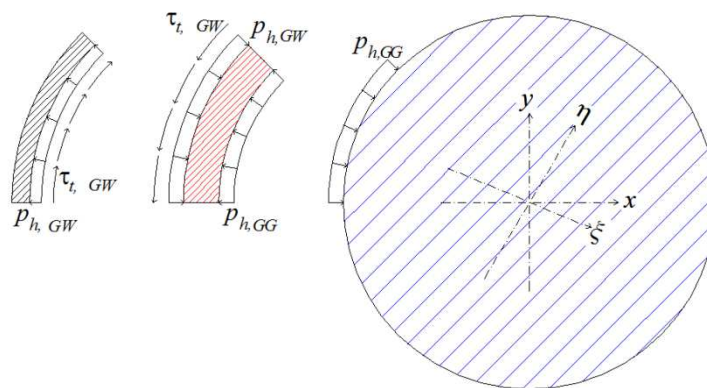


Figura 9: Rappresentazione dell'elemento E in rosso, e del disco D in blu; con l'assunzione di scorrimento tangenziale.

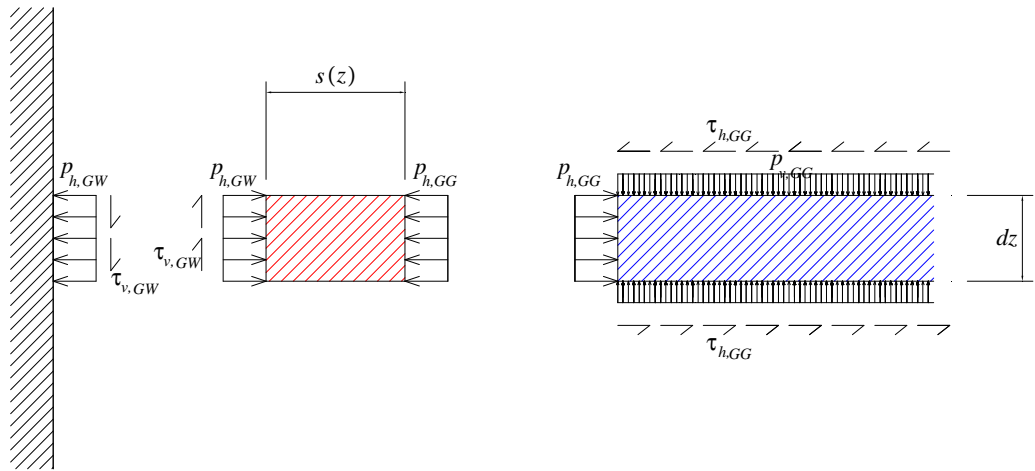


Figura 10: Evidenziato spessore s

Quindi, riferendosi a uno strato orizzontale di grani caratterizzato da un'altezza dz e posto alla generica distanza z misurata dalla superficie libera, esso può essere diviso in due porzioni:

- un “disco interno” con un diametro pari a $2r$ (corrispondente ai grani gravanti sullo strato sottostante), evidenziato in Fig. 10 con un tratteggio blu;
- un “toro esterno” con uno spessore incognito s (corrispondente al grano sostenuto dalla parete), evidenziato Fig. 10 con un tratteggio rosso.

Le dimensioni del disco interno e del toro esterno variano con la distanza z misurata dalla superficie libera dei grani, e allo stesso modo anche lo spessore s del toro esterno varia con z .

Un generico disco interno D è caratterizzato da altezza dz e raggio $r(z) = R - s(z)$ ed è posto a profondità z misurata dalla superficie libera dei grani, precisamente all'altezza $h = H - z$ dal suolo.

Il toro esterno è individuato dall'angolo centrale θ misurato in senso orario dal semiasse negativo di x , come indicato in Figura 3.11 (b). È inoltre definito un sistema di coordinate ausiliarie (O, ξ, η) sul piano orizzontale, dove ξ rappresenta

la direzione radiale (ortogonale alla superficie laterale del silo) e η rappresenta la direzione perpendicolare a ξ , come indicato in Figure 11 (b).

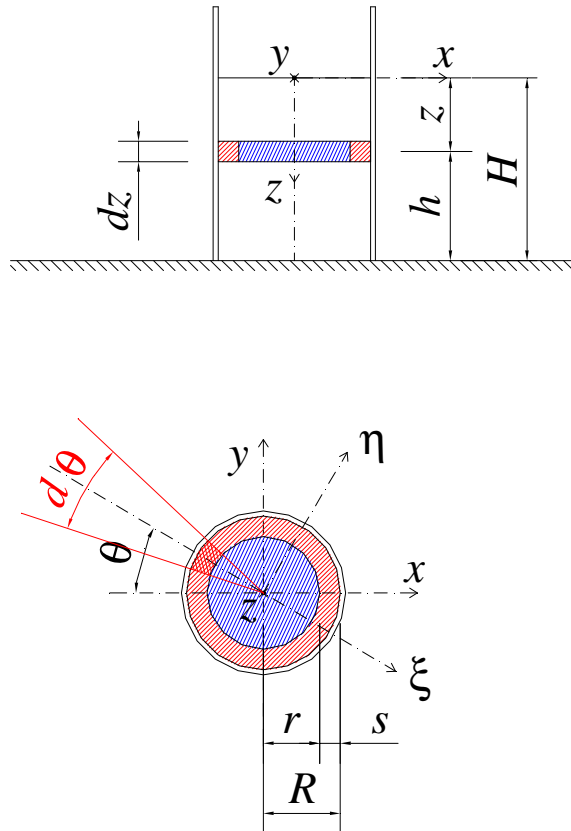


Figura 11: Toro esterno (tratteggiato di rosso) e disco interno (tratteggiato di blu) del grano.

Ancora in pianta si possono individuare i due settori speculari angolo al centro θ , posti sullo stesso diametro: anch'essi costituiscono una rappresentazione dell'elemento E.

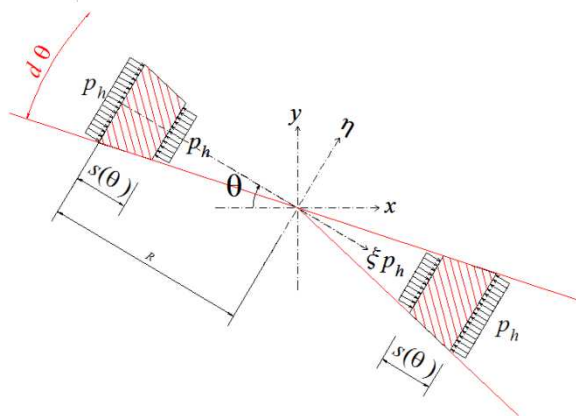


Figura 12: Elemento E: due settori circolari in pianta.

Dalla sezione verticale si vede che l'elemento E è caratterizzato da un'altezza dz e da uno spessore $s(z)$.

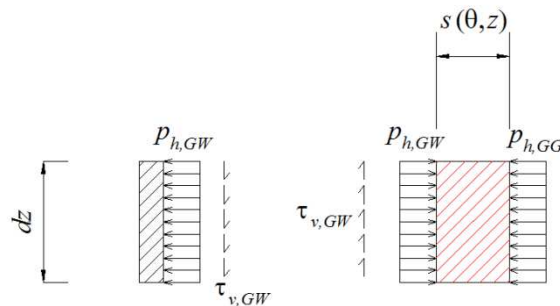


Figura 13: Elemento E: sezione verticale.

Nelle equazioni di equilibrio che seguiranno sarà evidente come il Disco D sarà sempre integrato su 2π , mentre il toro E sarà sempre valutato in $d\theta$, quindi si analizzeranno dischi D completi su tutta la pianta ed elementi E parziali di ampiezza $d\theta$.

Ora si possono esprimere le geometrie del disco D e dell'elemento E:

$$A_D = \pi \cdot (R - s)^2$$

$$V_D = A_D \cdot dz = \pi \cdot (R - s)^2 \cdot dz$$

$$A_E = R \cdot d\vartheta \cdot dz \quad (3)$$

$$V_E = \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\vartheta \cdot dz \cdot s$$

2.1.3 Tre casi

La descrizione, appena vista, di un sistema ideale è studiata in tre diverse condizioni ideali, una statica e due dinamiche: primo caso statico, secondo caso con presenza della sola accelerazione verticale, terzo caso con presenza di entrambe le accelerazioni (verticale e orizzontale). Inoltre per quanto riguarda l'ultimo caso, il sisma è simulato con accelerazione orizzontale variabile lungo l'altezza secondo tre ulteriori sottocasi. Nel primo sottocaso l'accelerazione è costante in altezza; nel secondo è lineare, nel terzo è parabolica. Poiché il silo è assunto infinitamente rigido, non è considerata nessuna amplificazione così lo spettro del sisma coincide con l'accelerazione al suolo. Per questo motivo l'accelerazione sarà indicata con il pedice g di "ground" a_{gh} e a_{gv} . Inoltre è bene specificare che l'accelerazione che si condirea è normalizza, cioè divisa per l'accelrazione di gravità, quindi essa è un numero puro.

Riassumendo: si considerano tre casi ideali:

0. Statico
1. Accelerazione verticale
2. Accelerazione verticale e orizzontale

In Figura 14 sono mostrati i 3 casi ideali considerati.

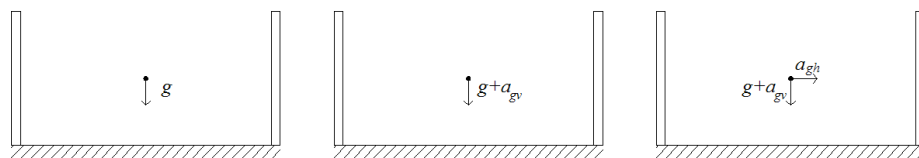


Figura 14: Tre casi: Primo caso: Statico (0), secondo caso: Dinamico con sola accelerazione Verticale (1), terzo caso: Dinamico con accelerazione verticale e Orizzontale (2).

Inoltre l'ultimo caso, (2) con accelerazione orizzontale, si suddivide in altri tre sottocasi: con accelerazione orizzontale variabile lungo la quota z in modo:

- Costante
- Lineare
- Parabolico

2.1.4 Obiettivi progettuali del lavoro

L'obiettivo dei seguenti paragrafi è determinare il valore dello spessore del toro esterno e le pressioni sulle pareti per ciascuna delle tre condizioni ideali (statica 0, con sola accelerazione verticale 1, con entrambe le accelerazioni orizzontale e verticale 2). Si usano semplici equazioni di equilibrio, allo scopo di definire quantitativamente la porzione dei grani che grava sullo strato inferiore e quella che invece spinge sulle pareti.

2.2 SVILUPPO ANALITICO: CASO STATICO

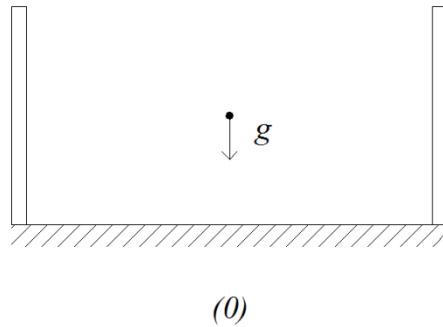


Figura 1. Caso Statico

Le componenti di tensione saranno indicate pedice 0.

In riferimento alle Figure 2 and 3, le quantità incognite del problema sono:

1. $p_{v0,GG}(z)$ = pressione verticale agente sul disco D ;
2. $p_{h0,GG}(z)$ = pressione radiale scambiata tra disco D ed elemento E ;
3. $\tau_{h0,GG}$ = sforzo tangenziale orizzontale sulla superficie del disco D ;
4. $\tau_{v0,GW}(z)$ = sforzo tangenziale verticale agente sulla parete del silo;
5. $s_0(z)$ = spessore dell'elemento E ;
6. $p_{h0,GW}(z)$ = pressione radiale scambiata tra elemento E e parete;
7. $\tau_{t0,GW}$ = sforzo tangenziale tra grani e parete agente sulla parete del silo.

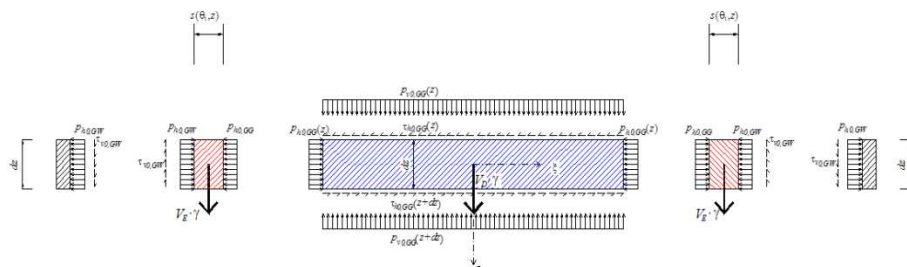


Figura 2: Caso Statico: Figura 7: Sezione longitudinale esplosa: Disco interno

(tratteggio blu), elemento E (rosso) e parete (tratteggio nero); sono indicati i vettori delle pressioni, i vettori (con maggior spessore) del peso proprio

Equazioni a disposizione:

1. Equilibrio alla traslazione in direzione verticale di D;
2. Rapporto tra pressione orizzontale e verticale dei grani;
3. Equilibrio alla traslazione in direzione radiale di D;
4. Legge d'attrito al confine tra elemento E e pareti del silo;
5. Equilibrio alla traslazione in direzione radiale di E;
6. Equilibrio alla traslazione in direzione verticale di E;
7. Equilibrio alla traslazione in direzione tangenziale di E.

Le Figura 2 mostra le azioni mutue che il disco D, l'elemento E e le pareti del silo si scambiano. Deve essere notato che, oltre alle sei pressioni elencate sopra, scambiate tra le porzioni dei grani e tra grano e pareti, esistono anche forze verticali indicate con vettori più spessi in Figura 2 e riportate qui di seguito:

- $\gamma \cdot V_D =$ peso proprio del disco D, applicato nel baricentro e agente in direzione z dovuto all'effetto dell'accelerazione di gravità (γ è il peso specifico del materiale granulare contenuto nel silo);
- $\gamma \cdot V_E =$ peso proprio dell'elemento E, applicato nel baricentro e agente in direzione z, dovuto all'effetto dell'accelerazione di gravità (γ è il peso specifico del materiale granulare);

2.2.1 Equilibrio alla traslazione verticale (disco D)

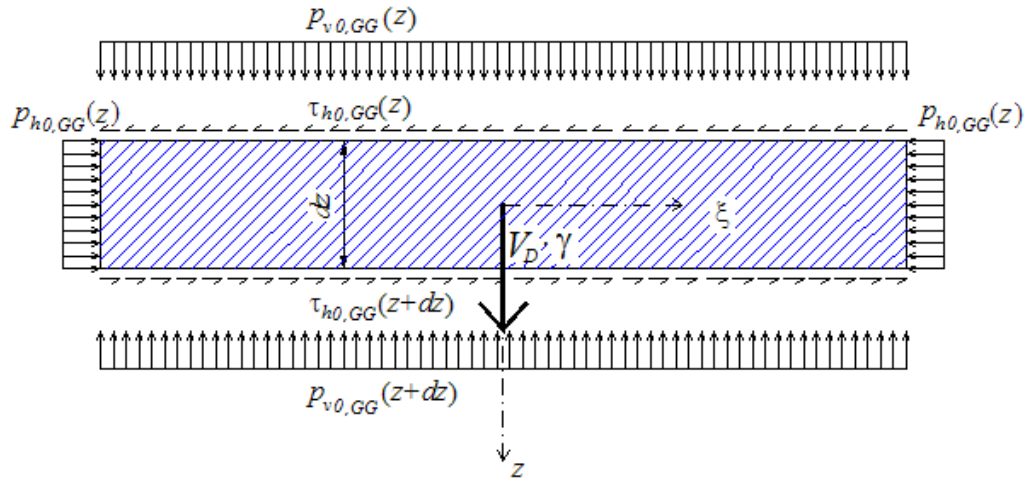


Figura 3: Forze verticali e forze orizzontali agenti sul disco D.

Dall'equilibrio alla traslazione verticale del disco interno D alla quota z , si ottiene:

$$p_{v0}(z) \cdot A_D + \gamma \cdot V_D = p_{v0}(z + dz) \cdot A_D \quad (1)$$

Essendo:

$$V_D = A_D \cdot dz \quad (2)$$

si ottiene:

$$dp_{v0,GG} = p_{v0,GG}(z + dz) - p_{v0,GG}(z)$$

che, integrata, fornisce:

$$p_{v0,GG} = \gamma \cdot z + c$$

dove C rappresenta una costante di integrazione. Imponendo la condizione che, in sommità (alla quota del pelo libero del materiale), la pressione verticale sia nulla:

$$p_{v0,GG}(z=0) = 0$$

$$p_{v0,GG}(z=0) + c = 0$$

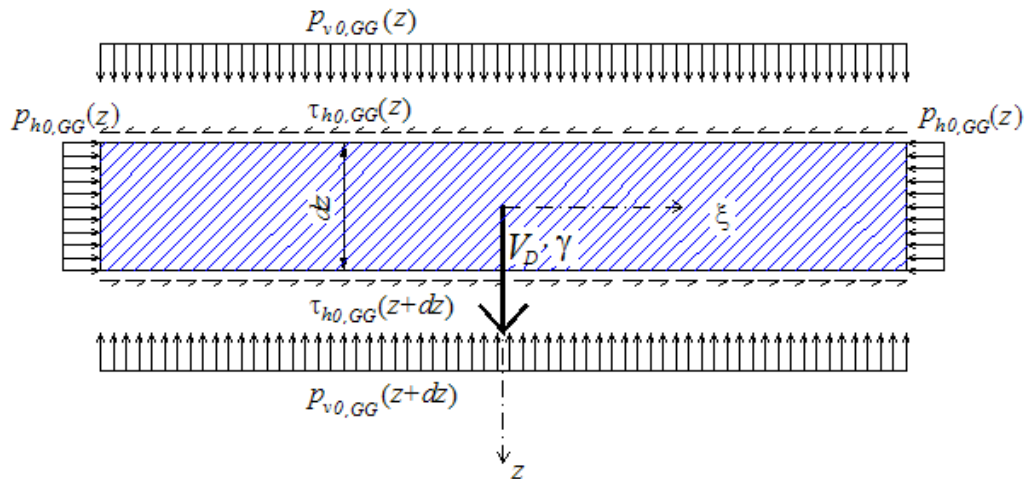
$$c = 0$$

si ottiene il valore della costante di integrazione C :

Pertanto, la pressione verticale è proporzionale alla quota z misurata a partire dal pelo libero del materiale e vale:

$$p_{v0,GG} = \gamma \cdot z \quad (3)$$

2.2.2 Rapporto tra pressione verticale e orizzontale (D)



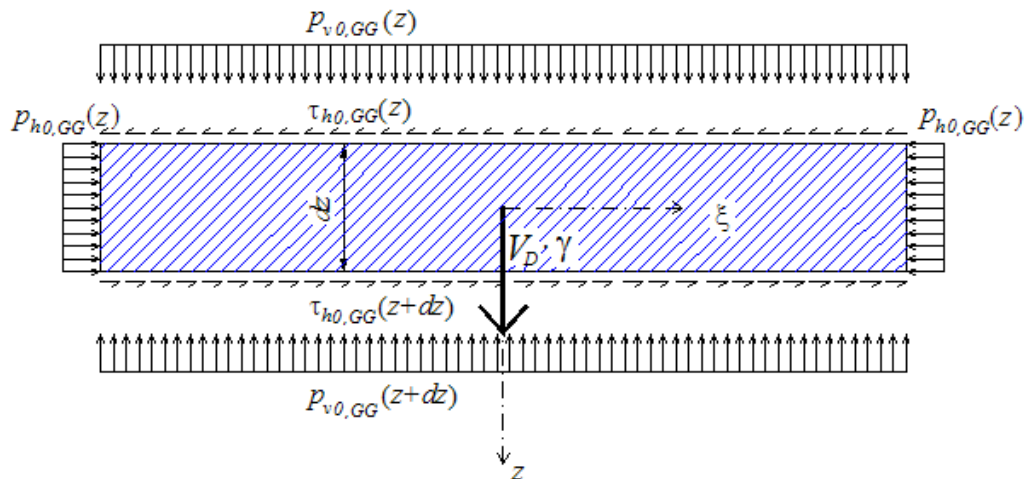
Se λ è il rapporto tra la pressione verticale e orizzontale del materiale granulare, vale questa relazione:

$$p_{h0,GG}(z) = \lambda \cdot p_{v0,GG}(z) \quad (4)$$

inserendovi l'eq. 7, si ottiene:

$$p_{h0,GG}(z) = \lambda \cdot \gamma \cdot z \quad (5)$$

2.2.3 Equilibrio alla traslazione orizzontale (D)



Le azioni orizzontali esterne sono nulle: non ci sono forze inerziali, inoltre eseguendo l'equilibrio al pelo libero, dove le $\tau_{h0,DD}(z=0)=0$, per equilibrio anche le $\tau_{h0,DD}(z=0+dz)=\tau_{h0,DD}(z=0)=0$; quindi, proseguendo per ogni dz fino a $z=H$, si ha:

$$\tau_{ho,GG} = 0 \quad (6)$$

Si può osservare che il valore delle tensioni tangenziali orizzontali è un valore medio: si considera infatti uniforme la distribuzione di tali tensioni sulla superficie del generico disco D.

2.2.4 Legge d'attrito (elemento E)

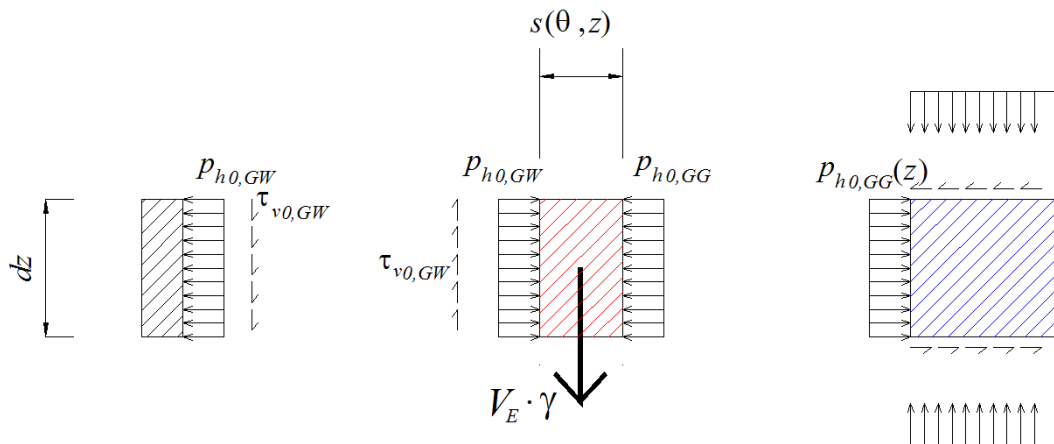


Figura 4: Particolare di una sezione longitudinale esplosa: tensioni verticali e radiali (orizzontali) sull'elemento E, posto tra il disco D e la parete.

Legge d'attrito al confine tra elemento E e parete

Se μ_{GW} è il coefficiente d'attrito tra la superficie grano-parete (G-W sta per grain-wall), vale la seguente relazione e tra tensione tangenziale lungo la superficie della parete e pressione radiale perpendicolare alla superficie di contatto tra elemento E di materiale granulare e parete del silo

$$\tau_{v0,GW}(z) = \mu_{GW} \cdot p_{h0,GW}(z) \quad (7)$$

Il risultato rimane per ora insospeso, poiché non si conosce ancora $p_{h0,GW}$; questo risultato sarà completato nel prossimo paragrafo.

2.2.5 Equilibrio alla traslazione verticale e radiale (E)

I due equilibri alla traslazione, verticale e orizzontale, dell'elemento E sono accoppiati nel seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \cdot V_E = \tau_{v0,GW} \cdot A_E \\ p_{h0,GG} \cdot A_E = p_{h0,GW} \cdot A_E \end{array} \right. \quad (8)$$

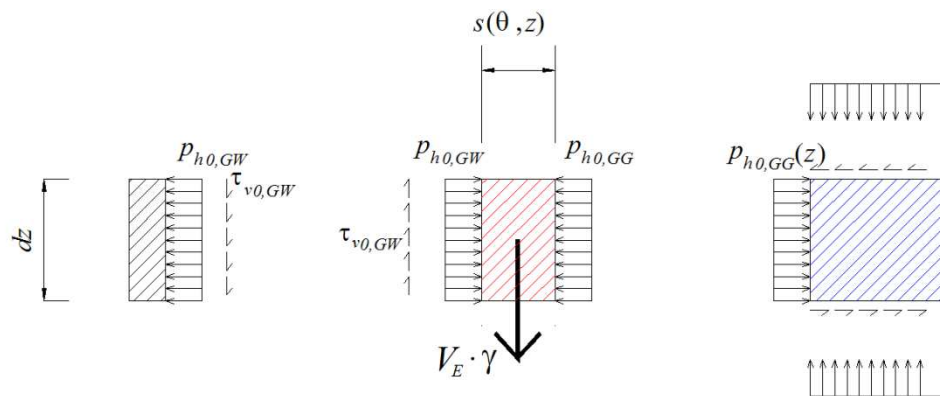


Figura 4: Particolare di una sezione longitudinale esplosa: tensioni verticali e radiali (orizzontali) sull'elemento E, posto tra il disco D e la parete.

Dove $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$ è l'area della superficie laterale esterna dell'elemento E; essa compare sia nell'equilibrio verticale, in quanto è la superficie che compete alle tensioni tangenziali verticali, sia nell'equilibrio radiale in entrambi i membri dell'equazione. L'equilibrio radiale presenta un'approssimazione, poiché la superficie relativa alla pressione $p_{h0,GG}$ non è la stessa di $p_{h0,GW}$. Se per $p_{h0,GW}$ è corretto usare A_E , per $p_{h0,GG}$ si dovrebbe usare $\bar{A}_E = (R-s) \cdot d\theta \cdot dz$. In questa analisi si mantiene la formulazione approssimata perché essa risulterà dare

risultati di più maneggevoli. Nel capitolo successivo sarà approfondita invece la versione precisa, dove le due aree sono distinte.

$$V_E = s \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \text{ è il volume dell'elemento E.}$$

Così l'Eq. (41) può essere riscritta come segue:

$$\begin{cases} \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) = \tau_{v0,GW} \cdot R \\ p_{h0,GW} = p_{h0,GG} = \lambda \cdot p_{v0,GG} \end{cases}$$

Sostituendo l'Eq. (5) nella seconda Eq. del sistema si arriva a:

$$\begin{cases} \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) = \mu_{GW} \cdot p_{h0,GW} \cdot R \\ p_{h0,GW} = \lambda \cdot p_{v0,GG} = \lambda \cdot \gamma \cdot z \end{cases}$$

$$p_{h0,GW}(z) = \lambda \cdot p_{v0,GG}(z) = \lambda \cdot \gamma \cdot z \quad (9)$$

Nell'equilibrio verticale le incognite sono s ; cioè lo spessore della porzione di grani che è sostenuta completamente dalla parete del silo, e la tensione tangenziale verticale tra grano e parete. Questa ultima incognita si trova immediatamente applicando la legge d'attrito (vedi equazione 7).

$$\tau_{v0,GW}(z) = \mu_{GW} \cdot p_{h0,GW}(z) = \mu_{GW} \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot z \quad (10)$$

Per quanto riguarda s , si riprende la prima equazione del sistema (eq. verticale) quindi si ha:

$$\gamma \cdot s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) = R \cdot \mu_{GW} \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot z$$

Si semplifica γ e si ottiene la seguente espressione quadratica:

$$s \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right) = \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot z$$

Esplicitando s e risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$\frac{s^2}{2R} - s + \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot z = 0$$

$$s = R \pm R \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{R} \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot z}$$

La radice con il segno + all'interno non ha significato fisico, quindi la si può escludere: infatti s non può superare R in quanto l'elemento E è contenuto nel raggio del silo.

$$s(z) = R - R \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{R} \cdot \mu_{GW} \cdot \lambda \cdot z} \quad (11)$$

Si può scrivere anche nella forma:

$$s = R - R \cdot \sqrt{1 - \tau_{v0-GW} \cdot \frac{2}{R \cdot \gamma}}$$

2.2.6 Equilibrio alla traslazione tangenziale (E)

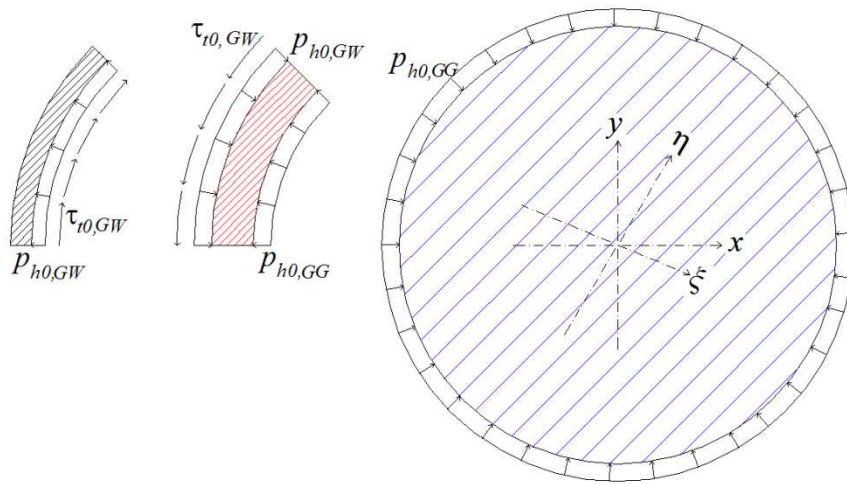


Figura 5 Pianta esplosa caso 0: tensioni tangenziali tra elemento E e parete.

$$\tau_{t0,GW} = 0$$

(12)

Poiché sono assenti azioni con componenti tangenziali.

2.2.7 Versione non approssimata Caso 0

Nell'equilibrio radiale è stato commentato il fatto che si sia commessa un'approssimazione sull'area A_E sulla faccia interna all'elemento E, dove agiscono le $p_{h0,GG}$. Per completezza vengono ora inseriti anche i risultati più precisi, con la valutazione esatta dell'area in questione. I risultati diversi sono le tre incognite legate nel sistema e nella legge d'attrito, cioè: s_0 , $p_{h0,GW}$, $\tau_{v0,GW}$.

Equilibrio radiale dell'elemento E:

$$p_{h0,GG} \cdot \bar{A}_E = p_{h0,GW} \cdot A_E$$

Dove:

$$\bar{A}_E = (R - s) \cdot d\theta \cdot dz$$

$$A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$$

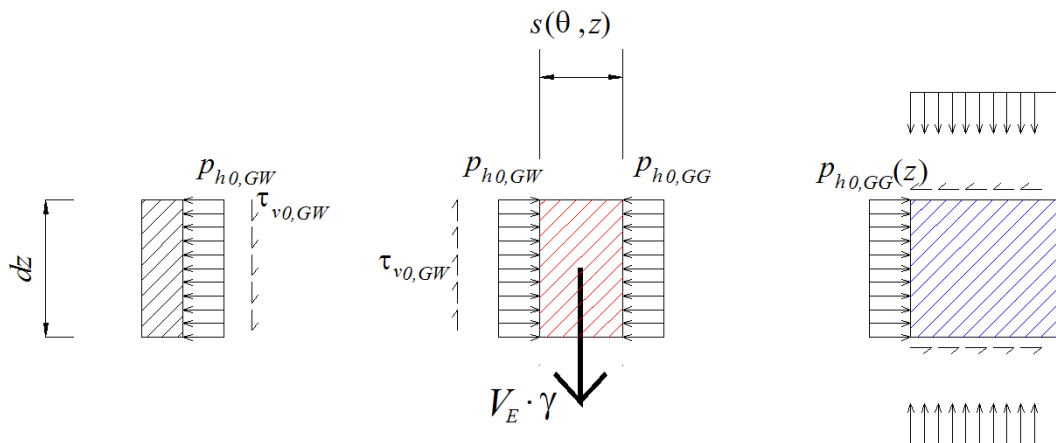


Figura 4: Particolare di una sezione longitudinale esplosa: tensioni verticali e radiali (orizzontali) sull'elemento E, posto tra il disco D e la parete.

Il sistema di tre equazioni (equilibrio radiale, verticale, legge d'attrito) sull'elemento E in tre incognite (s , $p_{h0,GW}$, $\tau_{v0,GW}$) dà:

$$s = (R + \lambda \cdot \mu \cdot z) - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2} \quad (13)$$

Dall'equilibrio verticale si ottiene:

$$\tau_{v0,GW} = \gamma \cdot \left(R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2} \right) - \frac{\gamma}{2 \cdot R} \left(R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2} \right)^2$$

Attraverso la legge d'attrito si ottiene infine:

$$p_{h0,GW} = \frac{\gamma}{\mu} \cdot \left(R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2} \right) - \frac{\gamma}{2 \cdot R \cdot \mu} \left(R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2} \right)^2$$

I passaggi analitici sono i seguenti:

$$\begin{cases} \gamma \cdot V_E = \tau_{v0,GW} \cdot A_E \\ p_{h0,GW} \cdot A_E = p_{h0,GG} \cdot \bar{A}_E \end{cases}$$

Dalla prima equazione (equilibrio verticale), semplificando $d\theta$ e dz , si ottiene:

$$\tau_{v0,GW} = \gamma \cdot \frac{V_E}{A_E} = \gamma \cdot \frac{s}{R} \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right)$$

poi semplificando R si ha:

$$\tau_{v0,GW} = \gamma \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R} \right)$$

Dalla seconda equazione si ha:

$$p_{h0,GW} \cdot R \cdot d\theta \cdot dz = p_{h0,GG} \cdot (R - s) \cdot d\theta \cdot dz$$

$$p_{h0,GW} = p_{h0,GG} \cdot \left(1 - \frac{s}{R} \right)$$

Inserendo a destra la legge d'attrito (vedi equazione 7) si ha:

$$p_{h0,GW} = \frac{\tau_{v0,GW}}{\mu_{GW}} = p_{hv0,GG} \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

$$\frac{\gamma \cdot s}{\mu_{GW}} \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right) = p_{h0,GG} \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

Inserendo il risultato dell'equilibrio del disco D (equazione 5):

$$\frac{\gamma \cdot s}{\mu_{GW}} \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right) = \lambda \cdot \gamma \cdot z \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

Semplificando γ e riordinando i termini:

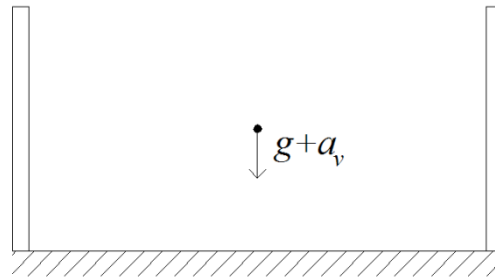
$$s^2 \frac{1}{2 \cdot \mu_{GW} \cdot R} + s \cdot \left(-\frac{\lambda \cdot z}{R} - \frac{1}{\mu_{GW}}\right) + \lambda \cdot z = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene s:

$$s = (R + \lambda \cdot \mu \cdot z) \pm \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}$$

La soluzione dell'equazione col segno positivo non avrebbe significato fisico, quindi si esclude.

2.3 CASO 1: PRESENZA DELL'ACCELERAZIONE VERTICALE



(1)

Figura 6 Caso 1: presenza dell'accelerazione verticale.

Le componenti di tensione saranno indicate pedice 1.

In riferimento alle Figure 7 and 8, le quantità incognite del problema sono:

1. $p_{v1,GG}(z)$ = pressione verticale agente sul disco D;
2. $p_{h1,GG}(z)$ = pressione orizzontale scambiata tra disco D ed elemento E;
3. $\tau_{h1,GG}$ = sforzo tangenziale orizzontale agente sulla superficie del disco D;
4. $\tau_{v1,GW}(z)$ = sforzo tangenziale verticale agente sulla parete del silo;
5. $s(z)$ = spessore dell'elemento E;
6. $p_{h1,GW}(z)$ = pressione orizzontale scambiata tra elemento E e parete del silo;
7. $\tau_{t1,GW}$ = sforzo tangenziale tra grani e parete agente sulla parete del silo.

Le equazioni disponibili sono:

1. Equilibrio alla traslazione verticale del disco D;
2. Rapporto tra pressione orizzontale e verticale dei grani;
3. Equilibrio alla traslazione orizzontale (radiale) del disco D;
4. Legge d'attrito al confine tra elemento E e pareti del silo;
5. Equilibrio alla traslazione verticale (radiale) dell'elemento E;
6. Equilibrio alla traslazione orizzontale (radiale) dell'elemento E;
7. Equilibrio alla traslazione tangenziale dell'elemento E.

Accelerazione Verticale

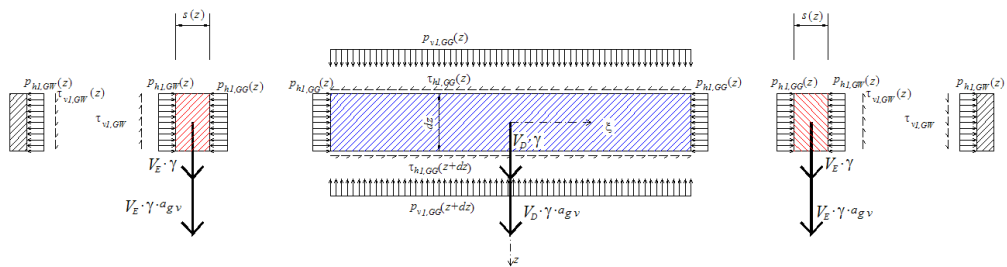


Figura 7: Sezione longitudinale esplosa: pressioni agenti. Disco interno (tratteggio blu), elemento E (rosso) e parete (tratteggio nero); sono indicati i vettori delle pressioni, i vettori (con maggior spessore) del peso proprio e il vettore dell'accelerazione aggiuntiva verticale (caso dinamico 1).

La Figura 7 mostra le azioni mutue che il disco D, l'elemento E e le pareti del silo si scambiano. Deve essere notato che, in aggiunta alle pressioni, elencate sopra, scambiate tra le porzioni dei grani e tra grano e pareti, esistono anche forze verticali riportate qui di seguito:

- $\mathcal{W}_D =$ peso proprio del disco D, applicato nel baricentro e agente lungo la direzione z dovuto all'effetto dell'accelerazione di gravità (γ è il peso specifico del materiale granulare contenuto nel silo);
- $a_{gv} \cdot \gamma \cdot V_D =$ forza d'inerzia proveniente dal centro di massa del disco D e agente lungo z dovuta all'effetto dell'accelerazione verticale a_{gv} (la forza inerziale è verso il basso, come l'accelerazione a_{gv} è assunta positiva verso il basso);
- $\gamma \cdot V_E =$ peso proprio dell'elemento E, applicato nel baricentro e agente lungo z, dovuta all'effetto dell'accelerazione di gravità (γ è il peso specifico del materiale granulare);
- $a_{gv} \cdot \gamma \cdot V_E =$ forza d'inerzia applicata nel baricentro dell'elemento E e agente lungo z, dovuta all'effetto dell'accelerazione verticale a_{gv} (la forza inerziale è verso il basso, come l'accelerazione a_{gv} è assunta positiva verso il basso).

2.3.1 Equilibrio alla traslazione verticale (D)

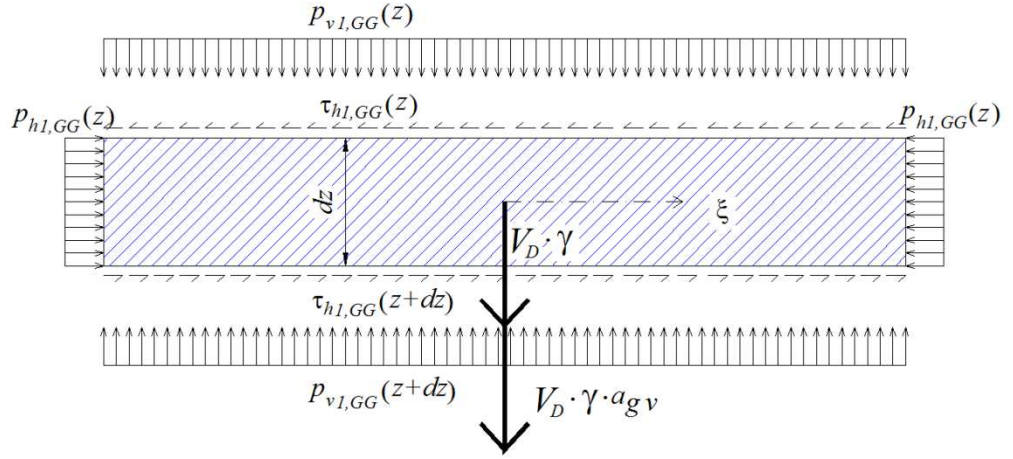


Figura 8: Sezione longitudinale esplosa: pressioni agenti sul disco D.

L'equilibrio alla traslazione verticale del disco D conduce a:

$$p_{v1,GG}(z+dz) \cdot A_D = p_{v1,GG}(z) \cdot A_D + \gamma \cdot V_D + a_{gv} \cdot \gamma \cdot V_D \quad (14)$$

dove $A_D = \pi r^2$ è l'area della superficie inferiore e superiore del disco, $V_D = A_D \cdot dz$ è il volume del disco. L'accelerazione a_{gv} ha pedice g come "ground" in quanto non viene considerata un'amplificazione strutturale, ma viene presa direttamente l'accelerazione al suolo; inoltre si deve sottolineare che questa è un'accelerazione normalizzata rispetto all'accelerazione di gravità, quindi è un numero puro (ad esempio $0,15 \text{ g/g} = 0,15$). Inoltre:

$$p_{v1,GG}(z+dz) - p_{v1,GG}(z) = dp_{v1,GG}$$

Così, l'equazione diviene:

$$dp_{v1,GG} = (1 + a_{gv}) \cdot \gamma \cdot dz$$

integrando e imponendo la condizione al contorno ($p_{v1,GG}(z=0) = 0$ cioè pressione verticale nulla al pelo libero), si ottiene:

$$p_{v1,GG}(z) = (1 + a_{gv}) \cdot \gamma \cdot z \quad (15)$$

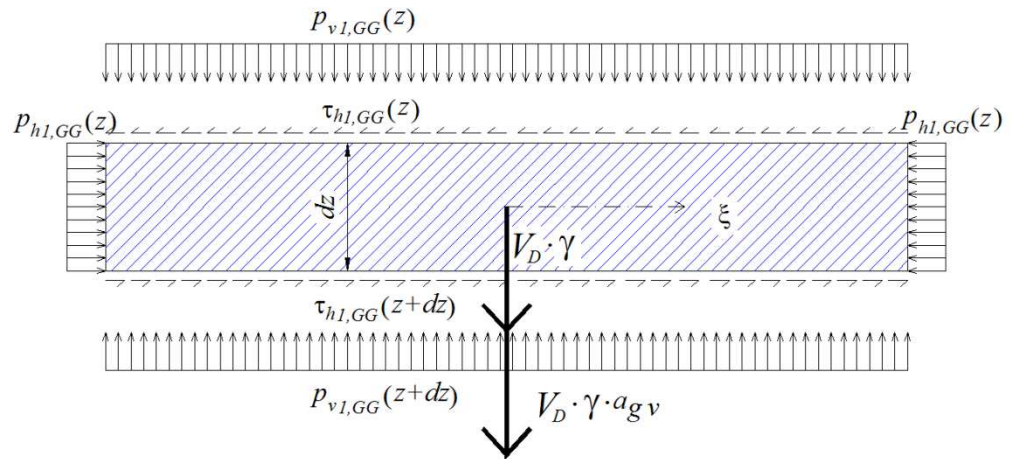
Si definisce il coefficiente v :

$$v = \frac{1}{1 + a_{gv}}$$

Così:

$$P_{v1,GG}(z) = \frac{\gamma}{v} \cdot z \quad (16)$$

2.3.2 Rapporto tra pressione verticale e orizzontale (D)



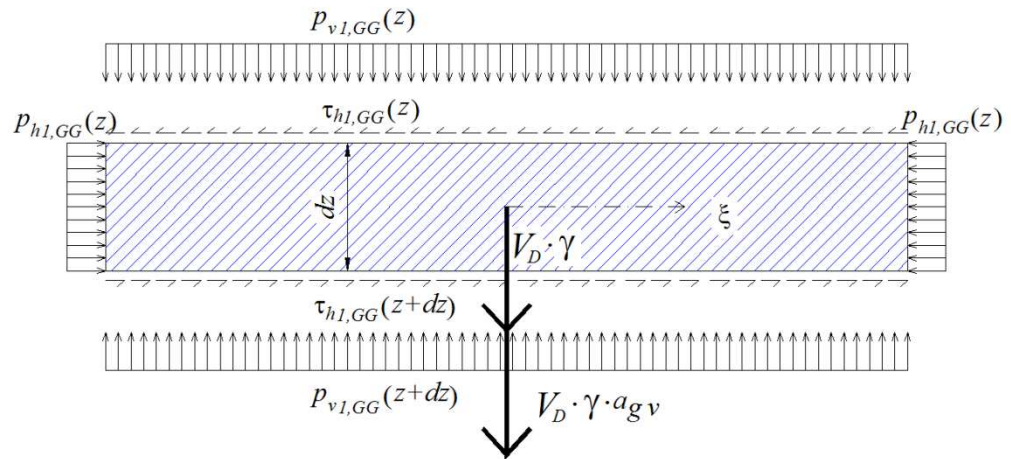
Se λ è il rapporto tra la pressione verticale e orizzontale del materiale granulare, quindi vale questa relazione:

$$p_{h1,GG}(z) = \lambda \cdot p_{v1,GG}(z)$$

Ora, sostituendovi l'Eq.(16), si ottiene:

$$p_{h1,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z \tag{17}$$

2.3.3 Equilibrio alla traslazione orizzontale (D)



Le forze orizzontali sono nulle: non ci sono forze inerziali, quindi l'equilibrio alla traslazione orizzontale del disco D conduce a:

$$\tau_{h1,GG} = 0 \quad (18)$$

Si può osservare che il valore delle tensioni tangenziali orizzontali è un valore medio: si considera infatti uniforme la distribuzione di tali tensioni sulla superficie del generico disco D.

2.3.4 Legge d'attrito (E)

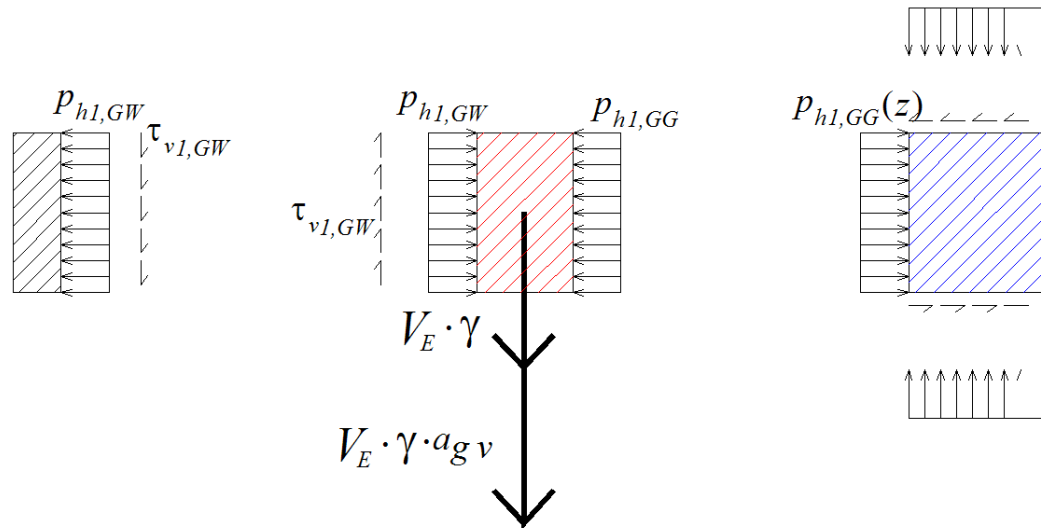


Figura 9: Sezione verticale dell'elemento E nel caso 1

Legge d'attrito al confine tra elemento E e pareti.

Se μ_{GW} è il coefficiente d'attrito tra la grano e parete (grain-wall), vale la seguente relazione tra tensione tangenziale lungo la superficie della parete e pressione radiale perpendicolare alla superficie di contatto tra elemento E di materiale granulare e parete del silo:

$$\tau_{v1,GW}(z) = \mu_{GW} \cdot p_{h1,GW}(z) \quad (19)$$

Il risultato rimane per ora insospeso, poiché non si conosce ancora $p_{h1,GW}$; questo risultato sarà completato nel prossimo paragrafo.

2.3.5 Equilibrio alla traslazione verticale e radiale (E)

I due equilibri alla traslazione, verticale e orizzontale, dell'elemento E sono accoppiati nel seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \cdot V_E + a_{gv} \cdot \gamma \cdot V_E = \tau_{v1,GW} \cdot A_E \\ p_{h1,GG} \cdot A_E = p_{h1,GW} \cdot A_E \end{array} \right. \quad (20)$$

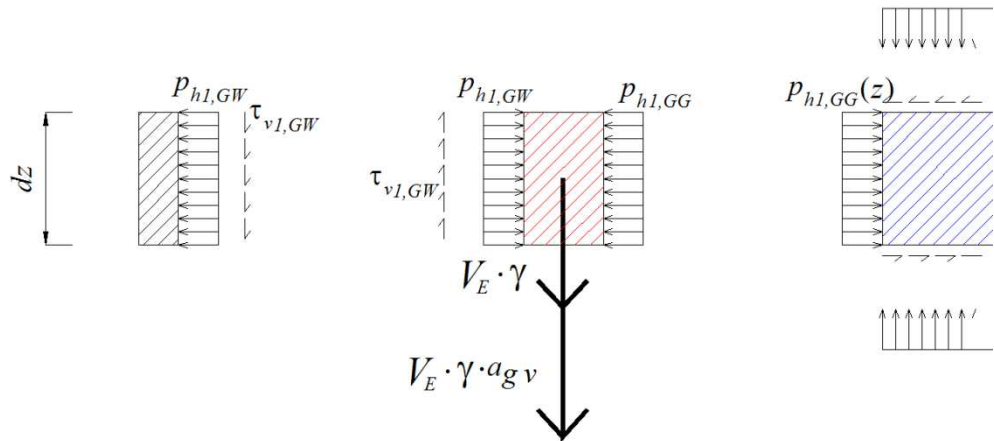


Figura 9: Sezione verticale dell'elemento E nel caso 1

dove $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$ è l'area della superficie verticale esterna dell'elemento E,

$V_E = s \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz$ è il volume dell'elemento E. Così il sistema (20) può

essere riscritta come segue, semplificando $d\theta \cdot dz$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) (1 + a_{gv}) = \tau_{v1,GW} \cdot R \\ p_{h1,GW} = p_{h1,GG} = \lambda \cdot p_{v1,GG} \end{array} \right.$$

Come per il caso statico è bene fare una precisazione:

$A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$ è l'area della superficie laterale esterna dell'elemento E; essa compare sia nell'equilibrio verticale, in quanto è la superficie che compete alle tensioni tangenziali verticali, sia nell'equilibrio radiale in entrambi i membri dell'equazione. L'equilibrio radiale presenta un'approssimazione, poiché la superficie relativa alla pressione $p_{h1,GG}$ non è la stessa di $p_{h1,GW}$. Se per $p_{h1,GW}$ è corretto usare A_E , per $p_{h1,GG}$ si dovrebbe usare $\bar{A}_E = (R-s) \cdot d\theta \cdot dz$. In questa analisi si mantiene la formulazione approssimata perché essa risulterà dare risultati di più maneggevoli. Nel capitolo successivo sarà approfondita invece la versione precisa, dove le due aree sono distinte.

Sostituendo l'Eq. (17), cioè l'equilibrio radiale del disco D nella seconda equazione del sistema si trova la pressione radiale tra elemento e parete; invece nella prima equazione del sistema si può inserire la legge d'attrito (eq. 19); dunque si arriva a:

$$\begin{cases} \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) (1 + a_{gv}) = \mu_{GW} \cdot p_{h1,GW} \cdot R \\ p_{h1,GW}(z) = \lambda \cdot p_{v1,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{\nu} \cdot z \end{cases}$$

$$\text{con } \nu = \frac{1}{1 + a_{gv}}.$$

$$p_{h1,GW}(z) = p_{h1,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{\nu} \cdot z \quad (21)$$

Applicando la legge d'attrito (vedi eq. 19) si ha:

$$\tau_{v1,GW}(z) = p_{h1,GW}(z) \cdot \mu_{GW} = \frac{\gamma}{\nu} \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot z \quad (22)$$

Ora nell'equilibrio verticale l'unica incognita rimasta è $s = s_1$; per valutare lo spessore della porzione di grani che è sostenuta completamente dalla parete del

silo, si riprende la prima equazione del sistema (equilibrio verticale) e vi si sostituisce il risultato appena ottenuto:

$$\frac{\gamma}{\nu} \cdot s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) = R \cdot \mu_{GW} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\gamma}{\nu} \cdot z \right)$$

Si semplificano γ e ν e si divide per R , così si ottiene la seguente espressione quadratica:

$$s \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right) = \lambda \cdot z \cdot \mu_{GW}$$

Si risolve l'equazione di secondo grado nella forma:

$$\frac{s^2}{2R} - s + \lambda \cdot z \cdot \mu_{GW} = 0$$

E si ottiene:

$$s = R \pm R \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{R} \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot z}$$

$$s = R - R \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{R} \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot z} \quad (23)$$

Si deve notare che lo spessore s del caso 1 coincide con lo spessore s del caso 0 trovato prima.

$$s_1 = s_0$$

Si può anche scrivere come:

$$s = R - R \cdot \sqrt{1 - \tau_{v, GW} \cdot \frac{2}{R \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g-v})}}$$

2.3.6 Equilibrio alla traslazione tangenziale (E)

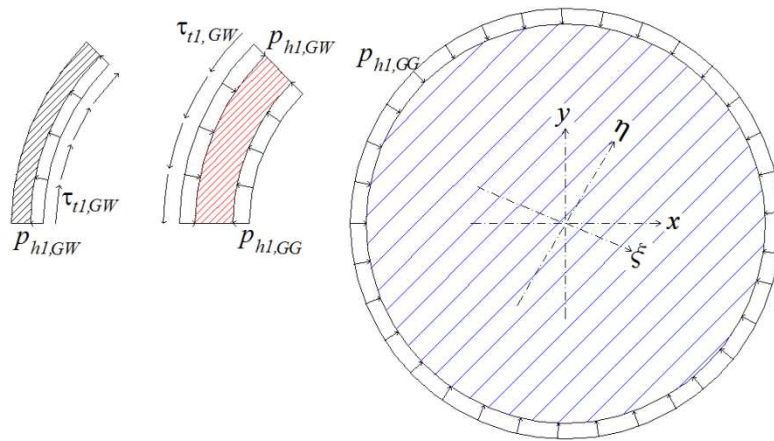


Figura 10 Pianta esplosa caso 1.

L'equilibrio alla traslazione tangenziale dell'elemento E (rosso) conduce a:

$$\tau_{tl,GW} = 0 \quad (24)$$

2.3.7 Versione non approssimata Caso 1

Nell'equilibrio radiale è stato commentato il fatto che si sia commessa un'approssimazione sull'area A_E sulla faccia interna all'elemento E, dove agiscono le $p_{h1,GG}$. Per completezza vengono ora inseriti anche i risultati più precisi, con la valutazione esatta dell'area in questione. I risultati diversi sono le tre incognite legate nel sistema e nella legge d'attrito, quindi s , $p_{h1,GW}$, $\tau_{v1,GW}$.

Equilibrio radiale dell'elemento E:

$$p_{h1,GG} \cdot \bar{A}_E = p_{h1,GW} \cdot A_E$$

Dove:

$$\bar{A}_E = (R - s) \cdot d\theta \cdot dz$$

$$A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$$

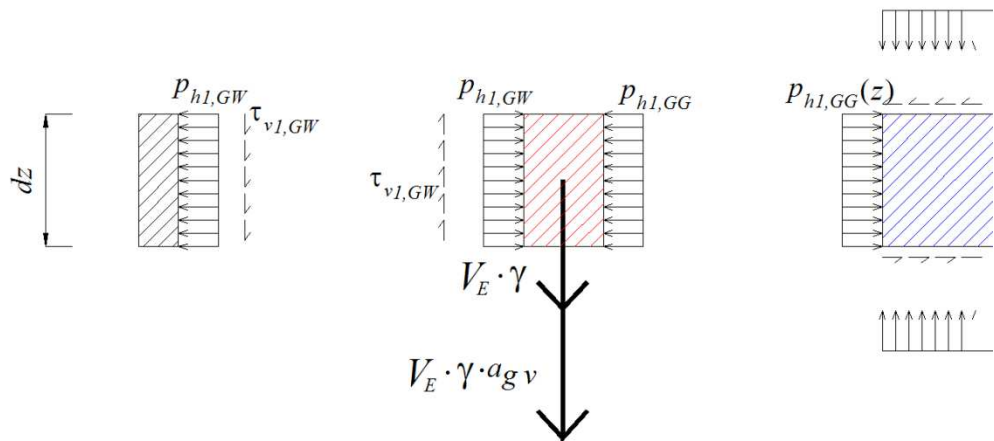


Figura 9: Sezione verticale dell'elemento E nel caso 1

Il sistema di tre equazioni (equilibrio radiale, verticale, legge d'attrito) sull'elemento E in tre incognite (s , $p_{h1,GW}$, $\tau_{v1,GW}$) dà:

$$s = (R + \lambda \cdot \mu \cdot z) - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2} \quad (25)$$

anche in questo caso $s_0 = s_1$.

L'equilibrio verticale dell'elemento E dà:

$$\tau_{v1,GW} = \frac{\gamma}{\nu} \cdot (R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}) - \frac{\gamma}{2 \cdot R \cdot \nu} (R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2})^2$$

Attraverso la legge d'attrito si ottiene infine:

$$p_{h1,GW} = \frac{\gamma}{\mu \cdot \nu} \cdot (R + \mu \cdot \lambda \cdot z - \sqrt{R^2 + \mu^2 \cdot \lambda^2 \cdot z^2}) - \frac{\gamma}{2 \cdot R \cdot \mu \cdot \nu} (R + \mu \cdot \lambda \cdot z - \sqrt{R^2 + \mu^2 \cdot \lambda^2 \cdot z^2})^2$$

I passaggi analitici sono i seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{\nu} \cdot V_E = \tau_{v1,GW} \cdot A_E \\ p_{h1,GW} \cdot A_E = p_{h1,GG} \cdot \bar{A}_E \end{array} \right.$$

Dalla prima equazione (equilibrio verticale), semplificando $d\theta$, dz , si ottiene:

$$\tau_{v1,GW} = \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{V_E}{A_E} = \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{s}{R} \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right)$$

Dividendo per R all'interno della parentesi, si ha:

$$\tau_{v1,GW} = \frac{\gamma}{\nu} \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R} \right)$$

La tensione tangenziale verticale rimane ancora incognita essendo incognita anche s .

Dalla seconda equazione si ha:

$$p_{h1,GW} \cdot R \cdot d\theta \cdot dz = p_{h1,GG} \cdot (R - s) \cdot d\theta \cdot dz$$

$$p_{h1,GW} = p_{h1,GG} \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

Inserendo a destra la legge d'attrito (vedi eq. 19) si ha:

$$p_{h1,GW} = \frac{\tau_{v1,GW}}{\mu_{GW}} = p_{h1,GG} \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

Sostituendo il risultato ottenuto dall'equilibrio verticale dell'elemento E (soluzione della prima equazione del sistema: eq. 26) si ha:

$$\frac{\gamma \cdot s}{v \cdot \mu_{GW}} \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right) = p_{hv1,GG} \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

Inserendo il risultato dell'equilibrio radiale del disco D (eq. 17):

$$\frac{\gamma \cdot s}{v \cdot \mu_{GW}} \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

Semplificando γ e v e riordinando i termini, si ha la seguente equazione di secondo grado nell'incognita s :

$$s^2 \frac{1}{2 \cdot \mu_{GW} \cdot R} + s \cdot \left(-\frac{\lambda \cdot z}{R} - \frac{1}{\mu_{GW}}\right) + \lambda \cdot z = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene s :

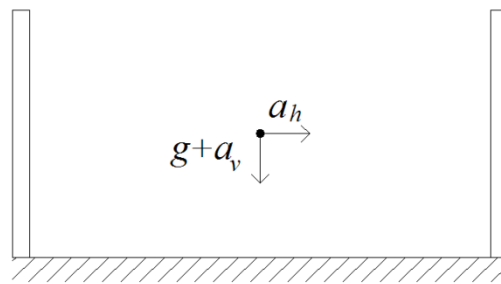
$$s = (R + \lambda \cdot \mu \cdot z) \pm \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}$$

La radice dell'equazione col segno positivo non avrebbe significato fisico, quindi si esclude.

Il risultato trovato coincide con il caso statico 0. Invece le pressioni verticali e radiali tra grani e parete si differenziano da quelle del caso statico 0 per la presenza di v

2.4 CASO 2: PRESENZA DELL'ACCELERAZIONE ORIZZONTALE

Studiamo ora le condizioni accelerate con entrambe le accelerazioni costanti, l'aggiuntiva verticale ($a_{gv} \cdot g$) e l'orizzontale ($a_{gh} \cdot g$). Si noti che entrambe (a_{gv} e a_{gh}) sono normalizzate rispetto a g , quindi sono dei numeri puri.



(2)

Figura 11: Condizioni accelerate: silo soggetto all'accelerazione verticale di gravità e ad accelerazioni aggiuntive verticali e orizzontali.

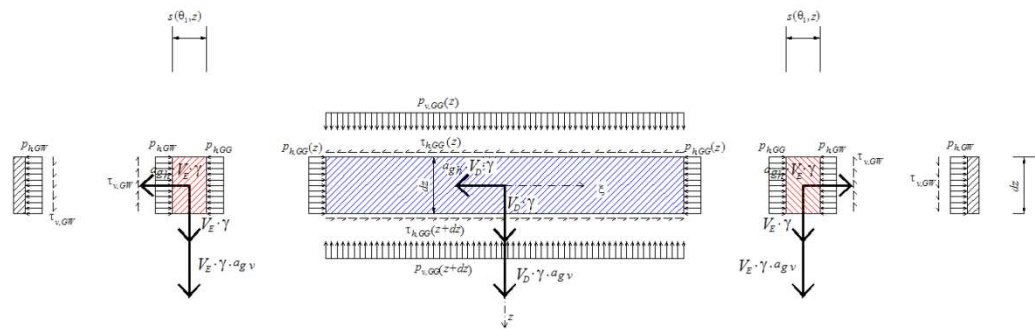


Figura 12 : Sezione longitudinale esplosa: caso 2 con accelerazione orizzontale aggiuntiva

In riferimento alla Figura 12, le quantità incognite del problema vengono ora scritte senza alcun pedice numerico e sono:

1. $p_{v,GG}(z)$ = pressione verticale agente sul disco D;
2. $p_{h,GG}(z)$ = pressione orizzontale scambiata tra disco D ed elemento E;
3. $\tau_{h,GG}(z, \theta)$ = sforzo tangenziale orizzontale agente sulla superficie del disco D;
4. $\tau_{v,GW}(z, \theta)$ = sforzo tangenziale verticale agente sulla parete del silo;
5. $s(z, \theta)$ = spessore dell'elemento E;
6. $p_{h,GW}(z, \theta)$ = pressione orizzontale scambiata tra elemento E e parete del silo;
7. $\tau_{t,GW}(z, \theta)$ = sforzo tangenziale grano-parete agente sulla parete del silo.

Le azioni mutue scambiate tra i grani e le pareti valutate nell'analisi sismica, rispettano l'equilibrio dinamico.

Le equazioni disponibili sono:

1. Equilibrio alla traslazione verticale del disco D;
2. Rapporto tra pressione orizzontale e verticale dei grani;
3. Equilibrio alla traslazione orizzontale (radiale) del disco D;
4. Legge d'attrito al confine tra elemento E e pareti del silo;
5. Equilibrio alla traslazione verticale (radiale) dell'elemento E;
6. Equilibrio alla traslazione orizzontale (radiale) dell'elemento E;
7. Equilibrio alla traslazione tangenziale dell'elemento E.

La Figura 12 mostra le azioni mutue che il disco D, l'elemento E e le pareti del silo si scambiano. Deve essere notato che, in aggiunta alle pressioni, elencate sopra, scambiate tra le porzioni dei grani e tra grano e pareti, esistono anche forze

verticali e orizzontali riportate qui di seguito e indicate con vettori più spessi in Figura 12:

Verticali:

- $\gamma W_D =$ peso proprio del disco D, applicato nel baricentro e agente lungo la direzione z dovuto all'effetto dell'accelerazione di gravità (γ è il peso specifico del materiale granulare contenuto nel silo);
- $a_{gv} \cdot \gamma \cdot V_D =$ forza d'inerzia proveniente dal centro di massa del disco D, agente lungo z e dovuta all'effetto dell'accelerazione verticale a_{gv} (la forza inerziale è verso il basso, come l'accelerazione a_{gv} è assunta positiva verso il basso);
- $\gamma \cdot V_E =$ peso proprio dell'elemento E, applicato nel baricentro e agente lungo z, dovuto all'effetto dell'accelerazione di gravità (γ è il peso specifico del materiale granulare);
- $a_{gv} \cdot \gamma \cdot V_E =$ forza d'inerzia applicata nel baricentro dell'elemento E, agente lungo z e dovuta all'effetto dell'accelerazione verticale a_{gv} (la forza inerziale è verso il basso, come l'accelerazione a_{gv} è assunta positiva verso il basso).

Orizzontali:

- $a_{gh} \cdot \gamma \cdot V_D =$ forza d'inerzia proveniente dal centro di massa del disco D, agente lungo x e dovuta all'effetto dell'accelerazione orizzontale a_{gh}
- $a_{gh} \cdot \gamma \cdot V_E =$ forza d'inerzia applicata nel baricentro dell'elemento E, agente lungo x e dovuta all'effetto dell'accelerazione orizzontale a_{gh} (la forza inerziale è verso le pareti, come l'accelerazione a_{gh} è assunta positiva verso le pareti)

2.4.1 Note sull'accelerazione orizzontale

L'andamento dell'accelerazione orizzontale in altezza viene considerato di tre diversi tipi:

1. Costante
2. Lineare
3. Parabolica

Queste tre suddivisioni si riverberano solo su alcuni equilibri, non su tutti: in particolare solo su quelli dove è presente l'accelerazione orizzontale o una sua componente.

La direzione dell'accelerazione aggiuntiva (lungo x) è ruotata di un angolo θ in pianta rispetto alla direzione dell'asse ξ . Quindi il vettore dell'accelerazione orizzontale si scompone in due componenti: una radiale ($a_g \cos \theta$) e una tangenziale ($a_g \sin \theta$).

$$a_{gh\perp} = a_{gh} \cdot \cos \theta$$

$$a_{gh\parallel} = a_{gh} \cdot \sin \theta$$

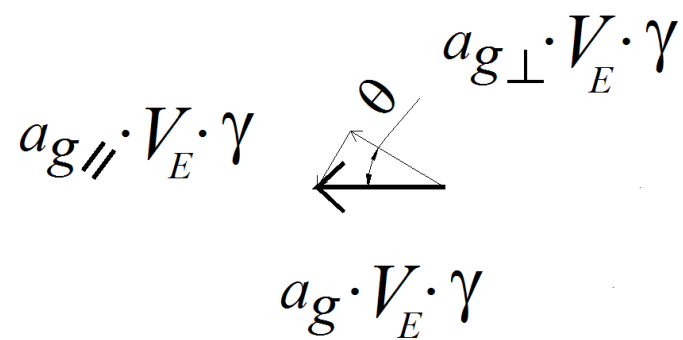


Figura 13 : Componente radiale e tangenziale dell'accelerazione orizzontale in pianta.

2.4.2 Caso 1: accelerazione costante

Ora si effettuano tutti gli equilibri considerando l'accelerazione orizzontale costante, cioè

$$a_{gh} = a_g = \cos t = [1]$$

2.4.2.1 Equilibrio alla traslazione verticale del disco D

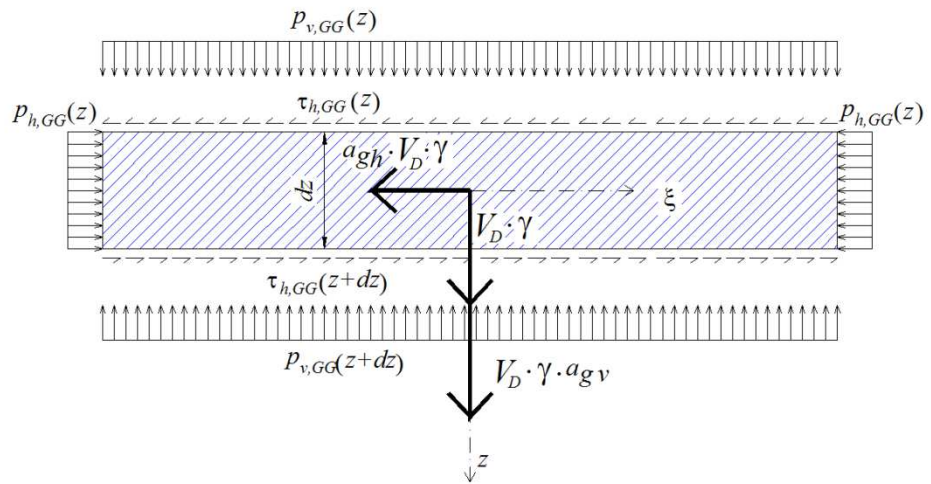


Figura 14: Sezione longitudinale con zoom solo sul disco D: pressioni e azioni agenti.

L'equilibrio alla traslazione verticale del disco D conduce a:

$$p_{v,GG}(z+dz) \cdot A_D = p_{v,GG}(z) \cdot A_D + \gamma \cdot V_D + a_{gv} \cdot \gamma \cdot V_D$$

dove $A_D = \pi r^2 = \pi(R-s)^2$ è l'area della superficie inferiore e superiore del disco,
 $V_D = A_D \cdot dz$ è il volume del disco e, chiaramente $p_{v,GG}(z+dz) = p_{v,GG}(z) + dp_{v,GG}$
. Così, l'Equazione di equilibrio verticale diviene:

$$dp_{v,GG} = (1 + a_{gv}) \cdot \gamma \cdot dz$$

integrando e imponendo la condizione al contorno ($p_{v,GG}(z=0) = 0$ pressione verticale nulla al pelo libero), si trova nulla la costante di integrazione, e infine:

$$p_{v,GG}(z) = (1 + a_{gv}) \cdot \gamma \cdot z$$

Con la posizione:

$$\nu = \frac{1}{1 + a_{gv}}$$

Si ha:

$$p_{v,GG}(z) = \frac{\gamma}{\nu} \cdot z \quad (26)$$

2.4.2.2 Rapporto tra pressione verticale e orizzontale nel materiale granulare

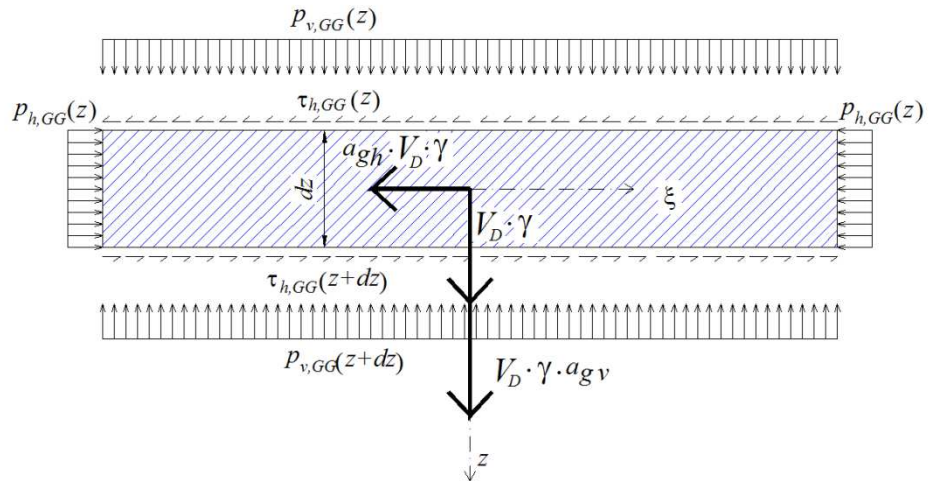


Figura 14: Sezione longitudinale con zoom solo sul disco D: pressioni e azioni agenti.

Se λ è il rapporto tra la pressione verticale e orizzontale del materiale granulare, vale questa relazione:

$$P_{h,GG} = \lambda \cdot P_{v,GG}$$

Ora, sostituendovi l'Eq.(26), si ottiene:

$$P_{h,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{\nu} \cdot z \quad (27)$$

2.4.2.3 Equilibrio alla traslazione orizzontale del disco D

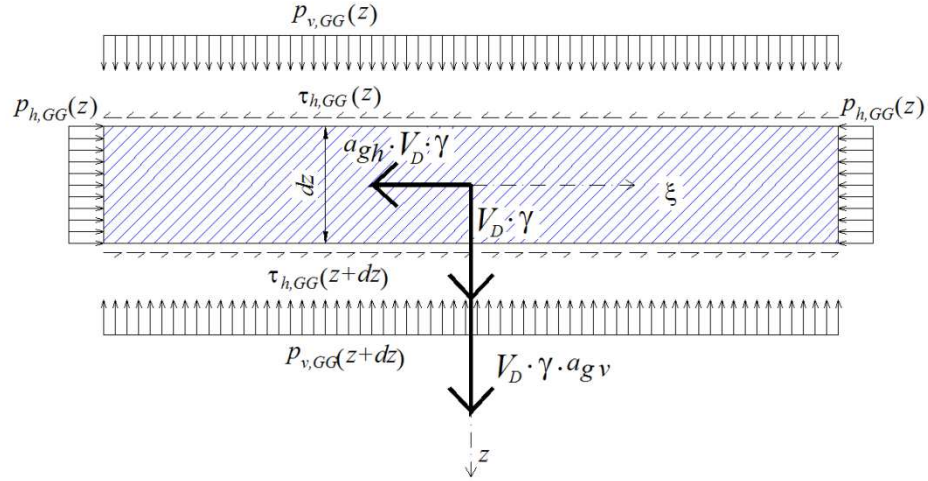


Figura 14: Sezione longitudinale con zoom solo sul disco D: pressioni e azioni agenti.

L'equilibrio alla traslazione orizzontale del disco D conduce a:

$$\tau_{h,GG}(z+dz) \cdot A_D = a_{gh} \cdot \gamma \cdot V_D + \tau_{h,GG}(z) \cdot A_D$$

dove: $\tau_{h,GG}(z+dz) = \tau_{h,GG}(z) + d\tau_{h,GG}$. Inoltre $V_D = A_D \cdot dz$. Così si arriva a:

$$d\tau_{h,GG} = a_{gh} \cdot \gamma \cdot dz$$

Si integra; si impone la condizione al contorno che al pelo libero dei grani lo sforzo di taglio sia nullo $\tau_{h,GG}(z=0) = 0$: quindi la costante di integrazione si annulla e si ottiene:

$$\tau_{h,GG}(z) = a_{gh} \cdot \gamma \cdot z \quad (28)$$

Si noti che l'accelerazione orizzontale è stata qui considerata costante lungo l'intera altezza del silo.

Inoltre l'espressione delle tensioni tangenziali orizzontali rappresenta un valore medio che suppone una distribuzione uniforme delle tensioni tangenziali su tutta l'area del disco D in pianta.

2.4.2.4 Legge d'attrito al confine tra elemento E e parete

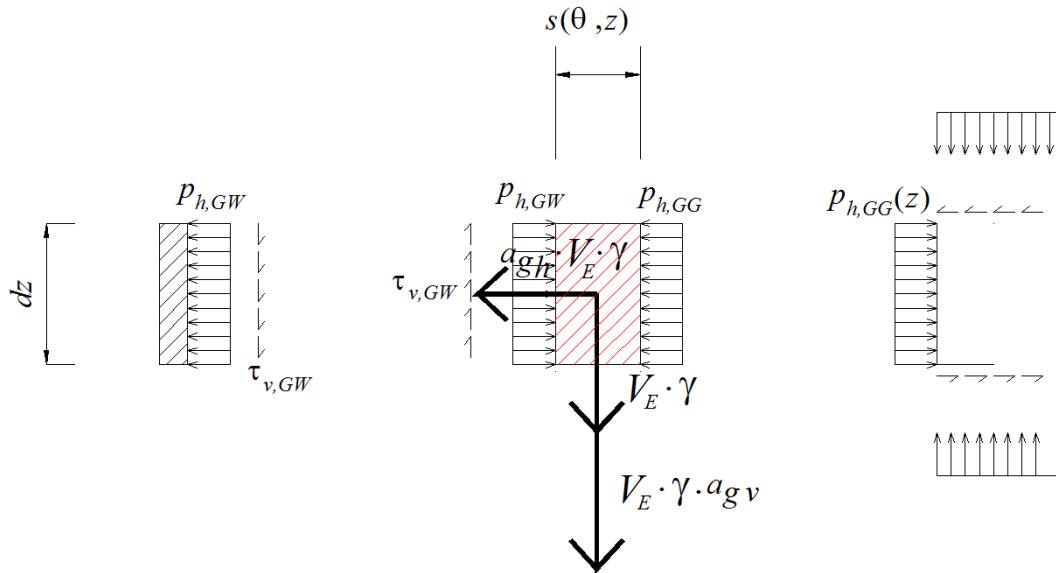


Figura 15: Sezione longitudinale verticale con zoom solo sull'elemento E: pressioni e azioni agenti.

Se μ_{GW} è il coefficiente d'attrito tra grani e parete, vale la seguente relazione e tra tensione tangenziale lungo la superficie della parete e pressione radiale perpendicolare alla superficie di contatto tra elemento E di materiale granulare e parete del silo:

$$\tau_{v,GW}(z, \theta) = \mu_{GW} \cdot p_{h,GW}(z, \theta) \quad (29)$$

La soluzione rimane insospesa, poiché bisogna prima calcolarsi $p_{h,GW}$.

2.4.2.5 Equilibrio alla traslazione verticale e radiale dell'elemento E

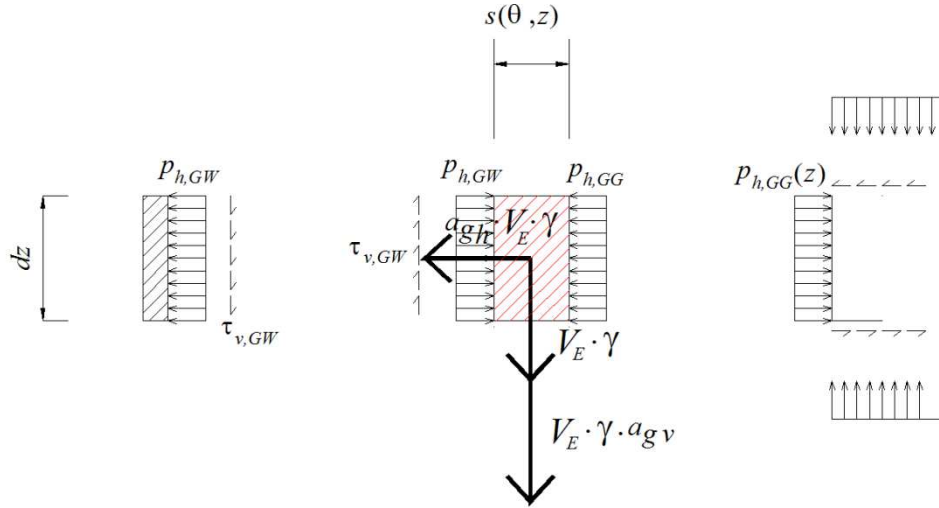


Figura 15: Sezione longitudinale verticale con zoom solo sull'elemento E: pressioni e azioni agenti.

I due equilibri alla traslazione, verticale e orizzontale (radiale), dell'elemento E sono accoppiati nel seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \gamma \cdot V_E (1 + a_{gv}) = \tau_{v,GW} \cdot A_E \\ P_{h,GW} \cdot A_E = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot V_E + P_{h,GG} \cdot A_E \end{cases} \quad (30)$$

dove $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$ è l'area della superficie verticale esterna dell'elemento E, $V_E = s \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz$ è il volume dell'elemento E, $a_{gh\perp}$ rappresenta la componente radiale dell'accelerazione orizzontale a_{gh} perpendicolare alla superficie esterna di E (diretta lungo ξ) (vedi Fig. 13): $a_{gh\perp} = a_{gh} \cdot \cos \theta$. Così il sistema (30) può essere riscritto come segue:

$$\begin{cases} \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) (1 + a_{gv}) = \tau_{v,GW} \cdot R \\ (p_{h,GW} - p_{h,GG}) \cdot R = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) \end{cases}$$

Come per i casi statico e con accelerazione verticale è bene fare una precisazione:

$A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$ è l'area della superficie laterale esterna dell'elemento E; essa compare sia nell'equilibrio verticale, in quanto è la superficie che compete alle tensioni tangenziali verticali, sia nell'equilibrio radiale in entrambi i membri dell'equazione. L'equilibrio radiale presenta un'approssimazione, poiché la superficie relativa alla pressione $p_{h,GG}$ non è la stessa di $p_{h,GW}$. Se per $p_{h,GW}$ è corretto usare A_E , per $p_{h,GG}$ si dovrebbe usare $\bar{A}_E = (R - s) \cdot d\theta \cdot dz$. In questa analisi si mantiene la formulazione approssimata perché essa risulterà dare risultati di più maneggevoli. Nel capitolo successivo sarà approfondita invece la versione precisa, dove le due aree sono distinte.

Nella prima equazione del sistema si può inserire la legge d'attrito (eq. 29); dunque si arriva a:

$$\begin{cases} \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) (1 + a_{gv}) = \mu_{GW} \cdot p_{h,GW} \cdot R \\ (p_{h,GW} - p_{h,GG}) \cdot R = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) \end{cases}$$

Si pone nella prima equazione del sistema $\nu = \frac{1}{1 + a_{gv}}$

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\nu} \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) = \mu_{GW} \cdot p_{h,GW} \cdot R \\ (p_{h,GW} - p_{h,GG}) \cdot R = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) \end{cases}$$

Si riconosce che il primo membro della prima equazione è uguale al secondo membro della seconda equazione del sistema a meno di v e di $a_{gh\perp}$

Quindi:

$$\begin{cases} \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) = \mu_{GW} \cdot p_{h,GW} \cdot R \cdot v \\ (p_{h,GW} - p_{h,GG}) \cdot R = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) \end{cases}$$

Si sostituisce il secondo membro della prima equazione all'interno del secondo membro della seconda equazione:

$$\begin{cases} \gamma \cdot s \left(R - \frac{s}{2} \right) = \mu_{GW} \cdot p_{h,GW} \cdot R \cdot v \\ (p_{h,GW} - p_{h,GG}) \cdot R = a_{gh\perp} \cdot \mu_{GW} \cdot p_{h,GW} \cdot R \cdot v \end{cases}$$

Si lavora ora solo sulla seconda equazione del sistema:

$$-p_{h,GG} = p_{h,GW} (a_{gh\perp} \cdot \mu_{GW} \cdot v - 1)$$

$$p_{h,GW} = \frac{p_{h,GG}}{1 - a_{gh\perp} \cdot \mu_{GW} \cdot v}$$

Sostituendo l'Eq. (27), cioè l'equilibrio radiale del disco D nella seconda equazione del sistema e la componente radiale dell'accelerazione orizzontale, si trova la pressione radiale tra elemento e parete:

$$p_{h,GW}(z, \theta) = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW})} \quad (31)$$

Tramite la legge d'attrito (equazione 29) passiamo alla tensione tangenziale verticale:

$$\tau_{v,GW}(z, \theta) = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot \mu_{GW} \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW})} \quad (32)$$

Per quanto riguarda lo spessore della porzione di grani che è sostenuta completamente dalla parete del silo, si riprende la prima equazione del sistema (equilibrio verticale) e si sostituisce al secondo membro il risultato appena ottenuto (passando ancora per la considerazione della legge d'attrito), si semplificano γ e v e si ottiene la seguente espressione quadratica:

$$s \left(1 - \frac{s}{2R} \right) = \frac{\lambda \cdot z \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \quad (33)$$

Ponendo $\beta(\theta) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$, l'Eq. sopra può essere riscritta come

segue:

$$s - \frac{s^2}{2R} = \frac{\beta}{2} \cdot z$$

Quindi come:

$$s^2 - 2R \cdot s + R \cdot \beta \cdot z = 0$$

Le due soluzioni dell'ultima equazione sono:

$$s(z, \theta) = R \pm \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$$

Chiaramente lo spessore $s(z, \theta)$ non può essere più largo del raggio R del silo, così che l'unica soluzione che ha senso fisico è la seguente (quella col segno meno):

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z} \quad (34)$$

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \cdot z} \quad (35)$$

2.4.2.6 Equilibrio alla traslazione tangenziale dell'elemento E

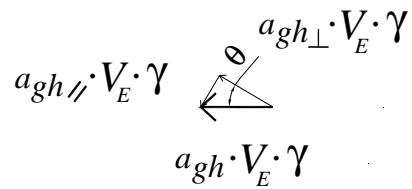
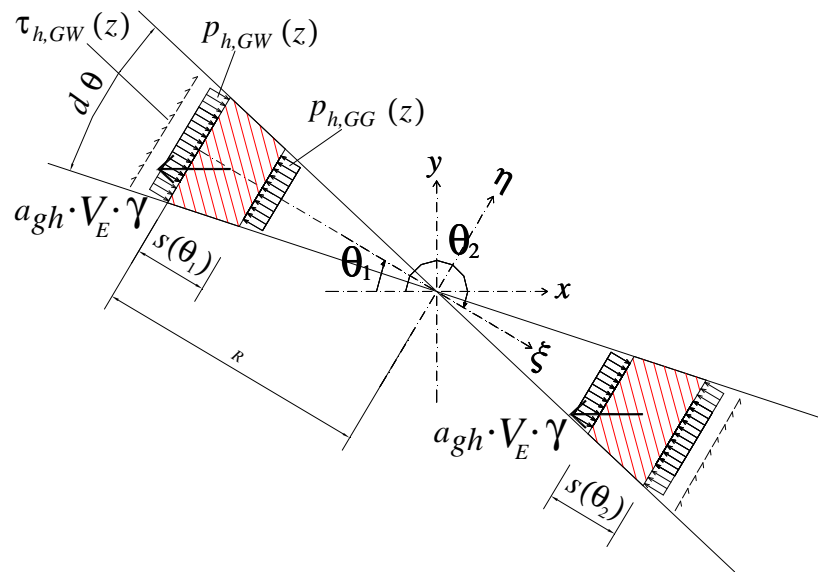
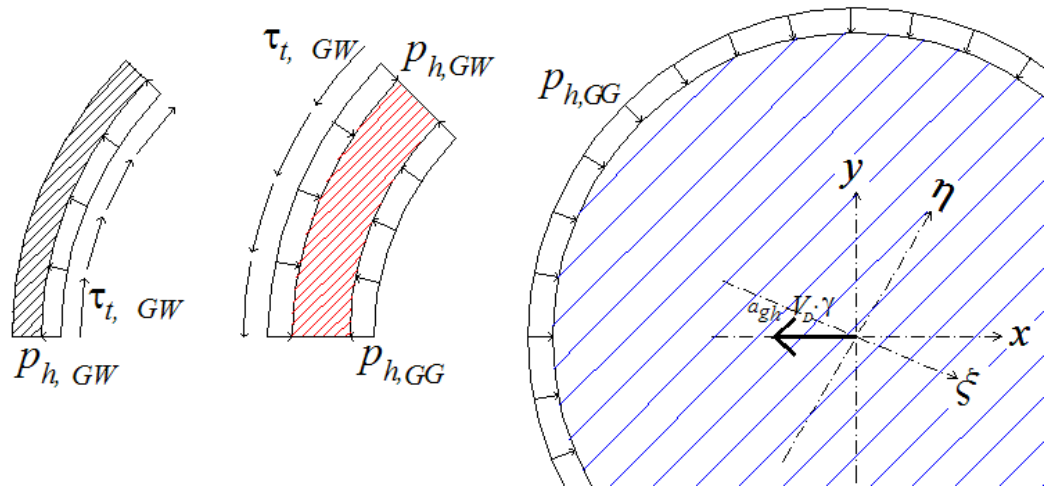


Figura 16: In alto pianta nel caso 2 e zoom solo sull'elemento E esploso: pressioni e azioni agenti; in basso due concetti di elemento E e infondo le componenti dell'accelerazione orizzontale aggiuntiva..

La Figura 16 in alto mostra la pianta esplosa con zoom sull'elemento E il quale è individuato dall'angolo θ , mentre si può sottolineare come il disco D sia considerato sempre nella sua interezza (cioè su 2π).

La Figura 16 in basso riporta due concetti di elemento E e gli spessori s sono quotati in questo modo:

$$s(\theta_1) \neq s(\theta_2)$$

Infatti lo spessore s nel caso di presenza di accelerazione orizzontale (caso 2) non è simmetrico, mentre per i casi 0 e 1 l'elemento E risulta un anello simmetrico.

L'equilibrio alla traslazione tangenziale dell'elemento E conduce a:

$$\tau_{t,GW} \cdot A_E = a_{gh//} \cdot \gamma \cdot V_E$$

dove $a_{gh//} = a_{gh} \sin \theta$ rappresenta la componente tangenziale dell'accelerazione orizzontale a_{gh} , componente parallela alla superficie verticale esterna (componente diretta lungo η) dell'elemento E (vedi Fig. 13). Inoltre il volume dell'elemento E è dato da: $V_E = s \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz$ e l'area della superficie laterale che compete alla tensione tangenziale è $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$. Così l'equazione sopra diviene (semplificando $d\theta$ e dz):

$$\tau_{t,GW}(z, \theta) = a_{gh} \sin \theta \cdot \gamma \cdot s \left(1 - \frac{s}{2R} \right)$$

Sostituendo l'Eq. (33) all'interno dell'equazione sopra si ottiene:

$$\tau_{t,GW}(z, \theta) = a_{gh} \sin \theta \cdot \gamma \cdot \frac{\lambda \cdot z \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

$$\tau_{r,GW}(z, \theta) = \frac{a_{gh} \sin \theta \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \quad (36)$$

Oppure lasciando indicato β :

$$\tau_{r,GW}(z, \theta) = a_{gh} \sin \theta \cdot \gamma \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z} \right) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2R} \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z} \right)$$

2.4.3 Caso 2: accelerazione lineare

Ora si effettuano gli equilibri considerando l'accelerazione orizzontale variabile linearmente lungo z , cioè

$$a_{gh}(z) = a_{gh}^* = a_{gh0} + a_{gh1} \cdot (H - z)$$

Gli equilibri che si riportano sotto sono solo quelli diversi dai precedenti, quindi sono quelli dove compare l'accelerazione orizzontale e che sono quindi influenzati dalla sua variazione.

Tali equilibri sono solo tre e sono:

1. Equilibrio orizzontale (radiale) del disco D
2. Equilibrio verticale e orizzontale (radiale) dell'elemento E
3. Equilibrio tangenziale dell'elemento E.

2.4.3.1 Equilibrio alla traslazione orizzontale del disco D

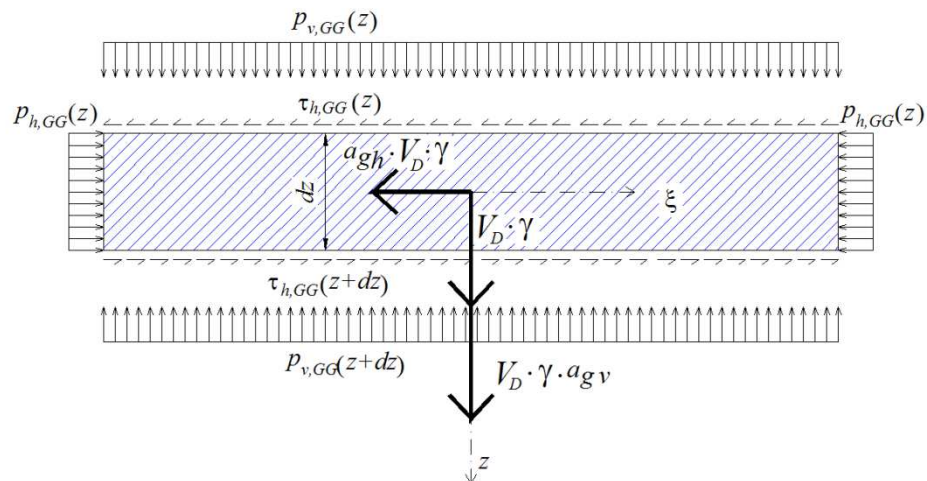


Figura 14: Sezione longitudinale con zoom solo sul disco D: pressioni e azioni agenti.

L'equilibrio alla traslazione orizzontale del disco D conduce a:

$$\tau_{h,GG}(z+dz) \cdot A_D = a_{gh} \cdot \gamma \cdot V_D + \tau_{h,GG}(z) \cdot A_D$$

dove $\tau_{h,GG}(z+dz) = \tau_{h,GG}(z) + d\tau_{h,GG}$. Inoltre $V_D = A_D \cdot dz$. Così l'equazione sopra conduce a:

$$d\tau_{h,GG} = a_{gh} \cdot \gamma \cdot dz = [a_{gh0} + a_{gh1}(H-z)] \cdot \gamma \cdot dz$$

l'integrazione fornisce:

$$\tau_{h,GG} = \left(a_{gh0} \cdot z + a_{gh1} \cdot H \cdot z - a_{gh1} \cdot \frac{z^2}{2} + c \right) \cdot \gamma$$

dove c rappresenta una costante di integrazione. Imponendo la condizione che in sommità (alla quota del pelo libero del materiale) le tensioni tangenziali siano nulle:

$$\tau_{h,GG}(z=0) = 0$$

si ottiene il valore della costante di integrazione C:

$$C = 0$$

Quindi integrando e imponendo la condizione al contorno che al pelo libero dei grani lo sforzo di taglio sia nullo $\tau_{h,GG}(z=0) = 0$, si ottiene:

$$\tau_{h,GG}(z) = (a_{gh0} + H \cdot a_{gh1}) \cdot \gamma \cdot z - a_{gh1} \cdot \gamma \cdot \frac{z^2}{2} \quad (37)$$

2.4.3.2 Equilibrio alla traslazione verticale e radiale dell'elemento E

I due equilibri alla traslazione, verticale e orizzontale (radiale), dell'elemento E sono accoppiati nel seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \gamma \cdot V_E (1 + a_{gv}) = \tau_{v,GW} \cdot A_E \\ p_{h,GW} \cdot A_E = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot V_E + p_{h,GG} \cdot A_E \end{cases}$$

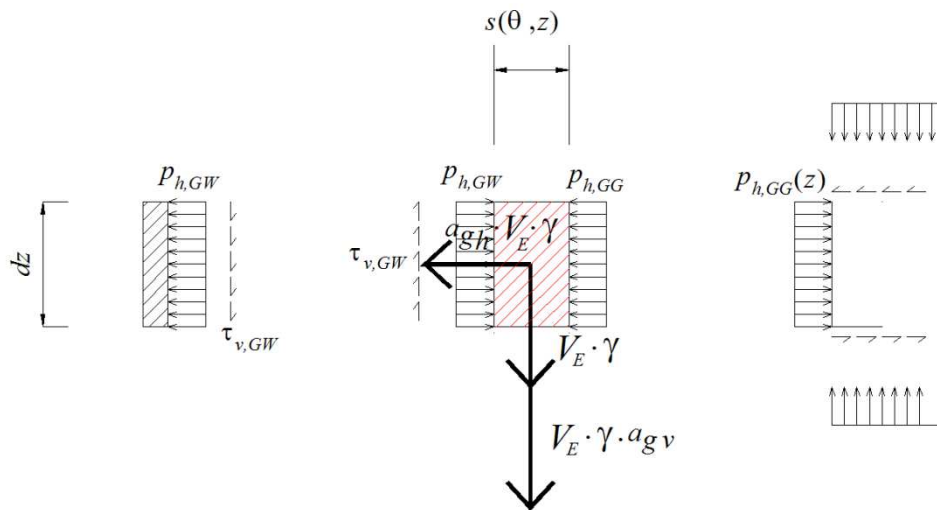


Figura 15. Sezione longitudinale con zoom solo sull'elemento E: pressioni e azioni agenti.

dove $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$ è l'area della superficie verticale esterna dell'elemento E, $V_E = s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz$ è il volume dell'elemento E, $a_{gh\perp}$ rappresenta la componente radiale dell'accelerazione orizzontale a_{gh} perpendicolare alla superficie esterna di E (diretta lungo ξ) (vedi Fig. 13): $a_{gh\perp} = a_{gh} \cdot \cos \theta$. Anche qui la formulazione è approssimata, poiché si considera che la superficie laterale

relativa a $p_{h,GG}$ sia uguale a quella relativa a $p_{h,GW}$, cioè sia per entrambe le pressioni pari a: $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$.

Dopo alcuni calcoli (vedi caso con accelerazione costante dove sono esplicitati per ottenere l'equazione 31), questo sistema di equazioni conduce alla forma chiusa dell'espressione di $p_{h,GW}(z, \theta)$ e di $s(z, \theta)$.

$$p_{h,GW} = \frac{P_{h,GG}}{1 - \nu \cdot a_{gh}^* \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

dove $\nu = \frac{1}{1 + a_{gv}}$. Riprendendo il risultato ottenuto nell'equilibrio orizzontale del disco D con l'equazione(27), l'equazione sopra diviene:

$$p_{h,GW} = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu (1 - \nu \cdot a_{gh}^* \cos \theta \cdot \mu_{GW})}$$

$$p_{h,GW}(z, \theta) = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu (1 - \nu \cdot [a_{gh0} + a_{gh1}(H - z)] \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW})} \quad (38)$$

Ora attraverso la legge d'attrito, con riferimento all'equazione (29) si può determinare la tensione tangenziale verticale tra elemento E e parete:

$$\tau_{v,GW}(z, \theta) = \frac{\mu_{GW} \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu (1 - \nu \cdot [a_{gh0} + a_{gh1}(H - z)] \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW})} \quad (39)$$

Per quanto riguarda lo spessore della porzione di grani che è sostenuta completamente dalla parete del silo, esso si ottiene da un'equazione quadratica di cui l'unica soluzione, che ha senso fisico, è quella col segno meno (dato che lo spessore non può essere maggiore del raggio R):

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta^* \cdot z}$$

$$\text{Con : } \beta^*(z, \theta) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW}} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot [a_{gh0} + a_{gh1} \cdot (H - z)] \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

Nel caso precedente con accelerazione orizzontale costante β era solo funzione di θ ; invece ora che l'accelerazione dipende da z , anche β dipende da z .

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh}^* \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \cdot z}$$

Esplicitando la nuova forma dell'accelerazione s diventa:

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot [a_{gh0} + a_{gh1} \cdot (H - z)] \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \cdot z} \quad (40)$$

2.4.3.3 Equilibrio alla traslazione tangenziale dell'elemento E

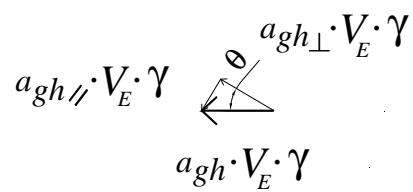
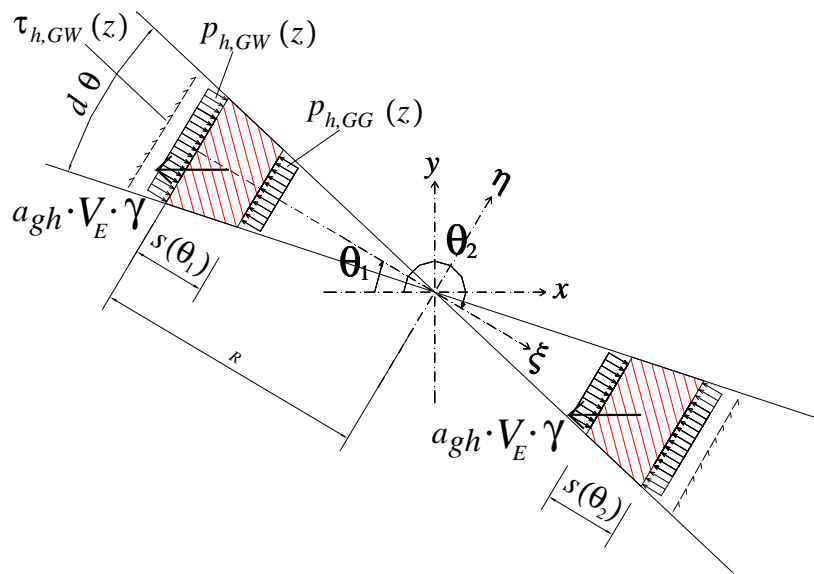
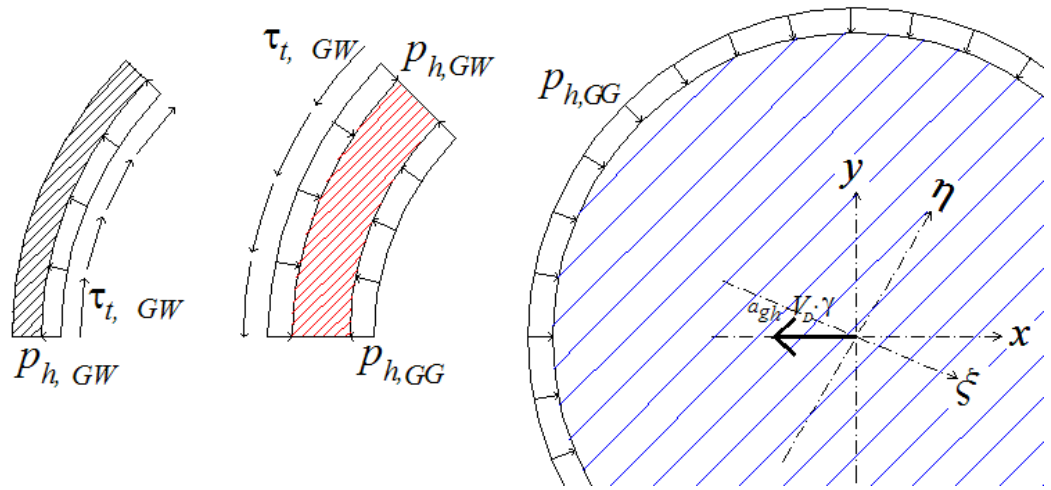


Figura 16: In alto: pianta nel caso 2 e zoom solo sull'elemento E esploso: pressioni e azioni agenti; in basso: due concetti di elemento E e infondo le componenti dell'accelerazione orizzontale aggiuntiva.

Si possono ripetere le considerazioni fatte nel caso di accelerazione orizzontale costante sulla Figura 16, la quale in alto mostra la pianta esplosa con zoom sull'elemento E, che è individuato dall'angolo θ .

La Figura 16 in basso riporta due concetti di elemento E e gli spessori s sono quotati in questo modo:

$$s(\theta_1) \neq s(\theta_2)$$

infatti nel caso di accelerazione orizzontale aggiuntiva E non è simmetrico.

L'equilibrio alla traslazione tangenziale dell'elemento E conduce a:

$$\tau_{t,GW} \cdot A_E = a_{gh||}^* \cdot \gamma \cdot V_E$$

dove $a_{gh||} = a_{gh} \sin \theta$ rappresenta la componente tangenziale dell'accelerazione orizzontale a_{gh} , componente parallela alla superficie verticale esterna (componente diretta lungo η) dell'elemento E (vedi Fig. 13 o 16). Inoltre il volume dell'elemento E è dato da: $V_E = s \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz$ e l'area della superficie laterale che compete alla tensione tangenziale è $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$. Così l'equazione sopra diviene:

$$\tau_{t,GW}(z, \theta) = a_{gh} \sin \theta \cdot \gamma \cdot s(z, \theta) \left(1 - \frac{s(z, \theta)}{2R} \right)$$

Sostituendo l'Eq. (33) del caso con accelerazione costante, avendo l'accortezza di modificare l'accelerazione con la nuova espressione lineare $a_{gh}^*(z)$, si ha:

$$\tau_{t,GW}(z, \theta) = \frac{a_{gh}^* \sin \theta \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot z}{1 - \nu \cdot a_{gh}^* \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

$$\tau_{t,GW}(z, \theta) = \frac{[a_{gh0} + a_{gh1} \cdot (H - z)] \cdot \sin \theta \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot z}{1 - \nu \cdot [a_{gh0} + a_{gh1} \cdot (H - z)] \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \quad (41)$$

2.4.4 Caso 3: accelerazione parabolica

Ora si effettuano gli equilibri considerando che l'accelerazione orizzontale vari in maniera parabolica lungo l'altezza del silo, cioè la sua espressione sia:

$$a_{gh}(z) = a_{gh}^* = a_{gh0} + a_{gh1} \cdot (H - z) + a_{gh2} \cdot (H - z)^2$$

Gli equilibri, che si riportano sotto, sono soltanto quelli diversi dai precedenti, sono quelli, cioè, dove compare l'accelerazione orizzontale, e sono quindi influenzati dalla variazione dell'accelerazione orizzontale.

Tali equilibri sono solo tre e sono:

4. Equilibrio orizzontale (radiale) del disco D
5. Equilibrio verticale e orizzontale (radiale) dell'elemento E
6. Equilibrio tangenziale dell'elemento E.

2.4.4.1 Equilibrio alla traslazione orizzontale (radiale) del disco D

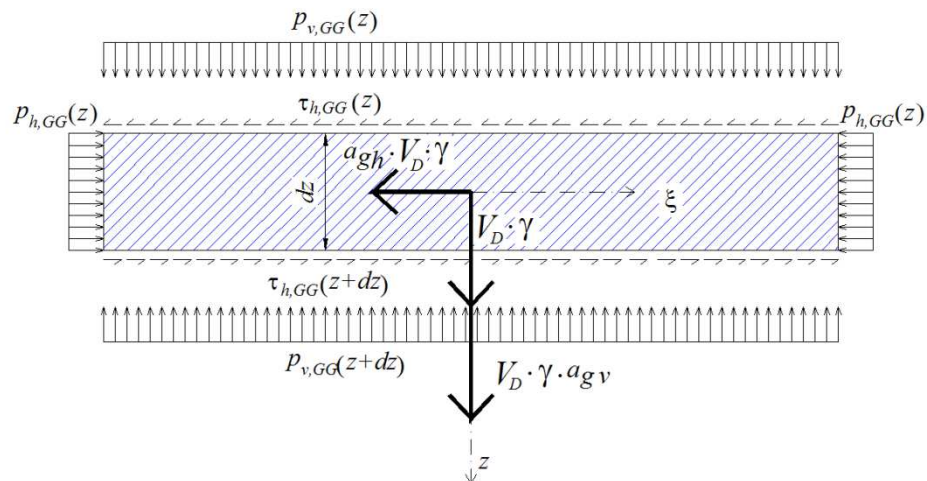


Figura 14: Sezione longitudinale con zoom solo sul disco D: pressioni e azioni agenti.

L'equilibrio alla traslazione orizzontale del disco D conduce a:

$$\tau_{h,GG}(z + dz) \cdot A_D = a_{gh}^* \cdot \gamma \cdot V_D + \tau_{h,GG}(z) \cdot A_D$$

dove $\tau_{h,GG}(z + dz) = \tau_{h,GG}(z) + d\tau_{h,GG}$. Inoltre $V_D = A_D \cdot dz$. Così l'equazione sopra conduce a:

$$d\tau_{h,GG} = a_{gh}^* \cdot \gamma \cdot dz = \left[a_{gh0} + a_{gh1}(H - z) + a_{gh2}(H - z)^2 \right] \cdot \gamma \cdot dz$$

l'integrazione fornisce anche qui una costante di integrazione C . Imponendo la condizione che in sommità (alla quota del pelo libero del materiale) le tensioni tangenziali siano nulle:

$$\tau(z = 0) = 0$$

si ottiene il valore della costante di integrazione C :

$$C = 0$$

Quindi integrando e imponendo la condizione al contorno che al pelo libero dei grani lo sforzo di taglio sia nullo $\tau_{h,GG}(z = 0) = 0$, si ottiene:

$$\tau_{h,GG}(z) = \left(a_{gh0} + H \cdot a_{gh1} + H^2 \cdot a_{gh2} \right) \cdot \gamma \cdot z - \left(a_{gh1} + 2 \cdot H \cdot a_{gh2} \right) \cdot \gamma \cdot \frac{z^2}{2} + a_{gh2} \cdot \gamma \cdot \frac{z^3}{3} \quad (42)$$

2.4.4.2 Equilibrio alla traslazione verticale e radiale dell'elemento E

I due equilibri alla traslazione, verticale e orizzontale (radiale), dell'elemento E sono accoppiati nel seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \gamma \cdot V_E (1 + a_{gv}) = \tau_{v,GW} \cdot A_E \\ p_{h,GW} \cdot A_E = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot V_E + p_{h,GG} \cdot A_E \end{cases}$$

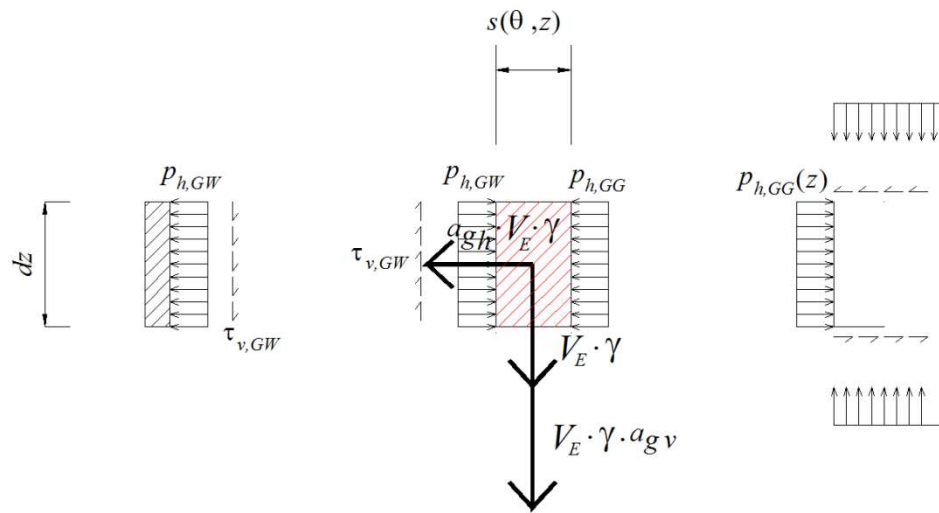


Figura 15. Sezione longitudinale con zoom solo sull'elemento E: pressioni e azioni agenti.

dove $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$ è l'area della superficie verticale esterna dell'elemento E,

$V_E = s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz$ è il volume dell'elemento E, $a_{gh\perp}$ rappresenta la componente radiale dell'accelerazione orizzontale a_{gh} perpendicolare alla superficie esterna di E (diretta lungo ξ) (vedi Fig. 16), $a_{gh\perp} = a_{gh} \cdot \cos \theta$.

Si ricorda ancora che si commette un'approssimazione considerando l'area A_E relativa non solo alla pressione $p_{h,GW}$ (che è corretto), ma anche relativa alla pressione $p_{h,GG}$ (commettendo un'approssimazione).

Dopo alcuni calcoli (vedi caso con accelerazione costante dove sono esplicitati), questo sistema di equazioni conduce alla forma chiusa dell'espressione di $p_{h,GW}$ e di s .

$$p_{h,GW} = \frac{p_{h,GG}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

dove $\nu = \frac{1}{1 + a_{gv}}$. Riprendendo il risultato ottenuto nell'Eq.(27), l'equazione sopra diviene:

$$p_{h,GW}(z, \theta) = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu (1 - \nu \cdot a_{gh}^* \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW})}$$

Sostituendovi la forma quadratica dell'accelerazione si ha:

$$p_{h,GW}(z, \theta) = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu \cdot \left[1 - \nu \cdot \left[a_{gh0} + a_{gh1}(H - z) + a_{gh1}(H - z)^2 \right] \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW} \right]} \quad (43)$$

Ora attraverso la legge d'attrito, con riferimento all'equazione (29) si può determinare la tensione tangenziale verticale tra elemento E e parete:

$$\tau_{v,GW}(z, \theta) = \frac{\mu_{GW} \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu \cdot \left[1 - \nu \cdot \left[a_{gh0} + a_{gh1}(H - z) + a_{gh1}(H - z)^2 \right] \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW} \right]} \quad (44)$$

Per quanto riguarda lo spessore della porzione di grani che è sostenuta completamente dalla parete del silo, esso si ottiene da un'equazione quadratica di cui l'unica soluzione, che ha senso fisico, è quella col segno meno (dato che lo spessore non può essere maggiore del raggio R):

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta^* \cdot z}$$

Con :

$$\beta^*(z, \theta) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW}} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot [a_{gh0} + a_{gh1} \cdot (H - z) + a_{gh2} \cdot (H - z)^2] \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

Sostituendo β e l'espressione dell'accelerazione parabolica si ha:

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh}^* \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \cdot z}$$

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot [a_{gh0} + a_{gh1} \cdot (H - z) + a_{gh2} \cdot (H - z)^2] \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \cdot z} \quad (45)$$

2.4.4.3 Equilibrio alla traslazione tangenziale dell'elemento E

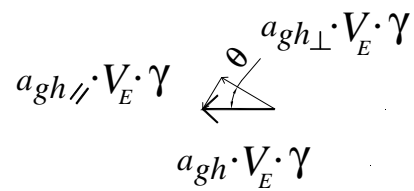
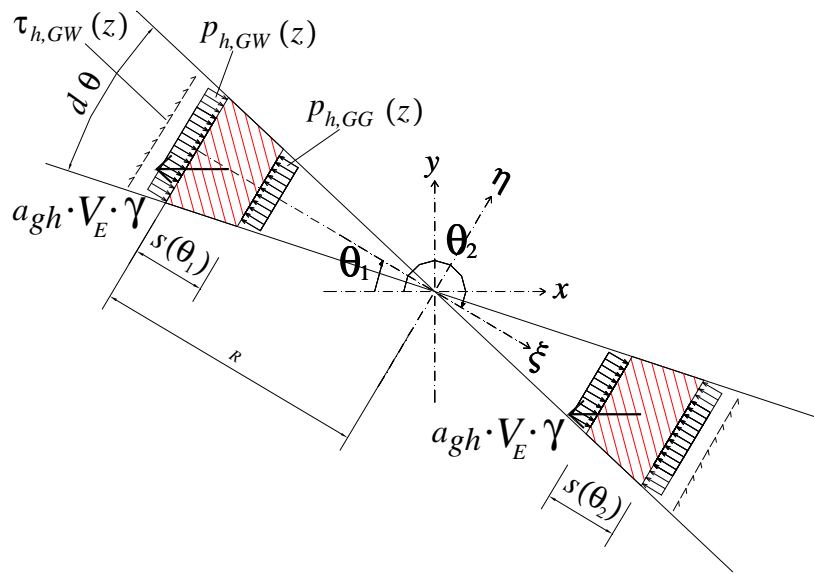
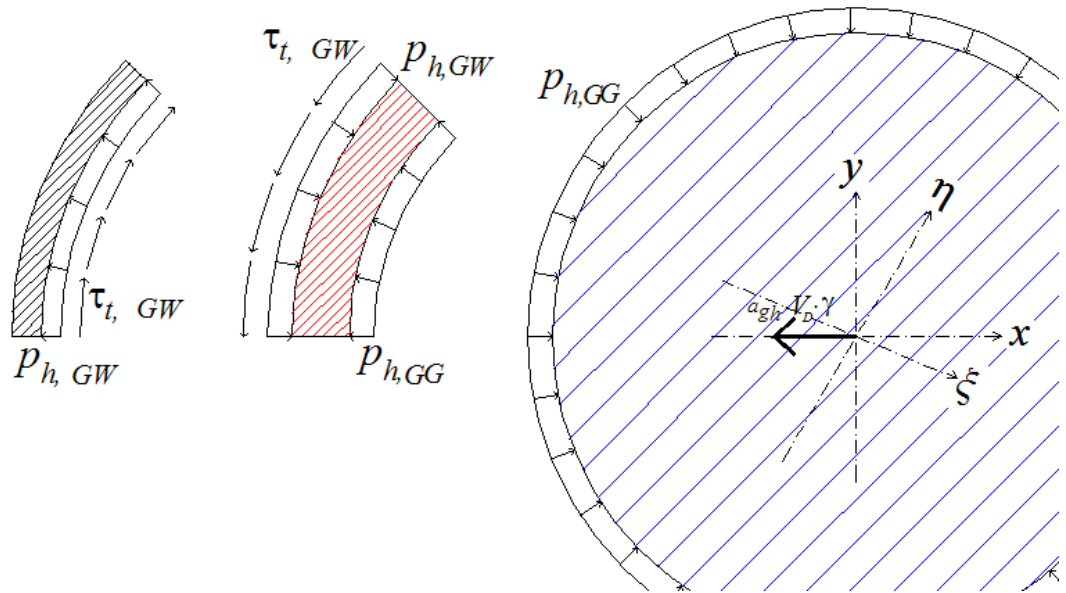


Figura 16: In alto: pianta nel caso 2 e zoom solo sull'elemento E esploso: pressioni e azioni agenti; in basso: due concetti di elemento E e infondo le componenti dell'accelerazione orizzontale aggiuntiva.

Si possono ripetere le considerazioni fatte nel caso di accelerazione orizzontale costante sulla Figura 16, la quale in alto mostra la pianta esplosa con zoom sull'elemento E, che è individuato dall'angolo θ .

La Figura 16 in basso riporta due concetti di elemento E e gli spessori s sono quotati in questo modo:

$$s(\theta_1) \neq s(\theta_2)$$

infatti nel caso di accelerazione orizzontale aggiuntiva E non è simmetrico.

L'equilibrio alla traslazione tangenziale dell'elemento E conduce a:

$$\tau_{t,GW} \cdot A_E = a_{gh||}^* \cdot \gamma \cdot V_E$$

dove $a_{gh||}^* = a_{gh}^* \sin \theta$ rappresenta la componente tangenziale dell'accelerazione orizzontale a_{gh} , componente parallela alla superficie verticale esterna (componente diretta lungo η) dell'elemento E (vedi Fig.13 o 16), $a_{gh||}^* = a_{gh}^* \sin \theta$. Inoltre il volume dell'elemento E è dato da:

$$V_E = s \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz$$

e l'area della superficie laterale che compete alla tensione tangenziale è $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$. Così l'equilibrio tangenziale diviene:

$$\tau_{t,GW} = a_{gh}^* \sin \theta \cdot \gamma \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R} \right)$$

Sostituendo l'Eq. (33) del caso con accelerazione costante, avendo l'accortezza di modificare l'accelerazione con la nuova espressione parabolica $a_{gh}^*(z)$, si ha:

$$\tau_{t,GW}(z, \theta) = \left(\frac{a_{gh}^* \cdot \sin \theta \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh}^* \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \right) \cdot z$$

$$\tau_{r,GW}(z, \theta) = \frac{\left[a_{gh0} + a_{gh1} \cdot (H - z) + a_{gh2} \cdot (H - z)^2 \right] \cdot \sin \theta \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot z}{1 - \nu \cdot \left[a_{gh0} + a_{gh1} \cdot (H - z) + a_{gh2} \cdot (H - z)^2 \right] \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \quad (46)$$

2.4.5 Versione non approssimata Caso 2

Nell'equilibrio radiale è stato commentato il fatto che si sia commessa un'approssimazione sull'area A_E sulla faccia interna all'elemento E, dove agiscono le $p_{h,GG}$. Per completezza vengono ora inseriti anche i risultati più precisi, con la valutazione esatta dell'area in questione. I risultati diversi sono le tre incognite legate nel sistema e nella legge d'attrito, cioè s , $p_{h,GW}$, $\tau_{v,GW}$.

Equilibrio radiale dell'elemento E:

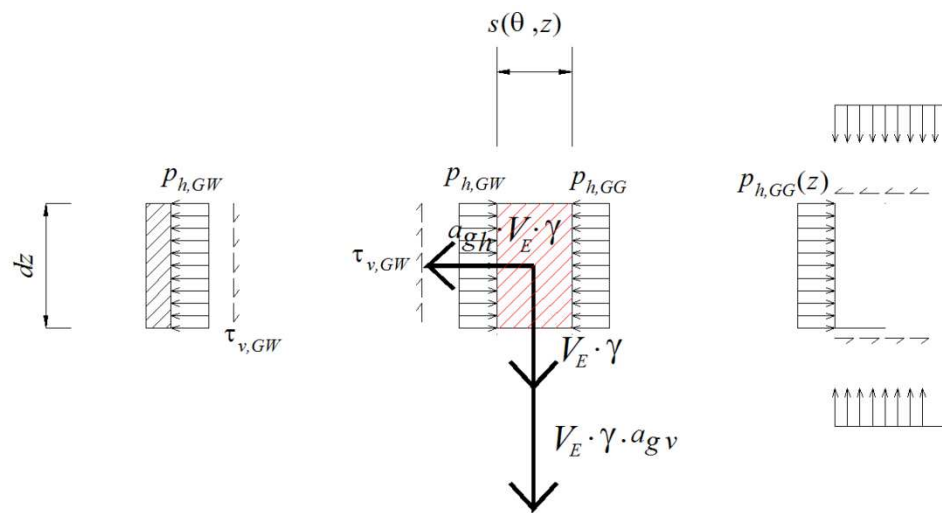


Figura 15. Sezione longitudinale con zoom solo sull'elemento E: pressioni e azioni agenti.

$$p_{h,GW} \cdot A_E = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot V_E + p_{h,GG} \cdot \bar{A}_E$$

Dove:

$$\bar{A}_E = (R - s) \cdot d\theta \cdot dz$$

$$A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$$

Il sistema di tre equazioni (equilibrio radiale, verticale, legge d'attrito) sull'elemento E in tre incognite (s , $p_{h,GW}$, $\tau_{v,GW}$) dà:

$$s(z, \theta) = \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi} + \frac{R}{\psi} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \quad (47)$$

dove:

$$\psi = a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu - 1$$

$$\psi_2 = a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu - 2$$

L'equilibrio verticale dell'elemento E dà:

$$\tau_{v,GW}(z, \theta) = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot \nu} + \gamma \cdot \frac{R}{\psi \cdot \nu} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \cdot \left(1 - \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot 2 \cdot R} - \frac{1}{\psi \cdot 2} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$

Attraverso la legge d'attrito si ottiene infine:

$$p_{h,GW}(z, \theta) = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot \nu \cdot \mu} + \gamma \cdot \frac{R}{\psi \cdot \nu \cdot \mu} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \cdot \left(1 - \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot 2 \cdot R \cdot \mu} - \frac{1}{\psi \cdot 2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$

Per alleggerire la notazione vistosa si è indicato μ_{GW} più semplicemente con μ .

I passaggi analitici sono i seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{\nu} \cdot V_E = \tau_{v,GW} \cdot A_E \\ p_{h,GW} \cdot A_E = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot V_E + p_{h,GG} \cdot \bar{A}_E \end{array} \right.$$

Dalla prima equazione (equilibrio verticale) si ottiene:

$$\tau_{v,GW} = \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{V_E}{A_E} = \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{s}{R} \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right)$$

Avendo semplificato $d\theta$ e dz

$$\tau_{v,GW} = \frac{\gamma}{\nu} \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right)$$

Dalla seconda equazione si ha:

$$p_{h,GW} \cdot R \cdot d\theta \cdot dz = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot s \cdot \left(R - \frac{s}{2}\right) \cdot d\theta \cdot dz + p_{h,GG} \cdot (R - s) \cdot d\theta \cdot dz$$

Semplificando $d\theta$ e dz e dividendo per R si arriva a:

$$p_{h,GW} = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right) + p_{h,GG} \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

Inserendo a destra la legge d'attrito (equazione 29) si ha:

$$p_{h,GW} = \frac{\tau_{v,GW}}{\mu_{GW}} = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right) + p_{h,GG} \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

Sostituendo il risultato ottenuto dall'equilibrio verticale dell'elemento E sulle tensioni tangenziali verticali si ha:

$$\frac{\gamma \cdot s}{\nu \cdot \mu_{GW}} \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right) = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right) + p_{h,GG} \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

Inserendo il risultato dell'equilibrio radiale del disco D (equazione 27):

$$\frac{\gamma \cdot s}{\nu \cdot \mu_{GW}} \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right) = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2 \cdot R}\right) + \lambda \cdot \frac{\gamma}{\nu} \cdot z \cdot \left(1 - \frac{s}{R}\right)$$

Semplificando γ e riordinando i termini:

$$s^2 \frac{a_{gh\perp} \cdot \mu_{GW} \cdot \nu - 1}{2 \cdot R \cdot \mu_{GW} \cdot \nu} + s \cdot \left(\frac{1}{\mu_{GW}} - a_{gh\perp} + \frac{\lambda \cdot z}{R \cdot \nu}\right) - \frac{\lambda \cdot z}{\nu} = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene s:

$$s = \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi} \pm \frac{R}{\psi} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu \cdot \psi^2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

dove:

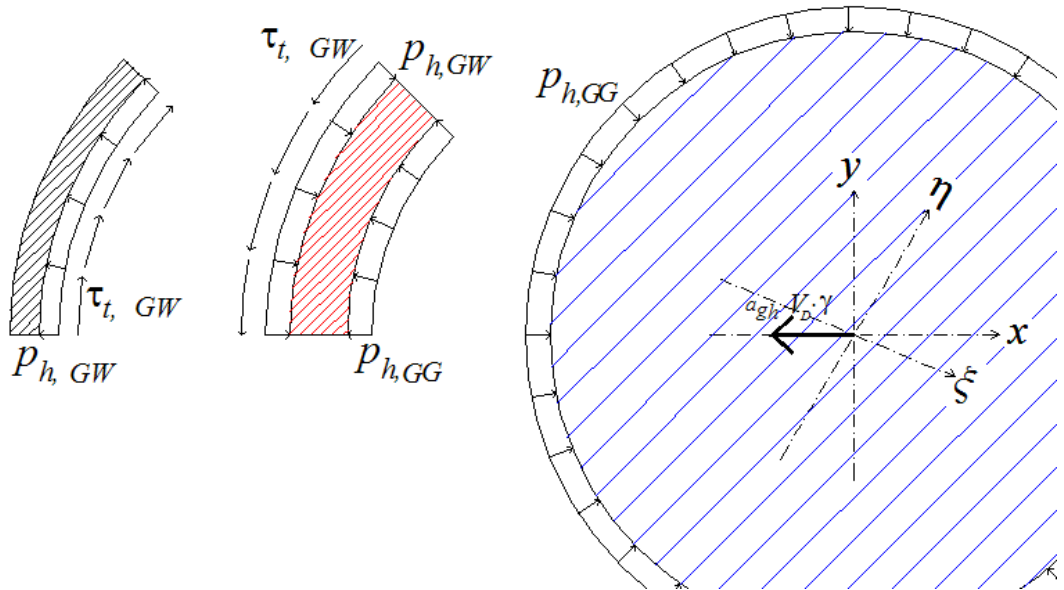
$$\psi = a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu - 1$$

$$\psi_2 = a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu - 2$$

Ψ sono entrambi negativi e la soluzione dell'equazione col segno negativo non avrebbe significato fisico, quindi si esclude.

Equilibrio alla traslazione tangenziale

Nel caso 2 si modifica anche l'equilibrio alla traslazione tangenziale, in quanto la τ verticale è funzione di s :



Equilibrio verticale:

$$\tau_{t, GW} \cdot A_E = a_{gh\parallel} \cdot \gamma \cdot V_E$$

$$\tau_{t, GW}(z, \theta) \approx a_{gh} \cdot \sin \theta \cdot \gamma \cdot s =$$

$$= a_{gh} \cdot \sin \theta \cdot \gamma \cdot \left(\frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi} + \frac{R}{\psi} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu \cdot \psi^2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$

2.5 NOTA: Riguardo a λ

Il rapporto tra pressione verticale e orizzontale (radiale) sul disco D è stabilito da questa relazione:

$$p_{h,GG}(z) = \lambda \cdot p_{v,GG}(z)$$

Nel testo di Pozzati di Tecnica delle Costruzioni, nel capitolo quarto sui silos, è indicata una modalità di calcolo di λ .

140

Capitolo quarto

carico appeso alla parete a causa dell'attrito e quindi massimo lo sforzo normale verticale n_v della parete (fig. 4.4). La sollecitazione n_v , che è riferita al tratto lungo l della parete stessa, si ricava immediatamente per differenza

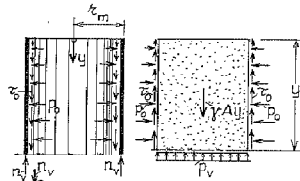


Fig. 4.4

fra il peso $\gamma A y$ del materiale sopra la sezione alla generica quota y e la reazione $p_v A$ del materiale sottostante (fig. 4.4); ossia

$$n_{v,max} = (\gamma y - p_{v,min}) A : l_m \quad [4.8]$$

essendo l_m la lunghezza della linea media fra i due contorni ($l_m = 2\pi r_m$ per una cella circolare); naturalmente al valore [4.8], conseguente alla presenza del solo materiale insilato, vanno aggiunti i contributi delle rimanenti azioni (peso proprio, copertura).

b) I valori [4.6] delle pressioni massime possono essere ottenuti anche per via diretta; per la terza delle [4.1], con l'aumentare della pressione p_v , aumenta di pari passo τ_0 . Consideriamo allora uno strato di materiale avente lo spessore dy ; essendo da un lato crescente p_v , quindi anche τ_0 , e dall'altro mantenendosi a qualunque quota costante il peso $\gamma \cdot A dy$ di ogni elemento di materiale, oltre una certa profondità l'azione di sostentamento derivante dall'attrito sarà in grado di equilibrare pressochè completamente il peso dei vari straterelli, per cui questi risulteranno appesi alle pareti e non si avrà più alcun sensibile incremento della p_v . Mettendo in formula il discorso fatto si ha, per $y = \infty$,

$$\tau_0 l \cdot dy = \gamma A \cdot dy,$$

e si ottengono quindi le relazioni [4.6], poichè $\tau_0 = p_v \lambda f$ e $p_o = \lambda p_v$.

$$c) \text{ I valori di } \lambda = \frac{p_o}{p_v}, \quad f = \frac{\tau_0}{p_o}.$$

Koenen propose (1896) di adottare per λ il valore che Rankine aveva definito nel caso limite illustrato nel par. 3.3.2

$$\lambda = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi}, \quad [4.9]$$

ossia nel caso della spinta attiva per un terreno illimitato; ma era evidente la contraddizione di attribuire a λ il valore di Rankine (valido nel caso in cui, essendo y direzione principale, τ_v risulta nulla) proprio quando la tensione tangenziale τ_v gioca invece un ruolo essenziale.

Il rapporto fra pressione orizzontale e verticale doveva quindi venir determinato ammettendo la presenza della τ_v ; e così è stato fatto, come venne mostrato nel par. 3.3.4, trovando per λ un'espressione (Camiz, v. nota 3.14) che, per $\delta = 0$, coincide con la [4.9], e per il massimo valore di δ ($\delta = \varphi$) diventa (Buisman, v. bibl.)

$$\lambda = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi} \quad (4.2) \quad [4.10]$$

4.2.2. L'ausilio delle esperienze. Valori di λ , f .

a) Il problema delle azioni trasmesse alle pareti dei sili è assai complesso e si presenta quanto mai opportuno l'appello a indicazioni sperimentali che, pur presentando grande dispersione, consentono di trarre alcune utili indicazioni.

Innanzi tutto le ipotesi di Janssen sembrano sostanzialmente confermate: i valori dei coefficienti λ , f , variando y , si mantengono abbastanza uniformi; e l'uniformità della pressione p_v su ogni sezione si presenta naturalmente più verosimile quando il materiale è in quiete, il foro per lo scarico è centrato e la cella è snella. Inoltre la più parte delle esperienze mostra concordemente la grande differenza fra i regimi delle pressioni che si hanno, pur essendo i livelli di riempimento uguali, con le bocche di scarico chiuse e aperte ^(4.2). Il fatto è, per esempio, bene evidente esaminando la fig. 4.5 che riporta i risultati di significative prove con materiale granulare: il valore di λ in genere aumenta sensibilmente e in misura irregolare quando lo scarico è in atto, ma risulta, anche in regime statico, maggiore del valore [4.9] di Koenen-Rankine.

Il valore limite p_v non dipende da λ , secondo la [4.6]; ma, naturalmente, dipende da λ la pressione p_v per la presenza nella [4.5] della funzione $\psi(y)$. Aumentando il valore di λ diminuisce y_v e aumentano quindi, alle varie quote y , i valori della funzione $\psi(y)$; e si ha in definitiva che un incremento positivo del valore di λ comporta, per p_v , un aumento in ogni punto, ma più sensibile nella parte alta della cella (fig. 4.3a). Pertanto i sili proporzionati con il valore [4.9] di λ proposto da Koenen hanno un più ridotto coefficiente di sicurezza, relativamente a p_v , nella loro parte più alta; e ciò spesso nell'in-

^(4.2) I valori di λ calcolati con la [4.9] (Koenen-Rankine), e con la [4.10] (Camiz-Buisman) sono sensibilmente diversi e i secondi sono più prossimi a quelli ottenuti sperimentalmente, come si dirà in seguito. Ad esempio, per $\varphi = 20^\circ - 25^\circ - 30^\circ - 35^\circ - 40^\circ - 45^\circ$, i valori che si ottengono con la prima o la seconda (posti fra parentesi) delle due formule sono: 0,490 (0,791) - 0,406 (0,697) - 0,333 (0,600) - 0,271 (0,505) - 0,217 (0,415) - 0,172 (0,333).

^(4.3) Sono stati suggeriti alcuni accorgimenti per ridurre l'aumento delle spinte all'atto dello scarico del materiale. Si veda REIMBERT, *op. cit.* (v. bibl.), p. 55: l'applicazione di un

Pozzati ricorda come la teoria di Rankine, riferita alle pressioni orizzontali e verticali nel terreno, effettui un rapporto costituito dal coefficiente di spinta a riposo K_0 .

Se usassimo la definizione di K_0 nella nostra teoria troveremmo:

$$\lambda = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

Ma Pozzati fa notare come Rankine stabilisca l'ipotesi di avere $\tau_v = 0$

Invece nel nostro caso (all'interno del disco) le tensioni tangenziali verticali sono diverse da zero.

Quindi Pozzati suggerisce un secondo calcolo di λ , che usa una formula di Camiz:

$$\lambda = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} \quad (48)$$

Considerando un angolo di attrito del terreno $\varphi = 30^\circ$, λ risulta 0,6 con la formula di Camiz.

2.6 NOTA: Sull'equilibrio del momento

Gli equilibri verticale e radiale dell'elemento E nei tre casi (statico, con accelerazione verticale e con accelerazione orizzontale aggiuntiva), sono solo equilibri alla traslazione e, osservando l'immagine della sezione verticale sembrerebbe che l'equilibrio del momento non sia soddisfatto.

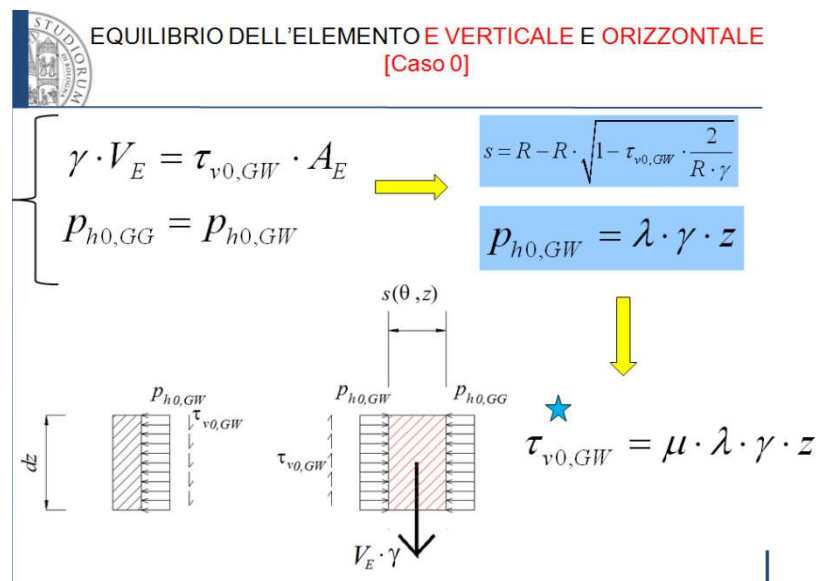


Figura 17: Sintesi dell'equilibrio verticale e radiale nel caso 0.

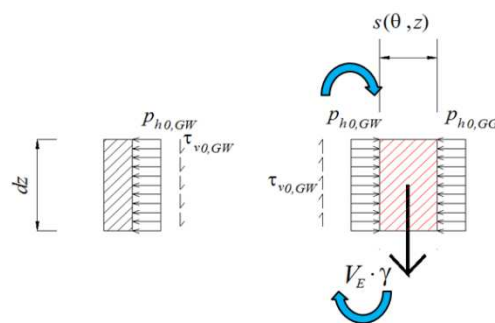


Figura 18: Momento "apparente" tra il peso dell'elemento E e le τ verticali al confine con la parete.

In realtà nelle immagini sopra vi è un'approssimazione riguardo alle pressioni verticali agenti sull'elemento E.

Sia la teoria di Pozzati sia la teoria di Janssen affermano che le pressioni verticali, riferite a una certa quota z , possono considerarsi costanti; ma in realtà hanno un andamento parabolico con un massimo al centro e un minimo agli estremi, cioè a contatto con le pareti.

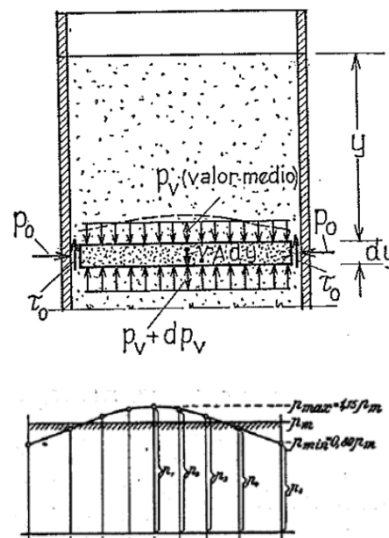


Figura 19: Le pressioni verticali nelle teorie di Pozzati (sopra) e di Janssen (sotto): andamento parabolico approssimato con andamento costante.

La teoria di Trombetti et al., seguendo questa linea teorica, ha posto le tre assunzioni (discusse nella premessa alla teoria) sulle pressioni dei grani prossimi alla parete, cioè dei grani appartenenti all'elemento E. Le tre assunzioni riguardano l'annullamento di tre tensioni: le tensioni tangenziali (orizzontali e radiali in pianta), le tensioni tangenziali verticali tra elemento E e disco D (cioè tra grani vicini alla parete e tra grani interni all'insilato) e le pressioni verticali sull'elemento E.

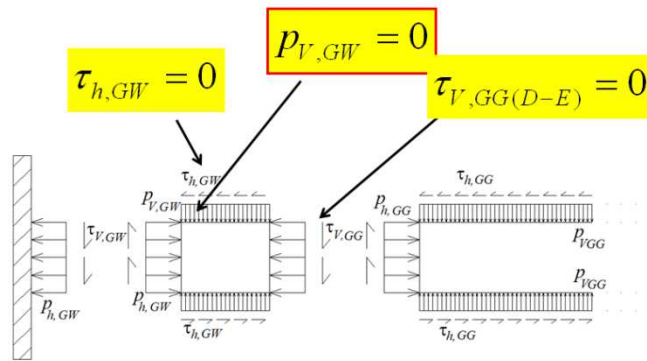


Figura 20: le tre assunzioni della teoria di Trombetti at al, in particolare la rossa: sulle pressioni verticali.

Annulare le pressioni verticali sull'elemento E significa abbandonare l'idea di considerare costante la pressione verticale a una certa quota e avvicinarsi all'andamento effettivo delle p_v , cioè elevato al centro e minimo o nullo agli estremi a contatto con le pareti.

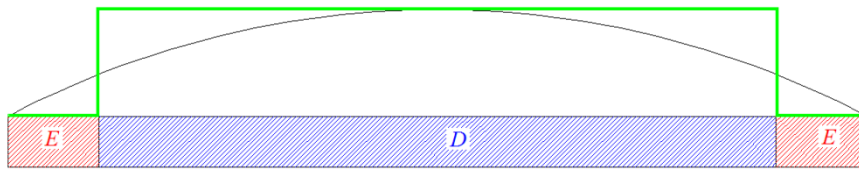


Figura 21: Semplificazione della teoria di Trombetti: su E (rosso) le pressioni verticali (verdi) sono nulle, mentre sul disco D (blu) sono costanti (rettangolo verde).

L'approssimazione della terza assunzione (p_v nulle) su tutta la porzione E e non solo sul bordo è lecita in quanto la dimensione radiale di E è pari ad "s", cioè è piccola. In realtà considerando la presenza di piccole p_v , crescenti verso il centro dell'insilato, si ottiene una risultante verticale che equilibra il momento.

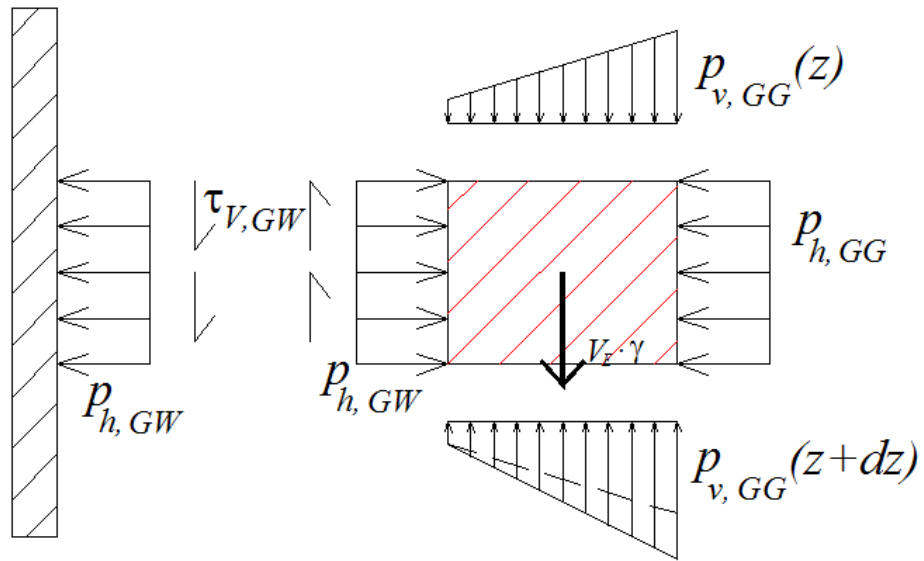


Figura 22: pressioni verticali alla quota z e $(z+dz)$, sull'elemento E.

Le pressioni p_v a quota $(z + dz)$ risultano maggiori delle pressioni a quota z , a causa del costipamento del materiale insilato, quindi eseguendo l'equilibrio verticale rimane una dp_v all'intradosso di E.

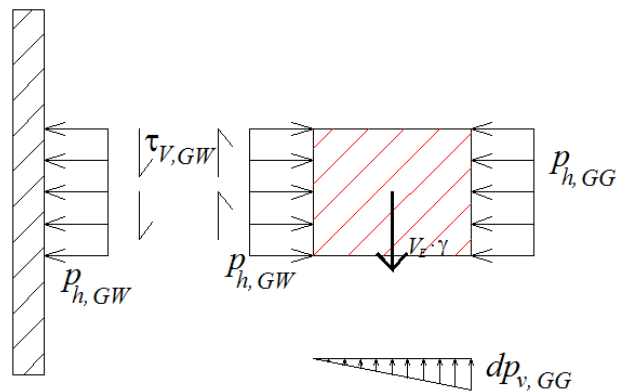


Figura 23: dp_v all'intradosso di E.

La risultante delle pressioni verticali sarà:

$$dp_v s = p \text{ applicata a } ds/3 \text{ dal disco D.}$$

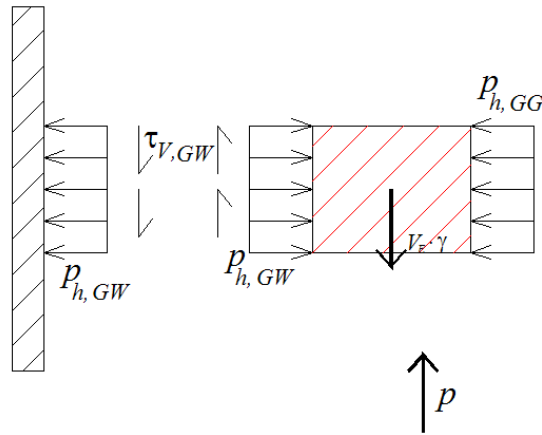


Figura 24: Risultante delle pressioni verticali all'intradosso, che equilibra il momento.

La risultante “p” bilancia l'equilibrio del momento dell'elemento E.

Inoltre l'equilibrio verticale nel caso “reale”, cioè senza l'approssimazione sulle pressioni verticali è:

$$\tau_v \cdot A_E = \gamma \cdot V_E - p$$

$$\tau_{v, \text{Reali}} \cdot (R \cdot d\theta \cdot dz) = \gamma \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \cdot s - \gamma \cdot dz \cdot s$$

Mentre, annullando le pressioni verticali (secondo una delle assunzioni della teoria di Trombetti: $p = 0$ sull'elemento E), l'equilibrio verticale è comunque assicurato poiché le tensioni tangenziali, calcolate usando la legge d'attrito, sono le massime possibili, quindi rappresentano un estremo limite superiore delle tensioni tangenziali verticali reali considerate nell'equilibrio verticale precedente.

$$\tau_{v, \text{max}} \cdot A_E = \gamma \cdot V_E - 0$$

$$(\mu_{GW} \cdot p_{hGW}) \cdot (R \cdot d\theta \cdot dz) \approx \gamma \cdot s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz$$

2.7 CONFRONTO tra la formulazione esatta e approssimata

Sono state sviluppate due formulazioni: una approssimata ma più maneggevole, che sarà usata anche in seguito, e una più precisa ma dalla forma complessa e di difficoltoso utilizzo.

La differenza fra le due formulazioni verte su una considerazione geometrica che interviene nell'equilibrio radiale dell'elemento E: nella formulazione approssimata le aree che competono alle due pressioni in gioco ($p_{h,GG}$, $p_{h,GW}$) sono considerate uguali, mentre nella formulazione esatta si distingue un'area interna riferita a $p_{h,GG}$, e un'area esterna, riferita a $p_{h,GW}$.

Nel caso 0 si interviene dunque in questi termini

$$p_{h0,GG} \cdot \bar{A}_E = p_{h0,GW} \cdot A_E$$

Nel caso 1:

$$p_{h1,GG} \cdot \bar{A}_E = p_{h1,GW} \cdot A_E$$

Nel caso 2:

$$p_{h,GW} \cdot A_E = a_{gh\perp} \cdot \gamma \cdot V_E + p_{h,GG} \cdot \bar{A}_E$$

La differenza sulle due aree è:

$$\bar{A}_E = (R - s) \cdot d\theta \cdot dz$$

$$A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$$

Se si considerasse un ds infinitesimo queste differenze sarebbero trascurabili e la formulazione esatta coinciderebbe con quella approssimata.

Ragionando in termini finiti invece viene a mancare proprio l'incognita fondamentale in una equazione e le differenze tra le due formulazioni risultano più accentuate alla base, dove "s" è massimo.

Riassumendo le differenze:

Caso 0 e Caso 1:

Formulazione approssimata

$$s(z) = R - R \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{R} \cdot \mu_{GW} \cdot \lambda \cdot z}$$

Formulazione esatta:

$$s(z) = R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}$$

Entriamo ora nei dettagli del confronto:

Considerando un provino alto 65 cm e di raggio 65 cm in plexiglass con i seguenti dati:

H=	65cm
D=	65cm
R=	32,5cm
μ =	0,58
λ =	0,26
ϕ =	50°

Calcoliamo s a varie quote usando entrambe le formulazioni:

Approximated Version:		Exact Version:		z[cm]	$\xi=sA/sE$	$\xi=sE/sA$	sE = %sA
z[cm]	sA [cm]	z[cm]	sE[cm]				
0	0	0	0	0			
16	2,54	16	2,35	16	1,08	0,92	92,48
33	5,33	33	4,52	33	1,18	0,85	84,94
49	8,43	49	6,52	49	1,29	0,77	77,34
65	11,99	65	8,34	65	1,44	0,70	69,55

Risulta:

s esatto < s approssimato

Quindicon la formulazione approssimata si attribuisce alle pareti maggior pressione.

Dai rapporti fra i due valori di s si osserva che in sommità s esatto è circa il 90% di s approssimato, mentre al fondo s esatto è circa il 70% di s approssimato.

Caso 2 con accelerazione orizzontale aggiuntiva:

Formulazione approssimata:

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$$

Formulazione esatta:

$$s(z, \theta) = \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi} + \frac{R}{\psi} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

dove:

$$\psi = a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu - 1$$

$$\psi_2 = a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot \nu - 2$$

Considerando i dati del provino in plexiglass riportati sopra si calcolano i valori dei due diversi s a varie quote e si fa il confronto:

$$a_{gh} = 0,2$$

$$a_{gv} = 0$$

$$\nu = 1$$

$$\psi_1 = -0.9$$

$$\psi_2 = -1.9$$

z[cm]	sA[cm]	z[cm]	sE[cm]	sE/sA
0	0	0	0	
16	2,9	16	2,6	0,91
33	6,1	33	5,1	0,83
49	9,8	49	7,2	0,74
65	14,1	65	9,2	0,65

Anche in questo caso la formulazione approssimata dà i valori di s maggiori. Dai rapporti fra i due valori di s si osserva che in sommità s esatto è circa il 90% di s approssimato, mentre al fondo s esatto è circa il 65% di s approssimato.

2.8 RIASSUNTO

Si riassumono ora entrambe le formulazioni.

Si parte dalla formulazione approssimata: si introducono prima le relazioni geometriche che la governano per passare poi ai risultati dei tre casi (statico 0, con accelerazione verticale 1 e con accelerazione orizzontale aggiuntiva 2)



RELAZIONI GEOMETRICHE

Area Disco D $A_D = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R - s)^2$

Volume Disco D $V_D = A_D \cdot dz$

Area elem. E $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$

Volume Elem. E $V_E = \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \cdot s(z)$

Caso 0

$$P_{v0,GG} = \gamma \cdot z$$

$$P_{h0,GG} = \lambda \cdot \gamma \cdot z$$

$$\tau_{h0,GG} = 0$$

$$P_{h0,GW} = \lambda \cdot \gamma \cdot z$$

$$\tau_{v0,GW} = \mu \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot z$$

$$s = R - R \cdot \sqrt{1 - \tau_{v0,GW} \cdot \frac{2}{R \cdot \gamma}}$$

$$s = R - R \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{GW} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot z}$$

$$\tau_{t0,GW} = 0$$

|

Caso 1

$$P_{v1,GG} = (1 + a_{gv}) \cdot \gamma \cdot z = \frac{\gamma}{v} \cdot z$$

$$P_{h1,GG} = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$$

$$\tau_{h1,GG} = 0$$

$$P_{h1,GW} = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$$

$$\tau_{v1,GW} = \mu_{GW} \cdot \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$$

$$s = R - R \cdot \sqrt{1 - \tau_{v1,GW} \cdot \frac{2 \cdot v}{R \cdot \gamma}}$$

$$s = R - R \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{GW} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot z}$$

$$s_1 = s_0$$

$$\tau_{t1,GW} = 0$$

.

	COSTANTE	LINEARE	PARABOLICO
1	$P_{v,GG}(z) = \frac{\gamma}{v} \cdot z$	$P_{v,GG}(z) = \frac{\gamma}{v} \cdot z$	$P_{v,GG}(z) = \frac{\gamma}{v} \cdot z$
2	$P_{h,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$	$P_{h,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$	$P_{h,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$
3	$\tau_{h,GG}(z) = a_{gh} \cdot \gamma \cdot z$	$\tau_{h,GG}(z) = \gamma \cdot z \left[a_{g0} + a_{g1} \cdot \left(H - \frac{z}{2} \right) \right]$	$\tau_{h,GG}(z) = \gamma \cdot z \left[a_{g0} + a_{g1} \cdot \left(H - \frac{z}{2} \right) + a_{g2} \cdot \left(H - \frac{z}{2} - Hk \right) \right]$
4	$\tau_{v,GW} = \mu_{GW} \cdot P_{h,GW}$	$\tau_{v,GW} = \mu_{GW} \cdot P_{h,GW}$	$\tau_{v,GW} = \mu_{GW} \cdot P_{h,GW}$
5	$P_{h,GW}(z) = \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu_{GW})}$ $s = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$	$P_{h,GW} = \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu_{GW})}$ $\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - v \cdot a_{gh} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu_{GW}}$	$P_{h,GW} = \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu_{GW})}$ $\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - v \cdot a_{gh} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu_{GW}}$
6	$\tau_{v,GW} = a_{gh} \cdot \gamma \cdot \sin \theta \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right)$	$\tau_{v,GW} = [a_{g0} + a_{g1} \cdot (H - z)] \cdot \gamma \cdot \sin \theta \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right)$	$\tau_{v,GW} = [a_{g0} + a_{g1} \cdot (H - z) + a_{g2} \cdot (H - z - Hk)] \cdot \gamma \cdot \sin \theta \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right)$



Caso 2 Accelerazione Costante

$$P_{v,GG}(z) = \frac{\gamma}{v} \cdot z$$

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$$

$$P_{h,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$$

$$\beta(\theta) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - v \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

$$\tau_{h,GG}(z) = a_{gh} \cdot \gamma \cdot z$$

E' un valore medio

$$P_{h,GW}(z, \theta) = \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW})}$$

$$\tau_{v,GW}(z, \theta) = \mu_{GW} \cdot \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW})}$$

$$\tau_{t,GW}(z, \theta) = \left(\frac{a_{gh} \cdot \sin \theta \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - v \cdot a_{gh} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu_{GW}} \right) \cdot z$$



Caso 2 Accelerazione Lineare

$$\tau_{h,GG}(z) = \gamma \cdot z \cdot \left[a_{g0} + a_{g1} \cdot \left(H - \frac{z}{2} \right) \right]$$

E' un valore medio

$$P_{h,GW}(z, \theta) = \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh}^* \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW})}$$

$$s(z) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$$

$$\beta(z, \theta) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - v \cdot a_{gh}^* \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

$$\tau_{v,GW}(z, \theta) = \mu_{GW} \cdot \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh}^* \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW})}$$

$$a_{gh}^* = a_{g0} + a_{g1}(H - z)$$

$$\tau_{t,GW}(z, \theta) = [a_{g0} + a_{g1} \cdot (H - z)] \cdot \gamma \cdot \sin \theta \cdot s(z) \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right)$$



Caso 2 Accelerazione Parabolica

$$\tau_{h,GG}(z) = \gamma \cdot z \cdot \left[a_{g0} + a_{g1} \cdot \left(H - \frac{z}{2} \right) + a_{g2} \cdot \left(H^2 + \frac{z^2}{3} - Hz \right) \right]$$

E' un valore medio

$$P_{h,GW}(z, \theta) = \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh}^* \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW})}$$

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$$

$$\beta(z, \theta) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - v \cdot a_{gh}^* \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

$$\tau_{v,GW}(z, \theta) = \mu_{GW} \cdot \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_{gh}^* \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW})}$$

$$a_{gh}^* = a_{g0} + a_{g1}(H - z) + a_{g2}(H - z)^2$$

$$\tau_{t,GW}(z) = [a_{g0} + a_{g1} \cdot (H - z) + a_{g2} \cdot (H - z)^2] \cdot \gamma \cdot \sin \theta \cdot s(z) \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right)$$

Formulazione esatta:



RELAZIONI GEOMETRICHE

Area Disco D $A_D = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R - s)^2$

Volume Disco D $V_D = A_D \cdot dz$

Area elm. E GW $A_E = R \cdot d\theta \cdot dz$

Area elem. E GG $A_E = (R - s) \cdot d\theta \cdot dz$

Volume elem. E $V_E = \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \cdot s(z)$



Caso 0

$$p_{v0,GG} = \gamma \cdot z$$

$$p_{h0,GG} = \lambda \cdot \gamma \cdot z$$

$$\tau_{h0,GG} = 0$$

$$s = (R + \lambda \cdot \mu \cdot z) - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}$$

$$p_{n0,GW} = \frac{\gamma}{\mu} \cdot (R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}) + \frac{\gamma}{2 \cdot R \cdot \mu} \cdot (R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2})^2$$

$$\tau_{v0,GW} = \gamma \cdot (R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}) + \frac{\gamma}{2 \cdot R} \cdot (R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2})^2$$

$$\tau_{t0,GW} = 0$$

Caso 1

$$P_{v1,GG} = (1 + a_{gv}) \cdot \gamma \cdot z = \frac{\gamma}{v} \cdot z$$

$$P_{h1,GG} = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$$

$$s_1 = s_0$$

$$\tau_{h1,GG} = 0$$

$$s = (R + \lambda \cdot \mu \cdot z) - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}$$

$$P_{h1,GW} = \frac{\gamma}{\mu \cdot v} \cdot (R + \mu \cdot \lambda \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}) + \frac{\gamma}{2 \cdot R \cdot \mu \cdot v} \cdot (R + \mu \cdot \lambda \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2})^2$$

$$\tau_{v1,GW} = \frac{\gamma}{v} \cdot (R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}) + \frac{\gamma}{2 \cdot R \cdot v} \cdot (R + \lambda \cdot \mu \cdot z - \sqrt{R^2 + \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2})^2$$

$$\tau_{t1,GW} = 0$$

	COSTANTE	LINEARE	PARABOLICO
1	$P_{v,GG}(z) = \frac{\gamma}{v} \cdot z$	$P_{v,GG}(z) = \frac{\gamma}{v} \cdot z$	$P_{v,GG}(z) = \frac{\gamma}{v} \cdot z$
2	$P_{h,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$	$P_{h,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$	$P_{h,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$
3	$\tau_{h,GG}(z) = a_{gh} \cdot \gamma \cdot z$	$\tau_{h,GG}(z) = \gamma \cdot z \left[a_{g0} + a_{g1} \left(H - \frac{z}{2} \right) \right]$	$\tau_{h,GG}(z) = \gamma \cdot z \left[a_{g0} + a_{g1} \left(H - \frac{z}{2} \right) + a_{g2} \left(H^2 + \frac{z^2}{3} - Hz \right) \right]$
4	$\tau_{v,GW} = \mu_{GW} \cdot P_{h,GW}$	$\tau_{v,GW} = \mu_{GW} \cdot P_{h,GW}$	$\tau_{v,GW} = \mu_{GW} \cdot P_{h,GW}$
5	$s = \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi} + \frac{R}{\psi} \sqrt{1 + a_{v1} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$ $P_{v,GW} = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi \cdot v \cdot \mu} + \frac{\gamma \cdot R}{\psi \cdot v \cdot \mu} \sqrt{1 + a_{v1} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$ $P_{h,GW} = \lambda \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi \cdot 2 \cdot R \cdot \mu} + \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot R}{\psi \cdot 2 \cdot R \cdot \mu} \sqrt{1 + a_{v1} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$	$s = \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi} + \frac{R}{\psi} \sqrt{1 + a_{v1} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$ $P_{v,GW} = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi \cdot v \cdot \mu} + \frac{\gamma \cdot R}{\psi \cdot v \cdot \mu} \sqrt{1 + a_{v1} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$ $P_{h,GW} = \lambda \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi \cdot 2 \cdot R \cdot \mu} + \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot R}{\psi \cdot 2 \cdot R \cdot \mu} \sqrt{1 + a_{v1} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$	$s = \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi} + \frac{R}{\psi} \sqrt{1 + a_{v1} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$ $P_{v,GW} = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi \cdot v \cdot \mu} + \frac{\gamma \cdot R}{\psi \cdot v \cdot \mu} \sqrt{1 + a_{v1} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$ $P_{h,GW} = \lambda \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi \cdot 2 \cdot R \cdot \mu} + \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot R}{\psi \cdot 2 \cdot R \cdot \mu} \sqrt{1 + a_{v1} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$
6	$\tau_{t,GW} = a_{gh} \cdot \sin \vartheta \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right)$	$\tau_{t,GW} = [a_{g0} + a_{g1} \cdot (H - z)] \cdot \gamma \cdot \sin \vartheta \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right)$	$\tau_{t,GW} = [a_{g0} + a_{g1} \cdot (H - z) + a_{g2} \cdot (H - z)^2] \cdot \gamma \cdot \sin \vartheta \cdot s \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right)$



Caso 2 Accelerazione Costante

$$p_{v,GG} = \frac{\gamma}{v} \cdot z$$

$$p_{h,GG} = \lambda \cdot \frac{\gamma}{v} \cdot z$$

$$\tau_{h,GG} = a_{gh} \cdot \gamma \cdot z$$

E' un valore medio

$$s = \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi} + \frac{R}{\psi} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

$$\psi = a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot v - 1$$

$$\psi_2 = a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot v - 2$$

$$p_{h,GW} = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi \cdot v \cdot \mu} + \gamma \cdot \frac{R}{\psi \cdot v \cdot \mu} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

$$\left(1 - \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi \cdot 2 \cdot R \cdot \mu} - \frac{1}{\psi \cdot 2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$

$$\tau_{v,GW} = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi \cdot v} + \gamma \cdot \frac{R}{\psi \cdot v} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

$$\left(1 - \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot \mu \cdot z}{\psi \cdot 2 \cdot R} - \frac{1}{\psi \cdot 2} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$

$$\tau_{h,GW} \approx a_{gh} \cdot \sin \vartheta \cdot \gamma \cdot s =$$

$$a_{gh} \cdot \sin \vartheta \cdot \gamma \cdot \left(\frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi} + \frac{R}{\psi} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp} \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$



Caso 2 Accelerazione Lineare

$$\tau_{h,GG}(z) = \gamma \cdot z \cdot \left[a_{g0} + a_{g1} \cdot \left(H - \frac{z}{2} \right) \right]$$

E' un valore medio

$$p_{h,GW} = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot v \cdot \mu} + \gamma \cdot \frac{R}{\psi \cdot v \cdot \mu} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

$$\left(1 - \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot 2 \cdot R \cdot \mu} - \frac{1}{\psi \cdot 2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$

$$s = \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi} + \frac{R}{\psi} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

$$\psi = a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v - 1$$

$$\psi_2 = a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v - 2$$

$$a_{gh}^* = a_{g0} + a_{g1} (H - z)$$

$$\tau_{v,GW} = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot v} + \gamma \cdot \frac{R}{\psi \cdot v} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

$$\left(1 - \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot 2 \cdot R} - \frac{1}{\psi \cdot 2} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$

$$\tau_{h,GW}(z) \approx a_{gh} \cdot \sin \vartheta \cdot \gamma \cdot s =$$

$$a_{gh} \cdot \sin \vartheta \cdot \gamma \cdot \left(\frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi} + \frac{R}{\psi} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$



Caso 2 Accelerazione Parabolica

$$\tau_{h,GG}(z) = \gamma \cdot z \cdot \left[a_{g0} + a_{g1} \cdot \left(H - \frac{z}{2} \right) \right]$$

E' un valore medio

$$p_{h,GW} = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot v \cdot \mu} + \gamma \cdot \frac{R}{\psi \cdot v \cdot \mu} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

$$\left(1 - \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot 2 \cdot R \cdot \mu} - \frac{1}{\psi \cdot 2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$

$$s = \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi} + \frac{R}{\psi} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

$$\psi = a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v - 1$$

$$\psi_2 = a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v - 2$$

$$\tau_{v,GW} = \gamma \cdot \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot v} + \gamma \cdot \frac{R}{\psi \cdot v} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}}$$

$$\left(1 - \frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi \cdot 2 \cdot R} - \frac{1}{\psi \cdot 2} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$

$$a_{gh}^* = a_{g0} + a_{g1} \cdot (H - z) + a_{g2} \cdot (H - z)^2$$

$$\tau_{r,GW}(z) \approx a_{gh} \cdot \sin \vartheta \cdot \gamma \cdot s =$$

$$a_{gh} \cdot \sin \vartheta \cdot \gamma \cdot \left(\frac{R \cdot \psi - \lambda \cdot z \cdot \mu}{\psi} + \frac{R}{\psi} \cdot \sqrt{1 + a_{gh\perp}^* \cdot \mu \cdot v \cdot \psi_2 + \frac{\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot z^2}{R^2}} \right)$$

2.9 INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI ANALITICI

2.9.1 Pressione radiale

Rappresentazione analitica e grafica della pressione orizzontale nei casi 1 e 2.

Abbiamo calcolato analiticamente la pressione orizzontale al confine tra l'elemento E e la parete. Nei tre casi (statico; con accelerazione verticale e con accelerazione orizzontale aggiuntiva) essa risulta ogni volta diversa. Confrontiamo i valori della pressione orizzontale G-W (grain-wall: grano-parete) nei tre casi, secondo la formulazione approssimata, più semplice:

Caso 0: Statico: $p_{h0,GW}(z) = \lambda \cdot \gamma \cdot z$

Caso 1: Accelerazione verticale: $p_{h1,GW}(z) = \lambda \cdot \gamma \cdot z \cdot (1 + a_{gv}) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{\nu} \cdot z$

Caso 2: Accelerazione orizzontale aggiuntiva (costante):

$$p_{h,GW}(z, \theta) = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu (1 - \nu \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW})}$$

Definiamo “variazione di pressione” la differenza tra la pressione ottenuta nel caso 2 e quella nel caso 0 Δp_h .

$$\Delta p_{h,GW} = \Delta p_h$$

$$\Delta p_h(z, \vartheta) = p_{h,GW} - p_{h0,GW}$$

$$\Delta p_h = \frac{a_g \cdot \cos \theta \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot z}{(1 - \nu \cdot a_g \cdot \mu_{GW} \cdot \cos \theta)}$$

$$\Delta p_h = a_g \cdot \cos \theta \cdot \gamma \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z$$

Stiamo considerando la zona di collegamento tra il materiale granulare contenuto e la parete del silos. L'immagine che segue rappresenta il contesto in cui ci troviamo:

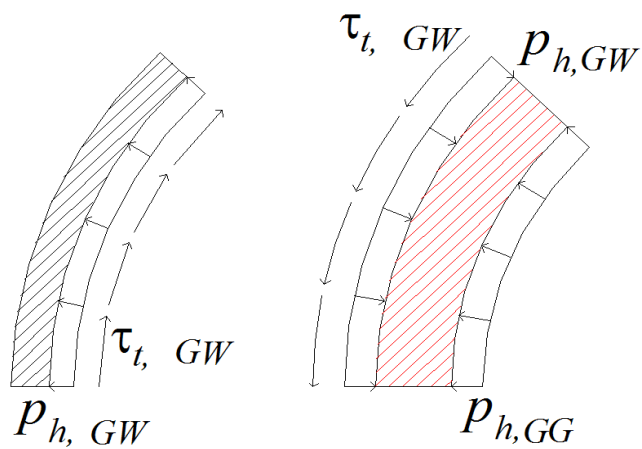
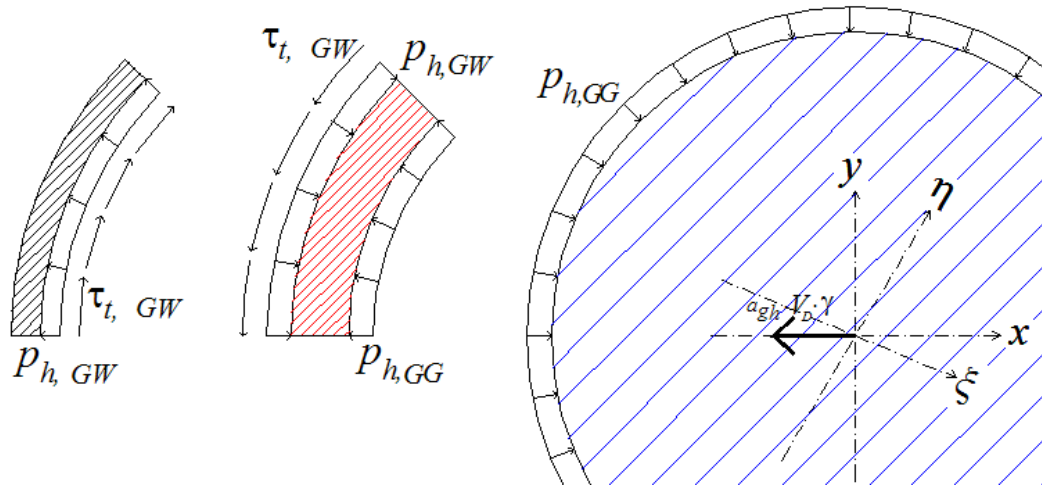


Figura 25: Pianta nel caso 2 e zoom solo sull'elemento E: siamo al confine grano-parete.

Ipotizziamo di effettuare tre sezioni a tre diverse quote z .

Per esempio prendiamo un silos con questi dati geometrici e meccanici:

DATI:

Geometria silos:

$$H = 20 \text{ m}$$

$$R = 10 \text{ m}$$

Caratteristiche Materiali:

$$\gamma = 900 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$\mu_{GW} = 0,40$$

$$\lambda = 0,5$$

Accelerazioni:

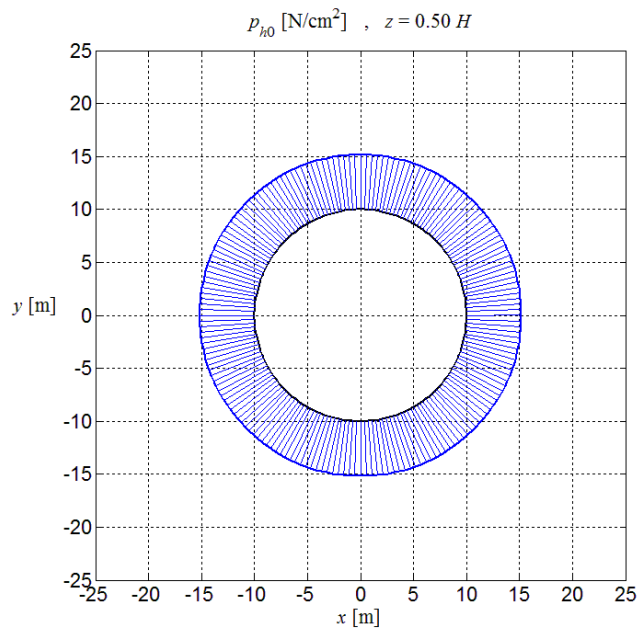
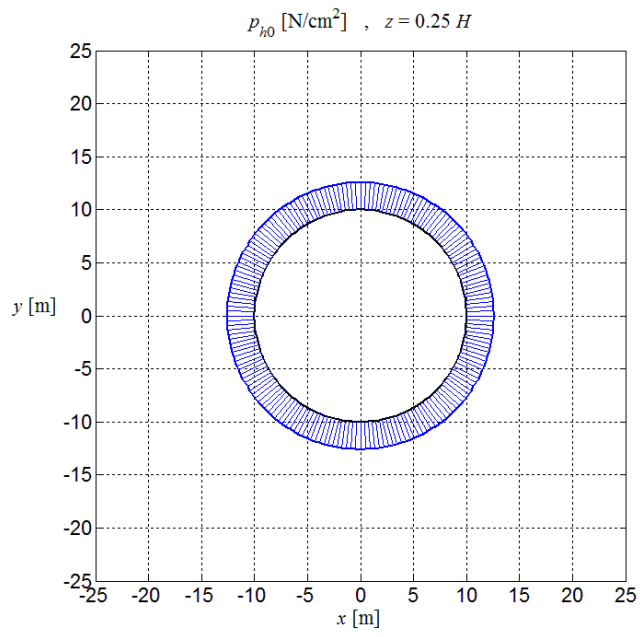
$$a_{gh} = a_g = 0,4$$

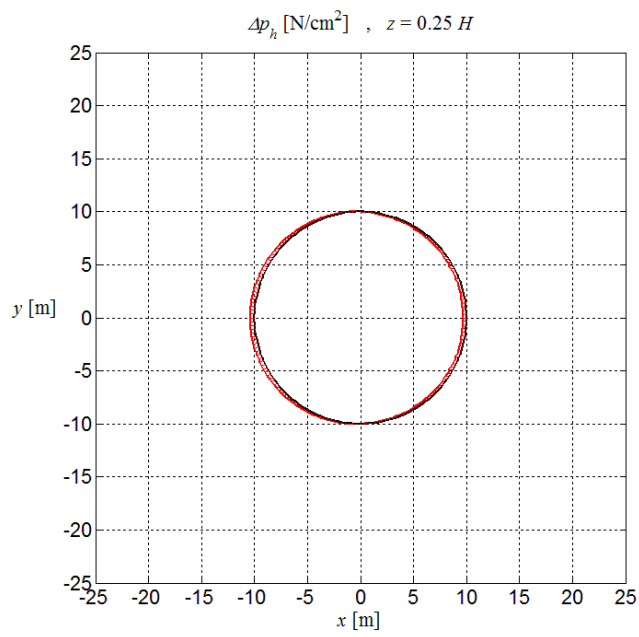
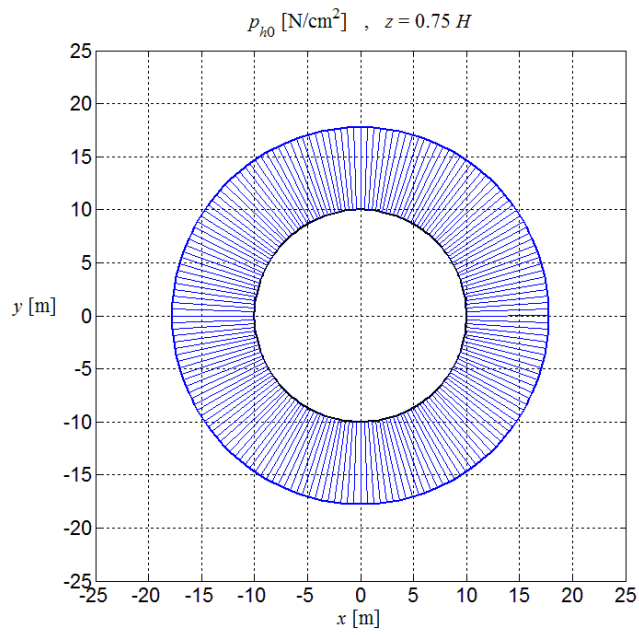
$$a_{gv} = 0,15$$

Si effettuano tre sezioni a tre diverse quote:

- $z = 0,25 H$
- $z = 0,5 H$
- $z = 0,75 H$

Si calcola la p_{h1} (blu) e il Δp_h (rosso):





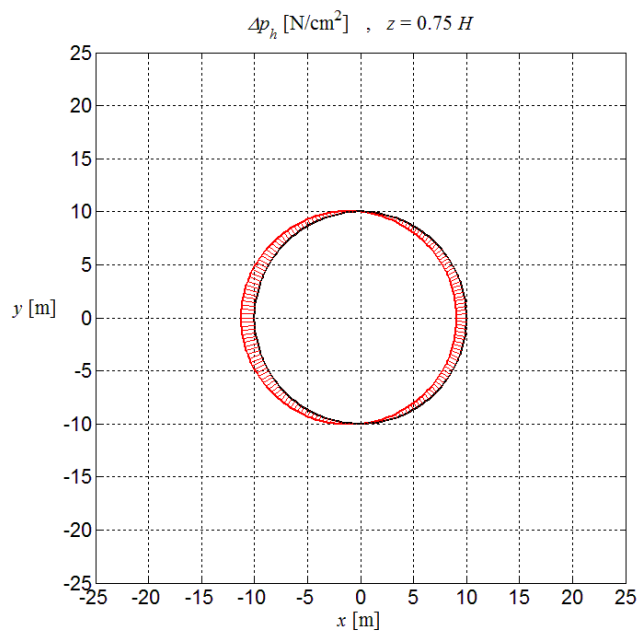
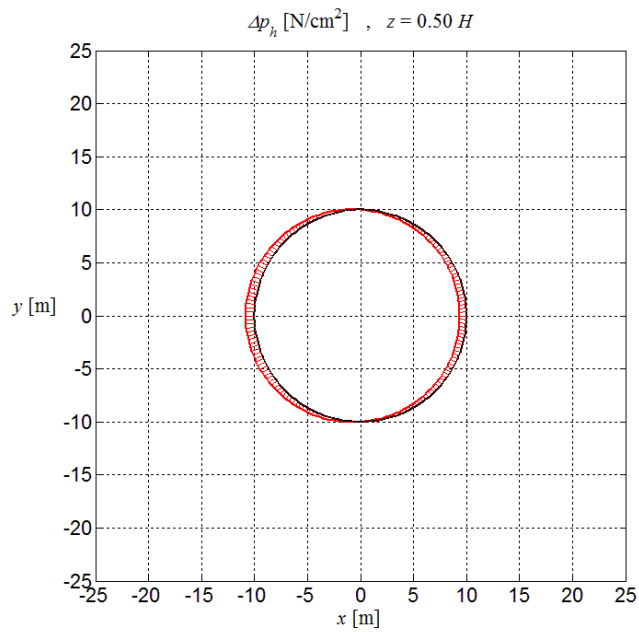


Figura 26: Pressione p_{h1} (blu) e variazione Δh (rossa) a tre quote: $z = 0,25 H$; $z = 0,5 H$; $z = 0,75 H$.

Conclusioni riguardo la pressione orizzontale:

- p_{h1} è assial simmetrico e ha una grande variazione

- Δp_h è emisimmetrico ed ha una piccola variazione 10-30% p_{ho} .

2.9.2 Volumi di insilato

I calcoli effettuati nel caso 2 con accelerazione orizzontale aggiuntiva hanno condotto a questo risultato:

$$s(z, \theta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$$

dove:

$$\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

$s(\theta, z)$ è lo spessore dell'elemento E e definisce l'anello esterno E, confinante da un lato con la parete del silos, dall'altro con il disco D. Lo spessore $s(\theta, z)$ ci fornisce informazioni su quanto grano interagisce con le pareti aggrappandosi ad esse ed esercitando quindi pressioni tangenziali e radiali su di esse.

Riprendiamo quindi la divisione (evidenziata nella premessa) dell'insilato in due macro porzioni:

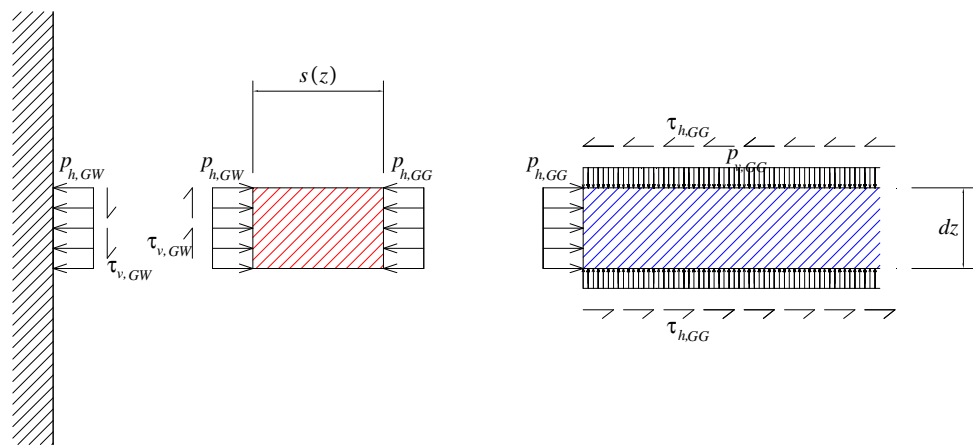


Figura 10. Insilato diviso in un disco D (blu) e un elemento E (rosso) individuato dallo spessore s .

I grani appartenenti al disco D gravano sui grani sottostanti dal pelo libero al fondo del silos.

I grani appartenenti all'anello esterno E si aggrappano alle pareti e c'è scorrimento sul lato confinante col disco D.

Avendo valutato lo spessore "s" del toro E, possiamo calcolare il volume del toro E (che chiameremo ora porzione A2) e per differenza il volume dell'insilato rimanente che costituirà la porzione A1 (grani che gravano solo sui livelli sottostanti).

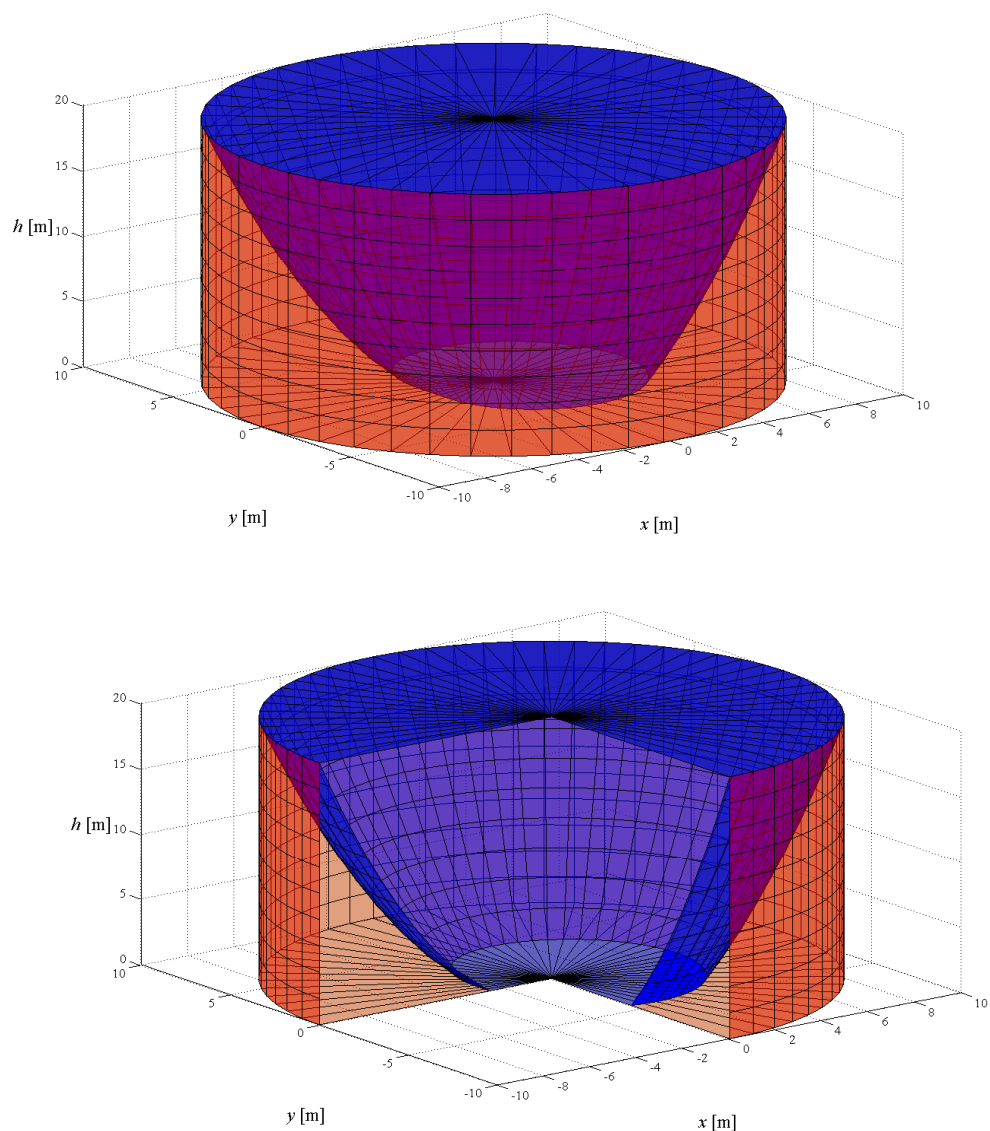


Figura 27: Volumi che costituiscono l'insilato: porzione A1 (blu) e porzione A2 (rossa; vista intera e sezionata).

Il volume A1 è un tronco di cono di raggio R – s.

Il volume A2 è un cilindro cavo di spessore s.

$$V_{A1} = \pi \cdot R \cdot H^2 \cdot \left(1 - \frac{\lambda \cdot \mu_{GW}}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot a_{gh}^2 \cdot \mu_{GW}^2}} \right) \quad (47)$$

$$V_{A2} = \pi \cdot R \cdot H^2 \cdot \frac{\lambda \cdot \mu_{GW}}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot a_{gh}^2 \cdot \mu_{GW}^2}}$$

2.9.2.1 Calcolo del volume della porzione A1

Il volume della porzione A1, V_{A1} , è dato da:

$$V_{A1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{r_A^2}{2} \cdot d\theta \cdot dz$$

$$V_{A1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{(R - s_A)^2}{2} \cdot d\theta \cdot dz$$

$$V_{A1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{(R - R + \sqrt{R^2 - \beta Rz})^2}{2} \cdot d\theta \cdot dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \beta Rz}{2} \cdot d\theta \cdot dz$$

$$V_{A1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta \cdot dz - \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R}{2} \beta z \cdot d\theta \cdot dz$$

$$V_{A1} = \frac{R^2}{2} \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{R}{2} \int_0^H z \cdot dz \int_0^{2\pi} \beta(\theta) d\theta$$

$$V_{A1} = \pi R^2 H - \frac{RH^2}{4} \left(\int_0^{2\pi} \beta(\theta) d\theta \right)$$

Essendo:

$$\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_g \cdot \cos \theta \cdot \mu)}$$

si ha:

$$\int_0^{2\pi} \beta(\theta) \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - v \cdot a_g \cdot \cos(\theta) \cdot \mu} \right) d\theta = \frac{4\pi \cdot \lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}}$$

per cui:

$$V_{A1} = \pi R^2 H - \frac{RH^2}{4} \left(\frac{4\pi \cdot \lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right)$$

$$V_{A1} = \pi R^2 H - \pi RH^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right)$$

2.9.2.2 Calcolo del volume della porzione A2

Il volume della porzione A2, V_{A2} , è dato dalla differenza tra il volume totale del silos, V_{tot} , e il volume della porzione A1, V_{A1} :

$$V_{A2} = V_{tot} - V_{A1}$$

dove il volume totale del silos vale:

$$V_{tot} = \pi R^2 H$$

ed il volume della porzione 1 è:

$$V_{A2} = \pi R^2 H - \pi R^2 H + \pi RH^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right)$$

che fornisce:

$$V_{A2} = \pi RH^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right)$$

Possiamo presentare un esempio in cui si confrontano i volumi calcolati per un silo reale con i seguenti dati:

DATI:

Geometria silos:

$$H = R$$

Caratteristiche Materiali:

$$\gamma = 900 \frac{Kg}{m^3}$$

$$\mu_{GW} = 0,37$$

$$\lambda = 0,5$$

Accelerazioni:

$$a_{gh} = a_g = 0,3$$

$$a_{gv} = 0,1$$

Si trova che $A2 = 19\%$ A totlae.

2.9.3 Limiti della teoria

I limiti della teoria sono costituiti da necessità di esistenza di certe dimensioni, di certi volumi, di certe pressioni. Possiamo riassumerli in quattro condizioni di esistenza:

1. Esistenza della porzione A1
2. Esistenza della porzione A2
3. Esistenza di s
4. Esistenza di $p_{h,GW}$

I risultati si ottengono da considerazioni matematiche.

2.9.3.1 Esistenza della porzione A1

A1 è la porzione dove i grani gravano esclusivamente sui livelli sottostanti e corrisponde all'insieme dei dischi D. Se per assurdo A1 fosse nulla, allora si avrebbe l'intero insilato costituito solo da un anello esterno E (A2) di grani aggrappati alle pareti (impossibile). Dobbiamo quindi imporre che l'anello esterno E sia limitato, quindi dare un limite superiore allo spessore s .

$$s(\vartheta, z = H) < R \quad \forall \vartheta$$

Dai calcoli effettuati per ottenere lo spessore s nel caso 2 con accelerazione orizzontale aggiuntiva, si era arrivati alla seguente espressione:

$$s(z, \vartheta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$$
$$\text{dove: } \beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu_{GW}}$$

Quindi ora si impone ad "s" la condizione di esistenza di A1:

$$R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta(z, \vartheta)} \cdot z < R \quad \forall \vartheta$$

$$\sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot H} > 0$$

$$R \cdot \beta \cdot H < R^2$$

$$\beta \cdot H < R$$

$$\beta < \frac{R}{H}$$

$$\frac{H}{R} < \frac{1}{\beta}$$

Il massimo valore di β alla base si ha per $\theta = 0$.

$$\beta(\vartheta, z = H)_{\max} = \beta(\vartheta = 0, z = H)$$

$$\frac{H}{2R} < \frac{1}{2 \cdot \beta(z = H, \vartheta = 0)} = \frac{1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \mu_{GW}}{4 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}$$

Quindi se il silos è troppo snello, questa teoria non è adatta.

2.9.3.2 Esistenza della porzione A2

A2 è la porzione dove i grani si aggrappano alle pareti e corrisponde all'intero anello esterno E. Se per assurdo A2 fosse nulla, allora si avrebbe che l'intero insilato scivola sulle pareti senza generare pressioni tangenziali su esse (impossibile). Si deve quindi imporre che l'anello esterno E esista e che esista quindi la sua principale dimensione s :

$$s(\vartheta, z = H) > 0 \quad \forall \vartheta$$

Dai calcoli effettuati per ottenere lo spessore s nel caso 2 con accelerazione orizzontale aggiuntiva, si era arrivati alla seguente espressione:

$$s(z, \vartheta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$$

dove:

$$\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu_{GW}}$$

Quindi ora si impone ad "s" la condizione di esistenza:

$$R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z} > 0 \quad \forall \vartheta$$

$$R > \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$$

$$0 > -R \cdot \beta \cdot z$$

$$0 < R \cdot \beta \cdot z$$

$$\beta > 0$$

$$\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}} > 0$$

$$\nu \cdot a_{gh} \cdot \mu_{GW} < 1$$

$$a_{gh} < \frac{1}{v \cdot \mu_{GW}}$$

2.9.3.3 Esistenza di “s”

E' necessario che esista “s”, quindi A2, come abbiamo visto prima, inoltre s (contenendo al suo interno una radice quadrata) è analiticamente internamente da condizionare, cioè:

$$s(z, \vartheta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$$

Condizione di esistenza della radice quadrata:

$$R^2 - R \cdot \beta \cdot z > 0$$

Si divide per R:

$$-\beta \cdot z > -R$$

$$\beta \cdot z < R$$

$$\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}} < \frac{R}{H}$$

$$2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot \frac{H}{R} < (1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW})$$

$$1 - 2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot \frac{H}{R} > \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}$$

$$\frac{1 - 2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot \frac{H}{R}}{\nu \cdot \mu_{GW}} > a_{gh}$$

2.9.3.4 Esistenza di $p_{h,GW}$

E' necessario che esista $p_{h,GW}$, quindi che esistano pressioni radiali trasmesse dai grani costituenti l'elemento E e le pareti dei silos.

Dai calcoli nel caso 2 in presenza di accelerazione orizzontale aggiuntiva, risultava:

$$p_{h,GW}(z, \theta) = \frac{p_{h,GG}(z)}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu_{GW}}$$

Quindi:

$$1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW} \neq 0$$

$$a_{gh} \neq \frac{1}{\nu \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

$\forall \vartheta$

Questo risultato include la condizione di esistenza di A2.

2.9.3.5 Riassunto dei limiti



Esistenza di A1

SIGNIFICATO FISICO	ESISTENZA DI GRANI CHE GRAVANO SUL LIVELLO INFERIORE; → LIMITARE A2
CONDIZIONI MATEMATICHE	$s(\vartheta, z = H) < R$ $\forall \vartheta$
LIMITE	$\frac{H}{2R} < \frac{1}{2 \cdot \beta(z = H, \vartheta = 0)} = \frac{1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \mu_{GW}}{4 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW}}$



Esistenza di A2

SIGNIFICATO FISICO	ESISTENZA DI GRANI AGGRAPPATI ALLE PARETI;
CONDIZIONI MATEMATICHE	$s(\theta, z = H) > 0$ $\forall \theta$
LIMITE	$a_{gh} < \frac{1}{\nu \cdot \mu_{GW}}$



Esistenza di s

SIGNIFICATO FISICO	ESISTENZA DI GRANI AGGRAPPATI ALLE PARETI;
CONDIZIONI MATEMATICHE	$s(z, \vartheta) = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta \cdot z}$ $R^2 - R \cdot \beta \cdot z > 0$
LIMITE	$a_{gh} < \left(1 - \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu_{GW} \cdot H}{R}\right) \cdot \frac{1}{\nu \cdot \mu_{GW}}$



Esistenza di $P_{h,GW}$

SIGNIFICATO FISICO	ESISTENZA DI PRESSIONE RADIALE SULLE PARETI
CONDIZIONI MATEMATICHE	$P_{h,GW}(z, \theta) = \frac{P_{h,GG}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$ $1 - \nu \cdot a_{gh} \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW} \neq 0$
LIMITE	$a_{gh} \neq \frac{1}{\nu \cdot \cos \theta \cdot \mu_{GW}} \quad \forall \theta$

..... incluso nell'esistenza di A2

2.10 CALCOLO DELLE AZIONI ALLA BASE DEL SILOS

Il taglio alla base del silos, inteso come la risultante delle azioni orizzontali che si scambiano l'anello esterno di cereale e le pareti del silos, può essere valutato nei due modi seguenti:

- mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali orizzontali $\tau_{r,GW}$;
- moltiplicando la massa della porzione A2 per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g .

Analogamente, il momento flettente alla base del silos può essere valutato nei due modi seguenti:

- mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali orizzontali $\tau_{r,GW}$;
- moltiplicando la massa della porzione A2 per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g .

2.10.1 Taglio

2.10.1.1 Calcolo del taglio alla base mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali $\tau_{t,GW}$

Il taglio alla base del silos è dato dall'integrale, sulla superficie laterale del silos, della somma delle proiezioni delle pressioni orizzontali Δp_h , e delle proiezioni delle tensioni tangenziali orizzontali $\tau_{t,GW}$ in direzione x (ossia nella direzione dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale) come si può vedere in Figura 28:

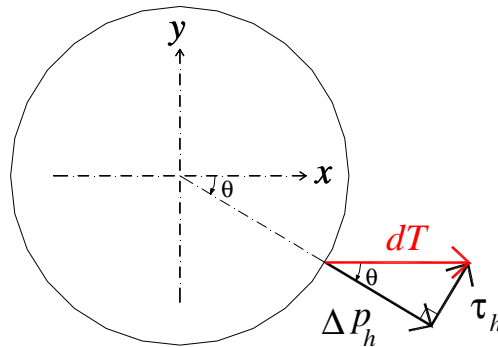


Figura 28: Schematizzazione delle proiezioni delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali τ_h

$$\begin{aligned}
T &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\Delta p_h(\theta, z) \cos \theta + \tau_h(\theta, z) \sin \theta \right] \cdot R d\theta \cdot dz \\
T &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot \cos^2 \theta}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] + \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot \sin^2 \theta}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] \cdot R d\theta \cdot dz \\
T &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] \cdot R d\theta \cdot dz \\
T &= a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot R \left(\int_0^H z \cdot dz \right) \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] d\theta \right) \\
T &= \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot R H^2}{2} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] d\theta \right)
\end{aligned}$$

Dal momento che:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{(1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu)} \right] d\theta = \frac{2\pi}{(1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2)}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot R H^2}{2} \left(\frac{2\pi}{(1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2)} \right) \\
T &= a_g \cdot \gamma \cdot \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right) \quad (4.3)
\end{aligned}$$

2.10.1.2 Calcolo del taglio alla base mediante il volume della porzione A2

Il taglio alla base del silos è dato dall'integrale si può ottenere anche moltiplicando la massa della porzione A2 per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g . La massa della porzione A2 è data da:

$$m_{A2} = \frac{V_{A2} \cdot \gamma \cdot g}{g} = V_{A2} \cdot \gamma$$

dove il volume V_{A2} è dato dalla seconda formula delle eq. 47 nel capitolo sul calcolo dei volumi:

$$m_{A2} = \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right) \cdot \gamma$$

Moltiplicando la massa per l'accelerazione si ottiene pertanto:

$$T = a_g \cdot \gamma \cdot \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)$$

2.10.2 Momento

2.10.2.1 Calcolo del momento flettente alla base mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali $\tau_{t,GW}$

Il momento flettente alla base del silos è dato dall'integrale, sulla superficie laterale del silos, della somma della proiezione delle pressioni orizzontali Δp_h e della proiezione delle tensioni tangenziali $\tau_{t,GW}$, in direzione x (ossia nella direzione dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale) moltiplicate per la quota $h = H - z$ a partire dalla base del silos:

$$M = \int_0^H \int_0^{2\pi} [\Delta p_h(\theta, z) \cos \theta + \tau_t(\theta, z) \sin \theta] \cdot (H - z) \cdot R d\theta \cdot dz$$

$$T = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot \cos^2 \theta}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] + \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot \sin^2 \theta}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] \cdot (H - z) \cdot R d\theta \cdot dz$$

$$T = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] \cdot (H - z) \cdot R d\theta \cdot dz$$

$$T = a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot R \left(\int_0^H z(H - z) \cdot dz \right) \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] d\theta \right)$$

$$T = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot RH^3}{6} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] d\theta \right)$$

Si ottiene:

$$M = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot RH^3}{6} \cdot \left(\frac{2\pi}{(1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2)} \right)$$

$$M = \frac{1}{3} a_g \cdot \gamma \cdot \pi RH^3 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)$$

2.10.2.2 Calcolo del momento flettente alla base mediante la massa della porzione A2

Il momento flettente alla base del silos si può ottenere anche moltiplicando la massa della porzione A2 per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g e per la quota di applicazione della risultante delle pressioni. La massa della porzione A2 è data stata calcolata sopra per la valutazione del taglio.. Le pressioni presentano un diagramma triangolare e pertanto la quota di applicazione della risultante delle pressioni si trova alla quota $h = \frac{1}{3}H$ a partire dalla base del silos.

Si ottiene pertanto:

$$M = \frac{1}{3} a_g \cdot \gamma \cdot \pi R H^3 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)$$

2.11 CONFRONTO con T , M tradizionali

Il calcolo tradizionale dei silos a fondo piano contenenti cereali condurrebbe alle seguenti azioni alla base del silos:

$$T_{trad.} = a_g \cdot \gamma \cdot V_{tot} = a_g \cdot \gamma \cdot \pi R^2 H$$

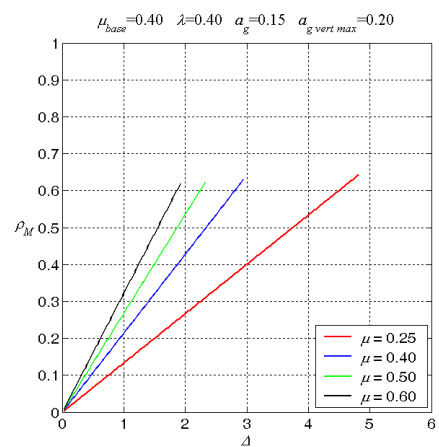
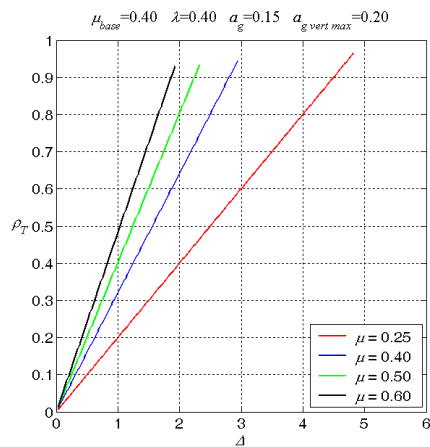
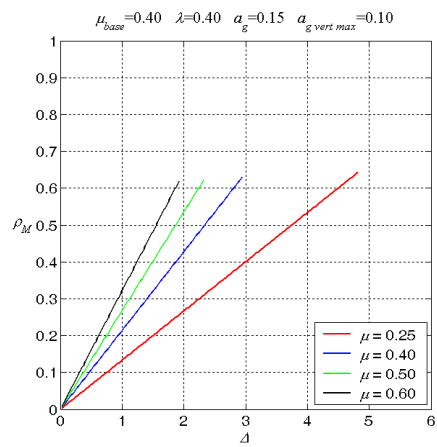
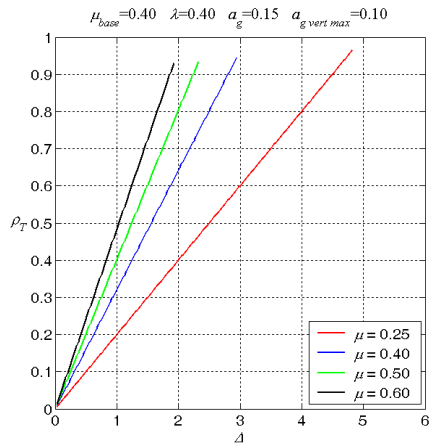
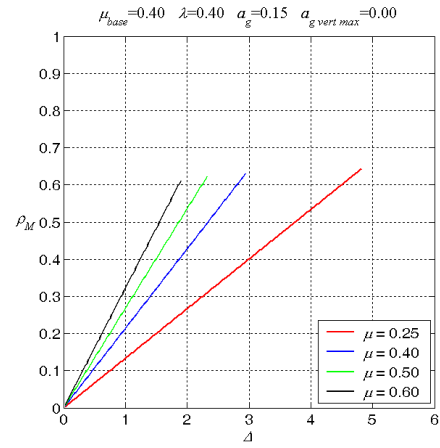
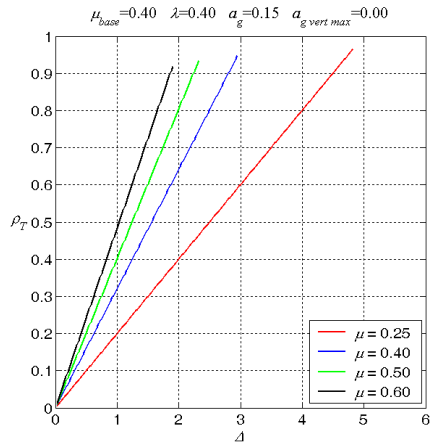
$$M_{trad.} = a_g \cdot \gamma \cdot V_{tot} \cdot \frac{1}{2} H = \frac{1}{2} a_g \cdot \gamma \cdot \pi R^2 H^2$$

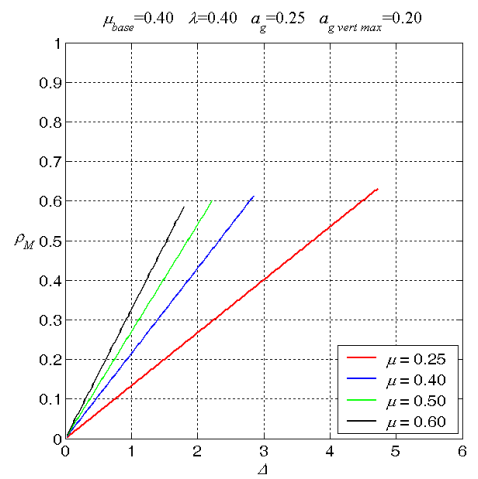
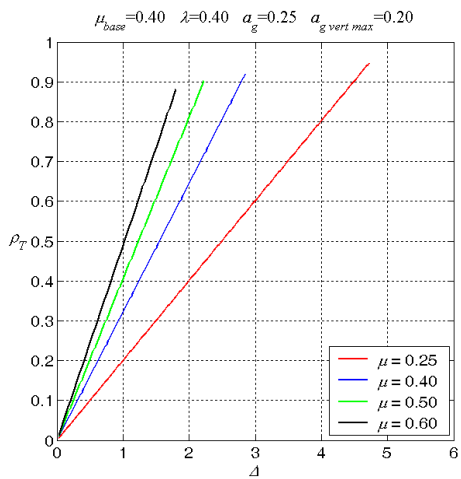
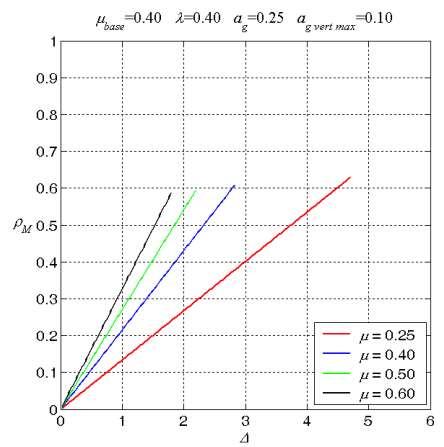
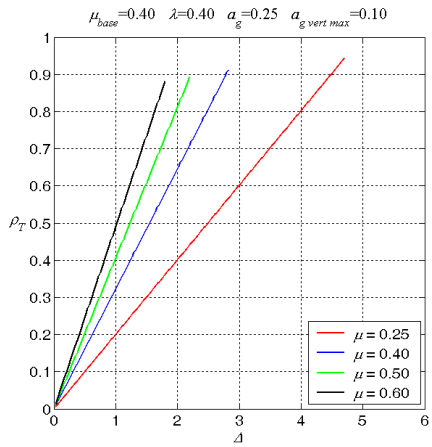
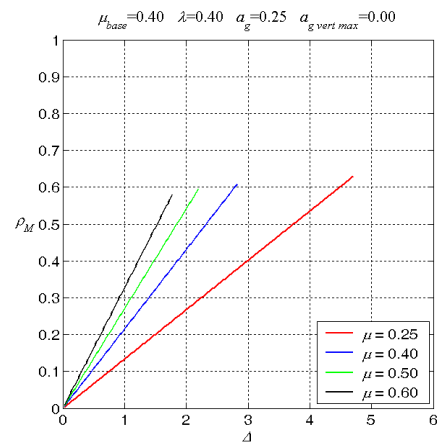
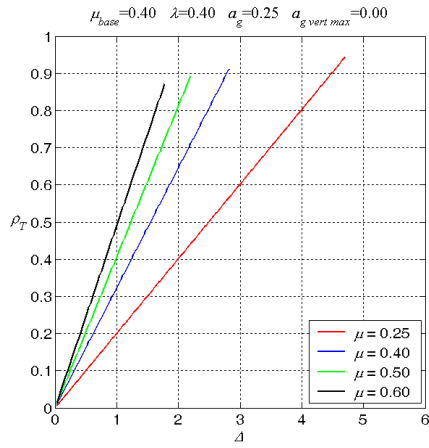
Per la valutazione immediata dei benefici che la formulazione qui presentata fornisce, rispetto al calcolo tradizionale, è opportuno definire i seguenti rapporti tra il taglio e il momento della formulazione presentata e il taglio e il momento ottenuti con il calcolo tradizionale.

$$\rho_T = \frac{T}{T_{trad.}} = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)}{a_g \cdot \gamma \cdot \pi R^2 H} = \frac{H}{R} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)$$

$$\rho_M = \frac{M}{M_{trad.}} = \frac{\frac{1}{3} a_g \cdot \gamma \cdot \pi R H^3 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)}{\frac{1}{2} a_g \cdot \gamma \cdot \pi R^2 H^2} = \frac{2}{3} \frac{H}{R} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)$$

Ora viene riportata una serie di grafici dei due rapporti ρ_T e ρ_M , al variare dei parametri λ , μ , a_g ed a_{g-vert} (si ricorda che $\nu = \frac{1}{1 + a_{g-vert}}$).





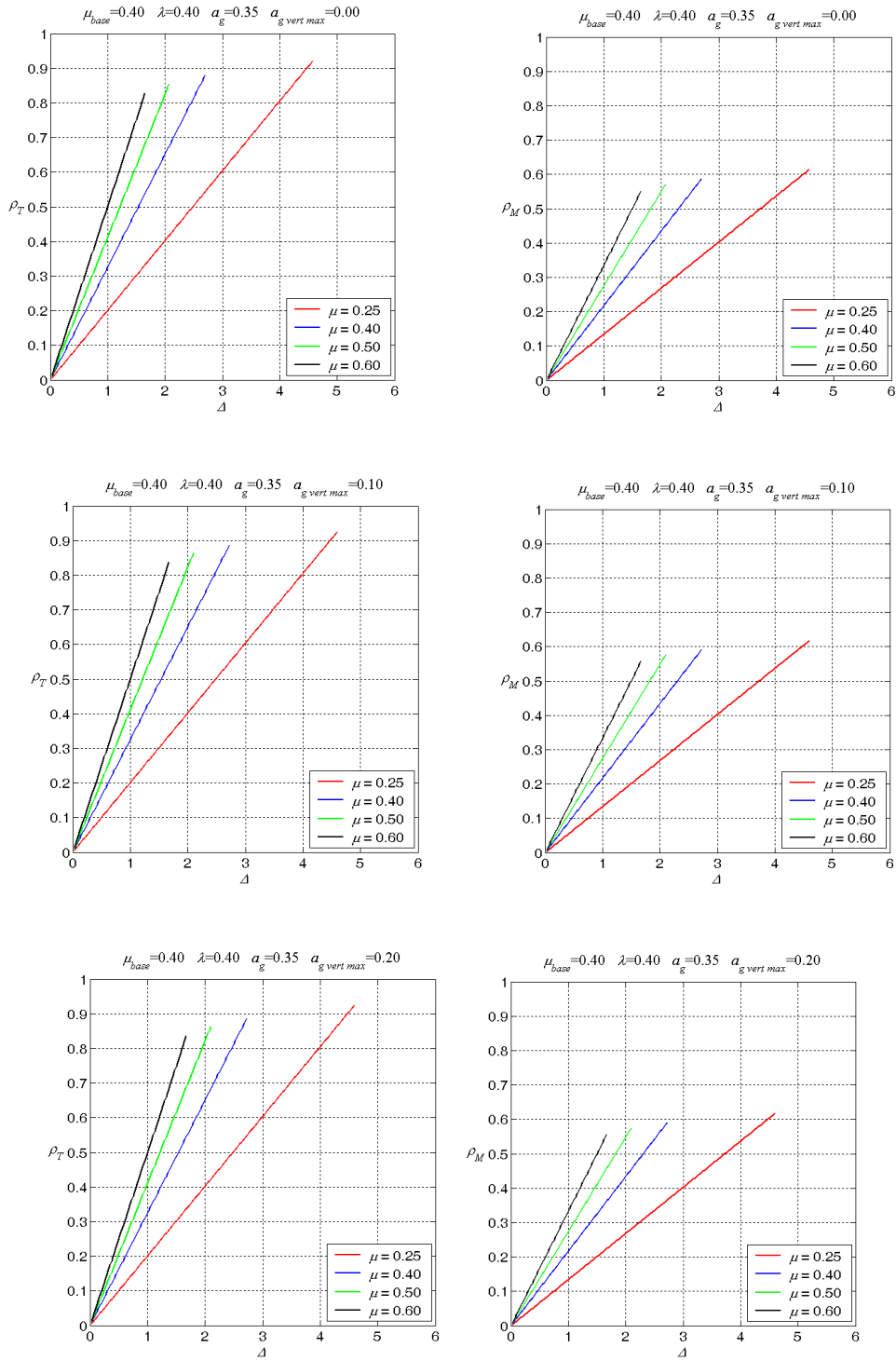


Figura 29: Rapporti ρ_T e ρ_M , al variare dei parametri λ , μ , a_g ed a_{g-vert} .

Osservando i grafici si può notare che la differenza maggiore tra il risultato, ottenuto con la teoria presentata e l'Eurocodice, si ha in termini di momento flettente; inoltre per piccoli coefficienti d'attrito μ , T e M sono notevolmente ridotti rispetto a T , M tradizionali: quindi avere piccoli μ offre un benefico effetto. I grafici sono stati ottenuti variando l'accelerazione, comunque anche all'aumentare di essa, non si riscontrano decise variazioni nei grafici. Risulta infine lampante come per sili tozzi T , M siano inferiori a T , M tradizionali: dimostrare questo concetto è stato l'intento della nostra teoria.

3 PREPARAZIONE DELLA PROVA

3.1 DESCRIZIONE DELLA TAVOLA

L' "Earthquake and Large Structures Laboratory"(EQUALS) fa parte dei Bristol Laboratories for Advanced Dynamics Engineering (BLADE), all'interno della Facoltà di Ingegneria di Bristol, nel Regno Unito. Possiede una tavola vibrante a 6 gradi di libertà (GDL), che è sostenuta da una robusta platea e circondata da solidi muri alti 15 m. La tavola vibrante è fornita di un set di 40 attuatori servo-idraulici che possono essere configurati per operare in combinazione con la tavola vibrante, la platea e i muri di contrasto, fornendo una simulazione ad alta adattabilità dinamica che può essere utilizzata per una grande varietà di terremoti e di test di carico dinamico.

La tavola vibrante è formata da una lastra inflessibile di alluminio di 3m x 3m pesante 3,8 tonnellate. La superficie di questa piattaforma è una sovrapposizione di 5 fogli di alluminio con una griglia regolare di fori passanti M12 per consentire l'attacco fra il corpo della piattaforma e i campioni. La piattaforma può accelerare orizzontalmente fino a 3,7g senza carico utile e 1,6g con un carico utile di 10 tonnellate. Le accelerazioni verticali corrispettive sono di 5,6g e 1,2g. I picchi di velocità sono di 1 m/s in tutti gli assi di traslazione, con picchi di spostamento di $\pm 0,15$ m.

La potenza idraulica per la tavola vibrante è data da un set di sei pompe condivise a volume idraulico variabile, che forniscono fino a 900 l/min a una pressione d'esercizio di 205 bar. La capacità di flusso massima può essere aumentata fino a circa 1200 l/min, per un massimo di 16 secondi in caso di esigenza estrema, con l'aggiunta di accumulatori idraulici extra.

Una caratteristica speciale del laboratorio EQUALS è il suo sistema di controllo digitale (DCS), con sistemi all'avanguardia mondiale, incluso un "test ibrido" di capacità (noto anche come 'dynamic substructuring') in cui parte del sistema strutturale d'interesse può essere simulato da un modello numerico

incorporato nel sistema di controllo digitale, dove solamente una sotto-componente necessita di essere testata fisicamente. È disponibile un'ampia strumentazione, tra cui 256 canali per l'acquisizione dei dati.

Il laboratorio EQUALS è supportato da un gruppo multi-disciplinare di studiosi specializzati nella dinamica avanzata e nei materiali dei campi dell'ingegneria civile, aerospaziale e meccanica, così come nei campi della dinamica non lineare, fornendo agli utenti un supporto costante, fabbricazione e realizzazione di campioni, ed un supporto per le operazioni della tavola vibrante, l'elettronica e la strumentazione. La Facoltà ha a disposizione un'officina per la fabbricazione dei pezzi, equipaggiata con macchine a controllo numerico e tanto altro.

La ricerca basata sulla tavola vibrante dell'EQUALS raccoglie al suo interno la reazione di ponti strallati, interazioni fra la struttura ed il terreno, l'uso di elementi smorzanti discreti nelle strutture degli edifici, sistemi di isolamento alla base, risposta degli edifici alla torsione, di edifici in muratura, di edifici in acciaio e cemento armato, l'eccitamento di supporti multipli, gli effetti ad onda prodotti dalle scosse di terremoto, reazioni di strutture non lineari auto-allineanti, dighe, torri di stoccaggio, muri di contenimento e sistemi di rafforzamento con composti avanzati. La struttura è equipaggiata di due shear box lamellari e flessibili per i test geomeccanici. Una di queste è lunga 6m, profonda 1,5m e larga 1m; l'altra è lunga 1,5m, profonda 1m e larga 1m.

L'EQUALS è particolarmente efficiente nel testare campioni di piccolo e medio calibro per indagare sui fenomeni fondamentali dinamici e sismici. L'EQUALS viene talvolta impiegato per fare esperimenti su larga scala, che verranno poi eseguiti su una tavola vibrante più grande, come quelle del CEA di Saclay o del LNEC di Lisbona. La tavola vibrante può essere potenziata da attuatori addizionali per attivare l'eccitamento dei supporti multipli o per indagare sugli effetti delle onde viaggianti. L'EQUALS ha una particolare maestria nei test sismici di problemi geotecnici.

Il motivo principale per cui l'EQUALS è maggiormente consigliato nell'effettuare i test dinamici è la capacità specifica della sua tavola vibrante in termini di forza massima (1,6g con un carico utile di 10 tonnellate), il che permette di collocare un campione di taglia considerevole. Inoltre, la disponibilità delle due shear box lamellari e flessibili (utilizzate originariamente per test geomeccanici) può dimostrarsi molto utile nello sviluppo di parametri di test, atti a valutare le pressioni orizzontali esercitate da materiali granulari sotto eccitamento sismico e/o accelerazione orizzontale costante.

3.2 PROVINI SCELTI

Secondo le ipotesi alla base della teoria qui proposta ed alle formule ottenute, le pressioni dovute al sisma dipendono dall'attrito tra le pareti del silos ed il materiale granulare. Quindi un silos le cui pareti fornissero un basso coefficiente d'attrito, sarebbe soggetto a minor sollecitazioni sismiche poiché gran parte del volume insilato scaricherebbe direttamente sul fondo dello stesso.

Per questo motivo inizialmente si è scelto come materiale per i provini l'acciaio piuttosto che il cemento armato in quanto l'acciaio ha un minor coefficiente d'attrito.

Per lo stesso motivo come materiale insilato si è scelto il grano, poiché fornisce minor attrito rispetto ad altri materiali granulari come per esempio l'orzo.

Le principali caratteristiche di interesse per tale materiale sono:

- γ : peso specifico = 900 kg/m^3 ;
- μ_{GW} : coefficiente d'attrito grano-pareti laterali = 0.27;
- μ_{GB} : coefficiente d'attrito grano-fondo = 0.36;
- λ : coefficiente di spinta laterale = 0.6325;

I provini scelti da sottoporre all'EQUALS sono 3 in acciaio e 5 in plexiglass.

Si è scelto il plexiglass perché le deformazioni del terzo provino in acciaio sono inferiori alla soglia minima leggibile dallo strumento di misura; tali deformazioni sono infatti dell'ordine di 10^{-7} , mentre lo strumento arriva a una precisione di $2 \mu\epsilon$, cioè di $2 \cdot 10^{-6}$.

I provini in plexiglass, avendo un modulo di Young minore dei provini di acciaio, hanno deformazioni maggiori, quindi entro il range dello strumento; le deformazioni dei provini di plexiglass rientrano entro 10^{-6} .

Queste deformazioni sono state calcolate con un'analisi fem agli elementi finiti, costruendo un modellino in Straus7 per ogni provino.

3.2.1 Provini in acciaio

La dimensione della base risulta imposta dalla grandezza della piastra vibrante a disposizione (3m x 3m) ed in base a tale misura si è scelta l'altezza andando ad ottenere un coefficiente di snellezza pari a 0,5.

Il primo provino è un provino cilindrico:

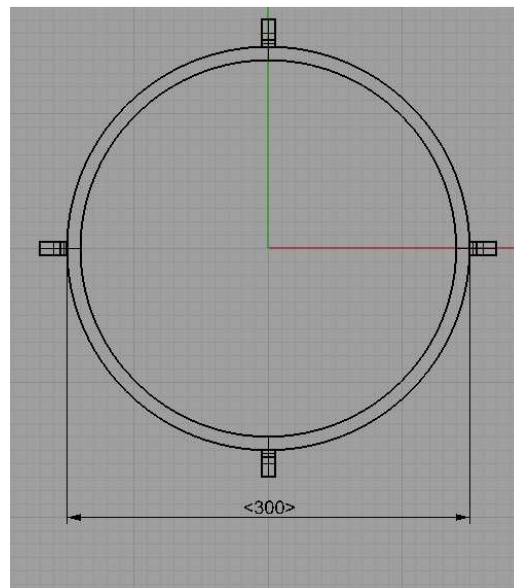
Altezza 1,5 m

Raggio 1,5 m.

Spessore 3 mm

Tali dimensioni dipendono dal fatto che per massimizzare le differenze tra le pressioni calcolate secondo le due procedure occorre che il provino sia tozzo.

Si riporta di seguito una visione schematica del provino dove si possono notare i dispositivi d'attacco che si sono ipotizzati.



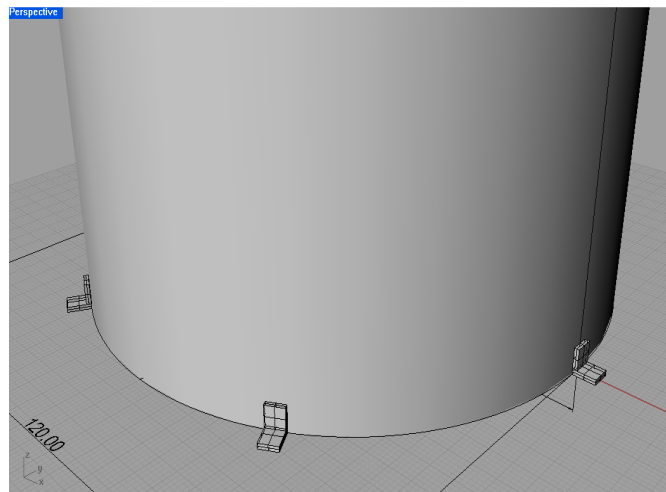
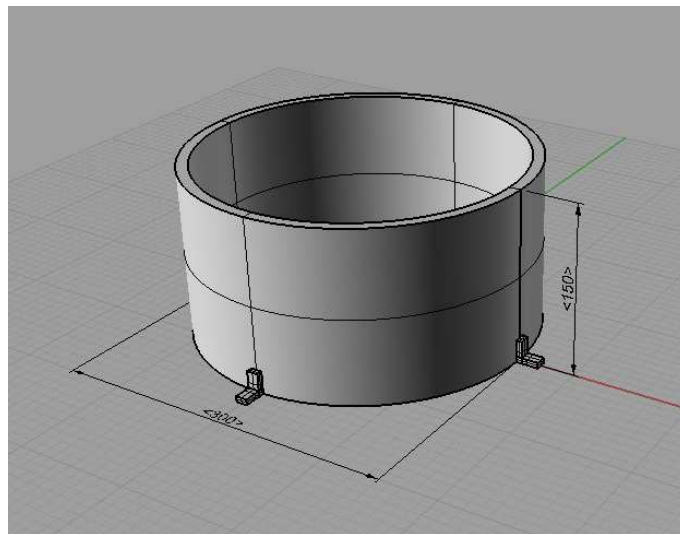
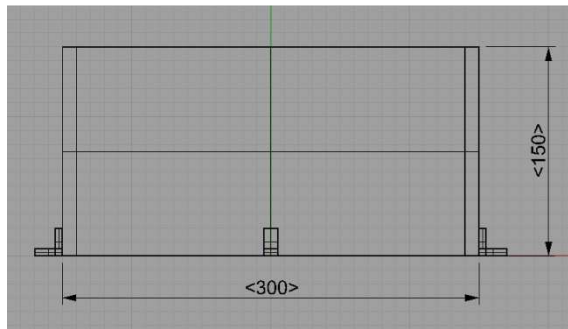


Figura 1: Pianta e vista frontale del provino uno; vista assometrica; particolare del vincolo alla base

Secondo provino in acciaio:

Altezza 1,5 m

Raggio 1,0 m.

Spessore 3 mm

Terzo provino in acciaio (cubico):

Lato 1,5 m.

Spessore 3 mm

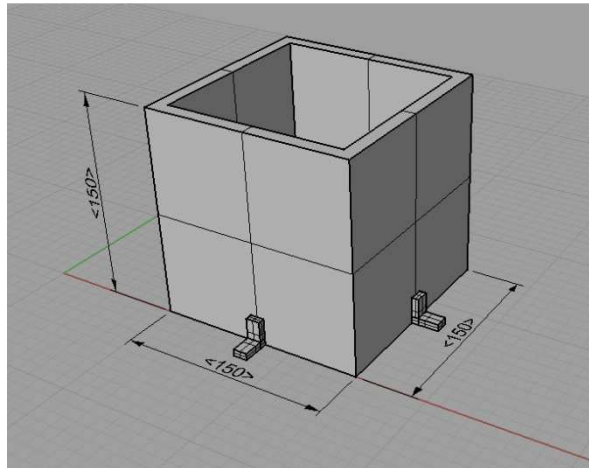


Figura 2 Vista assonometrica del provino tre.

Le caratteristiche del materiale utilizzato sono:

- $E = 203943 \text{ Mpa}$;
- $\nu = 0,25$;
- $\mu = 0,26$;

Per il vincolamento alla base si sono seguite tre strade:

- 1 appoggiato;
- 2 incastrato;

3 solidale ad una piastra a cui è impedita la traslazione verticale e che è vincolata rispetto alle altre traslazioni solo nel punto centrale.

Come si vedrà in seguito queste differenti tipologie di vincoli non comportano variazioni significative nei risultati.

3.2.2 Provini in plexiglass

Provino in plexiglass 1

Altezza 1,5 m

Raggio 1,5 m

Spessore 4 mm

Provino in plexiglass 2:

Altezza 1,5 m

Raggio 1 m

Spessore 4 mm

Provino in plexiglass 3 (cubico):

Lato 1,5 m

Spessore 4 mm

Provino in plexiglass 4:

Altezza 2 m

Raggio 0,75 m

Spessore 4 mm

Provino in plexiglass 5:

Altezza 0,75 m

Raggio 0,25 m

Spessore 5 mm

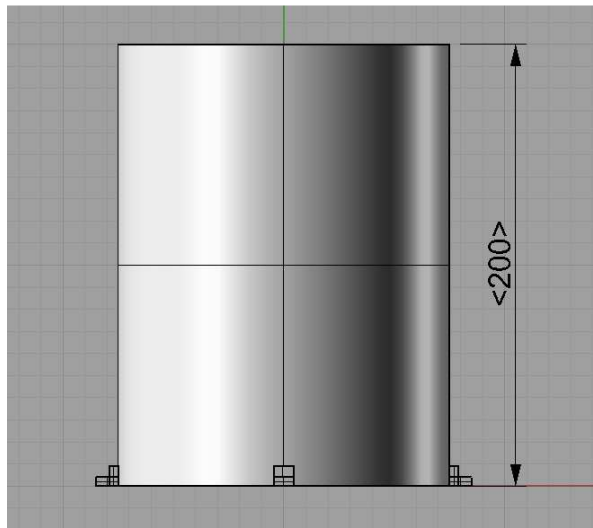


Figura 3: Vista frontale del provino

Le caratteristiche del plexiglass per i primi tre provini sono:

- $E = 3300 \text{ Mpa}$;
- $\nu = 0,38$;
- $\mu = 0,45$;

Le caratteristiche del policarbonato utilizzato per il quarto provino sono:

- $E = 2400 \text{ Mpa}$;
- $\nu = 0,38$;
- $\mu = 0,45$;

3.3 KICK-OFF MEETING 14 dicembre 2010: nuove idee

Il 14 dicembre 2010 si sono incontrati a Bristol i ricercatori e i docenti che studiano la problematica dei silo qui presentata e hanno fatto il punto della situazione per organizzare i successivi sviluppi.

Data:	14 e 15 Dicembre, 2010	
Luogo:	Bristol	
Partecipanti:		
Colin Taylor	Univ. of Bristol	Colin.Taylor@bristol.ac.uk
Luiza Dihoru	Univ. of Bristol	Luiza.Dihoru@bristol.ac.uk
Dora Foti	Politecnico of Bari	d.foti@poliba.i
Tomaso Trombetti	Univ. of Bologna	tomaso.trombetti@unibo.it
Stefano Silvestri	Univ. of Bologna	stefano.silvestri@unibo.it
Salvador Ivorra	Univ. of Alicante	sivorra@ua.es

Sono stati presentati i lavori seguiti all'Università di Bologna negli anni precedenti. In questi studi il sisma veniva simulato con accelerazioni verticali e orizzontali, senza amplificazioni, il silo (contorno) era infinitamente rigido, non si definiva una rigidità ai grani, l'insilato era diviso in un disco D e un elemento E.

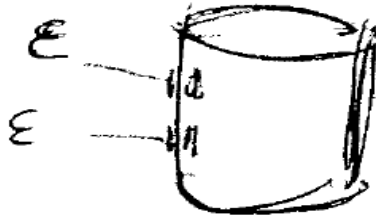
Si svilupparono quattro idee durante la discussione:

1. Misurare le deformazioni del provino direttamente in vari punti.
2. Suddividere il provino in anelli: misurare quindi la pressione in modo discreto.
3. Creare dei piccoli buchi nelle pareti per misurare la pressione
4. Ottenere i profili delle pressioni con i sensori Tekscan

3.3.1 Soluzione 1

Idea: L'intento è di misurare durante la futura prova le deformazioni in vari punti. Occorre uno studio preliminare. Siccome le pareti del silo nella teoria sono

assunte infinitamente rigide, non si hanno deformazioni. Per conoscerle si deve considerare una certa flessibilità. E' necessario quindi creare un modello flessibile su cui valutare tensioni e deformazioni.

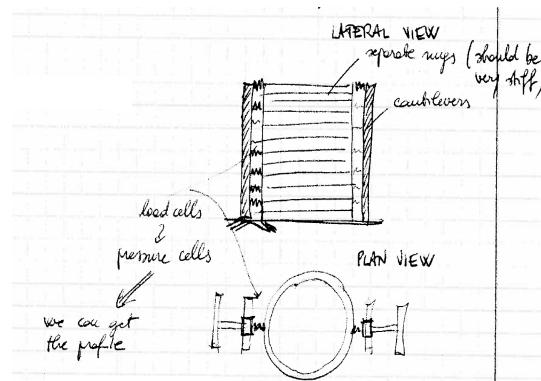


PRO: Risulterebbe ben rappresentativo del silo.

CONTRO: può essere difficile ottenere informazioni sul profilo delle deformazioni, essendo queste molto piccole.

3.3.2 Soluzione 2

L'idea di partenza è suddividere il cilindro in bande o anelli e misurare le pressioni agenti su ogni anello in modo discreto.



PRO: Si potranno investigare tanti sistemi più semplici caratterizzati da differenti rigidezze e si potranno definire due casi limite: infinitamente rigido e flessibile.

PRO: si avrà una buona stima del profilo delle pressioni

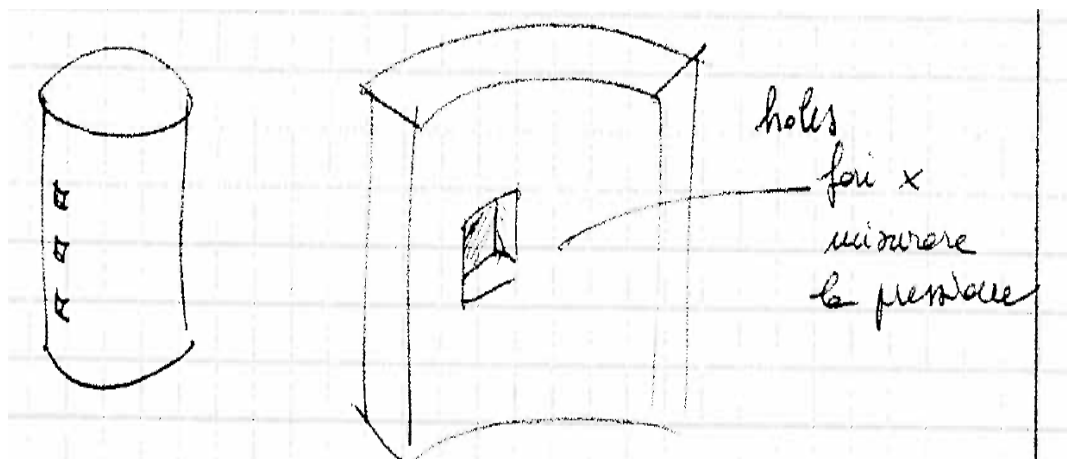
CONTRO: questo sarà rappresentativo della realtà o no?

CONTRO: l'attrito tra le bande può alterare la misura della pressione

3.3.3 Soluzione 3

Andando a porre sulla parete dei trasduttori di dimensioni finite (secondo le due soluzioni precedenti) si creano dei punti di discontinuità sia per quanto riguarda sia il coefficiente d'attrito sia perché varia la geometria con cui viene a contatto il materiale granulare.

Soluzione proposta: fare piccoli buchi in un cilindro, ove porre la strumentazione di misura in modo che non vari la geometria dell'interfaccia con l'insilato, per misurare la pressione.



CONTRO: può funzionare?

3.3.4 Soluzione 4

Usare un sistema di acquisizione dei dati mediante apparecchiature Tekscan.

Tekscan Pressure Sensors

At the heart of every Tekscan [pressure measurement system](#) is an ultra-thin, tactile pressure sensor. Every Tekscan sensor is comprised of numerous individual sensing elements, or sensels. The sensel density represents the total number of sensels per unit of area. In order to use Tekscan's pressure sensors, you must have a Tekscan pressure measurement system as well as the corresponding sensor map (software driver) for the sensor.

The pressure sensors listed below are available in a wide range of shapes, sizes, pressure ranges, and resolutions. Over 200 different pressure sensors are available. [Custom pressure sensors](#) and pressure ranges can also be created to meet your specific application requirements. Please note, the sensors listed in this catalog are matrix sensors designed to be used with one of Tekscan's pressure mapping systems. If you need single-point force sensors for testing, or custom force sensors for OEM applications, please refer to our [FlexForce](#) products.

Read the [Pressure Sensor Catalog Introduction](#) for guidelines and tips in selecting the proper pressure sensor for your application. For more information on pressure sensor properties such as linearity, repeatability, and drift, please visit our [Technology page](#).

Click on the sensors below to view specifications and illustrations. To browse by pressure sensor shape click through the following headings:

[Square](#) [Rectangular](#) [Annular](#) [Line](#) [Other](#)

Model	Sensing Area Dimensions				Standard Pressure Ranges		Sensel Density (Resolution)	
	Matrix Width		Matrix Height		psi	(kPa)	per in ²	per cm ²
sort by ↓	in	sort by ↓ (mm)	in	sort by ↓ (mm)				
3200	6.60	(167.6)	6.60	(167.6)	300	(2.069)	25.2	(3.9)
4205	1.80	(45.7)	1.55	(41.9)	12*	(83*)	178.1	(27.6)
5027	1.10	(27.9)	1.10	(27.9)	300*	(2.069*)	1,600.0	(248.0)

Tale opzione non prevede solo il sensore ma anche il software a suo supporto.

Il punto di forza di del sistema della Tekscan risiede nel fatto che i sensori forniti hanno uno spessore di circa 0,2 mm ed hanno la possibilità di misurare pressioni molto ridotte.

PRO: sarebbe veramente comodo misurare le pressioni così! (sistema meno invasivo)

CONTRO: il costo (bisogna informarsi presso la ditta produttiva)

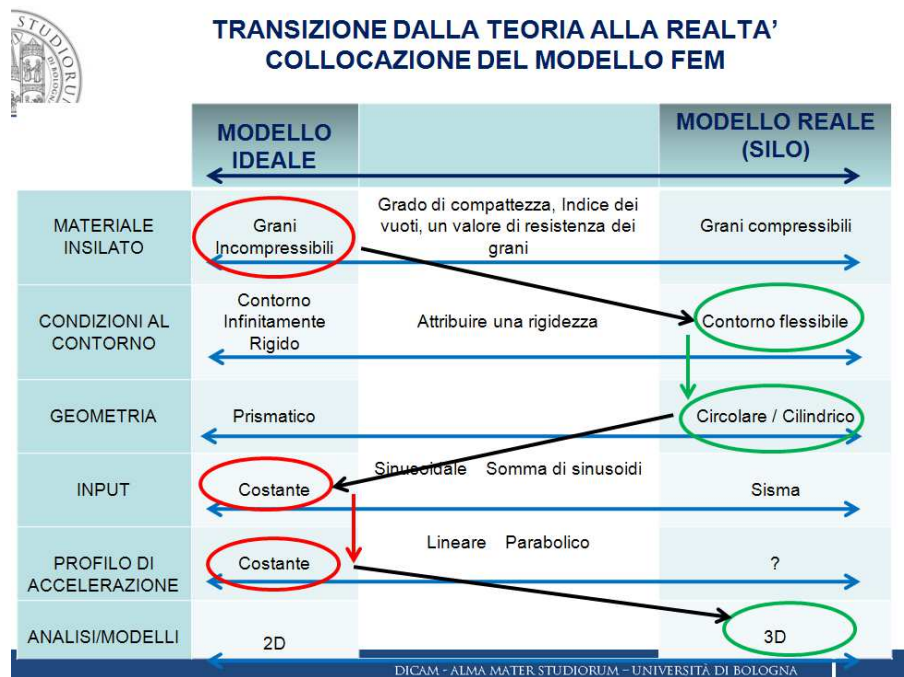
CONTRO: il taglio che influenza darebbe?

3.4 Soluzione 1: MODELLO FEM

Sono state fatte delle simulazioni numeriche tramite modellazione agli elementi finiti utilizzando il programma Straus7.

Nella creazione del modello si è scelto di rendere le pareti flessibili tramite elementi shell e di non modellizzare l'insilato ma di fornire direttamente i carichi agenti calcolandoli con le formule della teoria di Trombetti et al. esposta sopra.

Questa è la collocazione del modello nello schema che confronta il sistema numerico con la realtà



Sono cerchiare in rosso le caratteristiche più lontane dalla realtà, mentre sono cerchiare in verde le caratteristiche del modello perfettamente aderenti alla realtà. I grani, ad esempio, sono considerati incompressibili poiché i carichi sui modellini dei provini sono calcolati usando le formule della teoria di Trombetti et al., la quale pone alla base questa ipotesi di incompressibilità.

Le caratteristiche del materiale utilizzato sono:

- $E = 203943 \text{ Mpa}$;
- $\nu = 0,25$;
- $\mu = 0,26$;

Per il vincolamento alla base si sono seguite tre strade:

- 4 appoggiato;
- 5 incastrato;
- 6 solidale ad una piastra a cui è impedita la traslazione verticale e che è vincolata rispetto alle altre traslazioni solo nel punto centrale.

Come si vedrà in seguito queste differenti tipologie di vincoli non comportano variazioni significative nei risultati. Tale osservazione può essere fatta anche a priori ricordando la teoria classica dei gusci ove ogni generatrice è trattata come trave su suolo elastico:

$$Bw^{IV} + \beta w = p$$

$$\frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (s^3 w'') + \beta w = p \quad (6.1)$$

dove:

- E = modulo elastico del materiale;
- ν = coefficienti di Poisson;
- s = spessore del cilindro;
- w = spostamento radiale;
- $\beta = \frac{Es}{R^2}$;
- R = raggio del cilindro;
- p = pressione.

Come è ben noto gli effetti locali si smorzano molto velocemente (alla distanza di una lunghezza d'onda λ di 535,5 volte) per cui oltre una certa altezza dal

bordo gli effetti (spostamenti, sollecitazioni e deformazioni) dipendono esclusivamente dal carico esterno.

I carichi agenti forniti sono:

- p_h : pressioni orizzontali statiche;
- Δp_h : pressioni orizzontali dovute al sisma;
- p_w : pressioni verticali di taglio dovute all'attrito;
- Δp_w : incremento dovuto al sisma delle pressioni verticali di taglio;
- τ_h : tensioni tangenziale dovute al sisma (non presenti nell'Eurocodice);
- pesi propri;
- accelerazione applicata alla massa delle pareti.

Per semplicità vengono riassunte di seguito le espressioni utilizzate per la trattazione presentata in questo lavoro:

$$\Delta p_h = a_g \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \gamma \cdot z$$

$$\tau_{v,GW} = \mu_{GW} \cdot p_{h,GW}$$

$$\Delta \tau_{v,GW} = \mu_{GW} \cdot \Delta p_{h,GW}$$

$$\tau_t = a_g \cdot \sin \theta \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \gamma \cdot z$$

Ora si riportano le equazioni della trattazione dell'Eurocodice:

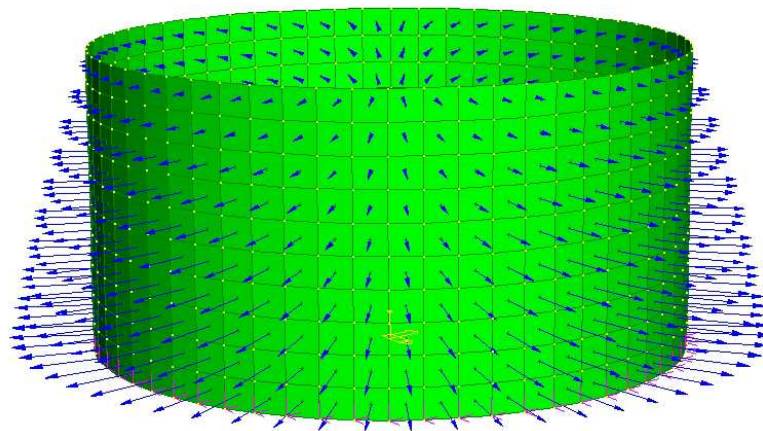
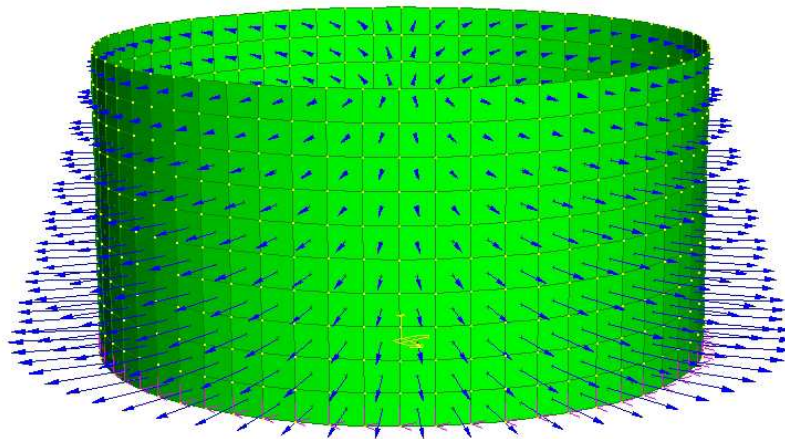
$$p_h(z) = \gamma \cdot K \cdot z_0 \left\{ \left[\left(\frac{z-h_0}{z_0-h_0} \right) + 1 \right]^n \right\}$$

$$\Delta p_h = \alpha(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \cdot \cos \vartheta$$

$$\tau_{v,GW} = \mu_{GW} \cdot p_{h,GW}$$

$$\Delta \tau_{v,GW} = \mu_{GW} \cdot \Delta p_{h,GW}$$

Vengono riportate alcune visualizzazioni del modello caricato con le pressioni agenti sulle pareti.



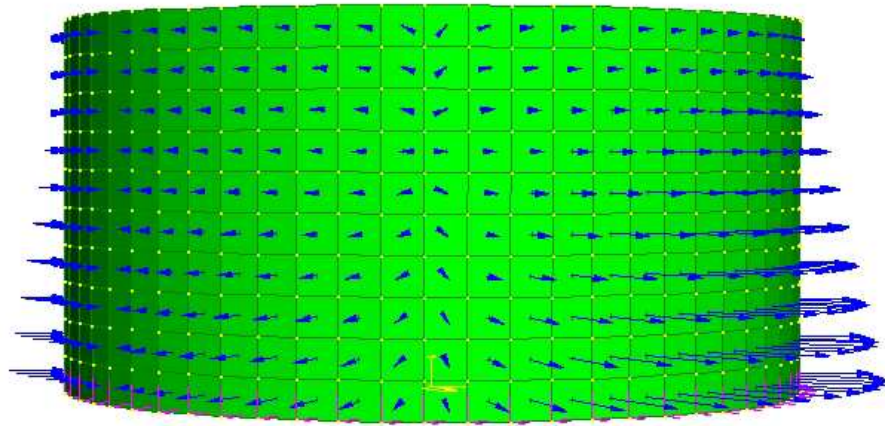


Figura 4: Pressioni orizzontali statiche (sopra) e sismiche (sotto)

Come si può ben notare nella prima immagine della figura 4, corrispondente alla teoria proposta, l'andamento delle pressioni è lineare con l'altezza a differenza di quanto si vede nel caso dell'Eurocodice dove le pressioni si mantengono invariate tranne che in prossimità della base.

Per quanto riguarda le pressioni verticali lungo le pareti dovute all'attrito si può notare la differenza che intercorre tra i due casi statici ed i due sismici: mentre nel caso statico le pressioni orizzontali sono su tutta la superficie positive durante l'eccitazione sismica su metà della superficie esse cambiano segno.

Seguono alcune immagini sui carichi per il provino cubico.

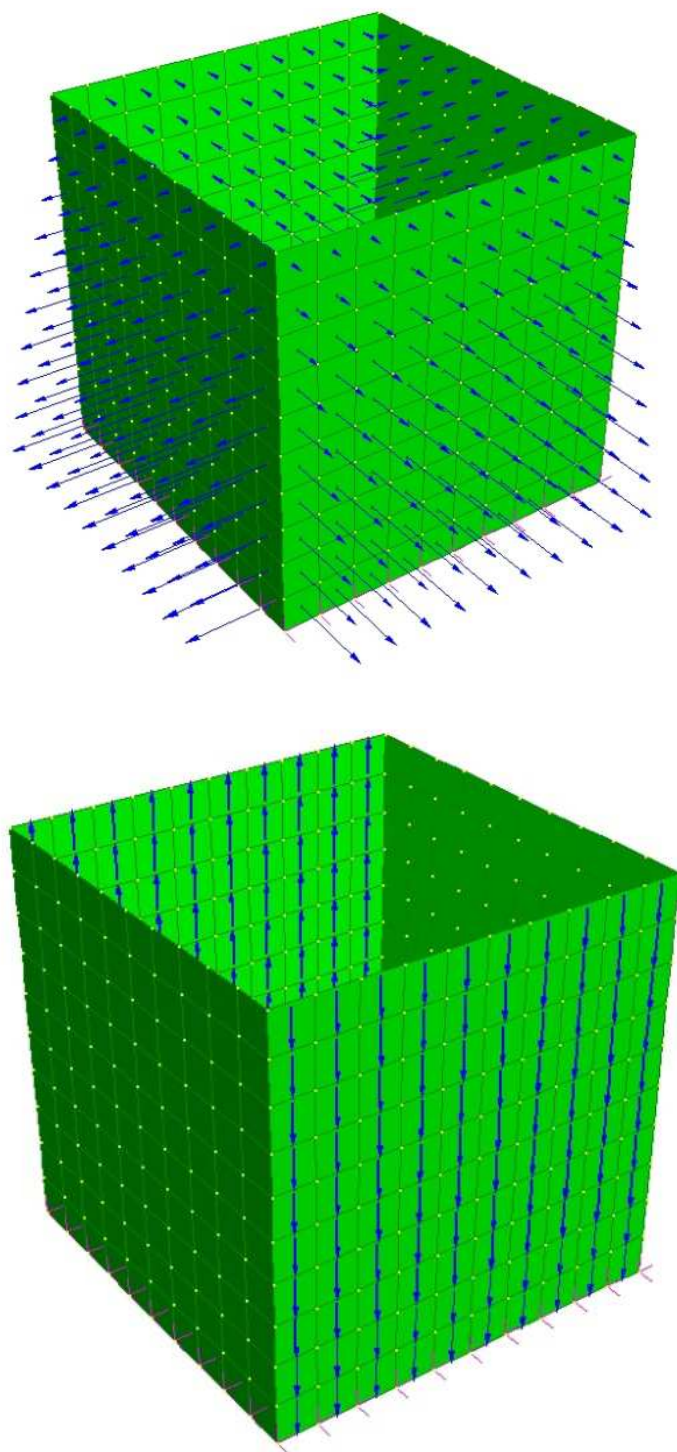


Figura 5: Pressioni orizzontali statiche (sopra) e verticali sismiche (sotto)

3.4.1 Risultati

Ora vengono riportati i risultati ottenuti tramite la simulazione agli elementi finiti.

Principalmente si andranno ad indagare le tensioni di parallelo e di meridiano che nascono e le relative deformazioni e gli spostamenti lungo l'altezza.

Sono riportate nella parte sinistra del grafico le quantità (tensioni e deformazioni) di meridiano e nella parte destra le quantità di parallelo.

Sono riportati per ogni provino 3 grafici sulle tensioni (stresses): caso statico, caso sismico e combinazione dei due. Le tensioni sono in Kg/cmq.

Anche per le deformazioni (strain) sono riportati 3 grafici.

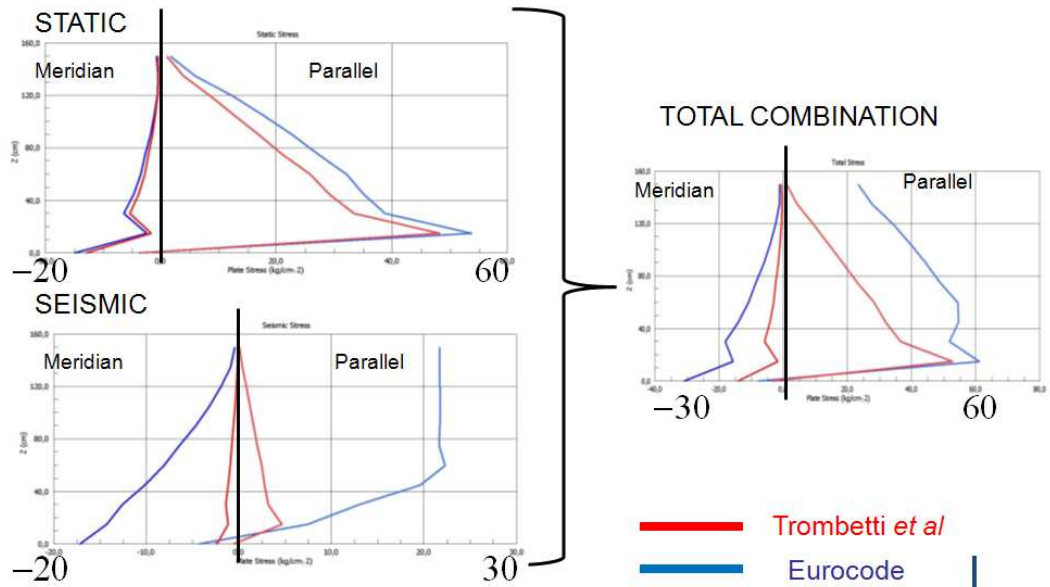
In blu sono rappresentate le curve inerenti al calcolo con gli Eurocodici ed in rosso le curve inerenti al calcolo con la teoria Trombetti *et al.*

Per non appesantire l'esposizione si riportano i grafici riguardanti solamente il caso di silos appoggiato poiché, come si è già ricordato, gli effetti di bordo si smorzano velocemente e quindi la variazione dei grafici è poco significativa.

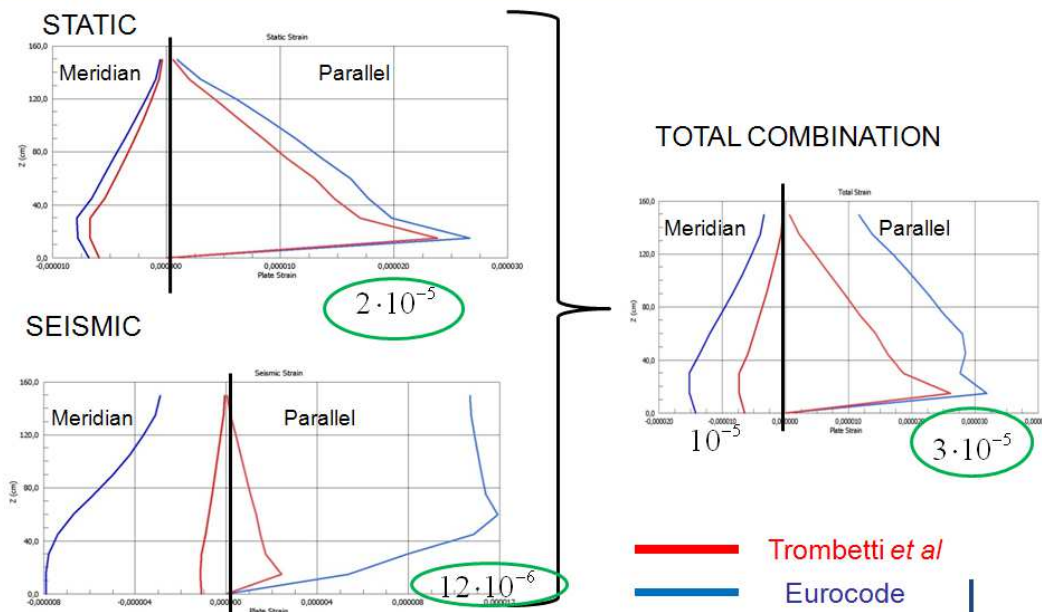
3.4.1.1 Provino 1



STEEL SPECIMEN 1 STRESSES



STEEL SPECIMEN 1 STRAIN

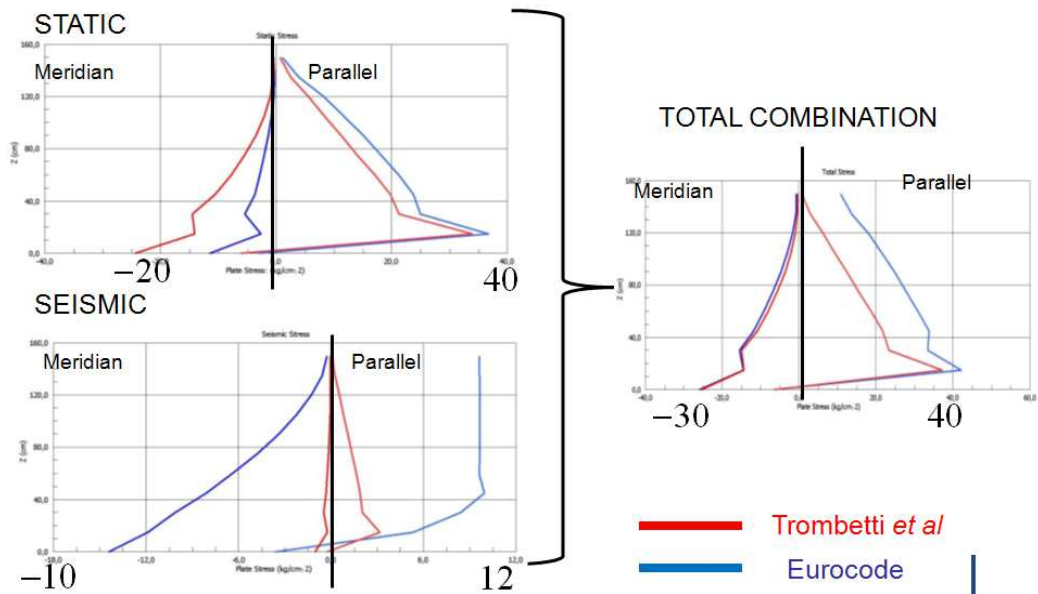


Nel caso statico le differenze sono lievi, nel caso sismico invece c'è una differenza di 20 Kg/cmq.

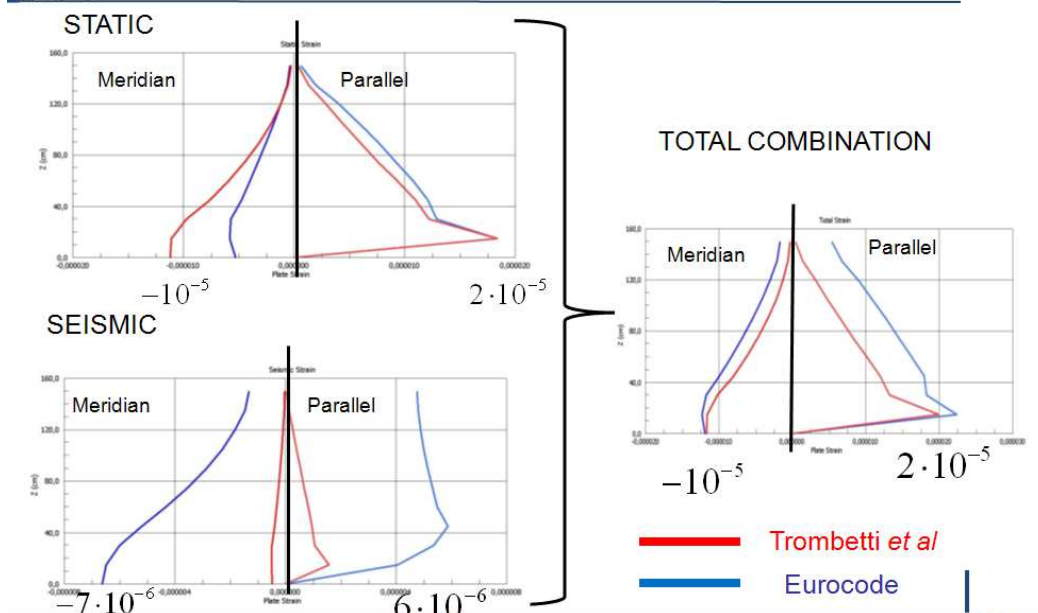
3.4.1.2 Provino 2



STEEL SPECIMEN 2 STRESSES



STEEL SPECIMEN 2 STRAIN



A differenza del provino precedente si può osservare che le tensioni di meridiano statiche valutate secondo l'Eurocodice sono minori di quelle valutate secondo la Trombetti *et al.*

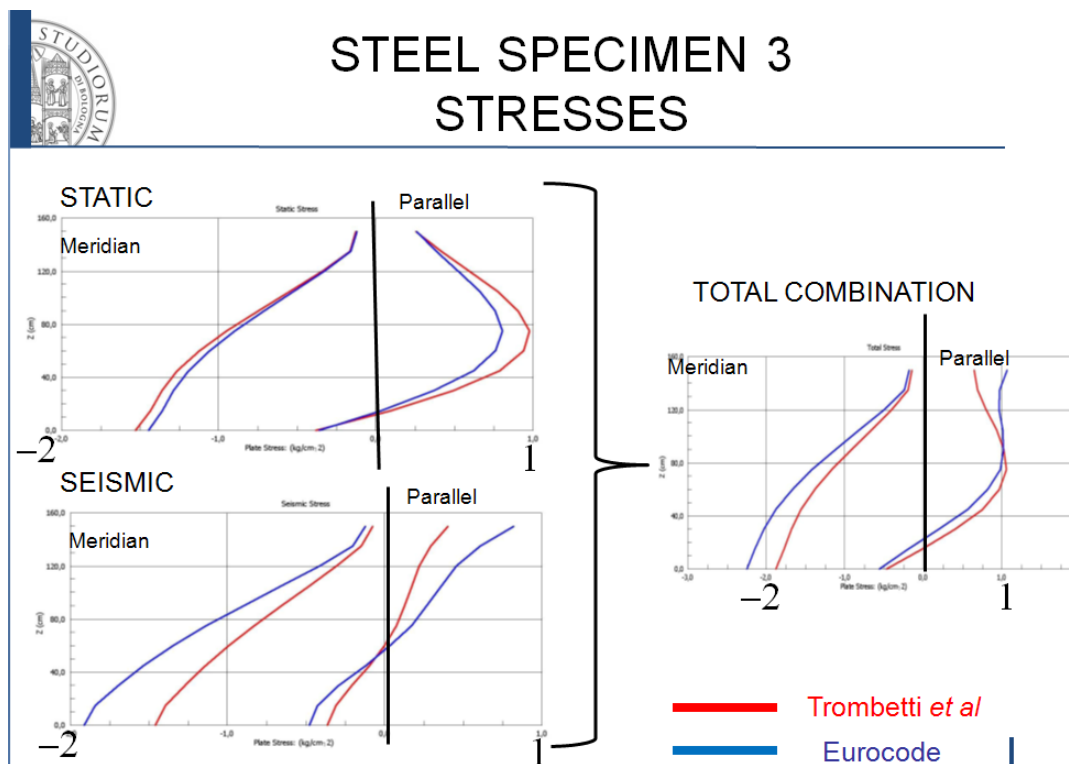
Studiare un provino più snello le differenze tra le due metodologie vanno riducendosi.

Le deformazioni di meridiano statiche dell'Eurocodice sono minori di quelle della teoria di Trombetti *et al.*

Invece nei casi sismici l'Eurocodice dà valori molto più alti della teoria di Trombetti.

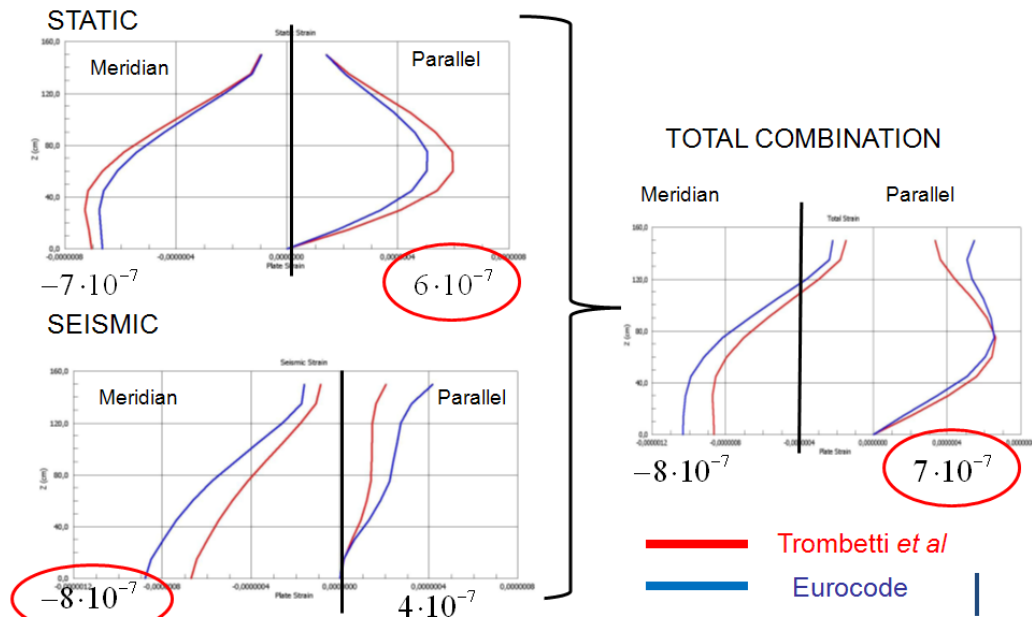
3.4.1.3 Provino 3

Il terzo provino è cubico; esso presenta andamenti non chiari dovuti agli effetti di bordo delle pareti laterali. Per eliminare tali effetti sarebbe stato necessario scegliere una geometria molto allungata ma date le dimensioni della piastra vibrante e della necessità di avere geometrie non snelle non è stato possibile operare in tale direzione.





STEEL SPECIMEN 3 STRAIN



Per quanto riguarda le deformazioni occorre notare quanto già accennato in precedenza: l'ordine di grandezza delle deformazioni massime è di 10^{-7} mentre la precisione di misura del laboratorio arriva a 2 micro ε , si rischia quindi incorrere nella eventualità che nell'esecuzione della prova non si possano misurare tali deformazioni. Questa è la motivazione principale che ha fatto prendere in considerazione di cambiare materiale per i provini.

3.4.1.4 Provini in plexiglass

Si sono effettuate simulazioni numeriche anche per provini in plexiglass con la stessa geometria di quelli in acciaio, ma con spessore di 4 mm anziché di 3 mm, più due ulteriori provini:

Il provino di policarbonato ha la problematica esecutiva di essere costituito da due metà fissate con rivetti ogni 20 cm sull'altezza.

Le caratteristiche del plexiglass per i primi tre provini sono:

- $E = 3300 \text{ Mpa}$;
- $\nu = 0,38$;
- $\mu = 0,45$;

Le caratteristiche del policarbonato utilizzato per il quarto provino sono:

- $E = 2400 \text{ Mpa}$;
- $\nu = 0,38$;
- $\mu = 0,45$;

Le ditte produttrici di tali materiali non forniscono, il coefficiente d'attrito tra plexiglass e grano, per cui il valore utilizzato è stato supposto a partire dall'attrito con l'acciaio. Nel caso venga confermata l'idea di utilizzare tale materiale sarà necessario avere valori ottenuti da test di laboratorio.

3.4.1.5 Grafici delle pressioni

Vengono riportate alcune immagini relative al carico utilizzato nel modello numerico.

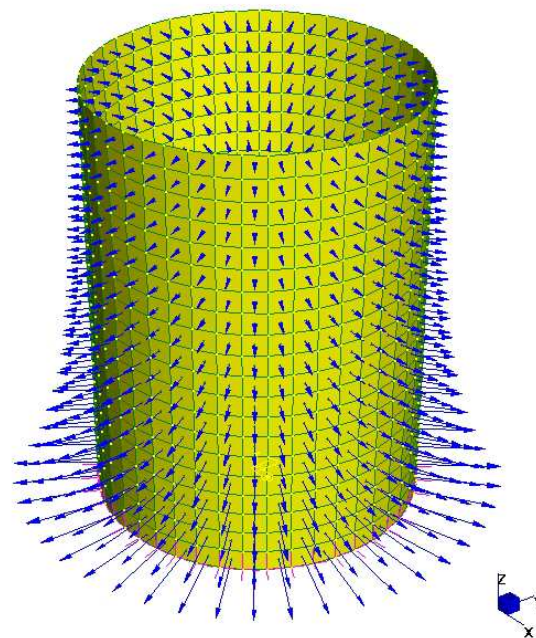
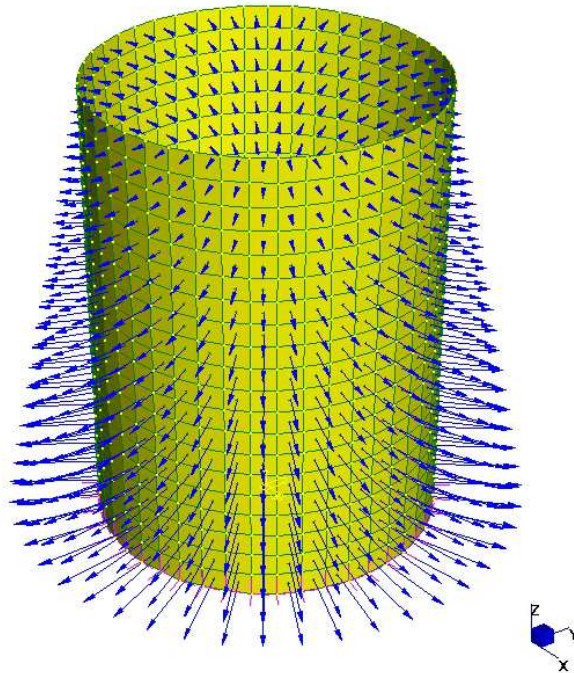


Figura 6: Pressioni orizzontali statiche: teoria di Trombetti sopra e Eurocodice sotto

Già nel caricamento del silos tramite le pressioni orizzontali statiche si può notare una prima diversità tra le due teorie: la teoria sviluppata dal Dipartimento ha un andamento lineare con l'altezza a differenza della teoria dell'Eurocodice che contempla la presenza di un'esponenziale.

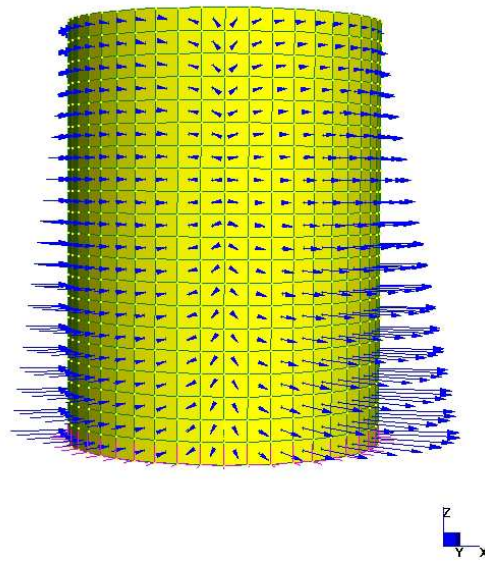


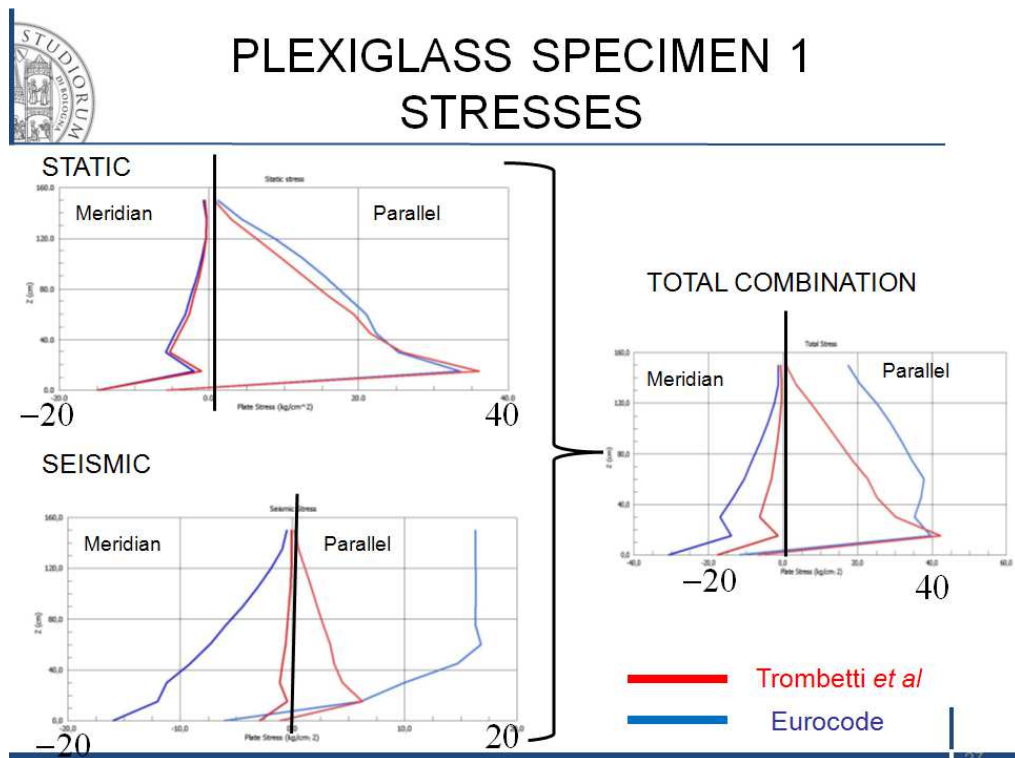
Figura 7: Pressioni orizzontali sismiche Teoria di Trombetti

Le sovrappressioni sismiche con la teoria di Trombetti et al. hanno andamento lineare con l'altezza mentre per l'Eurocodice l'andamento è costante ad eccezione di una fascia alla base.

Risultati

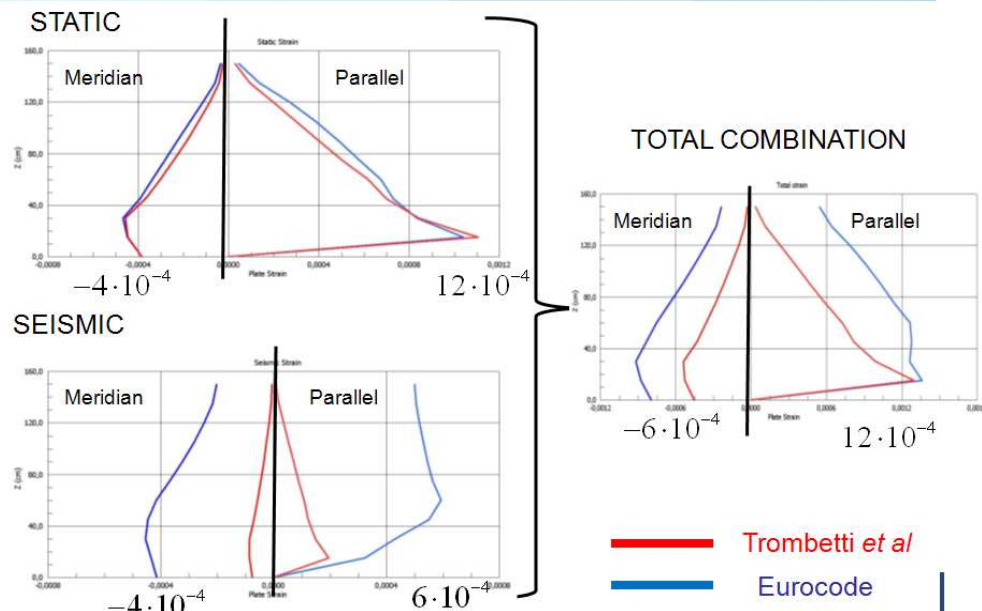
Vengono riportati i risultati delle simulazioni numeriche effettuate sui tre provini di base in plexiglass e su i due provini preventivati dalla Essebi s.r.l.

3.4.1.6 Provino 1





PLEXIGLASS SPECIMEN 1 STRAIN



Come nel caso dell'analogo provino in acciaio, sostanziali differenze tra le due casistiche si possono vedere per la combinazione sismica, e di conseguenza negli effetti totali.

Rispetto però al provino d'acciaio tali discostamenti sono sensibilmente inferiori. Tale effetto era atteso in quanto il coefficiente d'attrito tra le pareti e l'insilato è sensibilmente maggiore e, conseguentemente, risulta maggiore il volume di cereale che va ad agire sulla parete.

La differenza sostanziale che intercorre tra i due provini risiede nell'entità delle deformazioni: si è passati da un ordine di grandezza del 10^{-5} ad un 10^{-4} .

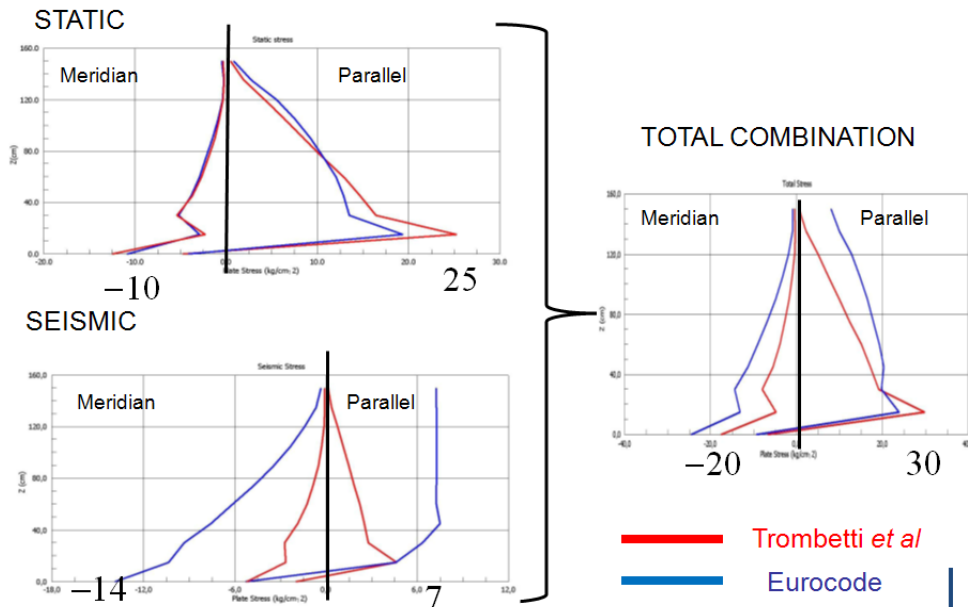
Vi è la possibilità di aumentare ancora l'entità delle deformazioni, aiutando quindi l'interpretazione dei risultati, andando a ridurre lo spessore delle pareti del provino. Per operare in tale direzione occorrerà informarsi accuratamente su tale possibilità presso la ditta produttrice che verrà scelta per la fornitura in quanto, per

i materiali come il plexiglass, lo spessore delle lastre è fortemente vincolato dai raggi di curvatura richiesti e dalle macchine di produzione.

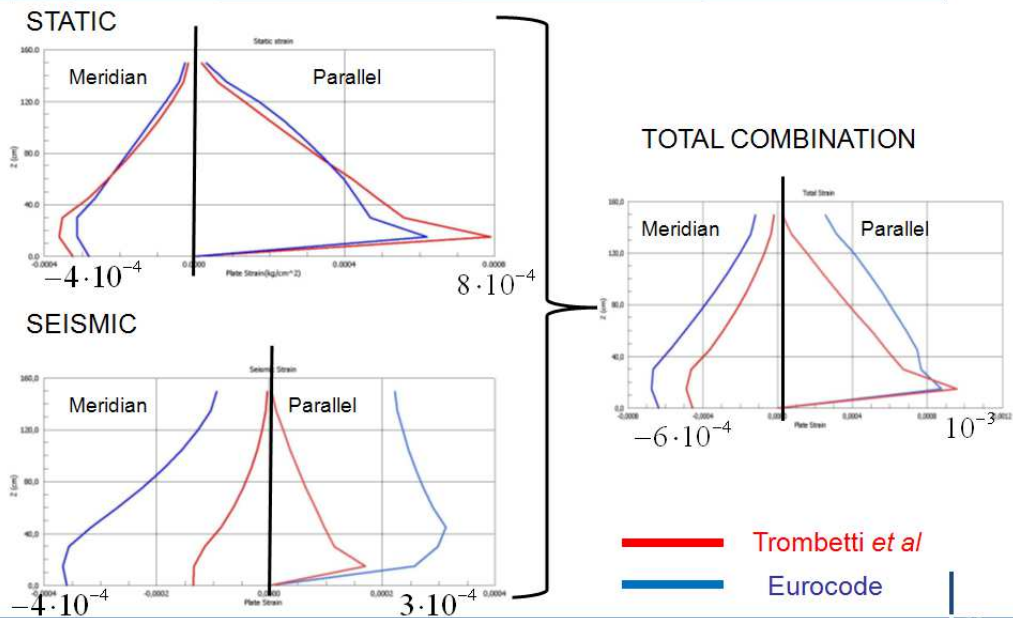
3.4.1.7 Provino 2



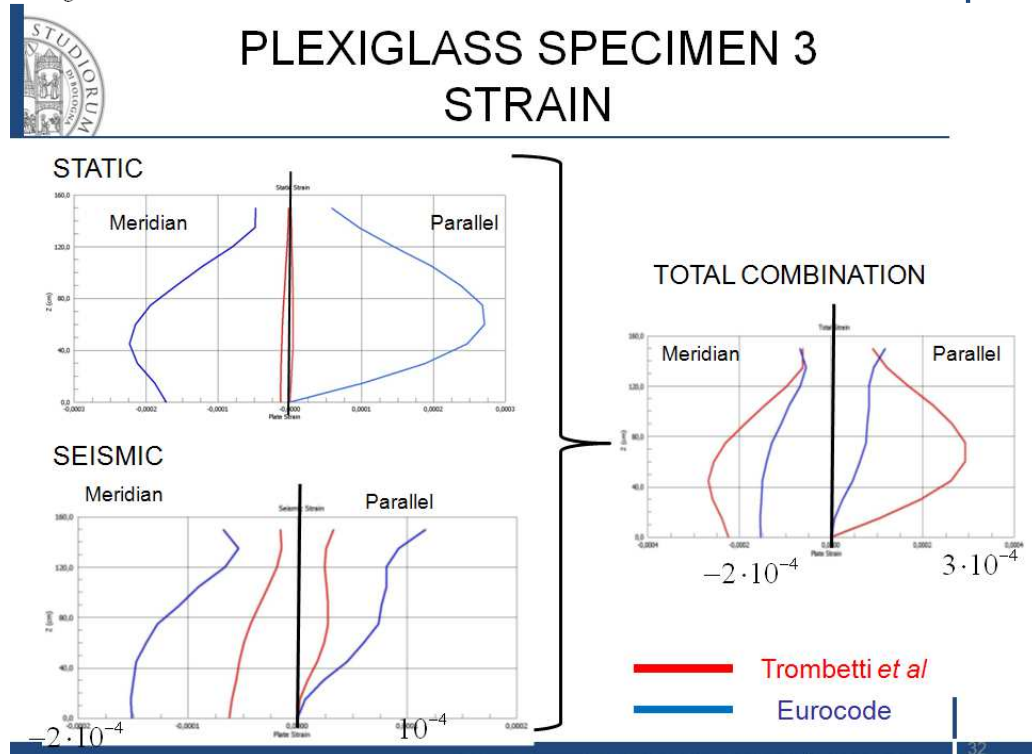
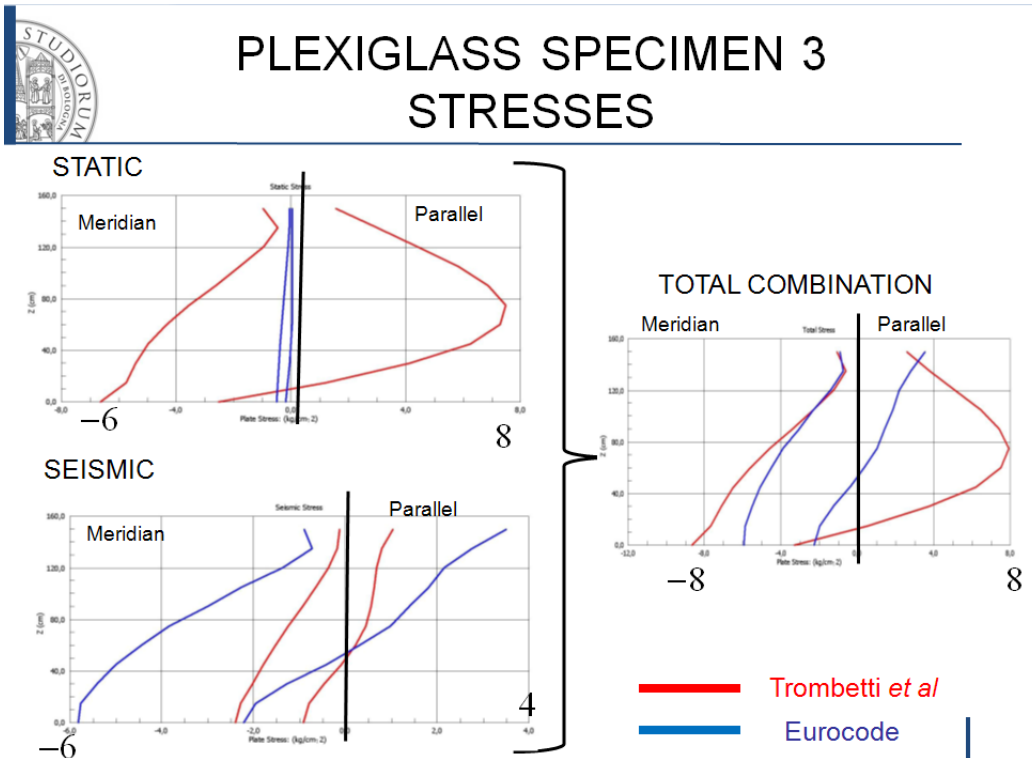
PLEXIGLASS SPECIMEN 2 STRESSES



PLEXIGLASS SPECIMEN 2 STRAIN



3.4.1.8 Provino 3

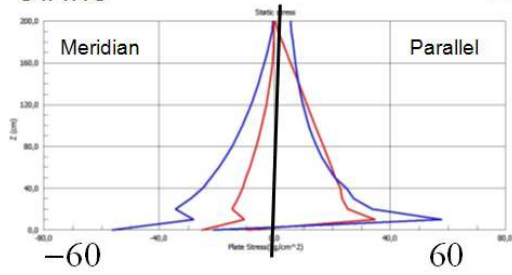


3.4.1.9 Provino 4

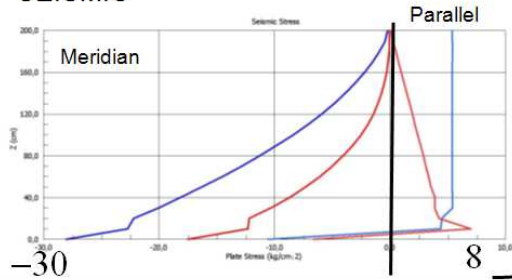


PLEXIGLASS SPECIMEN 4 STRESSES

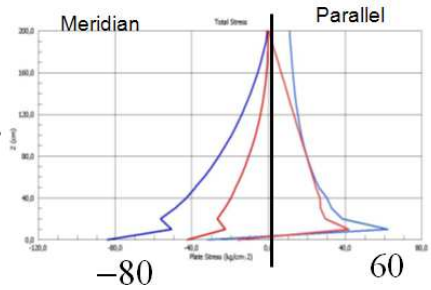
STATIC



SEISMIC



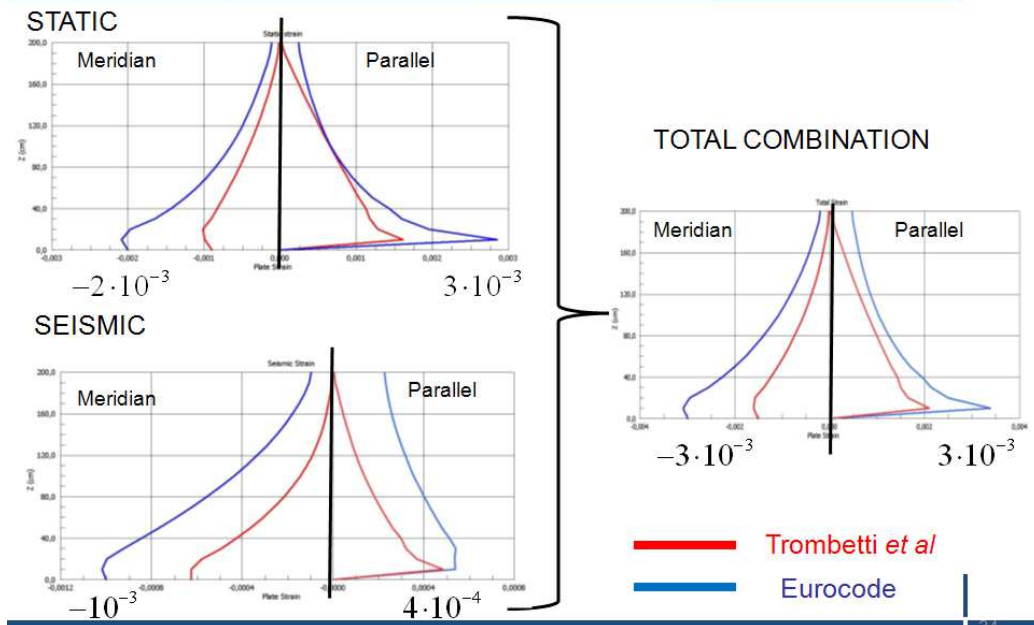
TOTAL COMBINATION



— Trombetti *et al*
— Eurocode



PLEXIGLASS SPECIMEN 4 STRAIN

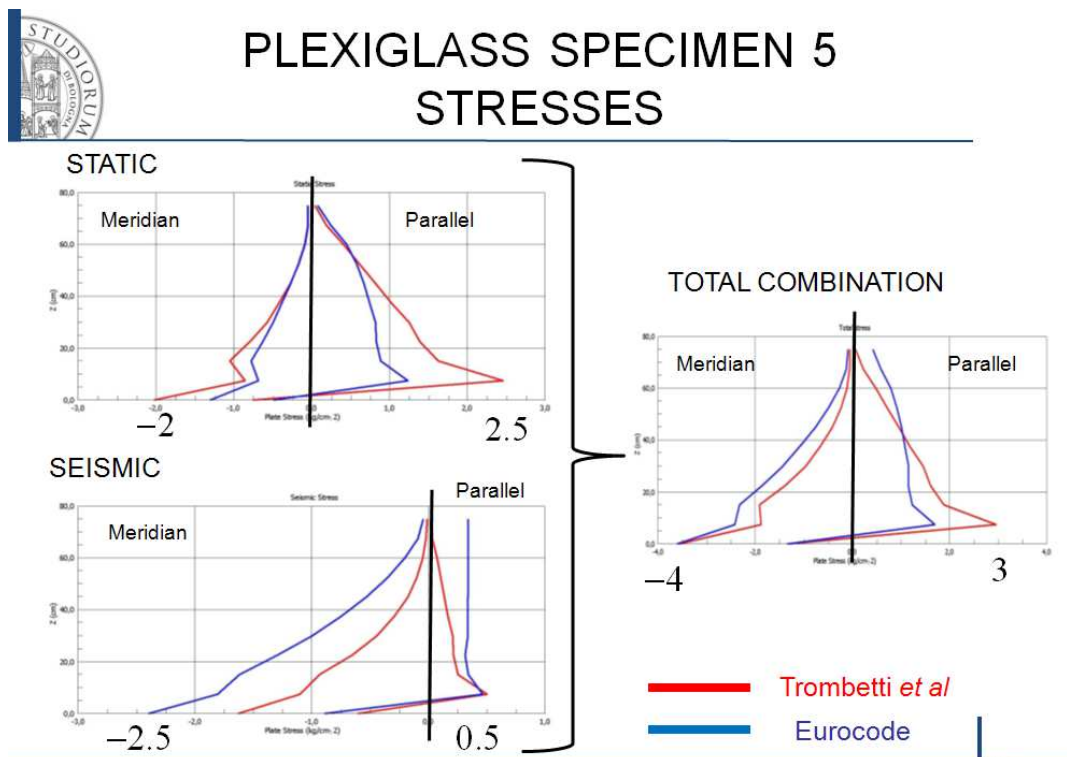


Come ci si poteva aspettare data l'elevata snellezza del provino ($\Delta = 1,33$ contro $\Delta \leq 1$ degli altri provini) e dell'elevato coefficiente d'attrito, le differenze tra i risultati delle due teorie sono marginali, soprattutto per quanto riguarda le tensioni di parallelo.

Anche le deformazioni (riportate nelle figure seguenti) seguono tale comportamento.

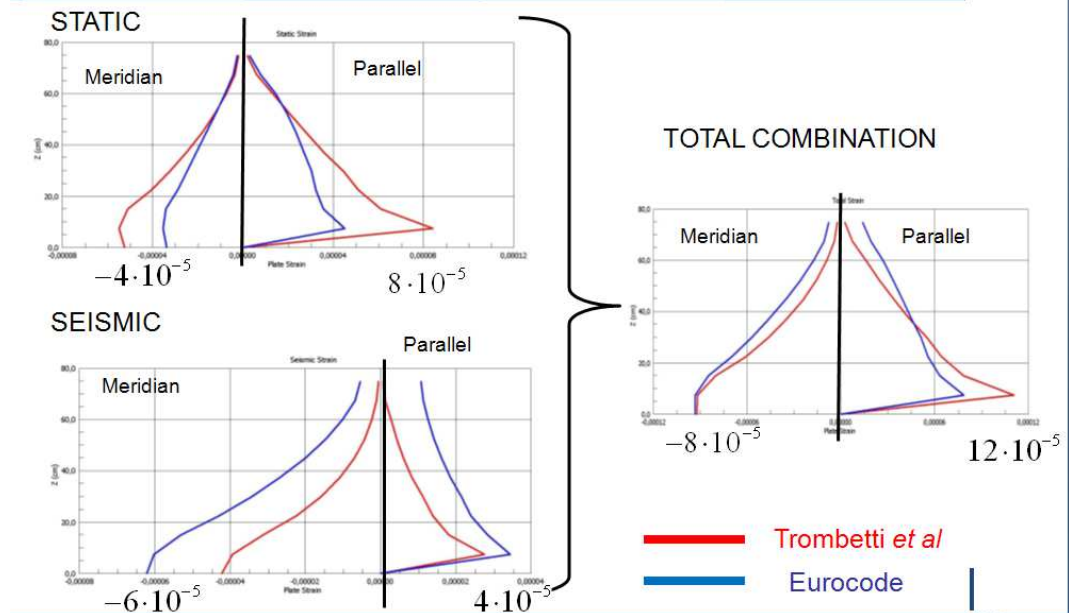
3.4.1.10 Provino 5

Anche in tale provino i risultati risentono fortemente della snellezza della geometria ($\Delta=1,5$) facendo in modo che gli scostamenti tra le curve diminuiscano ancora andando anche a cambiare di segno come è rilevabile per le tensioni totali di parallelo.





PLEXIGLASS SPECIMEN 5 STRAIN

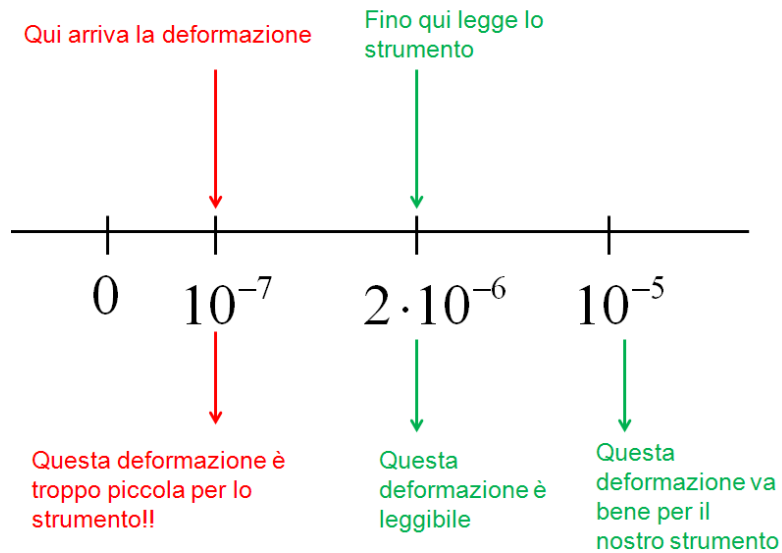


3.4.1.11 Conclusione

Il problema per i provini in acciaio è che lo strumento di misura, che ha una sensibilità di $2\mu\epsilon$, non riesce a leggere certe piccolissime deformazioni del terzo provino in acciaio.



PROVINO IN ACCIAIO PROBLEMA CON LE DEFORMAZIONI



PROVINI IN ACCIAIO PROBLEMI CON LE DEFORMAZIONI

Deformazioni	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}
Provino 1		✓	✓
Provino 2		✓	✓
Provino 3	✗		

Si è pensato allora di usare i provini in plexiglass, che si deformano più vistosamente, avendo un E modulo elastico minore. I risultati con i provini in plexiglass sono tutti soddisfacenti.



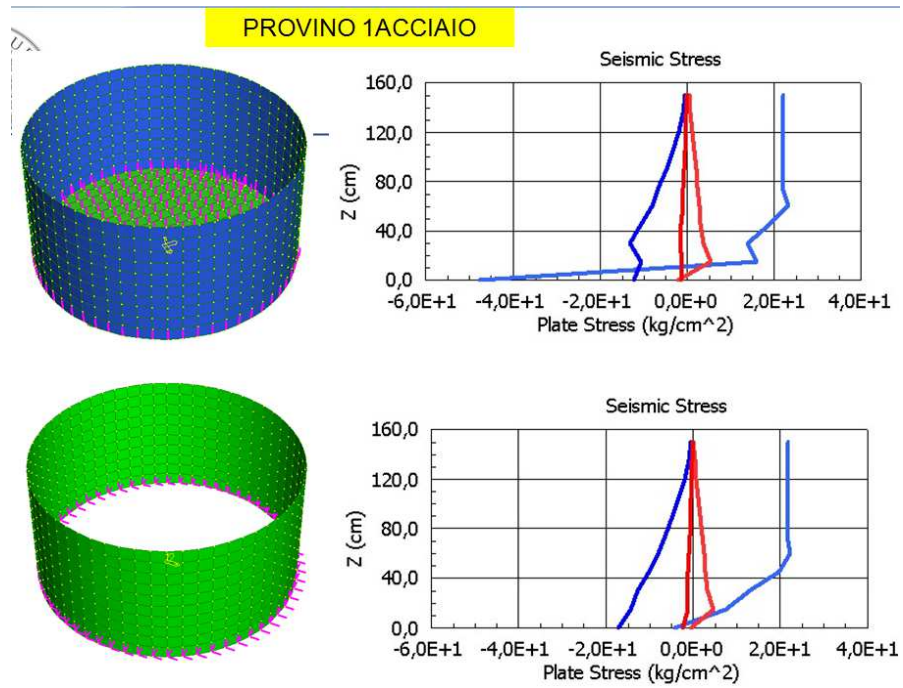
PROVINI IN PLEXIGLASS

NESSUN PROBLEMA

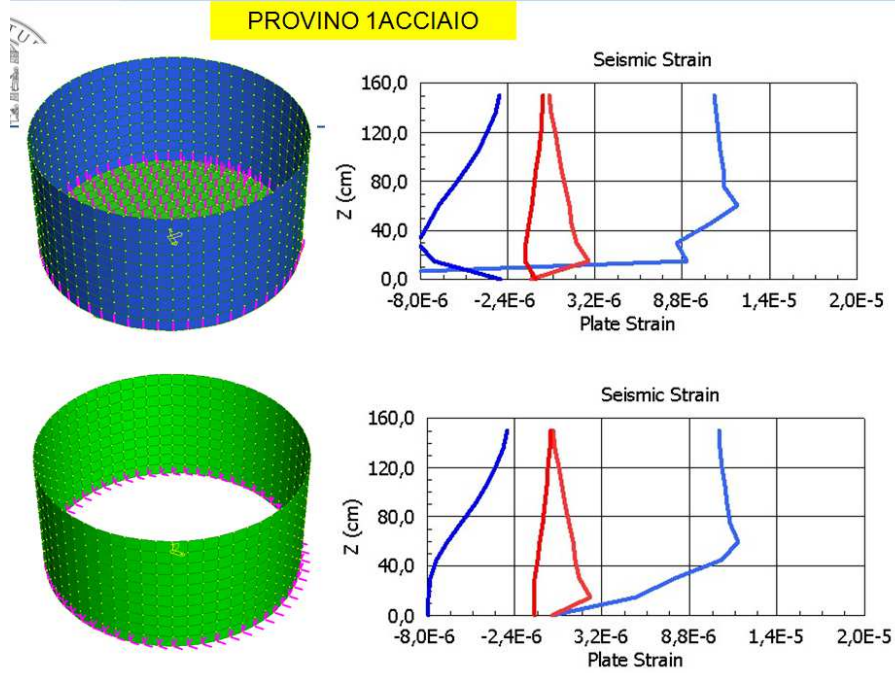
Deformazioni	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
Provino 1		✓	
Provino 2		✓	
Provino 3		✓	
Provino 4		✓	✓
Provino 5	✓		

Si mostra ora come le soluzioni con o senza fondello siano praticamente equivalenti:

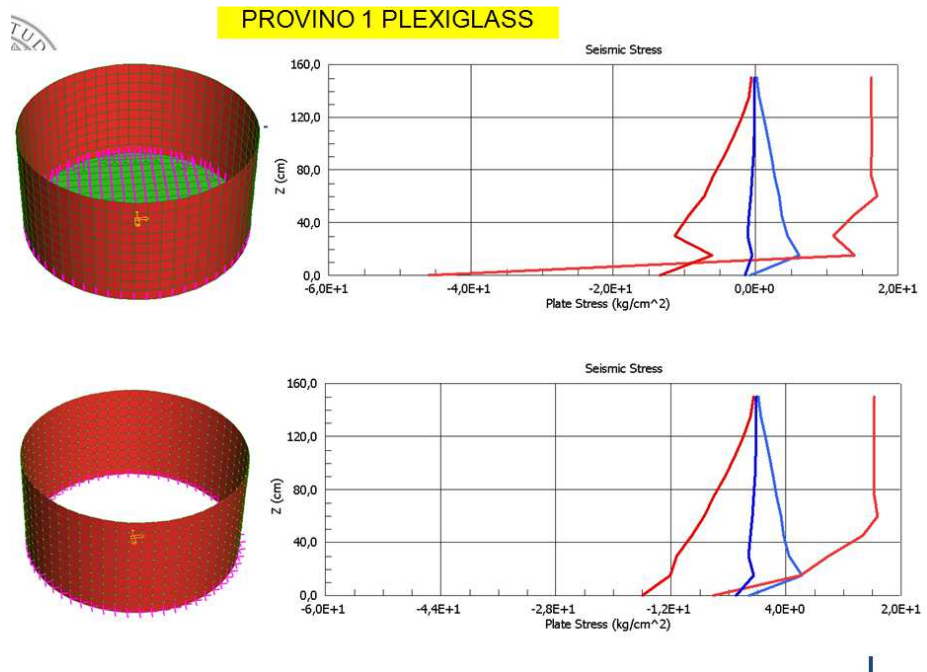
Tensioni del primo provino in acciaio:



Deformazioni del primo provino in acciaio:

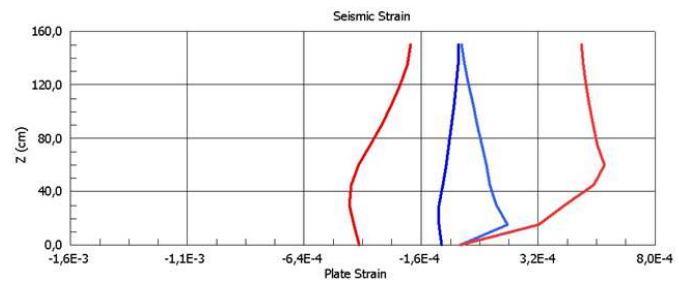
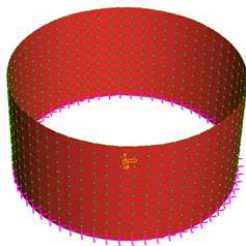
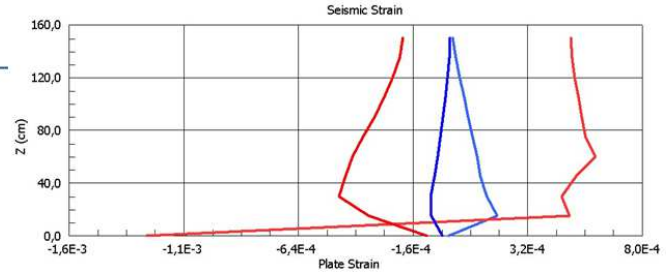
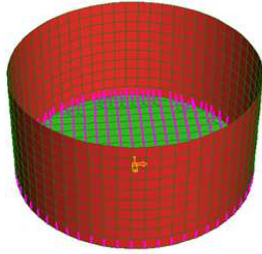


Tensioni del primo provino in plexiglass:



Deformazioni del primo provino in plexiglass:

PROVINO 1 PLEXIGLASS



3.5 Soluzione 2: METODO DELLE BANDE

3.5.1 Presentazione del metodo

Come accennato nel capitolo del kick-off meeting di bristol del 2010 un'idea era di dividere il provino in bande e misurare le pressioni di ogni banda. Si può immaginare una sorta di shear box: si potrebbe costruire il modello come l'unione di tanti anelli posti uno sull'altro e porre a lato due profilati metallici sui quali installare dei trasduttori, uno per ogni fascia creata.

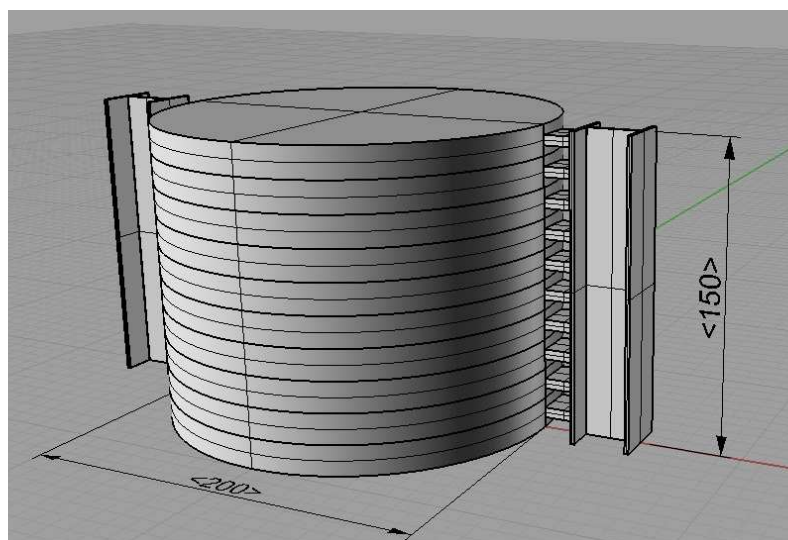
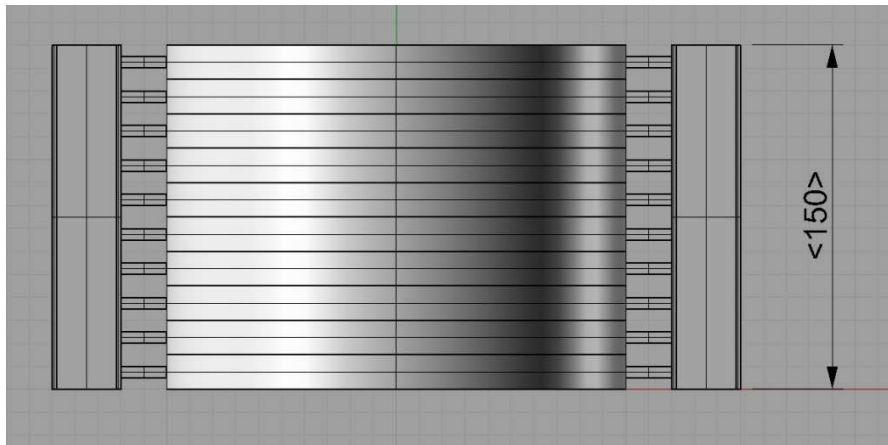


Figura 1: Vista frontale (sopra) e assonometrica (sotto) del modello a bande.

Le varie bande, potendo scorrere reciprocamente, andrebbero ad agire sulle celle di misurazione fornendo così direttamente un valore di forza da confrontare con la risultante delle pressioni.

Un pregio di questa metodologia è quello di poter tarare, agendo sulla geometria del profilato e del silos, la rigidità del sistema per renderla simile a quella di un silos reale.

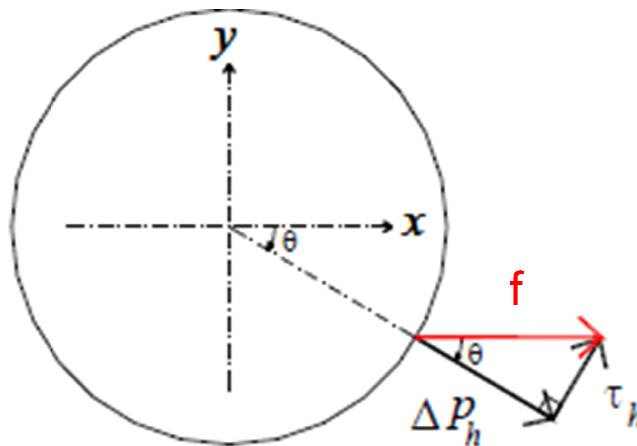
Si procede quindi alla valutazione analitica degli andamenti di queste risultanti sia per la teoria proposta che per l'Eurocodice in modo da poter confrontare facilmente i risultati sperimentali.

3.5.2 Calcolo delle pressioni di banda

3.5.2.1 Trombetti et al.

Ad ogni quota z è associabile la seguente risultante delle forze:

(in queste formule la tensione tangenziale τ_t viene indicata come τ_h)



$$f(z) = \int_0^{2\pi} (\Delta p_h \cdot \cos \vartheta + \tau_h \cdot \sin \vartheta) \cdot R \cdot d\vartheta$$

Essendo che :

$$\Delta p_h = \frac{a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta}$$

e

$$\tau_h = \left[\frac{a_g(z) \cdot \sin \vartheta}{(1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta)} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu$$

si ottiene:

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} \cdot \cos^2 \vartheta + \frac{a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} \cdot \sin^2 \vartheta \right) \cdot R \cdot d\vartheta$$

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} \cdot R \cdot d\vartheta$$

$$f(z) = a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot R \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} d\vartheta$$

Dal momento che:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} \right] \cdot d\vartheta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \mu^2 \cdot a_g(z)^2}}$$

si ottiene:

$$f(z) = a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot R \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \mu^2 \cdot a_g(z)^2}}$$

$$f(z) = 2\pi \cdot R \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \frac{a_g(z) \cdot z}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \mu^2 \cdot a_g(z)^2}}$$

Con tale formula si può facilmente ottenere l'andamento delle forze lungo l'altezza con un'accelerazione comunque variabile.

Considerando i due casi di accelerazione già considerati nella teoria precedente:

i. $a_g(z) = a_{g0};$

ii. $a_g(z) = a_{g0} + a_{g1}(H - z):$

$$f(z) = a_{g0} \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot R \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \mu^2 \cdot a_{g0}^2}};$$

$$f(z) = (a_{g0} + a_{g1}(H - z)) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot R \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \mu^2 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H - z))^2}}$$

Avendo però un numero finito di trasduttori (uno per ogni banda) per poter ottenere un risultato immediatamente confrontabile con i risultati della prova occorrerebbe integrare su ogni fascia.

Poiché tale operazione potrebbe risultare di difficile soluzione si adottano due ipotesi semplificative:

- 1) andamento della $a_g(z)$ lineare lungo la fascia;
- 2) utilizzo del valor medio della $a_g(z)$ nella i -esima fascia.

Suddividendo quindi il silos in n bande, per la i -esima banda si può scrivere:

$$F_i = \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} \frac{2\pi \cdot R \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot z}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \mu^2 \cdot a_g(z)^2}} \cdot dz$$

$$F_i = \frac{2\pi \cdot R \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot a_{gm,i}}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \mu^2 \cdot a_{gm,i}^2}} \cdot \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} z \cdot dz$$

avendo posto:

$$\Delta z = \frac{H}{n}$$

$$a_{gm,i} = \frac{a_g(i \cdot \Delta z) + a_g((i-1) \cdot \Delta z)}{2}$$

dove:

- Δz è l'altezza di ogni banda;
- H l'altezza totale del silos;
- $a_{gm,i}$ l'accelerazione media nella i -esima banda;
- $a_g(i \cdot \Delta z)$ l'accelerazione valutata alla fine della banda;
- $a_g((i-1) \cdot \Delta z)$ l'accelerazione valutata all'inizio della banda.

Con tali posizioni si ottiene:

$$F_i = \frac{\pi \cdot R \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot a_{gm,i}}{\sqrt{1 - v^2 \cdot \mu^2 \cdot a_{gm,i}^2}} \cdot (i^2 \cdot \Delta z^2 - (i-1)^2 \cdot \Delta z^2)$$

$$F_i = \frac{\pi \cdot R \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot a_{gm,i}}{\sqrt{1 - v^2 \cdot \mu^2 \cdot a_{gm,i}^2}} \cdot \Delta z^2 \cdot (2i - 1)$$

$$F_i = a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R \cdot \Delta z^2 \cdot (2i - 1) \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 \cdot \mu^2 \cdot a_{gm,i}^2}} \right)$$

Nel caso di accelerazione costante per tutta l'altezza del silos la formula sopra corrisponde all'integrazione esatta della funzione.

3.5.2.2 Eurocodice

Ad ogni quota z è associabile la seguente risultante delle forze:

$$f(z) = \int_0^{2\pi} (\Delta p_{h,s0} \cdot \cos \vartheta) \cdot R \cdot d\vartheta$$

Essendo che :

$$\Delta p_{h,s0} = a_g(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x)$$

dove:

$$r_s^* = \min\left(h_b, \frac{d_c}{2}\right)$$

hb: è l'altezza dell'insilato;

dc: è la dimensione del silos parallela alla componente orizzontale dell'azione sismica;

x: la distanza verticale dal fondo piano.

si ottiene:

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \left[a_g(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \right] \cdot \cos \vartheta \cdot R \cdot d\vartheta$$

$$f(z) = a_g(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \cdot R \cdot \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \cdot d\vartheta$$

La risultante di piano la si può quindi scrivere come:

$$f(z) = 4 \cdot a_g(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \cdot R$$

A seconda delle caratteristiche geometriche del silos e della quota z si avrà:

$$f(z) = \begin{cases} 4 \cdot a_g(z) \cdot \gamma \cdot R^2 & \text{o } 4 \cdot a_g(z) \cdot \gamma \cdot R \cdot H \\ 4 \cdot a_g(z) \cdot \gamma \cdot R \cdot 3x \end{cases}$$

Anche in questo caso è possibile ottenere l'andamento delle forze lungo l'altezza con un'accelerazione comunque variabile.

Andando comunque ad esplicitare per le due casistiche prese in esame:

$$f(z) = \begin{cases} 4 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R^2 & \text{o } 4 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R \cdot H \\ 4 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R \cdot 3x \end{cases}$$

$$f(z) = \begin{cases} 4 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H-z)) \cdot \gamma \cdot R^2 & \text{o } 4 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H-z)) \cdot \gamma \cdot R \cdot H \\ 4 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H-z)) \cdot \gamma \cdot R \cdot 3x \end{cases}$$

Integrando per i due casi di accelerazione considerati si ottiene rispettivamente:

$$F_i = \begin{cases} 4 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot \Delta z & \text{o } 4 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R \cdot H \cdot \Delta z \\ 12 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R \cdot \Delta z \cdot \left[H - \frac{\Delta z}{2} \cdot (2i-1) \right] \end{cases}$$

$$F_i = \begin{cases} 4 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H-z)) \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot \Delta z & \text{o } 4 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H-z)) \cdot \gamma \cdot R \cdot H \cdot \Delta z \\ 12 \cdot \gamma \cdot R \cdot \Delta z \cdot \left[H(a_{g0} + a_{g1}H) - \Delta z \cdot (2i-1) \left(\frac{a_{g0}}{2} + a_{g1}H \right) + \Delta z^2 \left(\frac{a_{g1}}{3} + i^2 a_{g1} - i a_{g1} \right) \right] \end{cases}$$

Per una semplicità di calcolo, per poter integrare su ogni fascia considerando un'accelerazione qualsiasi, si ricorre alle tre ipotesi precedentemente illustrate.

Suddividendo quindi il silos in n bande, per la i-esima banda si può scrivere:

$$F_i = \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} 4 \cdot a_g(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \cdot R \cdot dz$$

$$F_i = 4 \cdot \gamma \cdot a_{gm,i} \cdot R \cdot \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} \min(r_s^*; 3x) \cdot dz$$

avendo posto:

$$\Delta z = \frac{H}{n}$$

$$a_{gm,i} = \frac{a_g(i \cdot \Delta z) + a_g((i-1) \cdot \Delta z)}{2}$$

Diversificando le varie possibilità poste in essere dall'eurocodice:

$$F_i = \begin{cases} 4 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot \Delta z & \text{o} & 4 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot H \cdot \Delta z \\ 4 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} 3x \cdot dz \end{cases}$$

Visto che la coordinata x è duale alla z, la terza equazione assume la forma:

$$F_i = 4 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} 3 \cdot (H - z) dz$$

$$F_i = 12 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \left[H \cdot \Delta z - \frac{\Delta z^2}{2} \cdot (2i - 1) \right]$$

$$F_i = 12 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \Delta z \cdot \left[H - \frac{\Delta z}{2} \cdot (2i - 1) \right]$$

In maniera equivalente si potrebbe operare andando ad integrare in x cambiando l'indice di integrazione:

$$F_k = 4 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \int_{(k-1)\Delta z}^{k\Delta z} 3 \cdot x \cdot dx$$

$$F_k = 6 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \left(k^2 \cdot \Delta z^2 - (k-1)^2 \cdot \Delta z^2 \right)$$

$$F_k = 6 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \Delta z^2 \cdot (2k - 1)$$

Dove k indica la numerazione delle bande a partire dal basso, la relazione che lega la k alla i è la seguente:

$$k = n - i + 1$$

Sostituendo il risultato qui sopra nell'equazione precedente e svolgendo il calcolo si ottiene nuovamente la F_i .

Si riportano i grafici di tali forze per i provini ipotizzati, ognuno suddiviso in 10 fasce.

3.5.2.3 Acciaio

3.5.2.3.1 Provino I

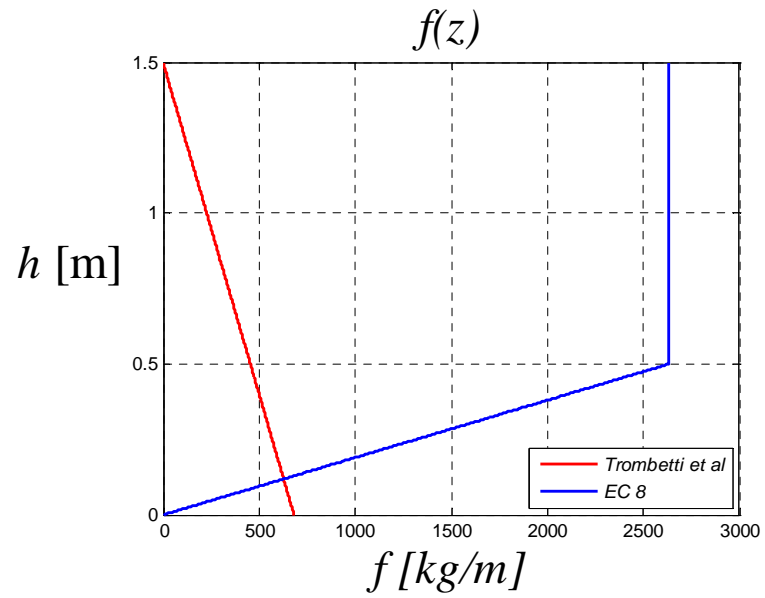


Figura 1 Risultanti di piano

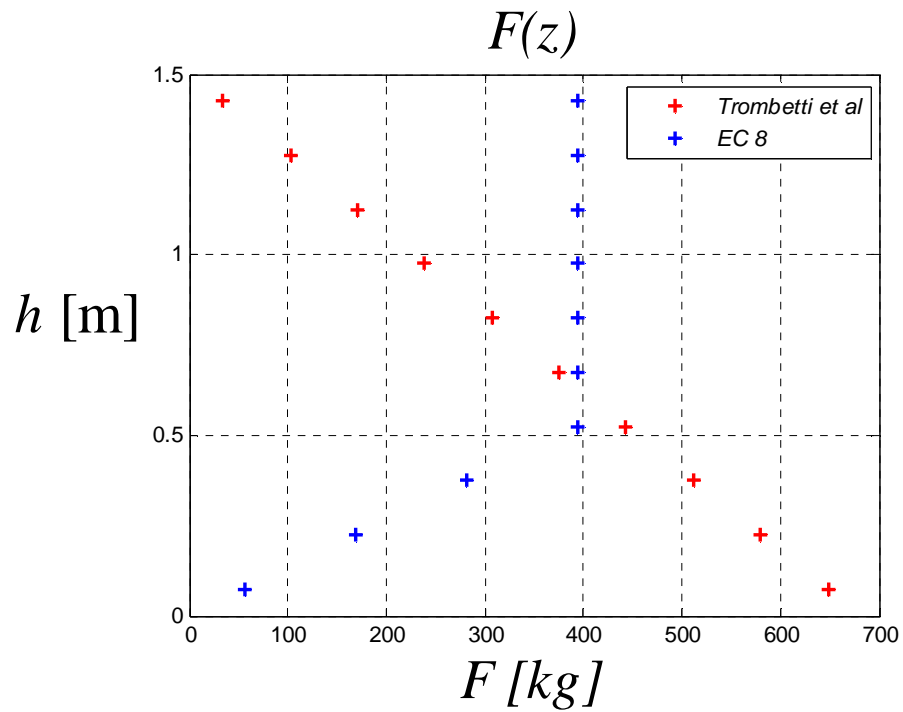


Figura 2 Risultanti di banda

3.5.2.3.2 *Provino 2*

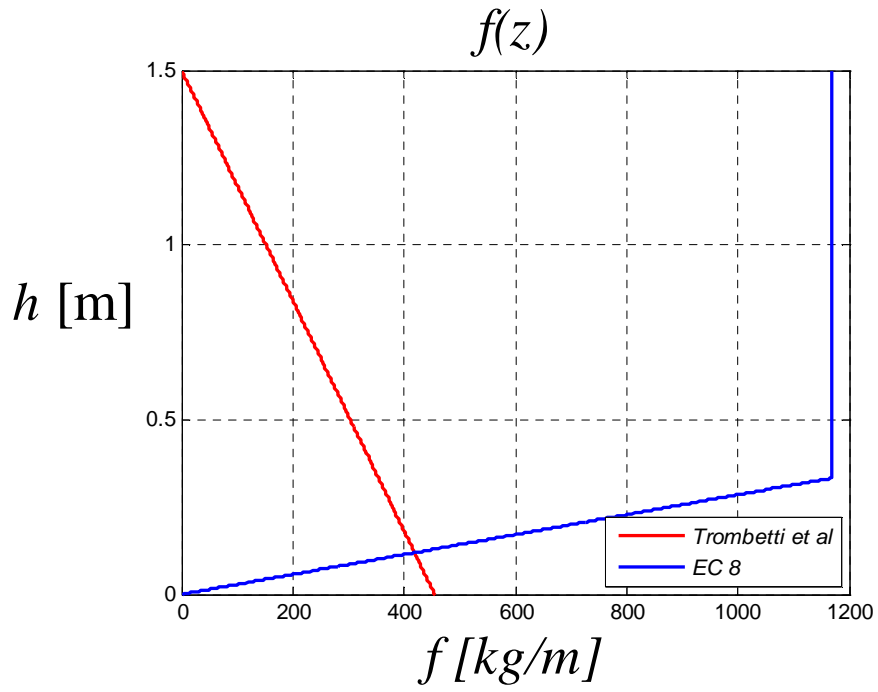


Figura 3 Risultanti di piano

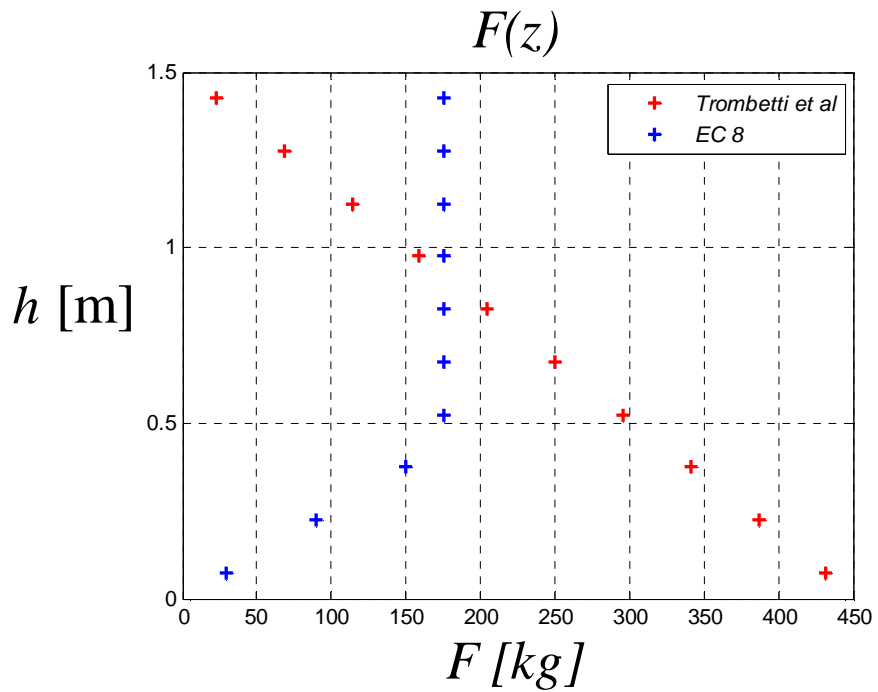


Figura 4 Risultanti di banda

3.5.2.3.3 Provino 3

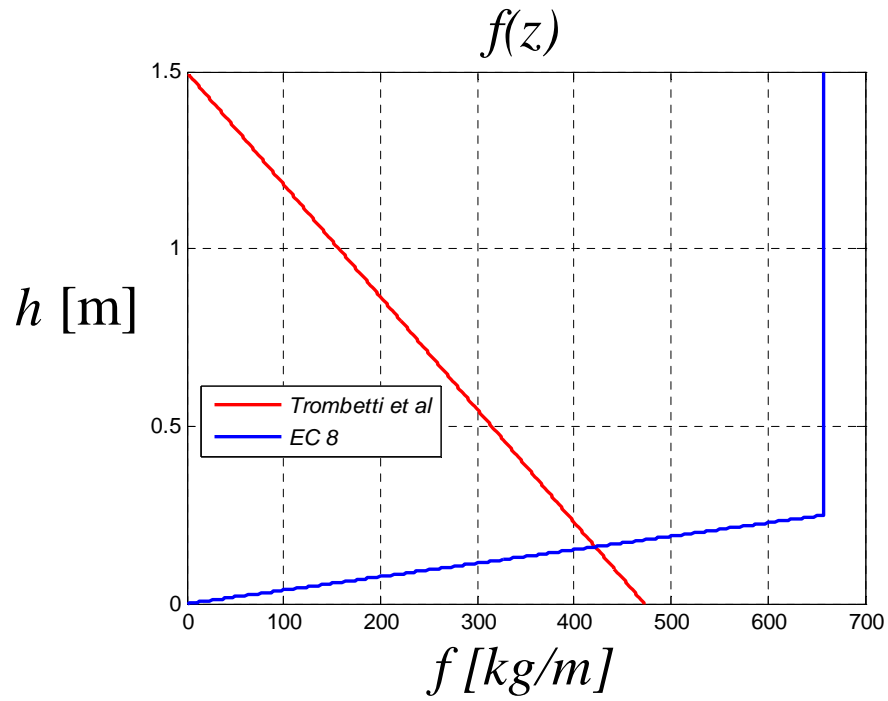


Figura 5 Risultanti di piano

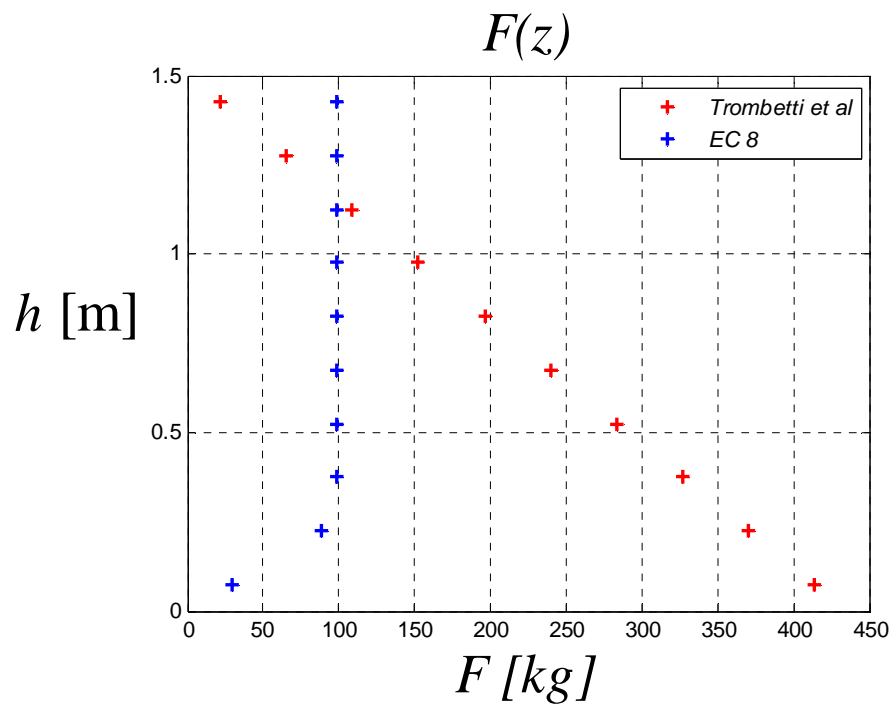


Figura 6 Risultanti di banda

Come si può notare dalle figure 2 4 6 le risultanti per ogni fascia sono fortemente influenzate dalla snellezza del provino come d'altronde ci si aspettava

3.5.2.4 Plexiglass

3.5.2.4.1 Provino 1

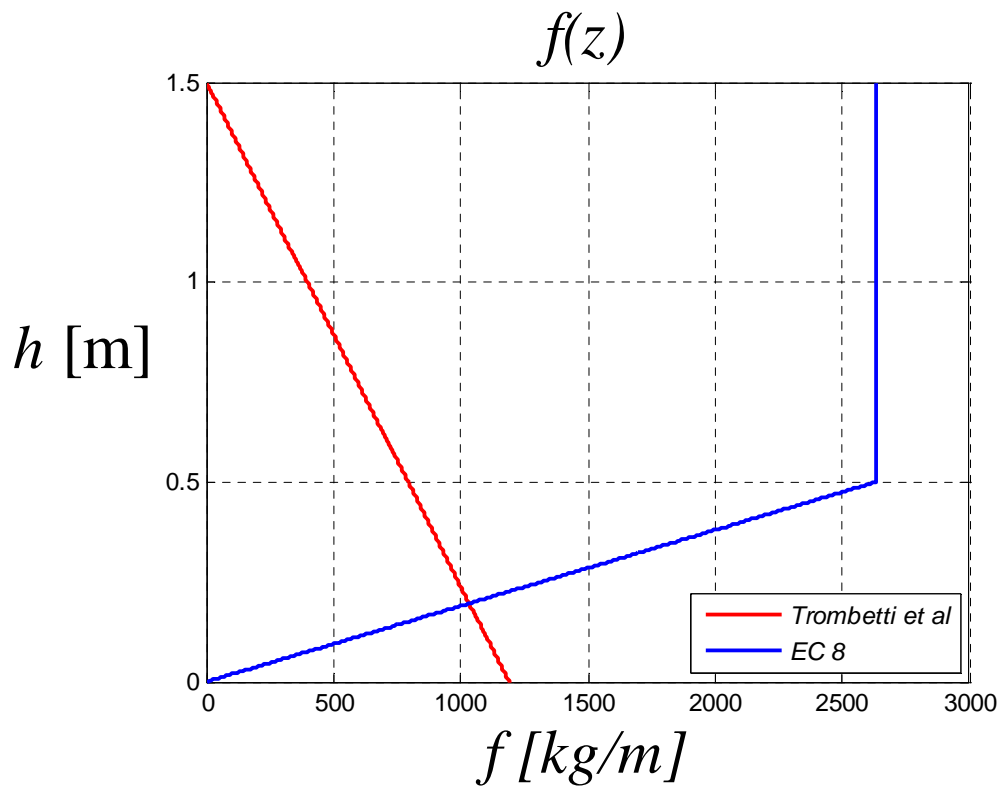


Figura 7. Risultanti di piano

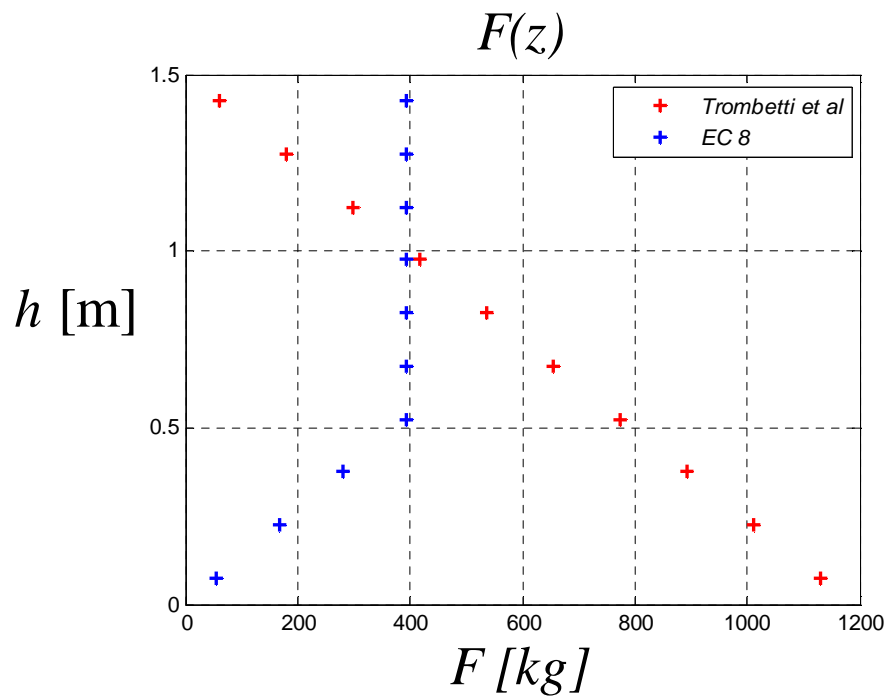


Figura 8 Risultanti di banda

3.5.2.4.2 Provino 2

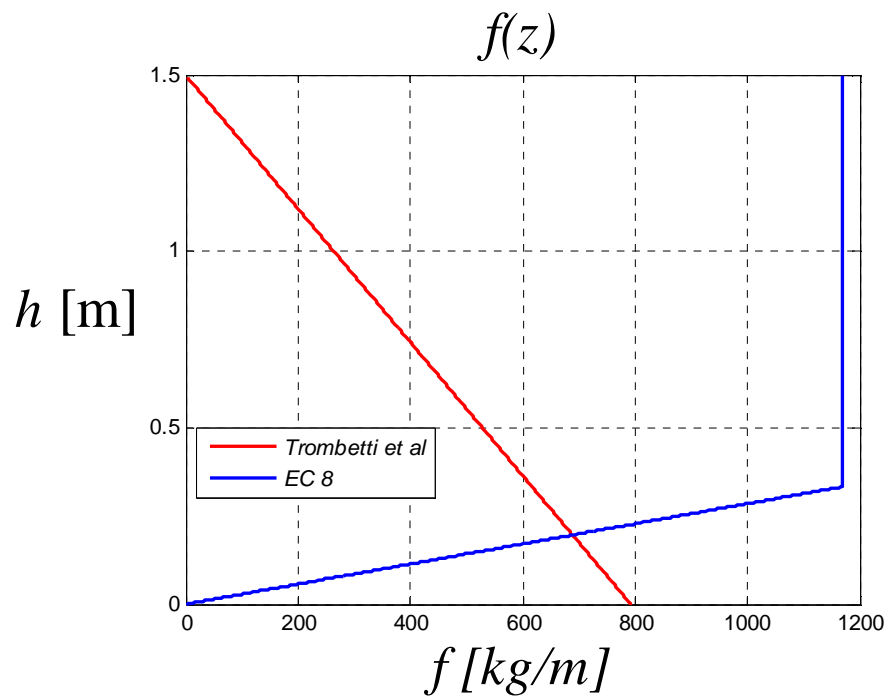


Figura 9 Risultanti di piano

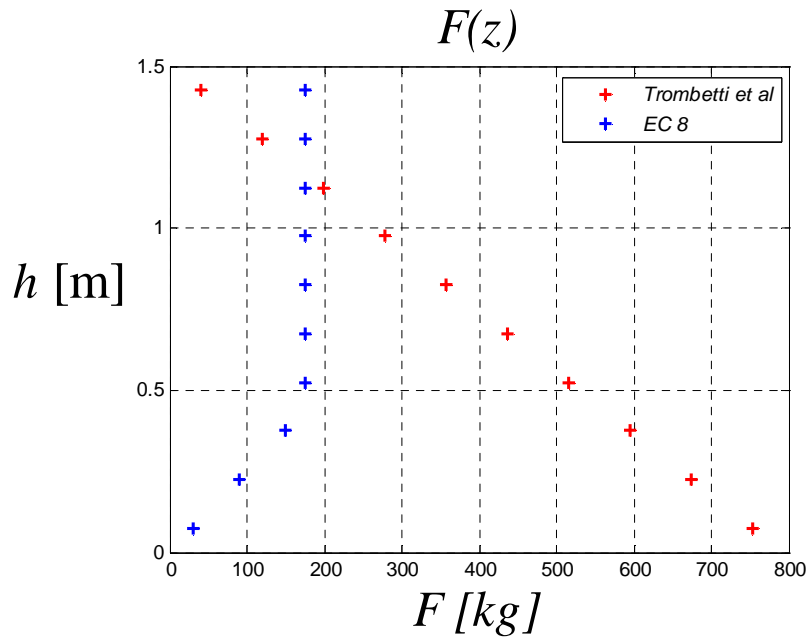


Figura 10 Risultanti di banda

3.5.2.4.3 Provino 3

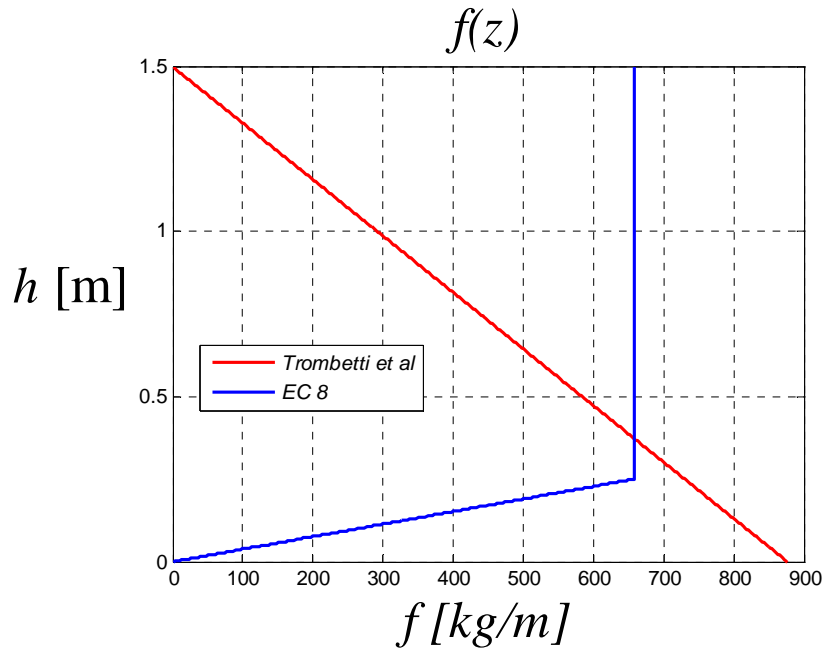


Figura 11 Risultanti di piano

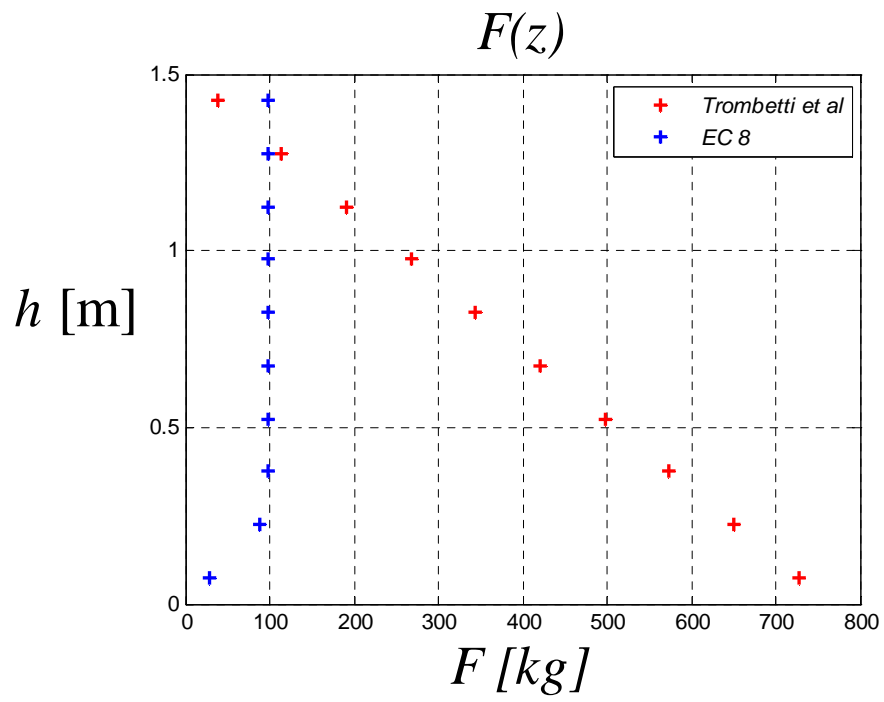


Figura 12 Risultanti di banda

3.5.2.4.4 Provino 4

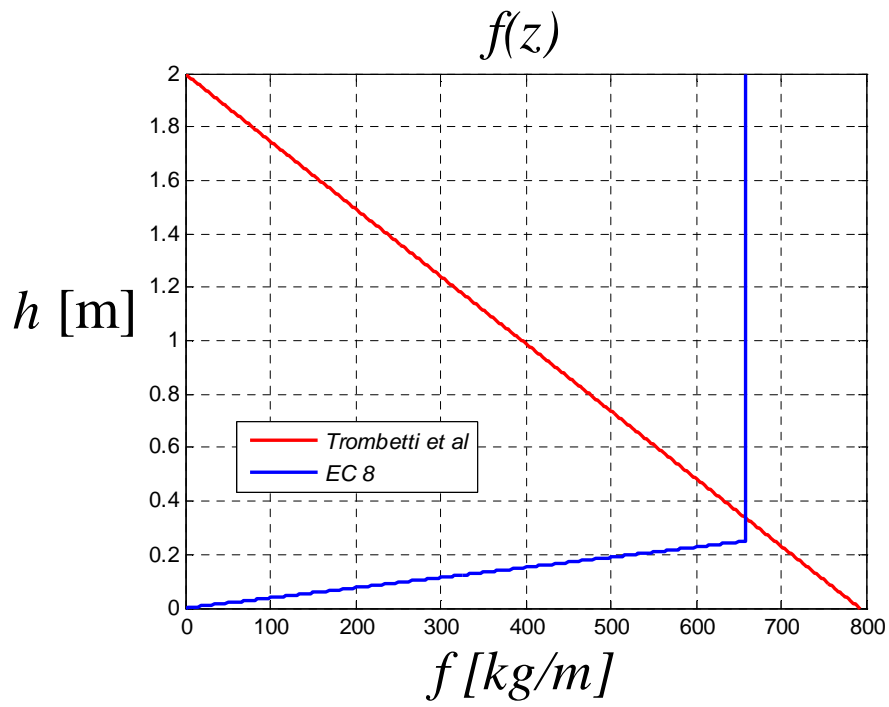


Figura 13 Risultanti di piano

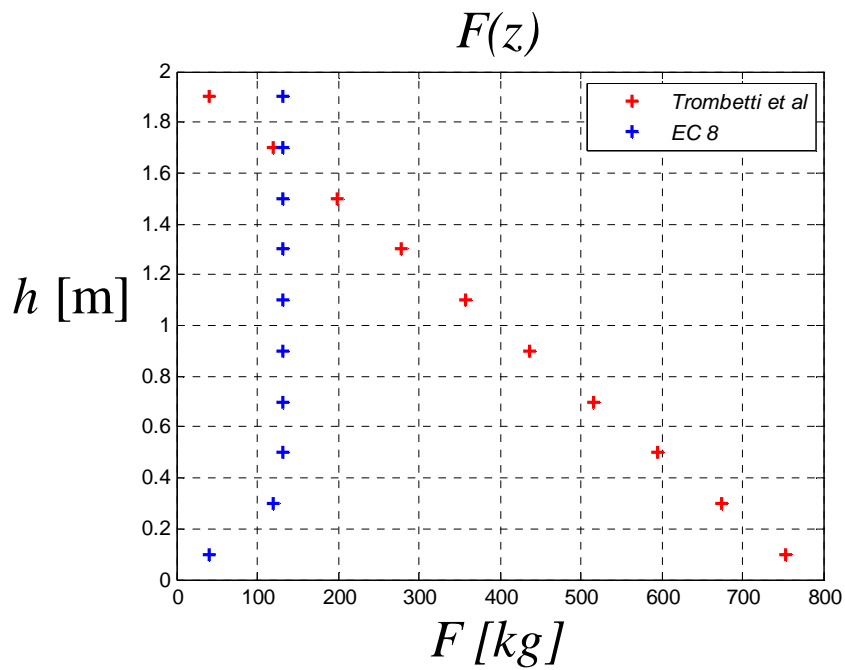


Figura 14 Risultanti di banda

3.5.2.4.5 Provino 5

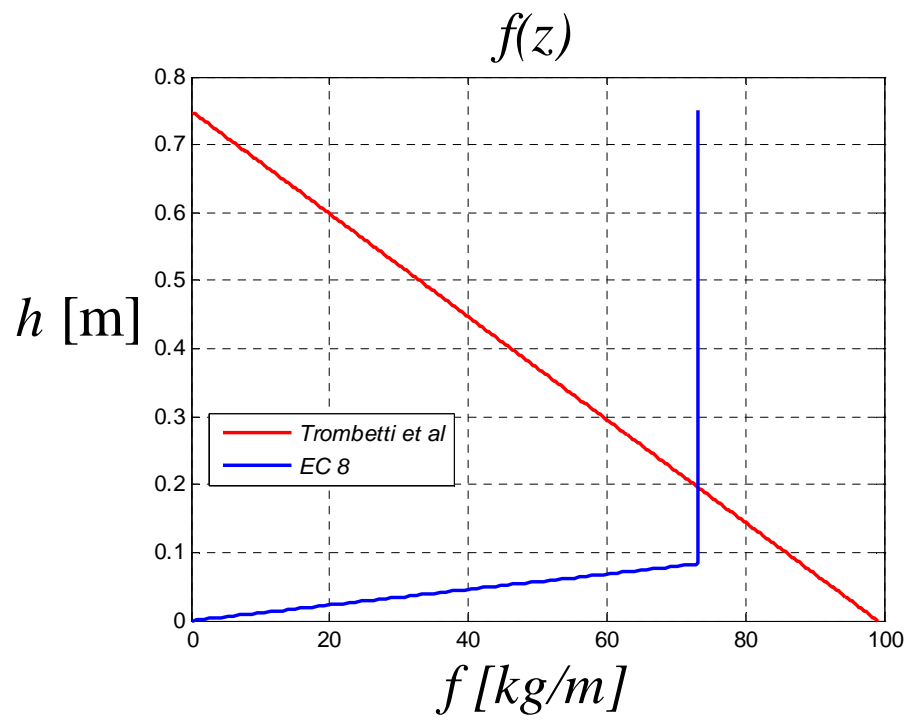


Figura 15 Risultanti di piano

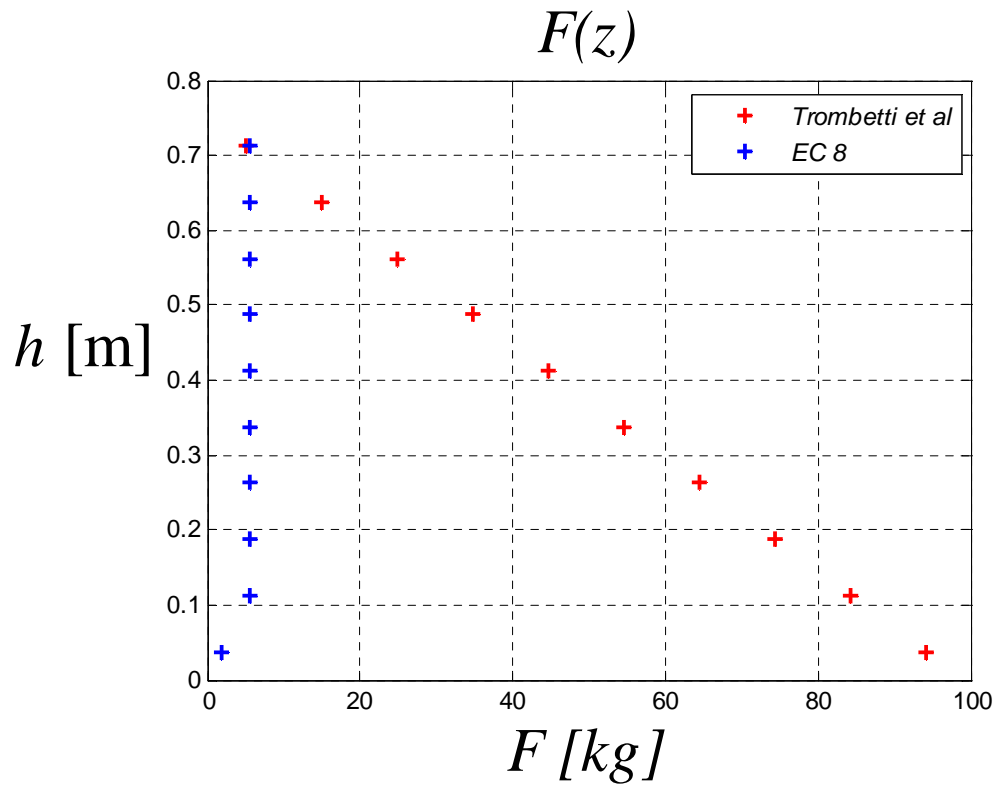


Figura 16 Risultanti di banda

Quello che si può osservare dalle figure ottenute in questa sezione sebbene il plexiglass offra maggior visibilità alle deformazioni, l'aver un coefficiente d'attrito maggiore rispetto a quello dell'acciaio fa in modo che siano minori le risultanti di ogni banda valutate con la procedura dell'Eurocodice.

3.5.3 Studio delle forze d'attrito

Ora supponiamo di dividere di nuovo un provino in dieci bande di ugual altezza, di collegare uno strumento di misura della pressione e valutare $H =$ pressione misurata dallo strumento. La nostra ipotesi è il fatto che la pressione misurata (H) coincida con la risultante di banda calcolata sopra e graficata con la rappresentazione discreta (in rosso).

$$H_p) H = R_p$$

Questa ipotesi implica il fatto che le forze d'attrito, generate tra una banda e le bande confinanti sopra e sotto, siano trascurabili.

Con questo intento abbiamo calcolato le forze d'attrito di ogni banda (per "i" bande) ($F_{a,i}$) e le abbiamo confrontate con la risultante delle pressioni di banda (R_p).

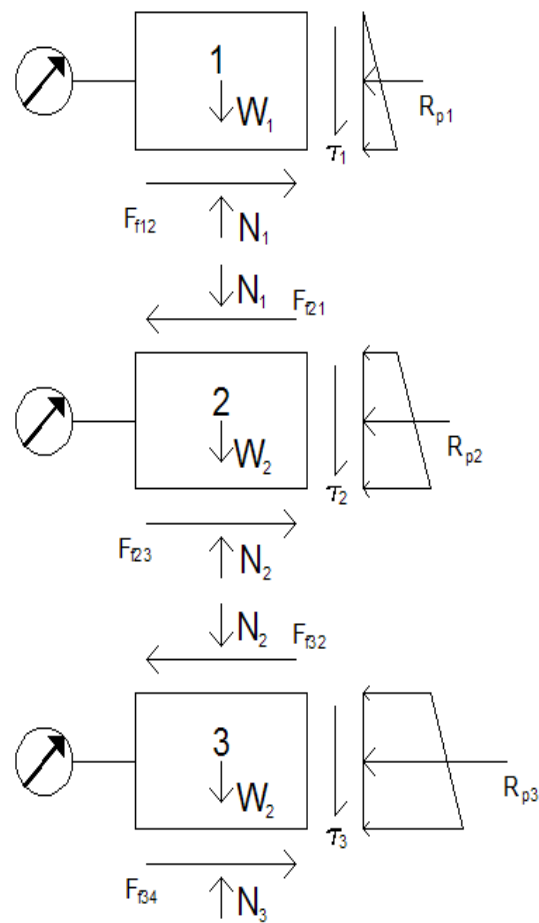


Figura 1 Tre bande con le: Risultanti di banda a destra e gli strumenti di misura a sinistra.

3.5.3.1 Forze in gioco e nomenclatura.

Nell'immagine soprastante sono rappresentati a sinistra gli strumenti di misura; si è cercato di riprodurre il simbolo tipico per questi strumenti (con una freccia inclinata al centro di un cerchio).

- La risultante delle pressioni (R_{pi}) per ogni singola banda (“i”) compare sulla destra, al centro del trapezio che contiene la pressione distribuita sull’altezza della banda.

“i” è l’indice di banda che va da 1 a 10, avendo diviso il provino in dieci bande.

Infine sono posti i vettori delle forze in gioco attorno a ogni banda.

- I vettori orizzontali sono le F_{ai} cioè le forze d’attrito i-esime. Le F_{ai} sono state orientate partendo dall’alto (dal pelo libero): la prima (F_{a1} , posta all’intradosso della banda 1) si oppone alla risultante delle pressioni orizzontali di banda (R_{p1}), quindi è diretta verso destra; in seguito essa si trasmette alla banda successiva (la seconda), quindi si riporta la F_{a1} sulla seconda banda col segno cambiato (ora è diretta a sinistra) per il principio di azione e reazione. A questo punto si osserva la seconda banda. Per l’equilibrio della seconda banda è necessario che la terza forza orizzontale in gioco sulla banda (F_{a2}) sia diretta verso destra (opposta cioè a R_p e a F_{a1} , in quanto equilibrante). Così via per tutte le bande sottostanti.
- I vettori verticali W al centro di ogni banda sono i pesi propri della banda, cioè il volume del cilindro cavo di banda moltiplicato per il peso specifico del materiale costituente il provino (acciaio o plexiglass).
- Altri vettori verticali sul lato destro della banda sono le tensioni tangenziali τ verticali, ottenibili mediante una relazione che sfrutta il legame attritivo con la risultante R_p ortogonale alla superficie della banda mediante il coefficiente d’attrito μ_{GW} (grain-wall) dinamico tra parete e insilato.
- N_1 il vettore verticale, diretto verso l’alto, all’intradosso della prima banda equilibra i vettori verticali, diretti verso il basso, del peso W_1 e della τ_{v1} ; N_1 si trasmette col segno opposto, per il principio di azione e reazione, all’estradosso della banda inferiore (la n°). Così via fino alla

base. Quindi per tutte le bande i gli N_i all'intradosso equilibrano gli N_{i-1} , W_i e τ_{vi} .

E' opportuno presentare una nomenclatura più dettagliata per le forze d'attrito che non sono semplicemente F_{a1} , F_{a2} , F_{a3} , F_{a4} , ecc. Le definiremo invece $F_{ai,i+1}$ o $F_{ai,i-1}$ indicando cioè come primo pedice (dopo la "a" di attrito) il numero della banda a cui ci stiamo riferendo e dopo la virgola il numero della banda a contatto con la banda i sulla giacitura di F_a , della forza d'attrito considerata; quindi se è la banda precedente avremo $i-1$, se invece è la banda successiva avremo $i+1$.

Ora l'intento è dimostrare che:

$$R_{p(i)} + F_{a(i,i-1)} - F_{a(i,i+1)} = R_{p(i)}$$

Dove "i" è l'indice di banda che va da 1 a 10, avendo diviso il provino in dieci bande.

Ad esempio per la seconda banda considerata partendo dall'alto:

$$R_{p2} + F_{a21} - F_{a23} \approx R_{p2}$$

Dove:

R_{p2} è la risultante delle pressioni sulla banda 2.

F_{a21} è la forza d'attrito relativa alla banda 2, trasmessa dalla banda 1 (la precedente alla banda 2).

F_{a23} è la forza d'attrito relativa alla banda 2, trasmessa alla banda 3 (la successiva alla banda 2).

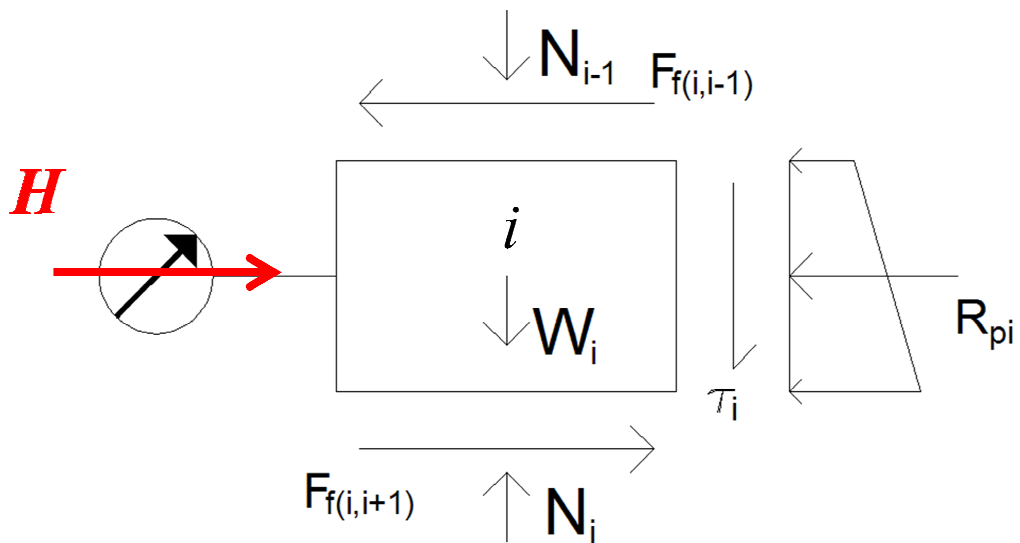


Figura 2 Banda “i” con la: Risultante di banda a destra e la pressione misurata “H” a sinistra.

Nell’immagine sopra è indicata direttamente H, cioè il valore misurato dallo strumento.

Se le forze d’attrito risultassero nulle, allora $R_p + 0 - 0 = H$, cioè $R_p = H$, quindi lo strumento ci fornirebbe direttamente il valore della risultante delle pressioni di banda.

Abbiamo fino a questo punto considerato un caso a noi favorevole, in quanto le due forze d’attrito su ciascuna banda hanno verso opposto, quindi tendono già ad elidersi a vicenda, così che, nella relazione di equilibrio con R_p , esse tendono ad offrire contributo ridotto e quindi trascurabile (proprio come noi desideriamo che sia). La relazione di equilibrio:

$$R_{p(i)} + F_{a(i,i-1)} - F_{a(i,i+1)} = R_{p(i)}$$

si può scrivere anche come:

$$R_{p(i)} \pm F_{a(i)} = R_{p(i)}$$

Dove $F_{a(i)}$ è la forza d'attrito risultante sulla banda i , cioè somma delle due forze d'attrito su una banda i singola, intesa come somma vettoriale, quindi come differenza numerica tra $F_{ai,i+1}$ e $F_{ai,i-1}$.

Portando al limite questo caso, se la risultante delle forze d'attrito $F_{a(i)}$ dà contributo nullo, allora è immediato che $R_p = H$, essendo $R_p + 0 = H$. Questo caso implicherebbe $F_{ai,i+1} = F_{ai,i-1}$.

L'aver posto su ciascuna banda forze d'attrito di segno opposto, conduce inevitabilmente a $F_{a(i)}$ ridotte, poiché esse sono differenza di due forze d'attrito opposte, quindi la situazione è favorevole al nostro scopo poiché l'attrito diviene trascurabile. Ricordo che abbiamo imposto questi versi alle forze d'attrito sulla base di considerazioni di equilibrio su ogni singola banda, sfruttando il principio di azione e reazione.

Esiste una situazione decisamente sfavorevole al nostro intento: considerare ogni singola banda indipendente dall'altra. Questa ipotesi conduce fisicamente a una sorta di scorrimento disordinato delle bande e graficamente possiamo rappresentare sulla stessa banda i due vettori delle forze d'attrito concordi.

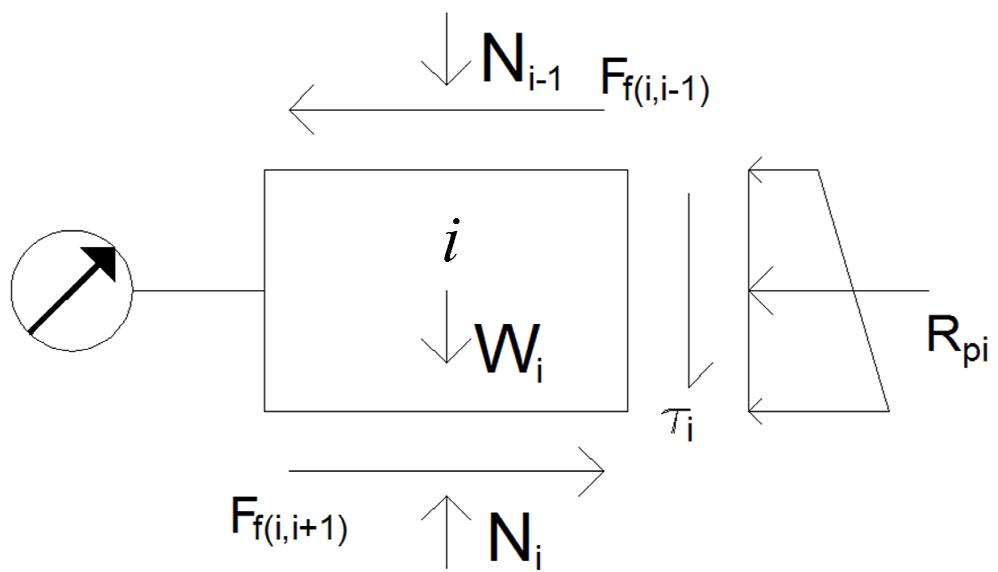


Figura 3 Banda i -esima: Risultanti di banda a destra e gli strumenti di misura a sinistra; forze d'attrito orizzontali, pesi e tensioni tangenziali verticali.

3.5.3.2 Calcolo della forza d'attrito

La legge d'attrito si esprime nella nota formula che, mediante il coefficiente d'attrito, lega la forza ortogonale al piano di scorrimento alla forza tangenziale, d'attrito su tale piano.

$$F_{\text{attrito}} = F_a = \mu \cdot N$$

In particolare ci riferiamo all'attrito dinamico.

Essendo le F_{ai} orizzontali, per trovarle, oltre al coefficiente d'attrito dinamico, è necessario conoscere le forze verticali N_i .

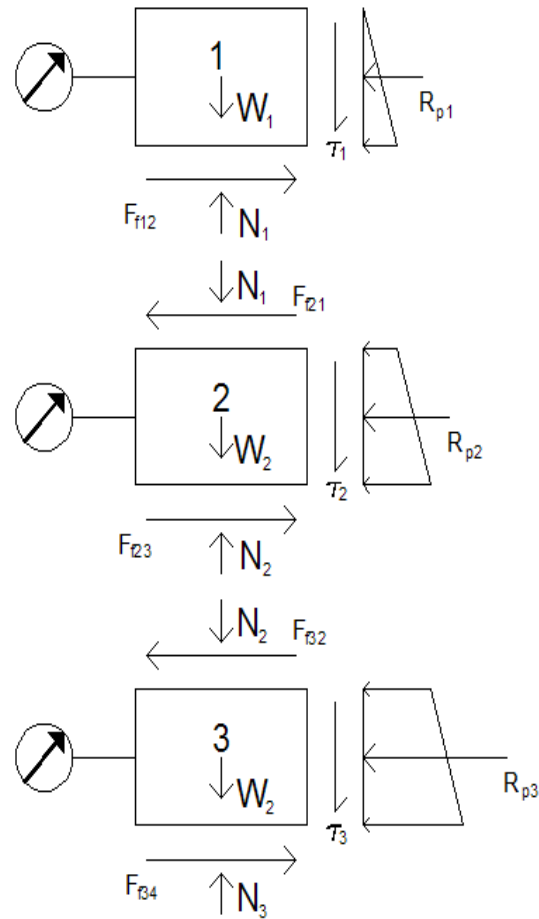


Figura 1 Banda i-esima: Risultanti di banda a destra e gli strumenti di misura a sinistra; forze d'attrito orizzontali, pesi e tensioni tangenziali verticali.

Nella figura 1 sono indicate le N_i tra una banda e l'altra. Per l'equilibrio verticale della prima banda si osserva che N_1 è bilanciata da W_1 (peso della banda 1 applicato nel baricentro della banda 1) e da τ_{v1} (tensione tangenziale verticale sul lato destro della banda 1, quindi dove la banda –di acciaio o plexiglass- è a contatto con il grano insilato).

$$N_1 = W_1 + \tau_{v1}$$

Sulla seconda banda, per il principio di azione e reazione, applichiamo la N_1 sulla faccia superiore della banda 2, col verso opposto alla N_1 applicata sulla faccia inferiore della banda 1. Per l'equilibrio della banda 2:

$$N_2 = W_2 + \tau_{v2} + N_1$$

Quindi per calcolare ogni N_i dobbiamo sommare tre componenti: il peso della banda i (W_i), la tensione tangenziale verticale della banda i (τ_{vi}) e la N_{i-1} .

Quindi procedendo verso la base del silos:

$$N_i = W_i + \tau_{vi} + N_{i-1}$$

Avendo impostato il calcolo di N_i , è necessario ora definire le componenti W_i , τ_{vi} .

W_i è il peso della banda i . Per calcolarlo si tratta semplicemente di calcolare il volume del cilindro di acciaio o di plexiglass alto quanto l'altezza di banda i e moltiplicarlo per il peso specifico del materiale in questione. L'altezza della banda i si ottiene dividendo l'altezza del provino per il numero delle bande: cioè $dz = H / n^{\circ b}$, quindi tutte le bande avranno la stessa altezza. Quindi se il provino è cilindrico:

$$W = \gamma \cdot \pi \cdot \left[R^2 - (R - s)^2 \right] \cdot dz$$

Mentre se il provino è quadrato:

$$W = \gamma \cdot \left[L^2 - (L - 2s)^2 \right] \cdot dz$$

τ_{vi} è la tensione tangenziale verticale, sul lato interno della banda, a contatto col materiale granulare insilato; questa tensione può essere considerata come una ulteriore forza d'attrito sul lato interno della banda; la forza che la genera è la risultante delle pressioni orizzontali, agente nella direzione ortogonale:

$$\tau = R_p \cdot \mu_{GW}$$

μ_{GW} è il coefficiente d'attrito grano-parete (vedi approfondimento in seguito).

Ora abbiamo tutto il necessario per calcolare le forze d'attrito F_{ai} .

In generale la forza d'attrito, essendo tangente nella pianta del piano in pianta della banda, si ottiene dalla legge d'attrito dinamico, moltiplicando cioè il coefficiente d'attrito dinamico μ e la forza, ortogonale al suddetto piano, N .

$$F_{attrito} = F_a = \mu \cdot N$$

In particolare per la banda “i”:

$$F_{attrito(i)} = F_{ai} = \mu \cdot N_i$$

3.5.3.3 Riguardo al coefficiente d'attrito dinamico

Abbiamo usato due tipi di coefficienti dinamici nelle formule precedenti. Precisamente si è parlato di μ_{GW} o μ_{BG} e anche di μ_{BB} o indicato più semplicemente come μ .

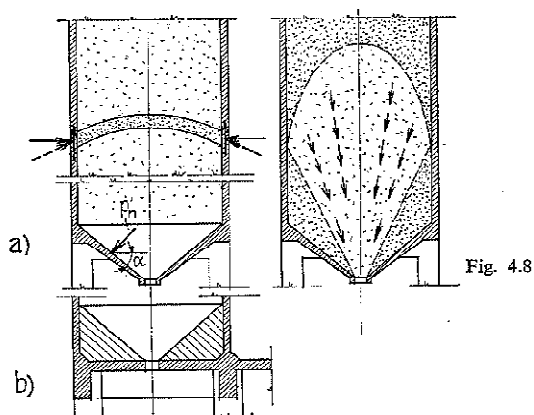
Per quanto riguarda μ_{GW} o μ_{BG} il significato dei pedici è Grain-Walls oppure Banda-Grano: quindi il μ in questione riguarda l'attrito Banda/Parete – Grano; dunque sono i grani a scivolare lungo la parete del provino o lungo l'altezza di banda, la quale è una porzione di parete del provino. Questo coefficiente si usa per il calcolo della τ_{vi} .

Per quanto riguarda invece μ_{BB} o μ esso interviene a descrivere lo scorrimento di una banda sull'altra; quindi gli eventuali pedici BB significano Banda-Banda e in particolare possono essere sostituiti con i pedici più specifici AA (acciaio-acciaio, se il provino è in acciaio) o PP (se il provino è in plexiglass).

Definita la nomenclatura, osserviamo cosa suggerisce il testo di Tecnica delle Costruzioni nel capitolo sui silos riguardo ai possibili valori numerici da attribuire al coefficiente d'attrito dinamico grano-banda o grano-parete. La formula che ci permetterà di calcolare questo coefficiente tiene conto da un lato dello stato β del materiale costituente la banda o la parete: cioè di una certa scabrezza, di eventuale materiale liscio o abbastanza liscio; dall'altro lato deve considerare anche una caratteristica dell'insilato granulare che vi scorre sopra: essa è l'angolo d'attrito dei grani φ .

dità, la tendenza all'agglutinazione, dando spesso luogo a precarie condizioni di equilibrio, con la formazione di « ponti » e volte (fig. 4.7) che provocano forti concentrazioni di spinte e che, quando si schiantano, danno luogo a violente percussioni sul fondo ^(4.4).

b) Dunque appare necessario tenere particolarmente conto della qualità dei materiali e delle due diverse situazioni che si hanno quando le bocche di scarico siano chiuse o aperte, situazioni che in breve diremo statica e dinamica, distinguendo con l'indice *s* o *d* le quantità relative alla prima o all'altra di esse. Principalmente sulla scorta delle risultanze sperimentali, molto importanti per le incertezze che oscurano l'analisi teorica, appare lecito, qualora non si possa far riferimento a specifiche prove, assumere per i materiali gra-



nulari « in quiete », ossia in regime statico, i seguenti dati (indicando, come si è detto, δ , φ con δ_s , φ_s):

$\delta_s = \varphi$ (pareti molto scabre), $\delta_s = 0,5\varphi$ (pareti lisce), $f_s = \operatorname{tg} \delta_s$, [4.11]
e se le pareti sono abbastanza lisce:

$$\delta_s = 0,75\varphi; \quad [4.12]$$

per λ_s , valori compresi fra 0,35 e 0,55 (tab. 3.7, p. 116); e quando l'angolo di attrito si aggiri sui 30° e le pareti siano abbastanza lisce

$$f_s \cong 0,41, \quad \lambda_s = 0,45. \quad [4.13]$$

Per i materiali granulari e all'atto dello scarico (regime dinamico) si può assumere (indicando δ , φ con δ_d , φ_d) ^(4.5)

$$\delta_d = 0,8\delta_s, \quad f_d = \operatorname{tg} \delta_d, \quad [4.14]$$

$$0,6 \leq \lambda \leq 1, \quad \text{per } 45^\circ \geq \varphi \geq 20^\circ; \quad [4.15]$$

^(4.4) La formazione delle volte può essere innescata da molte cause: per esempio, un'irregolarità della parete, un disuniforme stato del materiale, il diverso richiamo che il foro di scarico esercita sul materiale intorno ad esso (fig. 4.8). Si veda, in proposito, la nota 4.17.

^(4.5) Per un dato materiale, quindi per un valore assegnato di φ , λ risulta crescente con δ (tab. 3.1). Secondo la [4.10], ossia per $\delta = \varphi$, λ varia da 0,333 ($\varphi = 45^\circ$) a 0,791 ($\varphi = 20^\circ$), come

e quando il valore di φ si aggiri intorno ai 30° e le pareti siano abbastanza lisce

$$\delta_a = 0,6\varphi = 18^\circ, \quad f_a = \operatorname{tg} \delta_a \simeq 0,32, \quad \lambda_a \simeq 0,9. \quad [4.16]$$

A titolo di orientamento può essere utile avere anche presente che, per materiali granulari con $\varphi = 30^\circ$ e per celle circolari, i valori della distanza y_o , definita dalla [4.3], valgono, in regime statico e dinamico,

$$y_{o,s} \simeq 2,7r, \quad y_{o,d} \simeq 1,7r. \quad [4.17]$$

Per i materiali *pulverulenti* la teoria precedentemente esposta è scarsamente attendibile. Tenendo conto delle esperienze e delle notevoli incertezze, sembra possibile porre ^(4.8)

$$\lambda_s = 0,5, \quad \lambda_d = 1, \\ \delta_s = \delta_a = \varphi, \quad f_s = f_a = \operatorname{tg} \varphi. \quad [4.18]$$

È da avere presente che i valori dei coefficienti [4.11] ... [4.18] rispondono alla necessità di interpretare il diverso comportamento di innumerevoli materiali e di tener conto dell'inviluppo dei valori emersi da limitate ricerche sperimentali inevitabilmente sporadiche, disperse e spesso poco concordanti fra loro; pertanto i vari precedenti valori sono da considerare approssimativi, ed è opportuno che ciò venga considerato nella scelta dei coefficienti di sicurezza. Ciò in particolare per i materiali *pulverulenti*, a causa principalmente del pericolo di formazione di « volte », o comunque di comportamenti fortemente disomogenei, con l'addensamento di pressioni verticali e orizzontali sensibilmente maggiori di quelle deducibili dalla teoria.

Alle volte il deposito e lo scarico del materiale è effettuato con sistema

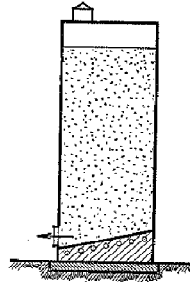


Fig. 4.9

si trova ricordato nella nota 4.2; ma le esperienze hanno mostrato che, in regime dinamico, si possono avere valori ancora maggiori. L'attuale regolamento tedesco fissa $\lambda_d = 1$ e $\lambda_s = 0,5$ indipendentemente da φ , δ (sancisce inoltre, per i materiali incoerenti, $\delta_a = 0,6\varphi$, $\delta_s = 0,75\varphi$).

Relativamente ai materiali incoerenti, i rilievi sperimentali hanno concordemente indicato, pur con notevole dispersione di risultati, che i valori da attribuire a λ sono molto maggiori in regime dinamico che statico e che essi non sono indipendenti da φ , δ . I valori [4.15], [4.16] tengono conto anche di tali circostanze.

^(4.8) Secondo le norme tedesche.

Leggendo i suggerimenti del testo troviamo la formula riferita a pareti abbastanza lisce ($\beta = 0,6$) ed angolo di attrito del terreno $\varphi = 30^\circ$.

Quindi scriviamo:

$$\mu_{GW} = \tan(\beta \cdot \varphi) = \tan(0.6 \cdot 30^\circ) \approx 0.32$$

Per definire il coefficiente d'attrito dinamico tra banda e banda, quindi tra due materiali uguali o acciaio-acciaio o plexiglass-plexiglass è stata fatta una breve ricerca su internet con i seguenti risultati:

$$\mu_{a-a} = 0,42$$

(Fonte: Wikipedia).

Solo a titolo informativo (non sarà usato nei nostri calcoli) si indicano due valori di coefficienti d'attrito statici:

$$\mu_{A-A}^{STATICO} = 0,74$$

$$\mu_{P-P}^{STATICO} = 0,80$$

3.5.3.4 Tre Casi limite

Come anticipato all'inizio di questa sezione, esistono diversi modi di indicare i versi delle forze d'attrito. Un primo modo è quello di effettuare l'equilibrio tra una banda e la successiva, partendo dal pelo libero e applicare il principio di azione e reazione, passando alle bande sottostanti: su una stessa banda allora le forze d'attrito saranno di verso opposto.

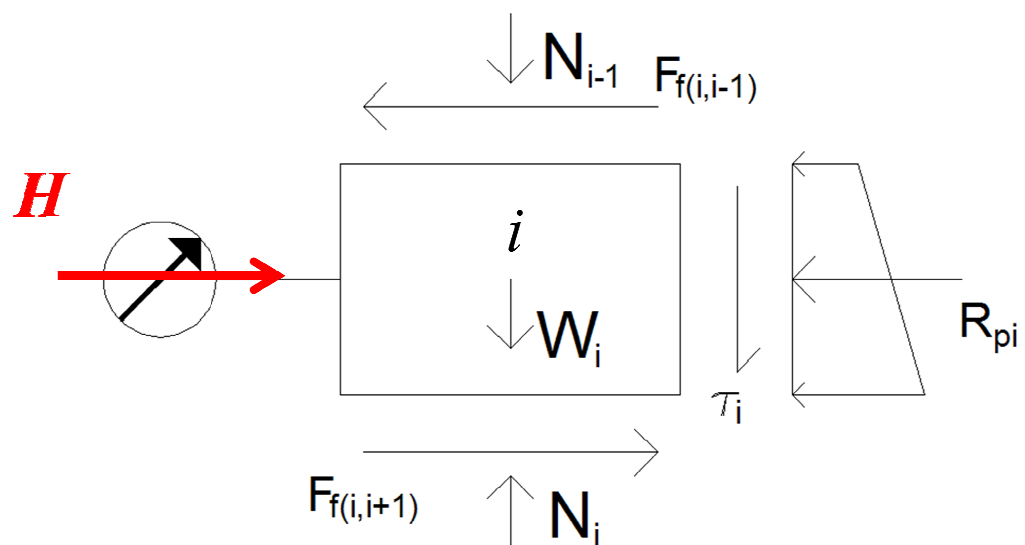


Figura 2: Banda i-esima: Caso 1 favorevole

L'equazione di equilibrio relativa al caso 1 è:

$$H = R_{p(i)} + F_{\text{attrito}(i,i-1)} - F_{\text{attrito}(i,i+1)}$$

$$H \cong R_{p(i)}$$

Questo modo di indicare le forze d'attrito è favorevole al nostro intento di determinare con la misura effettuata dallo strumento (nella figura sopra posta a sinistra e indicata in rosso con H) direttamente la risultante delle pressioni orizzontali R_p .

Non è detto che ci sia questo legame stretto tra le bande: esse potrebbero essere indipendenti le une dalle altre; questa seconda ipotesi ci conduce ad altre due possibili casi.

Un caso intermedio nel quale una banda non riceva alcuna ritenuta/spinta dalla banda superiore e ne sia completamente indipendente:

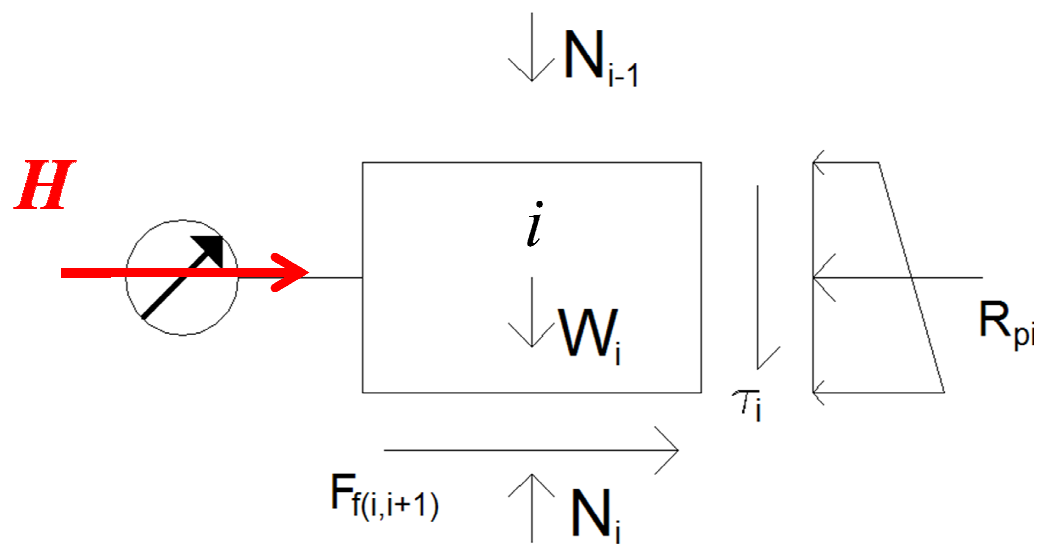


Figura 2: Banda i-esima: Caso 2 intermedio

L'equazione di equilibrio relativa al caso 2 intermedio è :

$$H = R_{p(i)} - F_{\text{attrito}(i,i+1)}$$

E un ultimo caso (il più sfavorevole ai nostri intenti): in cui non è soddisfatto di nuovo il principio di azione e reazione e in cui le due forze d'attrito sono concordi:

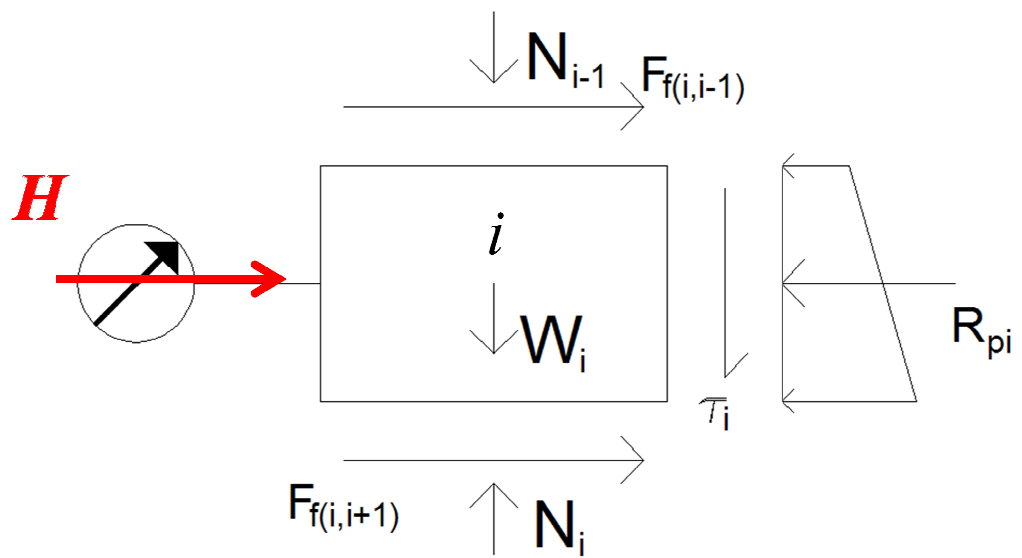


Figura 3: Banda i-esima: Caso 3 più sfavorevole.

Questo ultimo caso risulta il più sfavorevole perché la misura H dello strumento non può essere solo R_p o poco diversa da R_p , a meno di una differenza fra forze d'attrito come nel primo caso, bensì ora risulta a meno di una somma di forze d'attrito che altera la misura, impedendoci di trovare direttamente R_p :

L'equazione di equilibrio relativa al caso 3 più sfavorevole è:

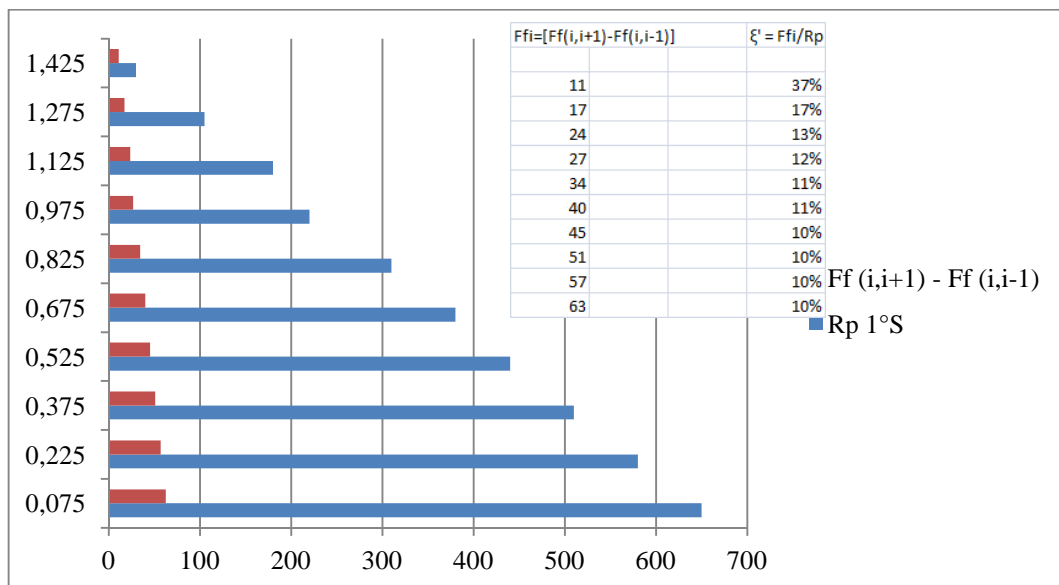
$$H = R_{p(i)} - F_{\text{attrito}(i,i-1)} - F_{\text{attrito}(i,i+1)}$$

3.5.3.5 Confronti

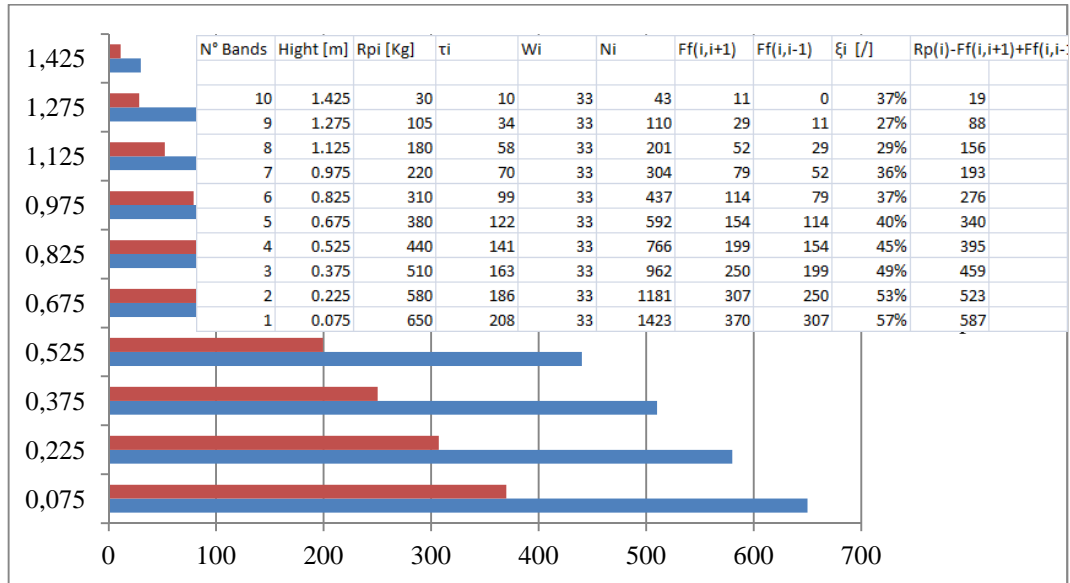
Ora avendo ottenuto analiticamente la risultante delle pressioni orizzontali, calcolata sommando e integrando le proiezioni sull'asse x orizzontale delle Δp_h e delle τ_h , (R_p) confrontiamola con le forze d'attrito che essa incontra nella singola banda "i", in ciascuno dei tre casi per ogni provino (3 di acciaio e 5 di plexiglass).

3.5.3.5.1 Provino Acciaio 1

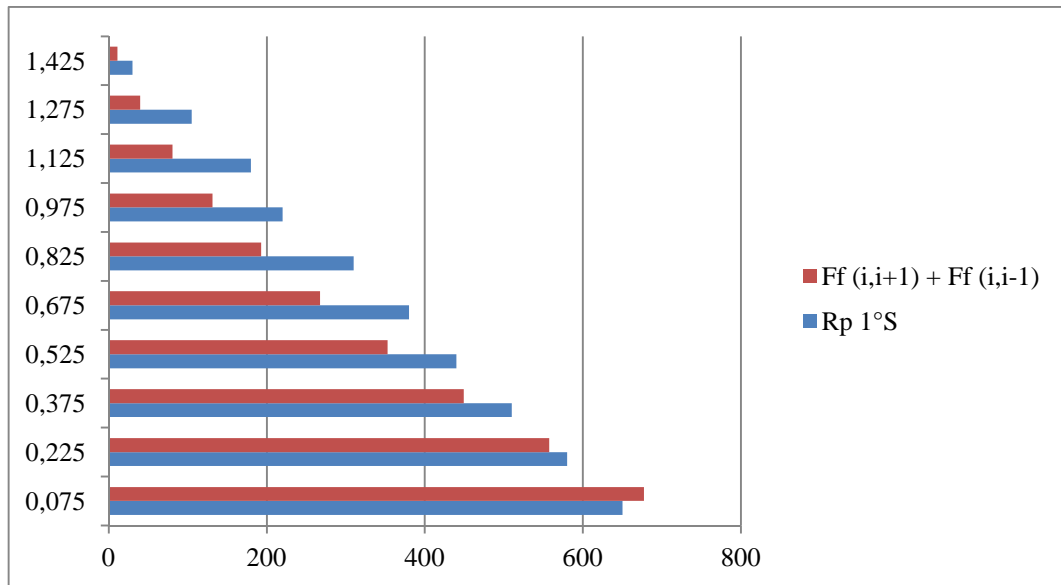
Caso Favorevole



Caso Intermedio:

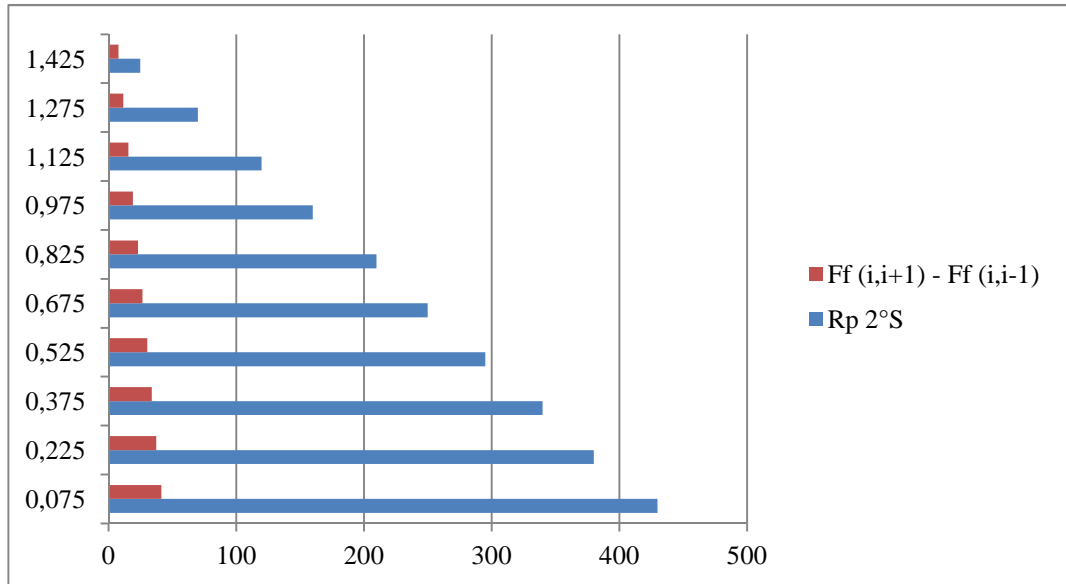


Caso Sfavorevole:

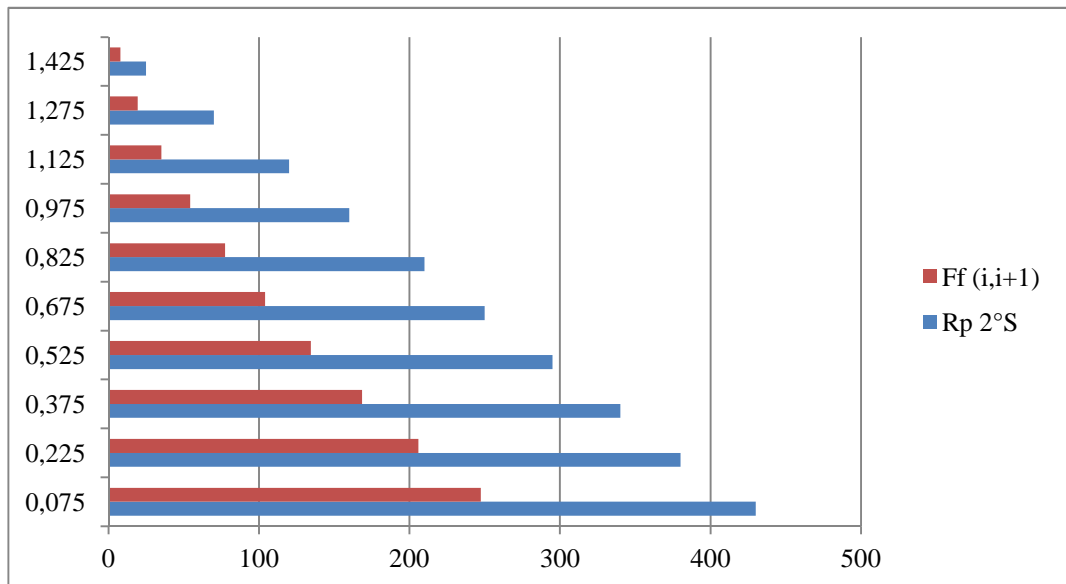


3.5.3.5.2 *Provino Acciaio 2*

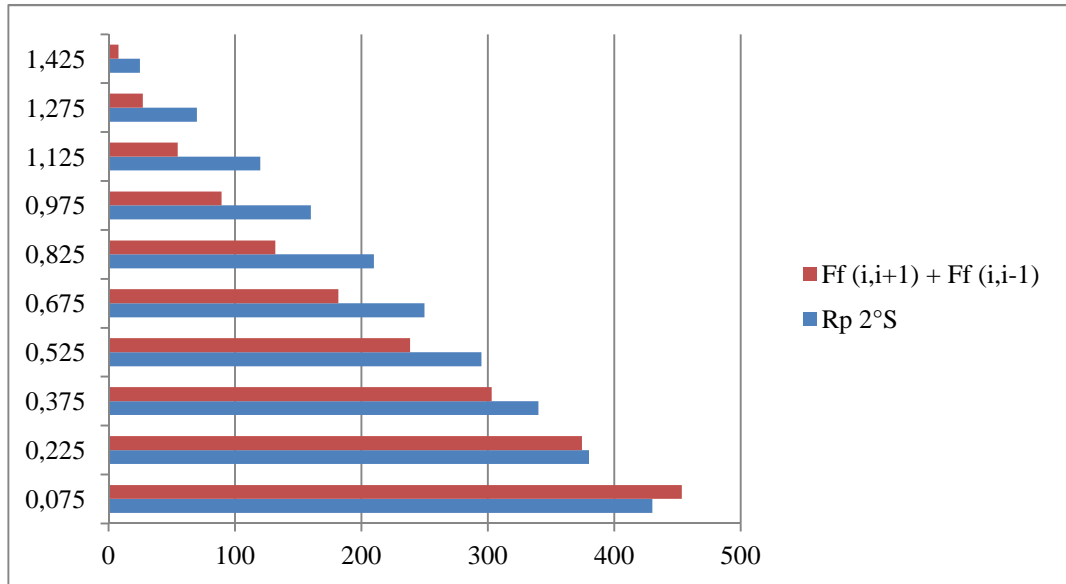
Caso Favorevole:



Caso Intermedio:

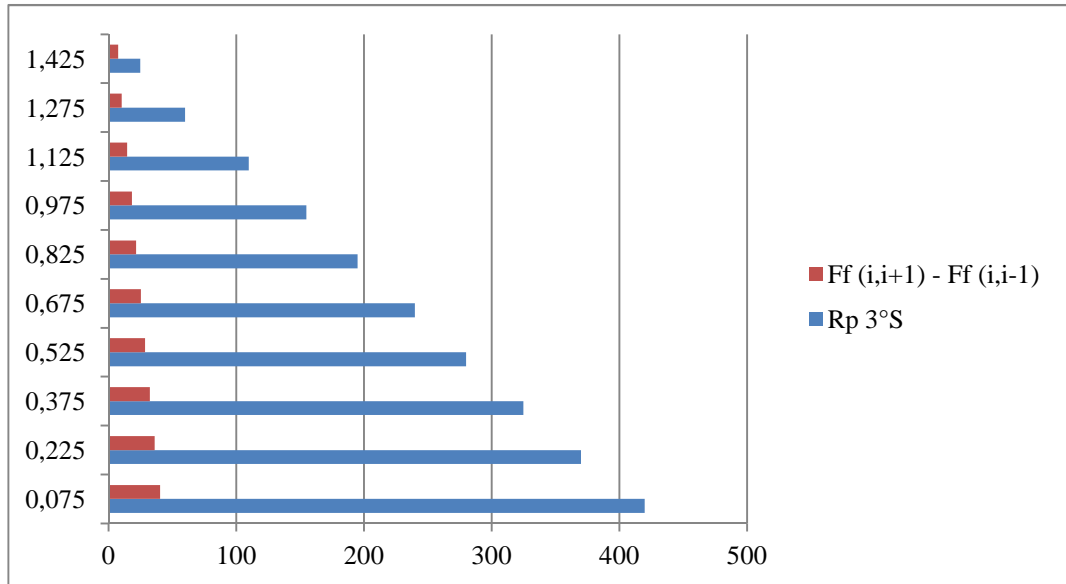


Caso Sfavorevole:

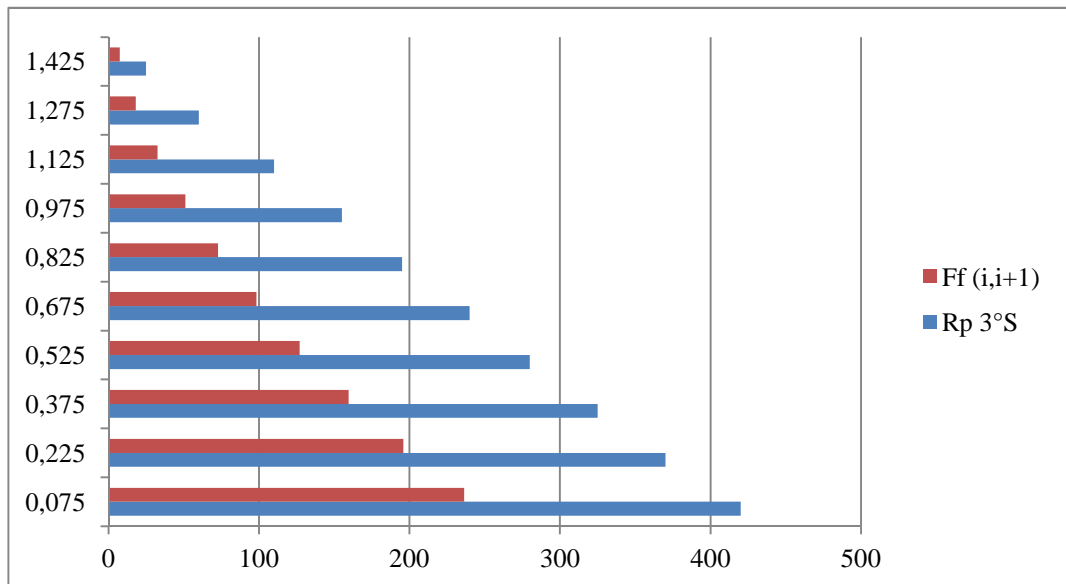


3.5.3.5.3 *Provino Acciaio 3*

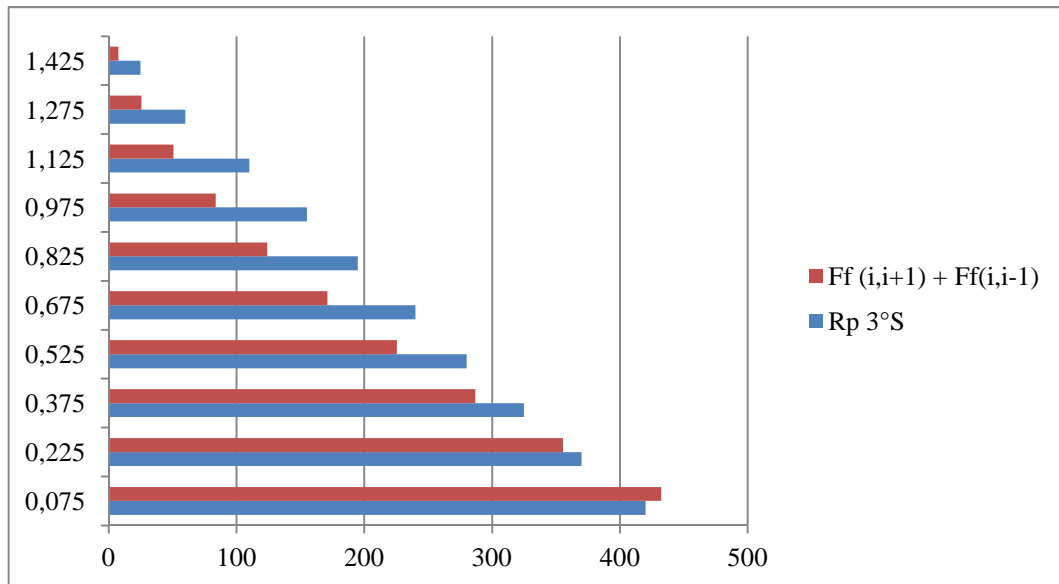
Caso Favorevole:



Caso Intermedio:

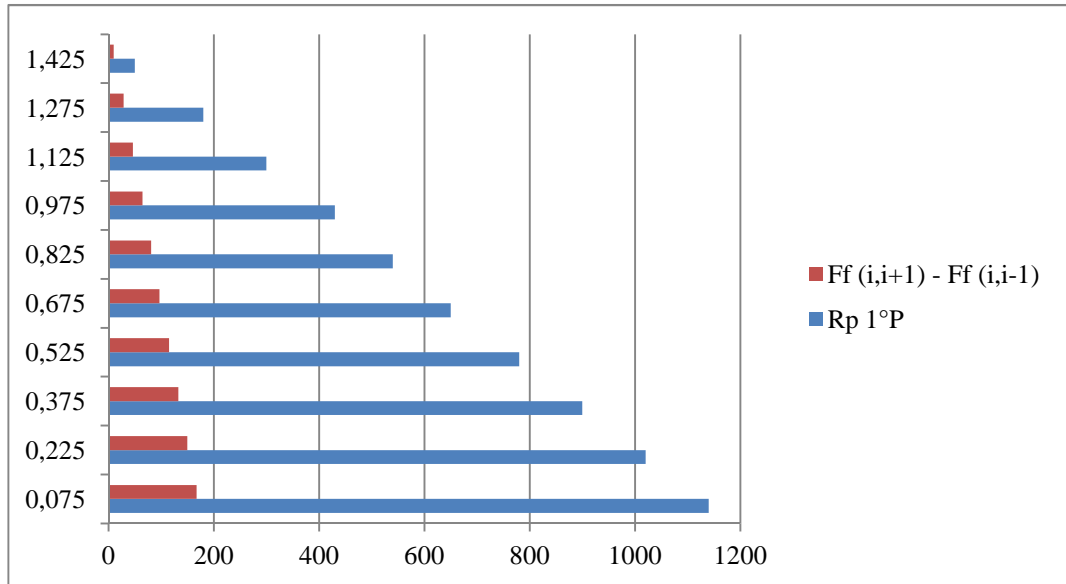


Caso Sfavorevole:

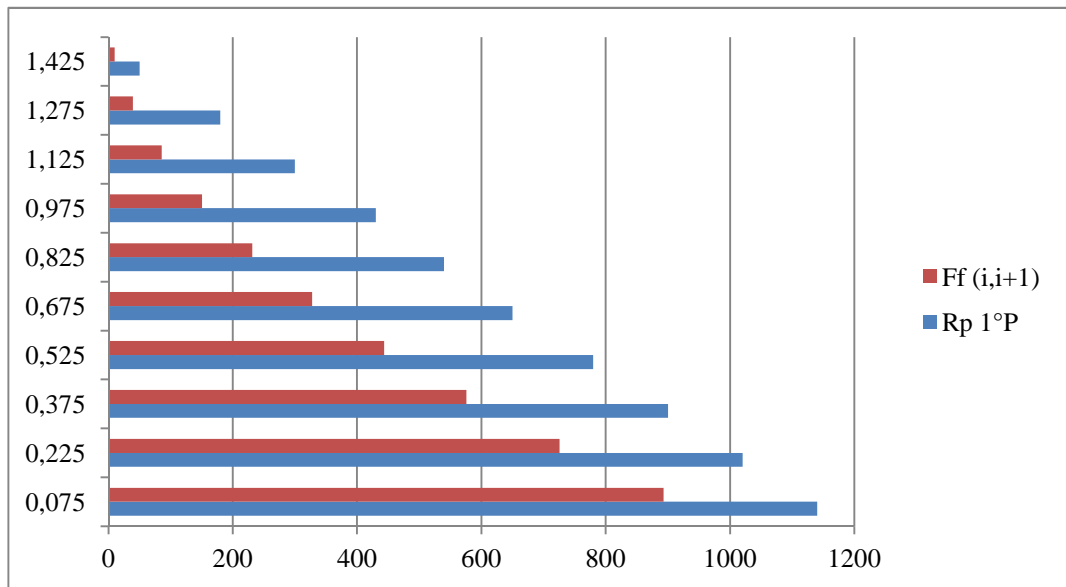


3.5.3.5.4 Provino Plexiglass I

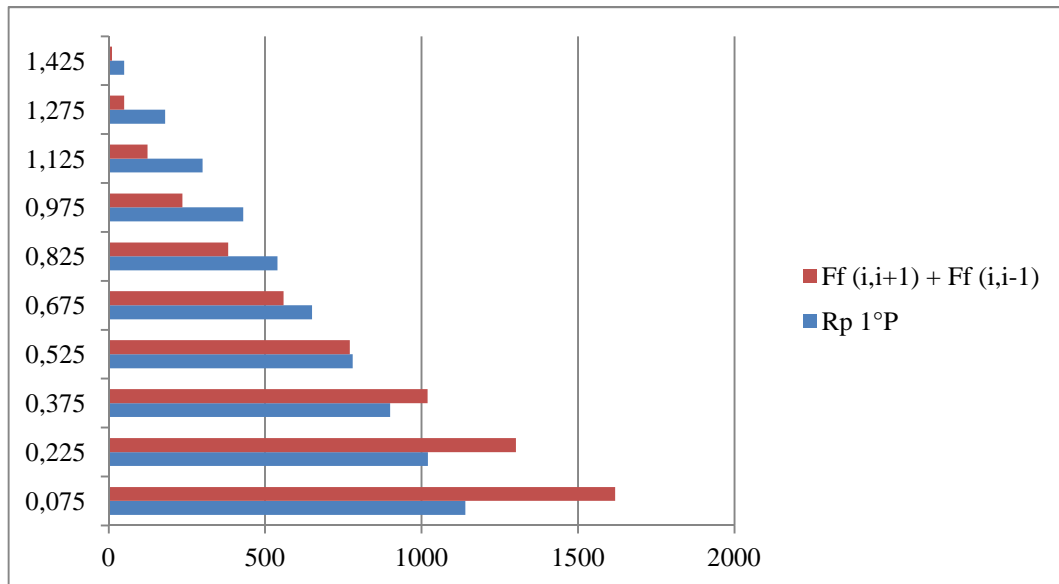
Caso Favorevole:



Caso Intermedio:

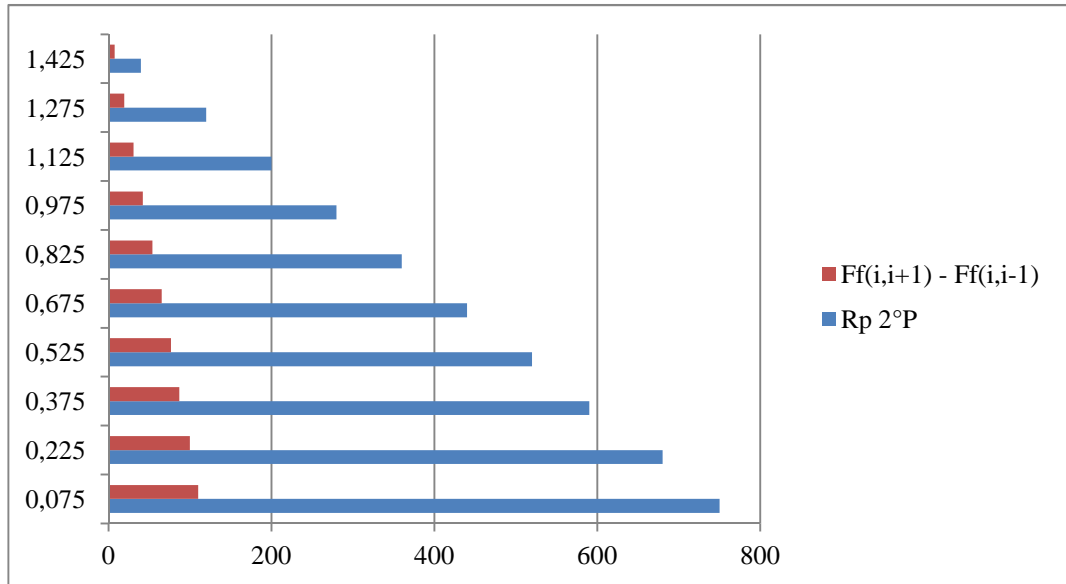


Caso Sfavorevole:

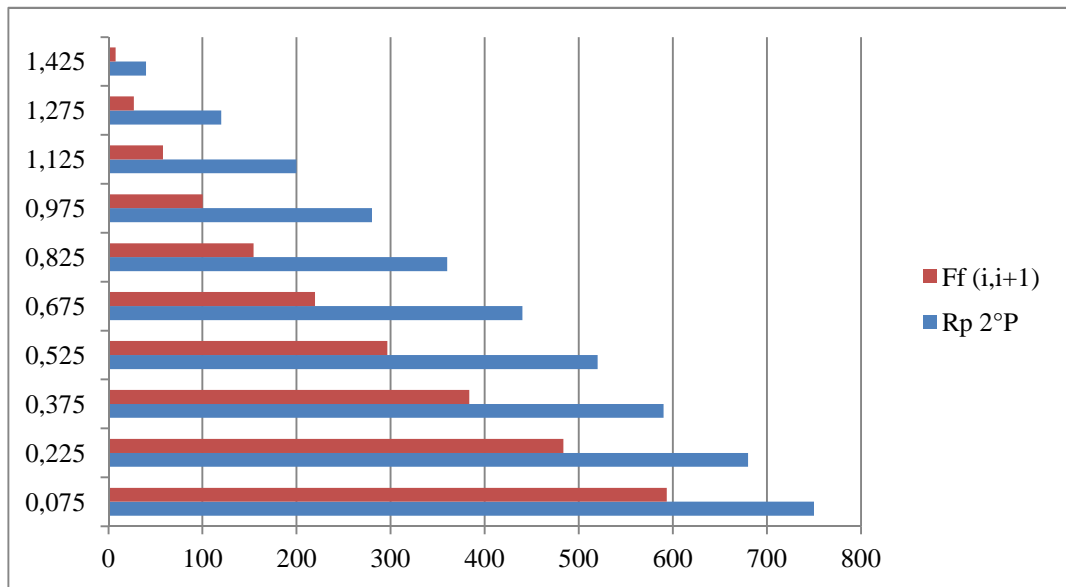


3.5.3.5.5 Provino Plexiglass 2

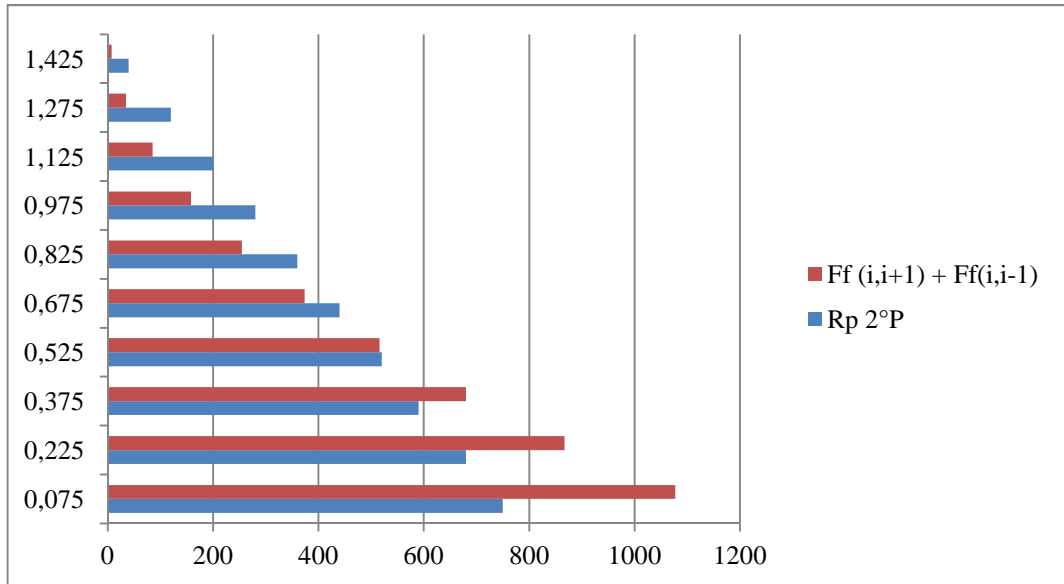
Caso Favorevole:



Caso Intermedio:

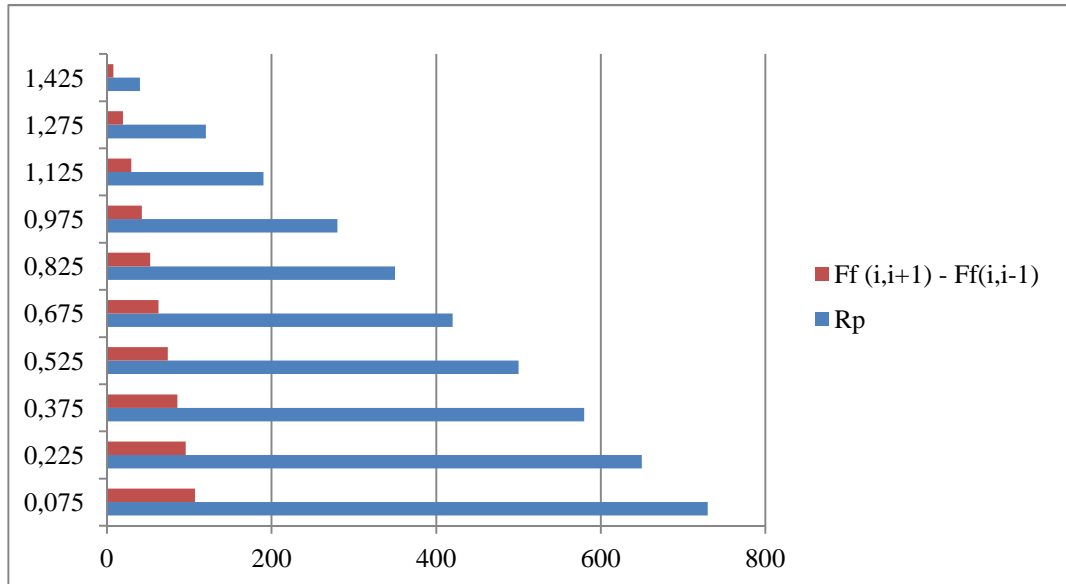


Caso Sfavorevole:

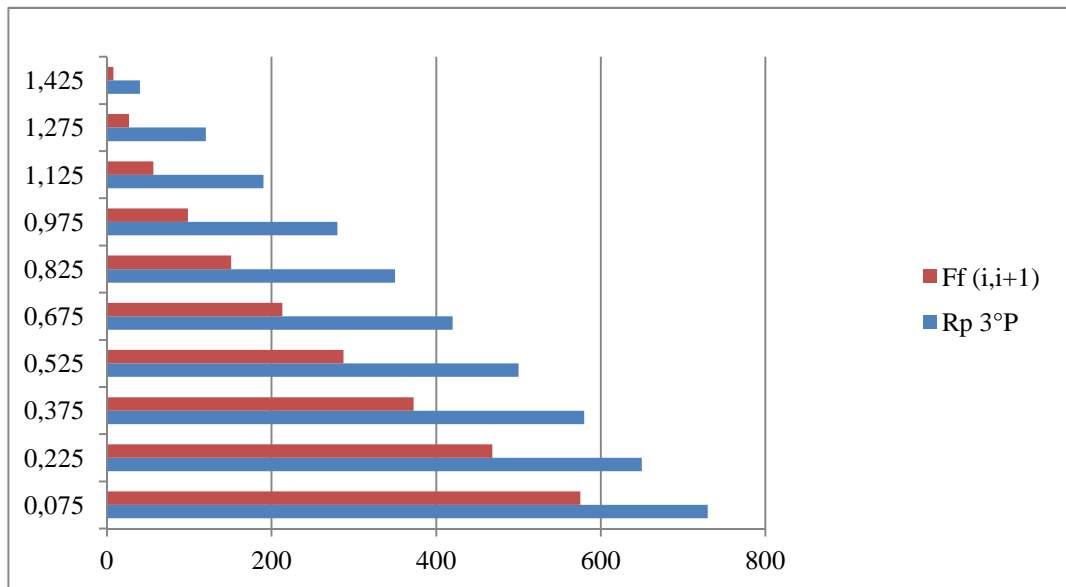


3.5.3.5.6 Provino Plexiglass 3

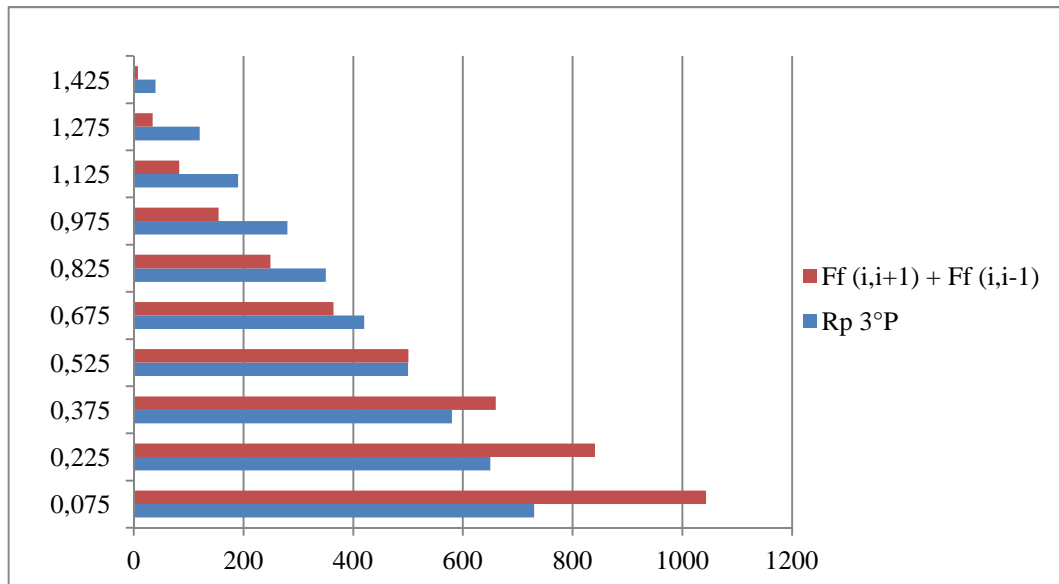
Caso Favorevole:



Caso Intermedio:

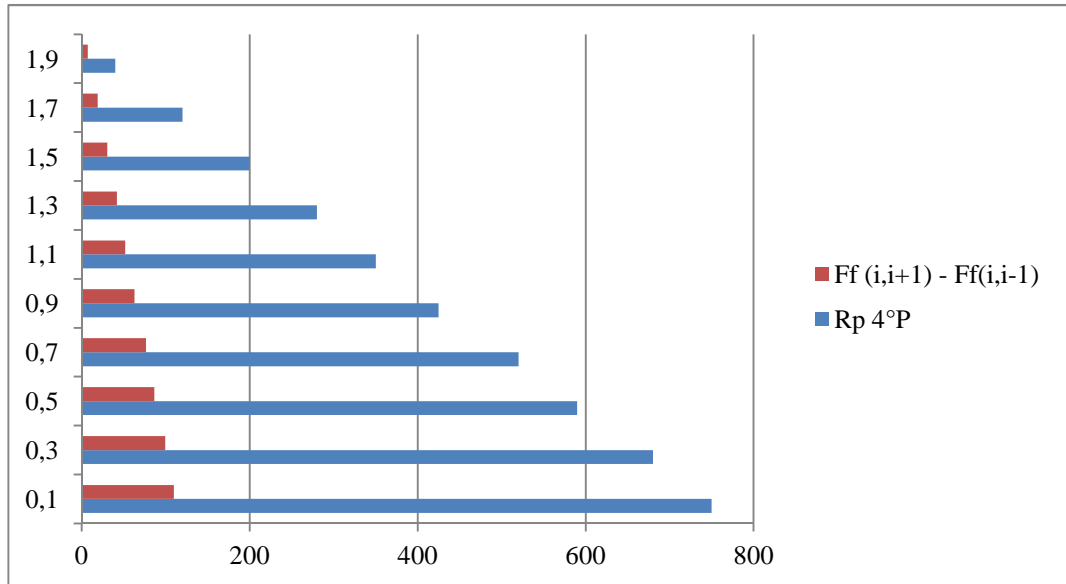


Caso Sfavorevole:

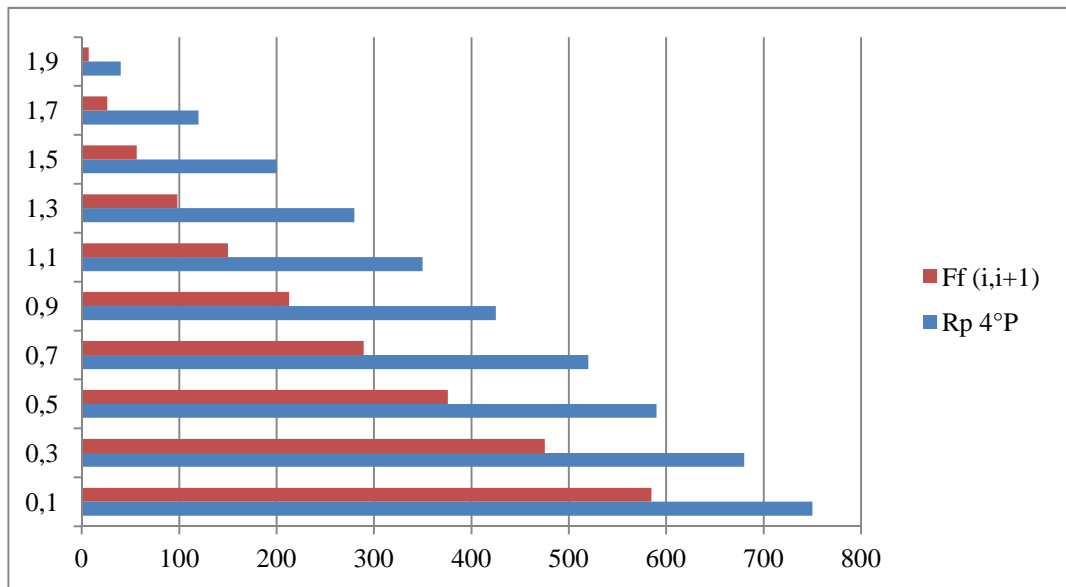


3.5.3.5.7 Provino Plexiglass 4

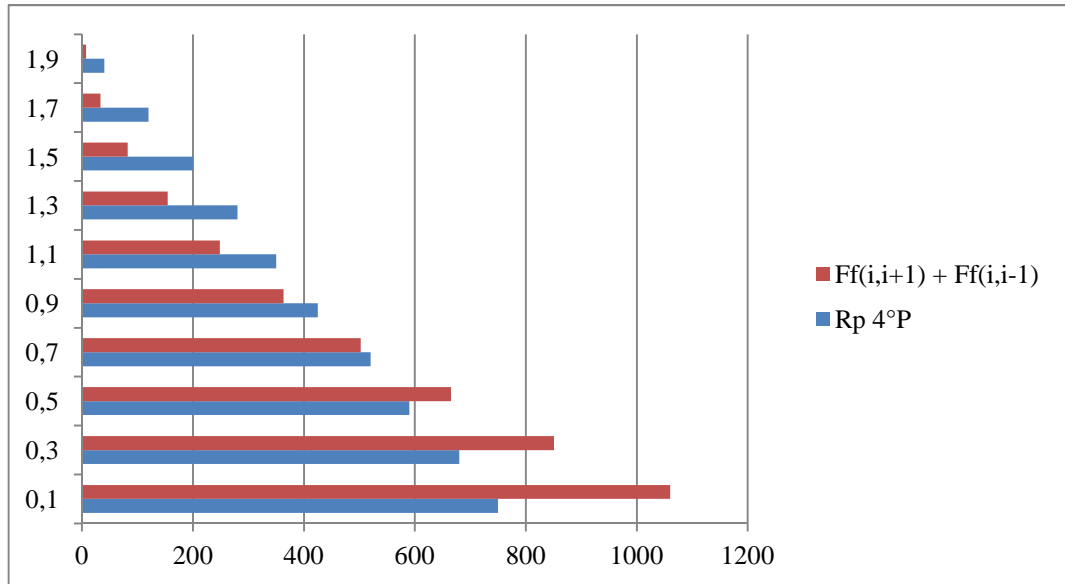
Caso Favorevole:



Caso Intermedio:

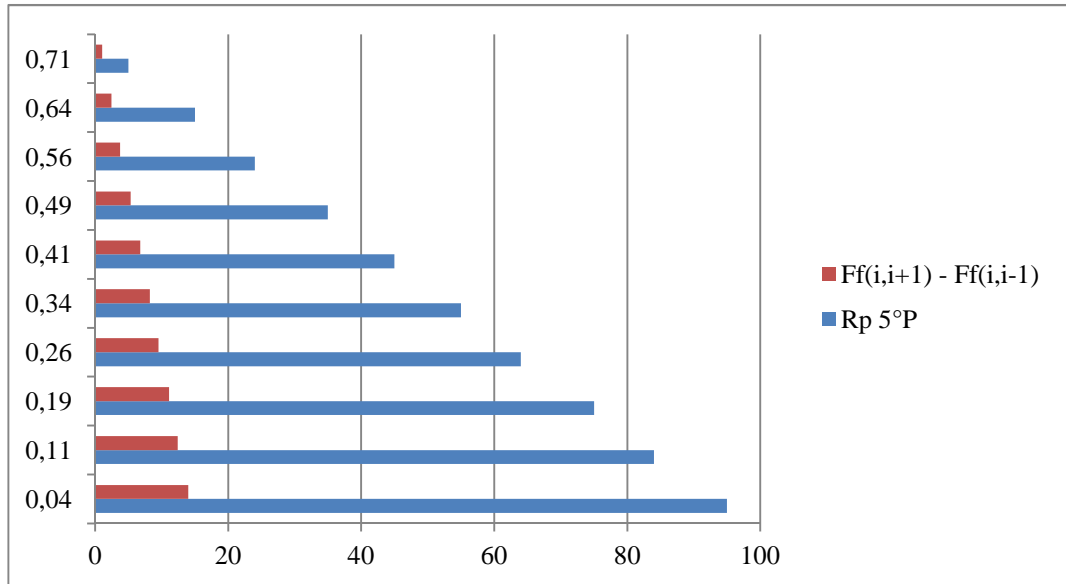


Caso Sfavorevole:

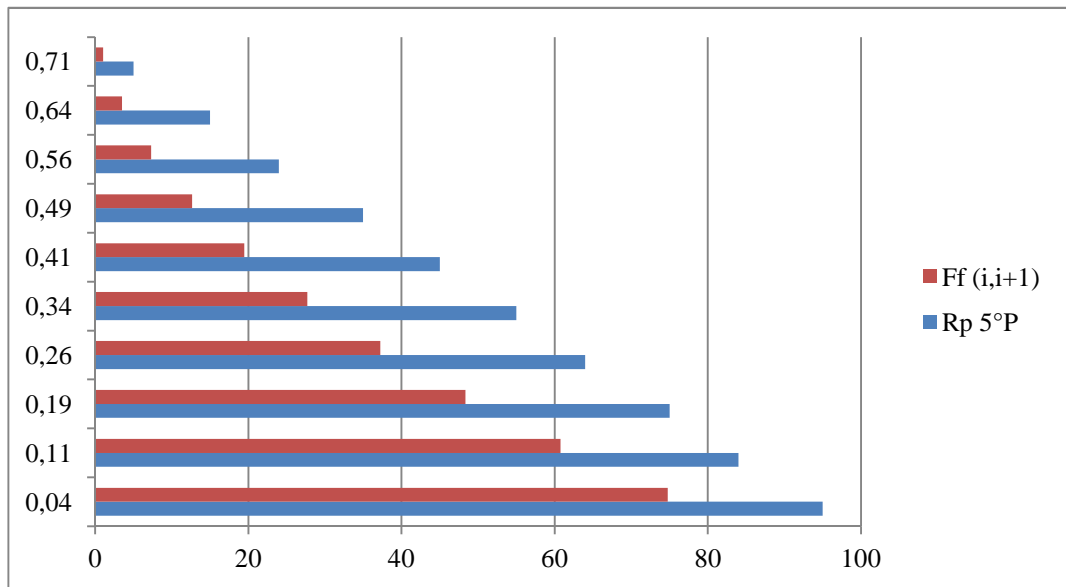


3.5.3.5.8 Provino Plexiglass 5

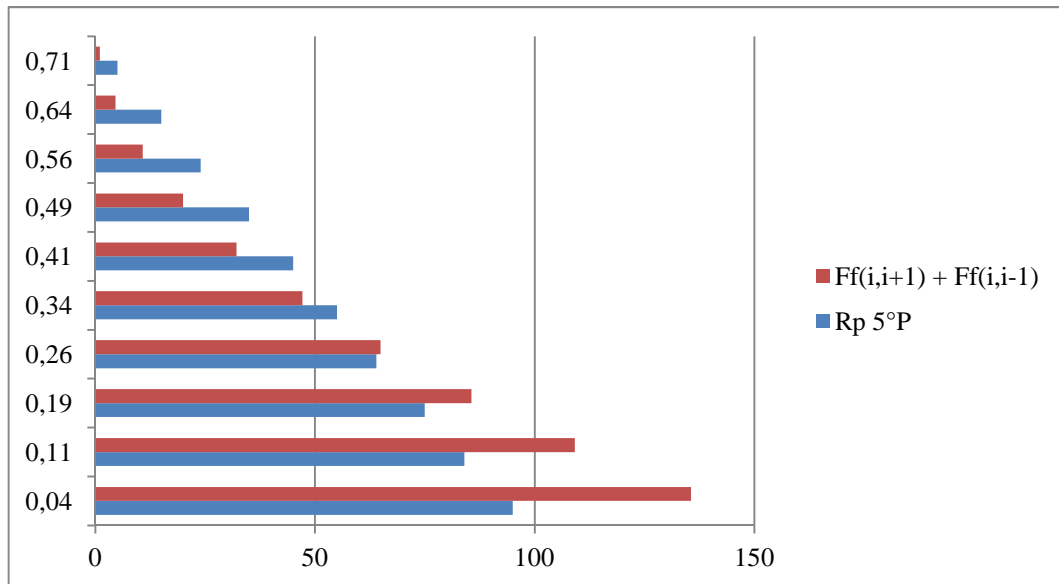
Caso Favorevole:



Caso Intermedio:



Caso Sfavorevole:



In conclusione possiamo osservare che il caso 3 più sfavorevole impedisce di trascurare le forze d'attrito, le quali alla base superano addirittura la risultante R_p .

3.5.3.6 Conclusioni

Non si possono trascurare le forze d'attrito in sicurezza.

3.6 Soluzione 4: SENSORI TEKSCAN

Avendo contattato la ditta produttrice Tekscan ci sono state proposte due tipologie di soluzione: sensori su superficie (tipo elemento shell) e sensori puntuali.



Ing. Giuseppe Noris

Direct phone +39 035 462678 int. 244
Mobile +39 3357355308
Email noris@luchsinger.it

24035 Curno (BG) Italy | 8364;*" Via Bergamo, 25
Tel. 035 462678 | 8364;*" Fax 035 462790
Email info@luchsinger.it

Internet www.luchsinger.it

3.6.1 Valutazione preliminare della pressione da misurare

Il calcolo della pressione radiale sulle pareti del provino viene fatto usando la formula ricavata nella sezione due (Teoria) come differenza tra il caso 2 (con accelerazione orizzontale aggiuntiva) e il caso 1 (con peso proprio e sola accelerazione verticale); questo argomento è trattato nel capitolo 2.9.1 sulla pressione radiale. Si ha:

$$\Delta p_h(z, \theta) = \frac{a_{g\perp} \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_{g\perp}}$$

Si considera il primo provino in acciaio:

Calculation Δp_h			
DATA			
γ	900 Kg/mc		
H	1,5m		
R	1,5m		
λ	0,6		
μ_{GW}	0,32		
$a_{gh} = 0,2$	0,2		
$a_{gv} = 0$	0		
$v = 1/(1+a_{gv})$	1		
	quota	z	Δp_h
	1,5	0	0,0 [Kg/mq]
	1,4925	0,0075	0,3
	1,3125	0,1875	6,9
	1,125	0,375	13,8
	0,9375	0,5625	20,8
	0,75	0,75	27,7
	0,5625	0,9375	34,6
	0,375	1,125	41,5
	0,1875	1,3125	48,5
	0	1,5	55,4

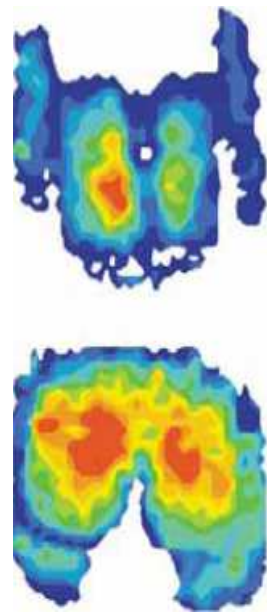
Si prendono a riferimento due valori di Δp : a una quota centrale e al fondo:

$$27,7 \frac{kg}{m^2} = 277 \frac{N}{m^2} = 277 Pa$$

$$55,4 \frac{kg}{m^2} = 554 \frac{N}{m^2} = 554 Pa$$

3.6.2 Sensori BPMS

BPMS sta per Body Pressure Measurement Pressure: infatti nascono per la misura della pressione di un corpo umano (vedi fotografia sotto), mediante una superficie sensibile collegata a un sistema computerizzato.



Questi sono i modelli possibili:

Sensor Options					
Sensor Model	# of Mats	Sensing Area	# of Sensing Elements	Spatial Resolution	Pressure Range
#5315	1	488 mm x 427 mm (19.2 in. x 16.8 in.)	2,016	6.25 sensels/in ² (1 sensel/cm ²)	0-250 mmHg (0-5 PSI)
	2	976 mm x 427 mm (38.4 in. x 16.8 in.)	4,032		
	4	1,952 mm x 427 mm (76.8 in. x 16.8 in.)	8,064		
	8	1,952 mm x 854 mm (76.8 in. x 33.6 in.)	16,128		
#5330	1	471 mm x 471 mm (18.56 in. x 18.56 in.)	1,024	3.0 sensels/in ² (0.5 sensel/cm ²)	0-250 mmHg (0-5 PSI)
	2	943 mm x 471 mm (37.12 in. x 18.56 in.)	2,048		

(* For use with USB handle only)

Sensor Model	# of Mats	Sensing Area	# of Sensing Elements	Spatial Resolution	Pressure Range
#5350	1	417 mm x 386 mm (16.4 in. x 15.2 in.)	1,558	6.25 sensels/in ² (1 sensel/cm ²)	0-250mmHg (0-5 PSI)
	2	834 mm x 386 mm (32.8 in. x 15.2 in.)	3,116		
	4	1,668 mm x 386 mm (65.6 in. x 15.2 in.)	6,232		
	8	1,668 mm x 772 mm (65.6 in. x 30.4 in.)	12,464		
#5400N	1	578 mm x 884 mm (22.7 in. x 34.8 in.)	1,768	2.23 sensels/in ² (0.3 sensen/cm ²)	0-200 mmHg (0-4 PSI)
	2	578 mm x 1,768 mm (22.7 in. x 69.6 in.)	3,536		
	3	1,734 mm x 884 mm (68.1 in. x 34.8 in.)	5,304		
	4	2,312 mm x 884 mm (90.8 in. x 34.8 in.)	7,072		

Il primo modello, il 5315 misura un range di pressione tra 0 e 250 mmHg millimetri di mercurio,

$$1mmHg = 133,32Pa$$

$$250mmHg = 250 \cdot 133,32 = 33000Pa = 33000 \frac{N}{m^2}$$

Confrontando con una pressione a una quota centrale e la pressione al fondo massiama:

$$277Pa < 33000Pa$$

$$554Pa < 33000Pa$$

Quindi il range contiene le pressioni da misurare ed essendo uno strumento digitale la misura non sarà affetta da errore anche se la pressione massima misurabile è di due ordini di grandezza superiore.

Confrontando le dimensioni del primo provino alto 1,5 e di diametro 3m, si osserva che si potrebbero mettere fino a tre elementi del modello 5315_1,_2,_4 (50x40cm, 97x40cm, 200x40cm) oppure uno solo del tipo 5400N_4 (230x88cm) con un'area coperta totale di 2 mq.

L'elettronica in corrispondenza del sensore si può distanziare fino a 50 cm.

Il **costo** del sistema con un sensore 80x60cm o 50x40cm è circa 9000 euro.

3.6.3 Sensori Flexiforce

I sensori FlexiForce sono puntuali: hanno cioè un'area circolare sensibile, una zona allungata che contiene i cavi e un terminale esterno dove leggere i risultati.



Abbiamo a disposizione tre modelli: A201, B101 L e A401.

Verifichiamo il primo modello A201:

Esso ha:

- Diametro 9,53 mm
- Area sensibile: 71,29 mm²
- Range 0 – 4,4 N

$$\frac{4,40}{71,29} 10^6 \frac{N}{m^2} \approx 62000 Pa$$

La massima pressione misurabile dallo strumento è quindi pari a

62000 Pa > 554 Pa (la massima alla base del provino). Anche in questo caso la massima pressione misurabile risulta di due ordini di grandezza in più.

Anche il modello B101L presenta queste caratteristiche, quindi entrambi possono essere adatti.

Invece il terzo modello A401 ha:

- Diametro 25,4 mm
- Area sensibile: 506,45 mm²
- Range 0 – 110 N

$$\frac{110}{506,71 \cdot 10^{-6}} = 217000 \frac{N}{m^2}$$

217000 Pa > 554 Pa

Questo modello è il più potente: misura valori fino a 3 ordini di grandezza superiori alla pressione da misurare, quindi forse è eccessivamente potente per il nostro scopo.

Il **costo** si calcola sul sistema computerizzato, su 16 sensori applicati su tutta l'altezza del provino, su 16 canali (uno per ogni sensore, con un massimo di 16 a PC).

Il sistema computerizzato costa 600 euro, ogni sensore costa 35 euro, ogni canale costa 400 euro.

Quindi:

600 ELF System	= 600 euro
400 x 16 Channels	= 6400 euro
35 x 16 Sensors	= 560 euro

TOTAL = 7560 EURO

3.7 MODELLO FEM dell'insilato

Si presenta ora un lavoro di ricerca ancora insospeso che si poneva l'obbiettivo di rappresentare l'insilato mediante un modello FEM 2D a masse puntuali. La modellazione è stata effettuata con il software SAP2000 v. 14.

Per dare un'idea immediata del modello si può inserire immediatamente un'immagine del modello a 4 masse:

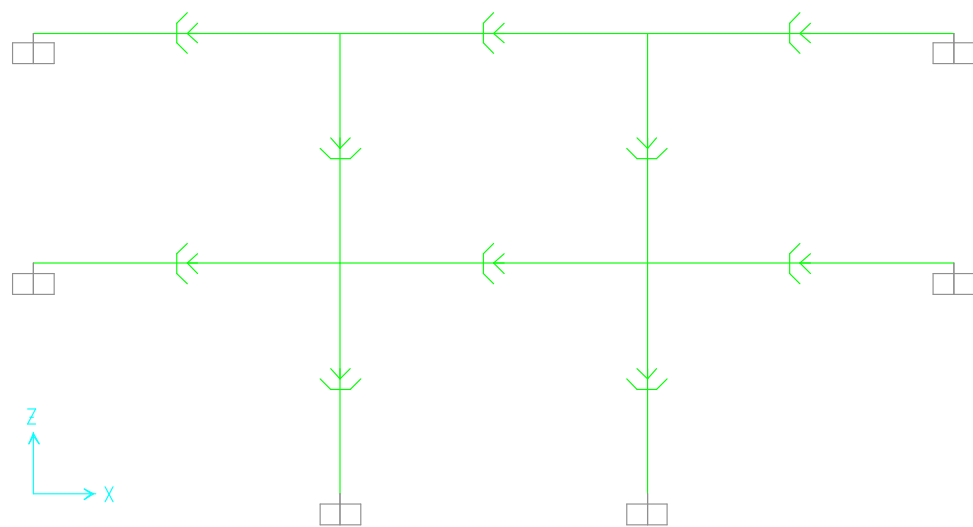
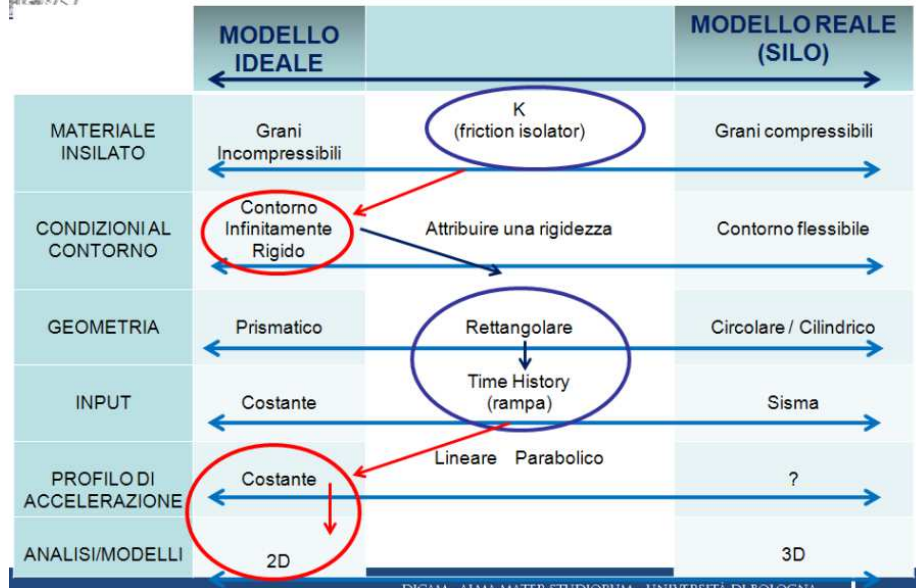


Figura 1. Modello a 4 masse con SAP 2000.

Il modello si colloca in questo modo entro lo schema fisico dove le ipotesi assunte si contrappongono visivamente alla realtà:



TRANSIZIONE dalla TEORIA alla REALTA'



Dallo schema si osserva che le ipotesi forti (cerchiate di rosso) sono sulle condizioni al contorno (infinitamente rigido), sul profilo di accelerazione (costante) sul modello (2D). Sono collocate in posizioni intermedie le restanti caratteristiche del modello: l'insilato (ha una certa rigidezza K) e l'input (Time History tipo rampa). La presenza di questo colore rosso nello schema e l'assenza di verde ci avvertono del fatto che questo modello è ancora a uno stadio rudimentale.

Per esplicitare il collegamento tra l'immagine del modello nella Figura 1 e lo schema si può sottolineare come i quattro incastri laterali e i due incastri alla base del modello a 4 masse costituiscano un contorno infinitamente rigido, invece gli elementi verdi orizzontali e verticali sono link particolari chiamati dal SAP "Friction Isolator", ad essi si può attribuire una certa rigidezza K che dovrà rispecchiare quella del materiale granulare insilato. Si è pensato di dividere l'insilato in masse discrete e applicarle puntualmente al modello, connettendole con i link friction isolator.

E' stato modellato solo il primo provino in acciaio, quindi la geometria è:

$$H = 1,5 \text{ m}$$

$$R = 1,5 \text{ m}$$

3.7.1 Costruzione del modello

3.7.1.1 Friction Isolator

L'elemento più particolare introdotto è il friction isolator; esso stato studiato nel tentativo di rappresentare l'insilato. Il friction isolator ha un comportamento non lineare. Sono state attribuite due rigidezze in due diverse direzioni: assiale e tagliante.

Assialmente: offre una resistenza solo a compressione; simula un comportamento elastoplastico; il valore della rigidezza è associabile alla K di Winkler numericamente.

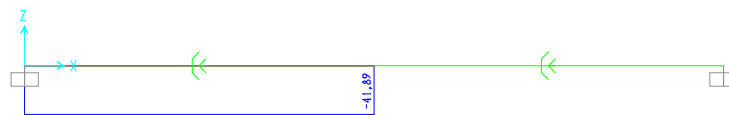


Figura 2. Resistenza solo a compressione assiale.

A taglio: L'ordine di grandezza è superiore di un grado rispetto alla rigidezza assiale. Il comportamento che si vuole simulare è quasi perfettamente plastico del tipo riportato in Figura 3.

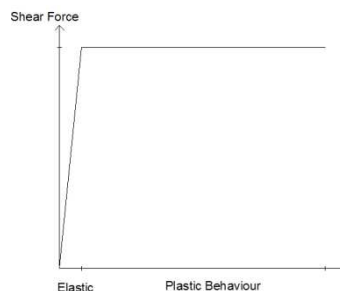


Figura 3. Comportamento elasto-plastico dell'elemento a taglio.

Si può evidenziare come una mensola, realizzata con un incastro (a sinistra) e un elemento orizzontale tipo friction isolator, sollecitata da una forza concentrata verticale, risponda perfettamente a taglio.

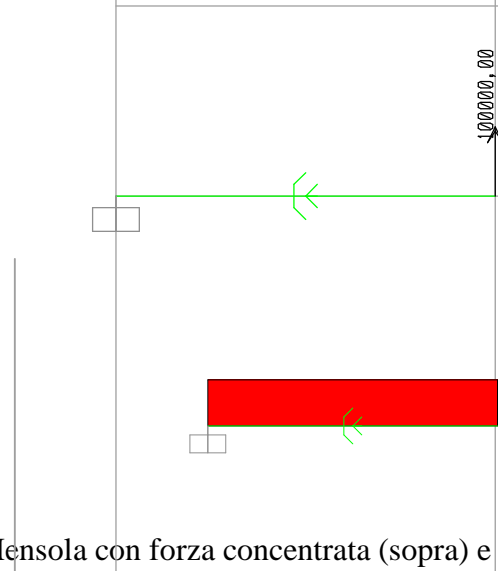


Figura 4. Mensola con forza concentrata (sopra) e diagramma del taglio (sotto).

Invece la stessa mensola, con due masse puntuali all'estremo libero in direzione X e Z, sollecitata con un input tipo Time History che agisce sulle due masse, dà solo sforzo assiale di compressione in direzione X, ma non dà taglio.

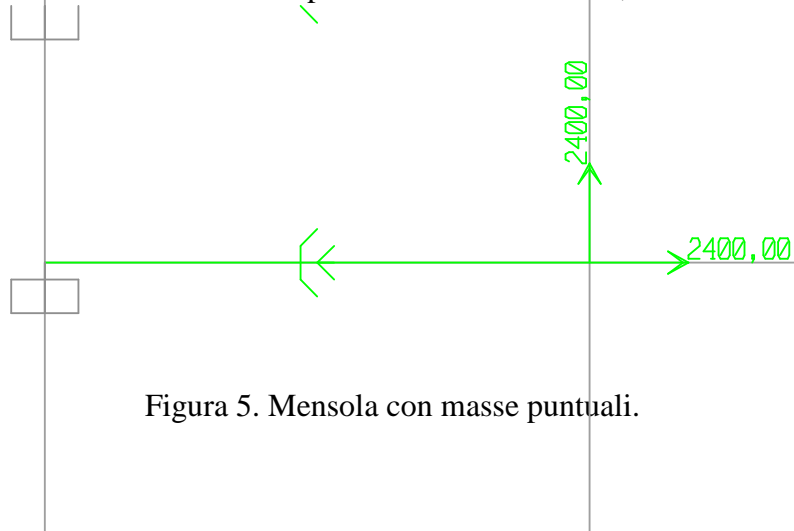


Figura 5. Mensola con masse puntuali.

Questo studio non è ancora stato perfezionato e si presentano ora solo i risultati parziali e i tentativi di miglioramento.

Si è già accennato come la rigidità assiale, solo a compressione, sia stata scelta usando K di Winkler, presa da un Manuale di Ingegneria Civile, nel capitolo delle fondazioni.

88

FONDAZIONI

Non disponendo di determinazioni sperimentali dirette di k_1 , e purché il carico agente non superi 1/3 del carico limite, si potrà far riferimento ai valori indicativi di k_1 riportati nella tab. 4.XIV.

TAB. 4.XIV. — VALORI ORIENTATIVI DELLA COSTANTE DI SOTTOFONDO k_1 PER PIASTRA QUADRATA O CIRCOLARE DI LATO O DIAMETRO $b_1 = 30$ cm [per estrapolare alla trave, vedi (4.13) e (4.14) con $b_1 = 30$ cm].

a) Valori di k_1 (kg/cm ³) per terreni incoerenti.				
Tipo di sabbia	Stato di addensamento	Sciolto	Medio	Denso
Secca o umida	Campo	0,7 ÷ 2,1	2,1 ÷ 10,8	10,8 ÷ 36
	Valore consigliato	1,4	4,7	18
Satura	Valore consigliato	0,9	2,9	11
b) Valori di k_1 (kg/cm ³) per argille sovraconsolidate.				
Consistenza	Compatta ($\sigma_r = 1 \div 2$ kg/cm ²)	Molto compatta ($\sigma_r = 2 \div 4$ kg/cm ²)	Dura ($\sigma_r > 4$ kg/cm ²)	
Campo	1,8 ÷ 3,6	3,6 ÷ 7,2	7,2	
Valore consigliato	2,7	5,4	10,8	

Nota: σ_r indica la resistenza a compressione semplice.

4.2.4.4. Trave di fondazione su continuo elastico. — Detti E e ν rispettivamente il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson del terreno, si definisce la rigidità relativa:

$$t = \frac{E_f J (1 - \nu^2)}{E B L^3}$$

Figura 6. Manuale di Ingegneria Civile, capitolo fondazioni: K di Winkler

La rigidità di Winkler di una sabbia sciolta è circa 10^7 N/m³.

Si deve ora passare a N/m per poter inserire il valore di rigidità assiale del friction isolator del SAP. La superficie che riguarda il friction isolator generico è l'area che compete un elemento link che connette due masse adiacenti. Nel caso in cui l'insilato sia diviso in quattro masse, due poste a quota 0,75 m e due poste a quota 1,5 m, a ciascuna massa compete una superficie di metà cerchio (Figura 7).

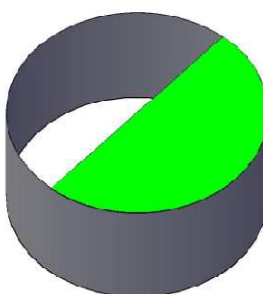


Fig. 7 Superficie relativa a una massa in un modello a quattro masse.

Quindi:

$$K_{SAP} = 10^7 \frac{N}{m^3} \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \left(10^7 \frac{N}{m^3} \right) \cdot \left(\frac{\pi \cdot 1,5^2}{2} \cdot m^2 \right) = 3,53 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$$

Il valore in N/m verrà inserito nelle caratteristiche del friction isolator all'interno del SAP, alla voce rigidezza in direzione assiale (U1).

Per quanto riguarda la voce U2 (tagliante) si inserisce un valore di un ordine di grandezza in più.

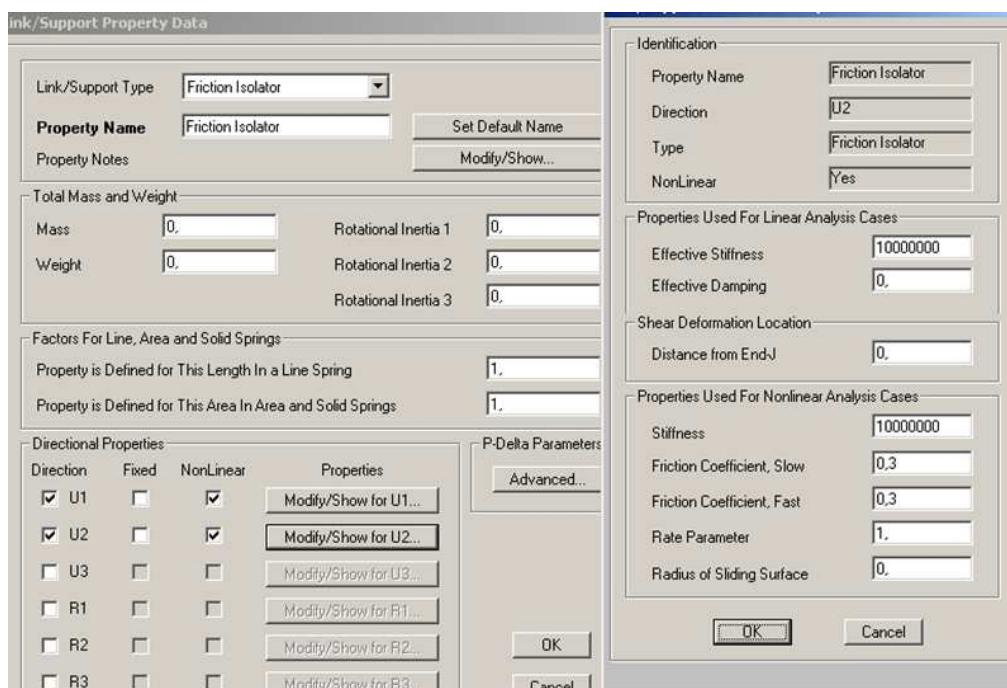
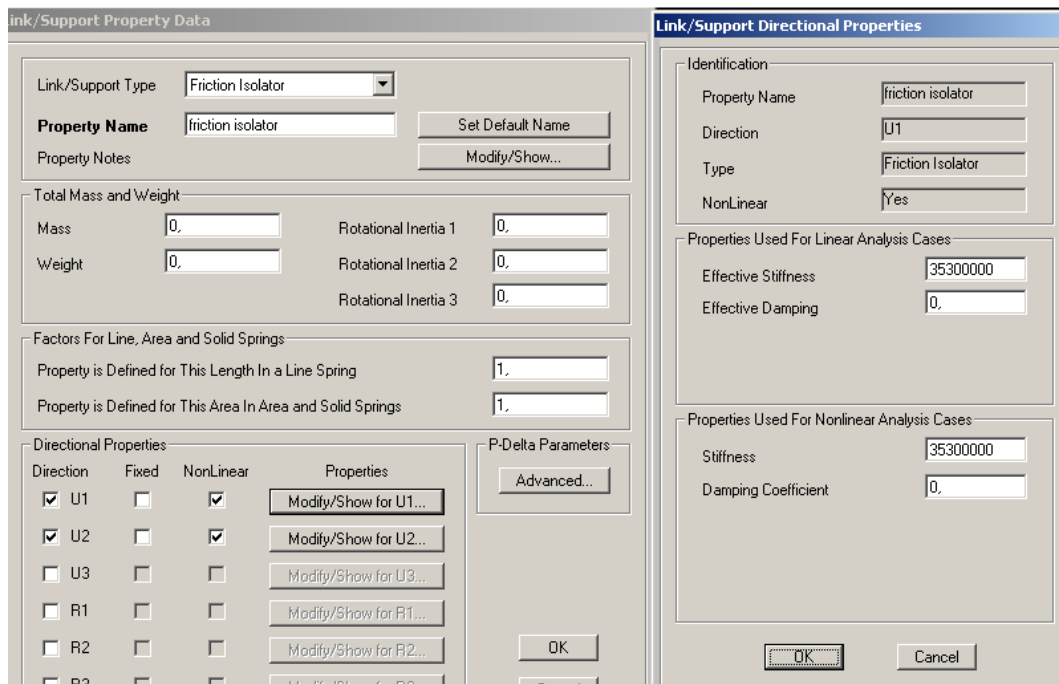


Figura 8. Mascherina per l'inserimento della rigidità del friction isolator nel SAP 2000.

Le due voci in cui compare il valore assegnato 0,3 riguardano la velocità del coefficiente d'attrito. Lo smorzamento viene sempre posto nullo.

3.7.1.2 Carichi

Si definisce una funzione di Time History tipo “rampa”, abbastanza dolce nella salita affinché nei risultati siano limitati gli effetti di vibrazione da urto. Abbiamo chiamato la funzione “sisma 1”.

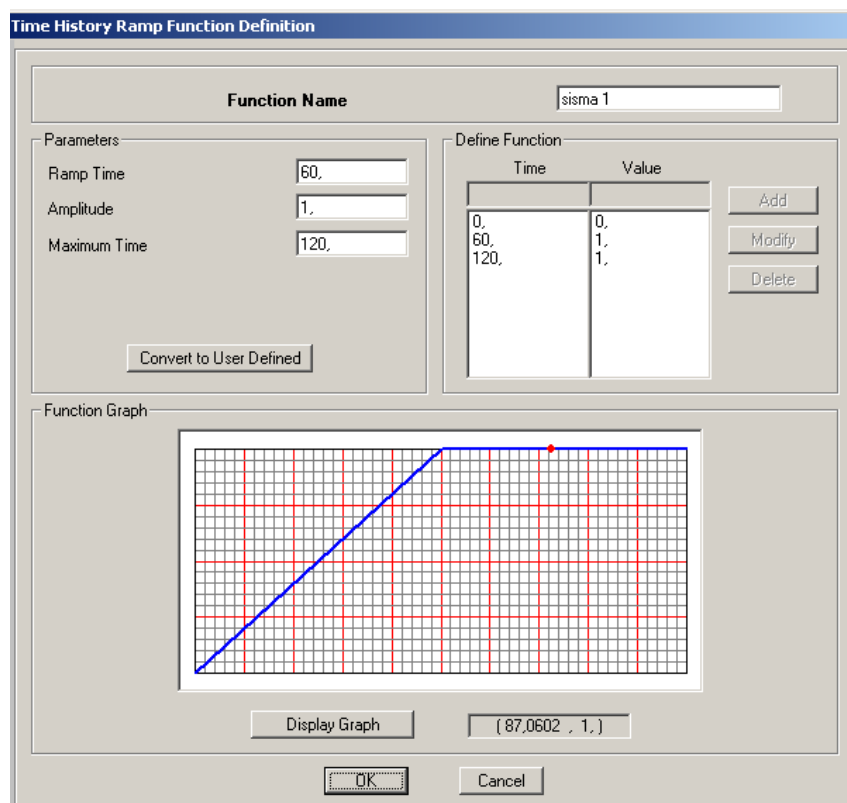


Figura 9. Time History “sisma 1”

Questa rampa arriva al platò dopo 60 s e ha una durata di 120 s.

I casi di carico sono tre:

1. Peso proprio
2. Aggiunta di accelerazione orizzontale costante
3. Solo accelerazione costante

Il peso proprio è un'analisi Time History non lineare ad integrazione diretta con 1000 steps di ampiezza 0,1; l'accelerazione è data in direzione verticale U3, con un fattore moltiplicativo di 9,81, così si ottiene g.

Il caso due, dove si aggiunge l'accelerazione orizzontale è un'analisi che continua dalla precedente "peso proprio", è sempre non lineare ad integrazione diretta, 1000 steps. L'accelerazione è data in direzione orizzontale U1 e il fattore moltiplicativo è 2, così da ottenere 0,2g.

Il terzo caso con solo accelerazione orizzontale parte da condizioni iniziali zero, per il resto è uguale al precedente. Questo caso in realtà non trova riscontro fisico, perché un peso proprio nella realtà c'è sempre, quindi non è fisicamente realistico isolare la sola accelerazione orizzontale.

Load Case Data - Nonlinear Direct Integration History

Load Case Name: Notes:

Load Case Type:

Initial Conditions:

- Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State
- Continue from State at End of Nonlinear Case

Important Note: Loads from this previous case are included in the current case

Modal Load Case:

Analysis Type:

- Linear
- Nonlinear

Time History Type:

- Modal
- Direct Integration

Geometric Nonlinearity Parameters:

- None
- P-Delta
- P-Delta plus Large Displacements

Loads Applied

Load Type	Load Name	Function	Scale Factor
Accel	U3	sisma 1	9,8
Accel	U3	sisma 1	9,8

Show Advanced Load Parameters

Time Step Data:

Number of Output Time Steps:

Output Time Step Size:

Time History Motion Type:

- Transient
- Periodic

Other Parameters:

Damping:

Time Integration:

Nonlinear Parameters:

Load Case Data - Nonlinear Direct Integration History

Load Case Name: Notes:

Load Case Type:

Initial Conditions:

Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State

Continue from State at End of Nonlinear Case
Important Note: Loads from this previous case are included in the current case

Modal Load Case:

Analysis Type: Linear Nonlinear

Time History Type: Modal Direct Integration

Geometric Nonlinearity Parameters:

None P-Delta P-Delta plus Large Displacements

Loads Applied

Load Type	Load Name	Function	Scale Factor
Accel	U1	sisma 1	2.
Accel	U1	sisma 1	2.

Show Advanced Load Parameters

Time Step Data:

Number of Output Time Steps:

Output Time Step Size:

Time History Motion Type:

Transient Periodic

Other Parameters:

Damping:

Time Integration:

Nonlinear Parameters:

Load Case Data - Nonlinear Direct Integration History

Load Case Name: Notes:

Load Case Type:

Initial Conditions:
 Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State
 Continue from State at End of Nonlinear Case
Important Note: Loads from this previous case are included in the current case

Analysis Type:
 Linear
 Nonlinear

Time History Type:
 Modal
 Direct Integration

Modal Load Case:
 Use Modes from Case

Geometric Nonlinearity Parameters:
 None
 P-Delta
 P-Delta plus Large Displacements

Loads Applied

Load Type	Load Name	Function	Scale Factor
Accel	U1	sisma 1	2,
Accel	U1	sisma 1	2,

Show Advanced Load Parameters

Time Step Data:
 Number of Output Time Steps:
 Output Time Step Size:

Time History Motion Type:
 Transient
 Periodic

Other Parameters:
 Damping:
 Time Integration:
 Nonlinear Parameters:

Figura 10. Tre casi di carico

3.7.1.3 Impostazioni

L'analisi viene effettuata vincolando il modello nel piano e impedendo anche la rotazione attorno all'asse ortogonale al piano. Quindi vengono impediti le traslazioni UY e le tre rotazioni RX, RZ, RY.

3.7.1.4 Masse

La massa da attribuire ai nodi è data dal volume per il peso specifico del materiale insilato ($\gamma = 900\text{Kg/m}^3$) diviso il numero di masse. Iniziamo con quattro masse:

$$\frac{\gamma \cdot V}{4} = \frac{900 \cdot 10,6}{4} \approx 2400\text{Kg}_f$$

Dove V è il volume del primo provino in acciaio (H=1,5m R=1,5m).

L'inserimento di masse puntuali nel SAP può avvenire “as mass” oppure “as weight”. Lavorando con l'unità di misura Newton, abbiamo 24000N peso o 2400Nmassa (vedi immagine sotto). Le masse vengono inserite come vettori in direzione X e Z.

Il modello caricato con le quattro masse nodali espresse in Newton è questo:

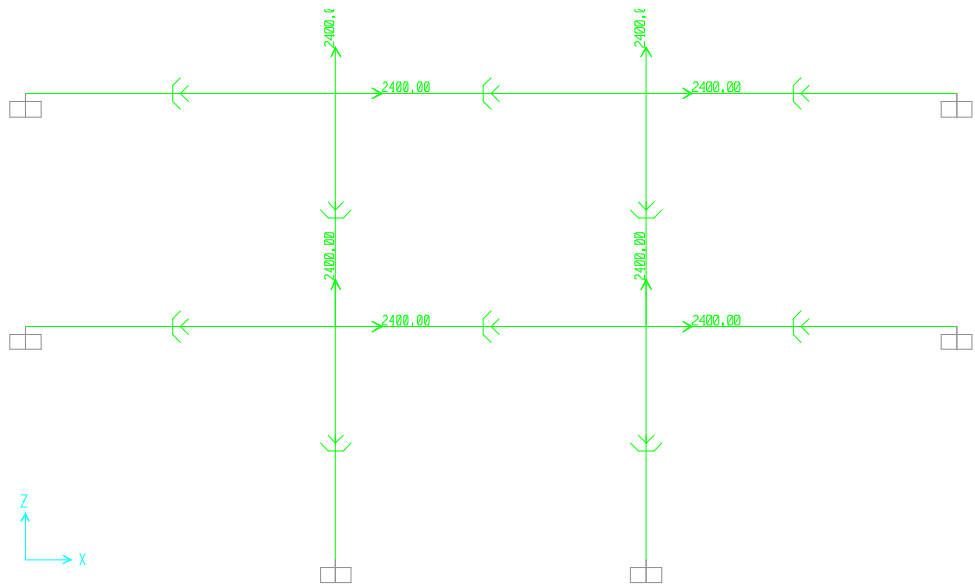
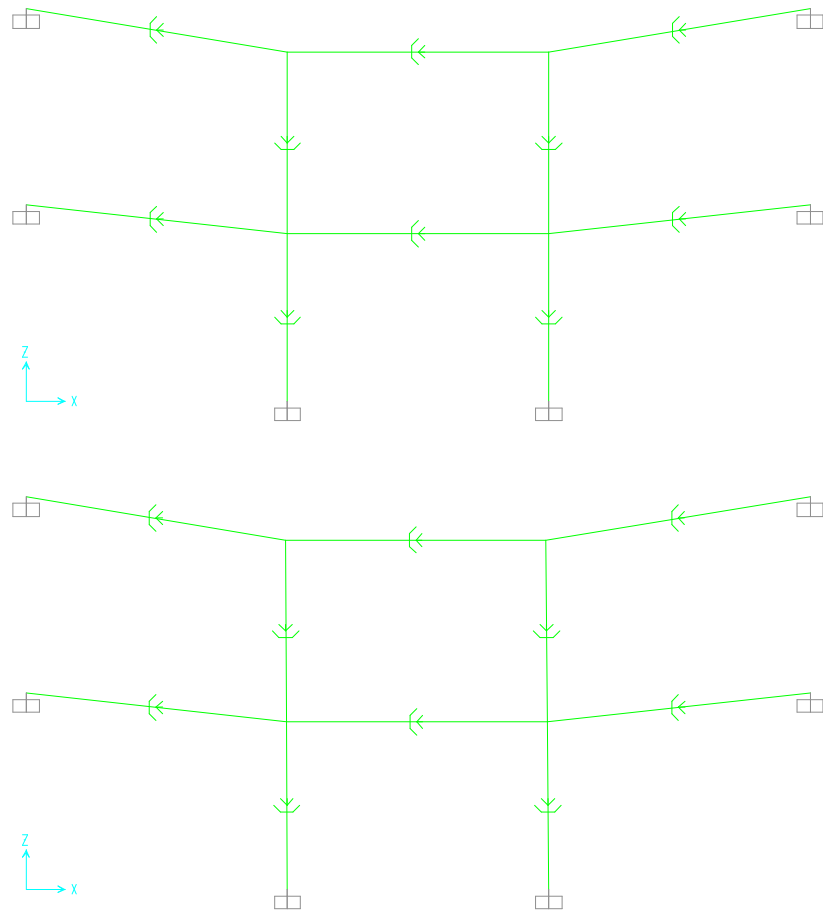


Figura 11. Modello con 4 masse puntuali.

3.7.2 Risultati

3.7.2.1 Deformate

Le deformate sono queste, nei tre casi:



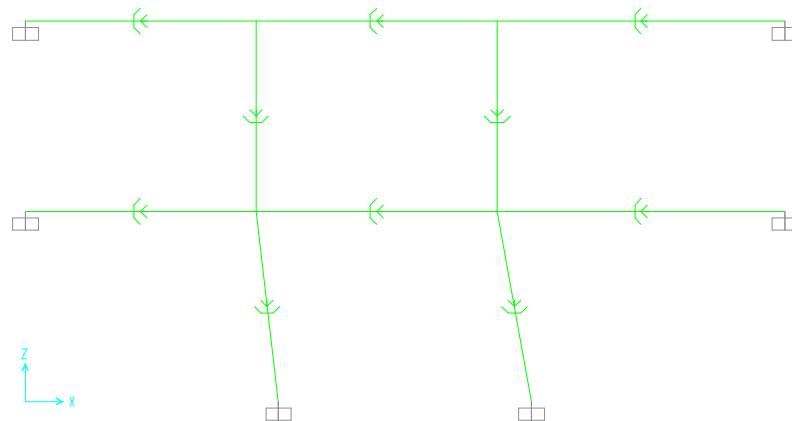
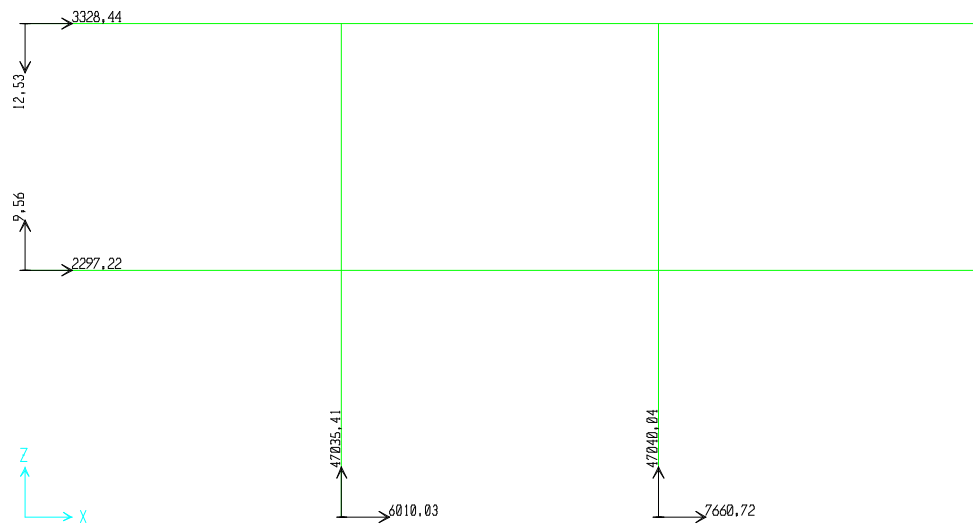
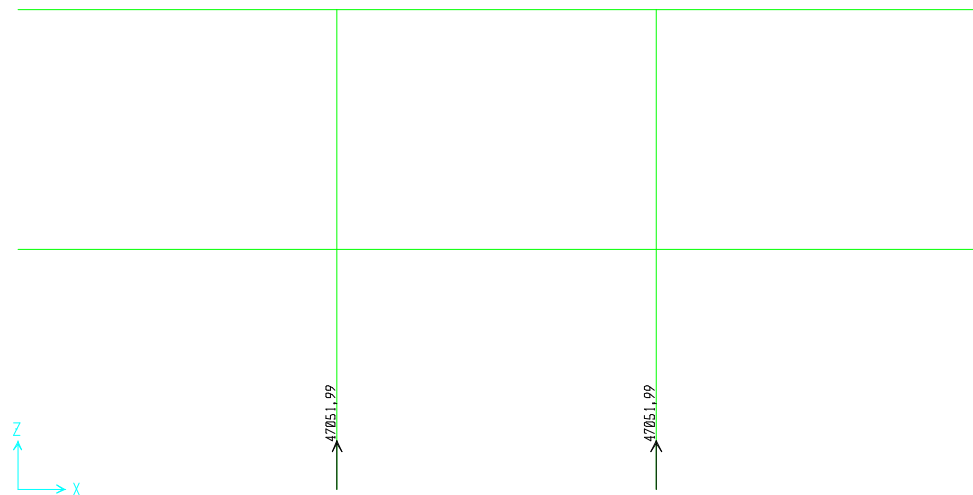


Figura 11: Deformate dei tre casi: peso proprio, $g + agh$, solo agh .

La deformata sotto peso proprio è rappresentata da una traslazione verticale verso il basso; la deformata sotto carico $g + agh$ presenta anche una traslazione orizzontale e lo spostamento verticale è minore del precedente (non vale il principio di sovrapposizione degli effetti a casua della non linearità); la deformata con solo agh mostra solo uno spostamento orizzontale.

3.7.2.2 Reazioni

I valori massimi delle reazioni degli incastri sono questi, nei tre casi:



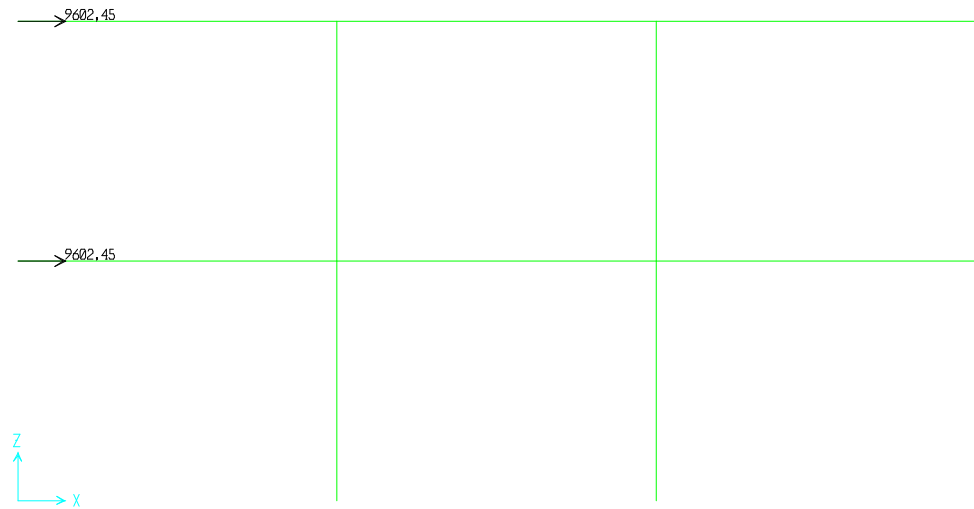


Figura 12: Reazioni nei tre casi.

Le reazioni verticali negli incastri sotto peso proprio valgono 47052 N. Questo valore corrisponde ai pesi delle due masse sovrastanti: infatti le due masse inserite sono pari a 2400 N_m , quindi i rispettivi pesi sono circa 24000 N_f e sulla base gravano 2 masse, quindi circa 48000 N, che è circa il valore della reazione verticale dell'incastro alla base nei due casi di solo peso proprio e di aggiunta di agh.

3.7.2.3 Sforzo Assiale

Lo sforzo assiale nei tre casi è:

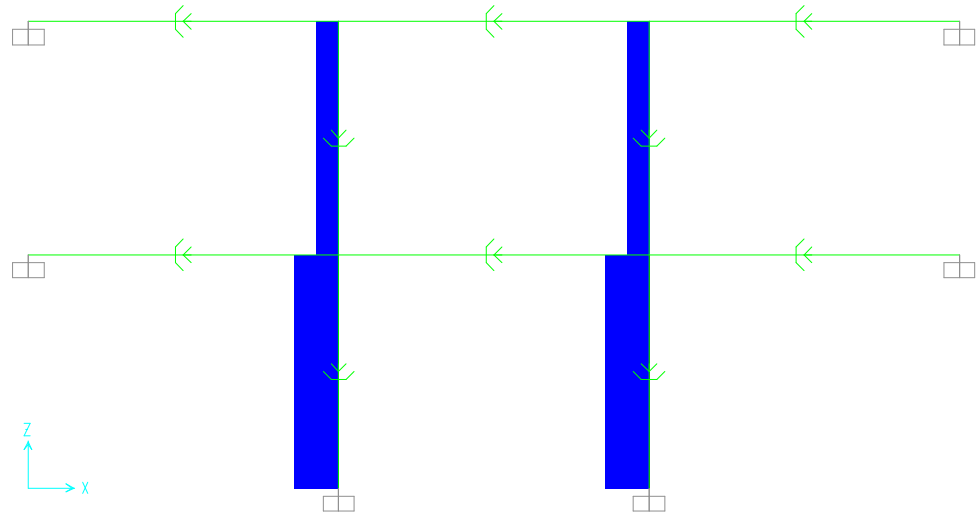
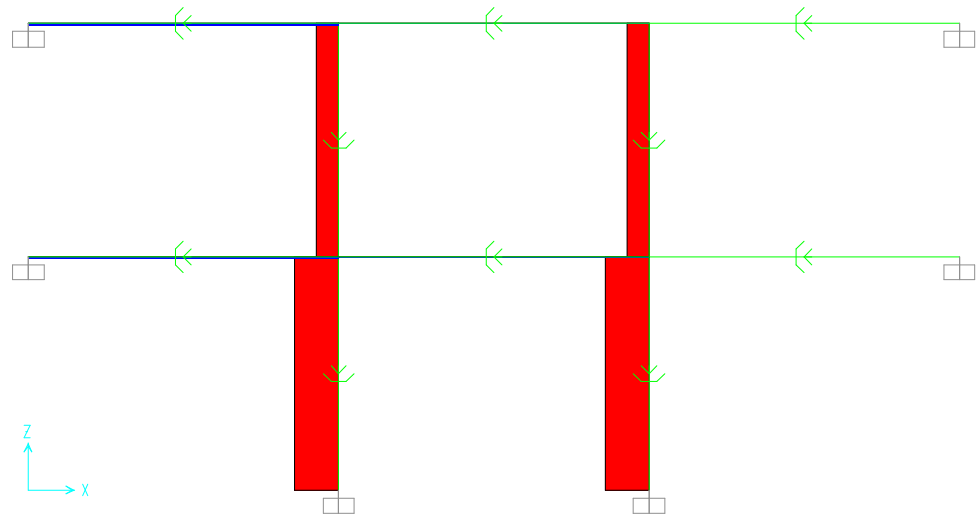


Figura 13: Sforzo assiale (envelope = valori massimi) nel caso di peso proprio.



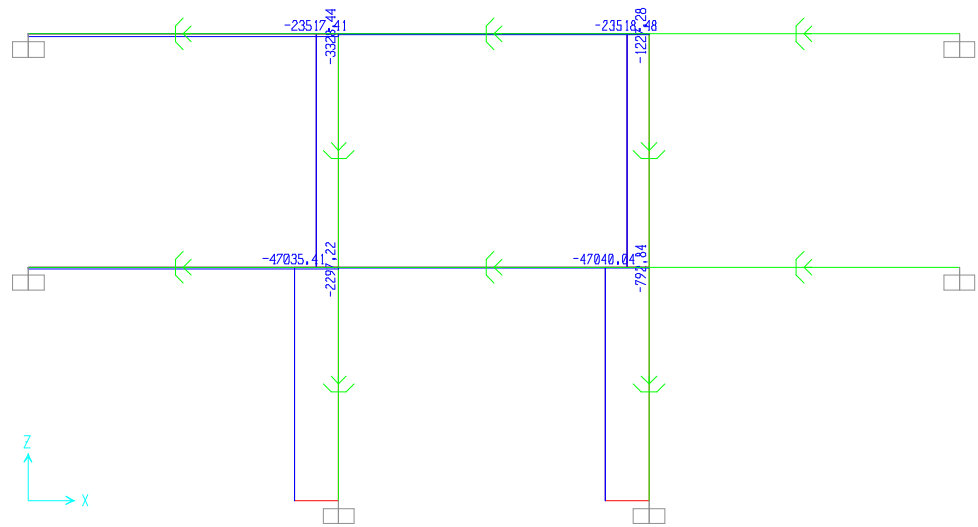
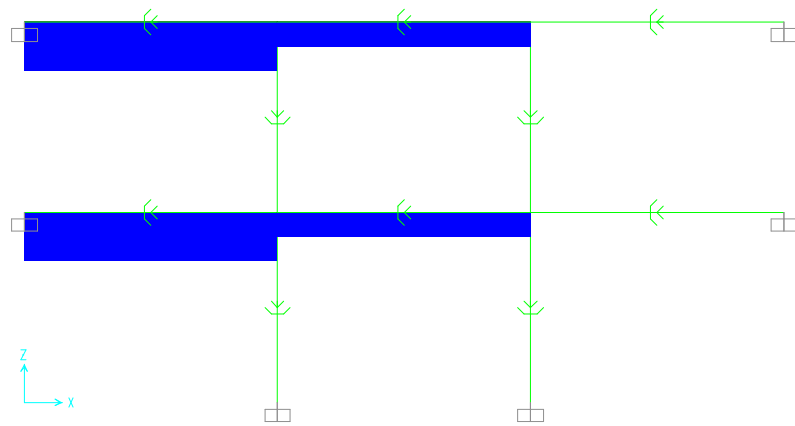


Figura 14: Sforzo assiale nel caso $g+a$ (envelope = valori massimi): con riempimento e con i valori.



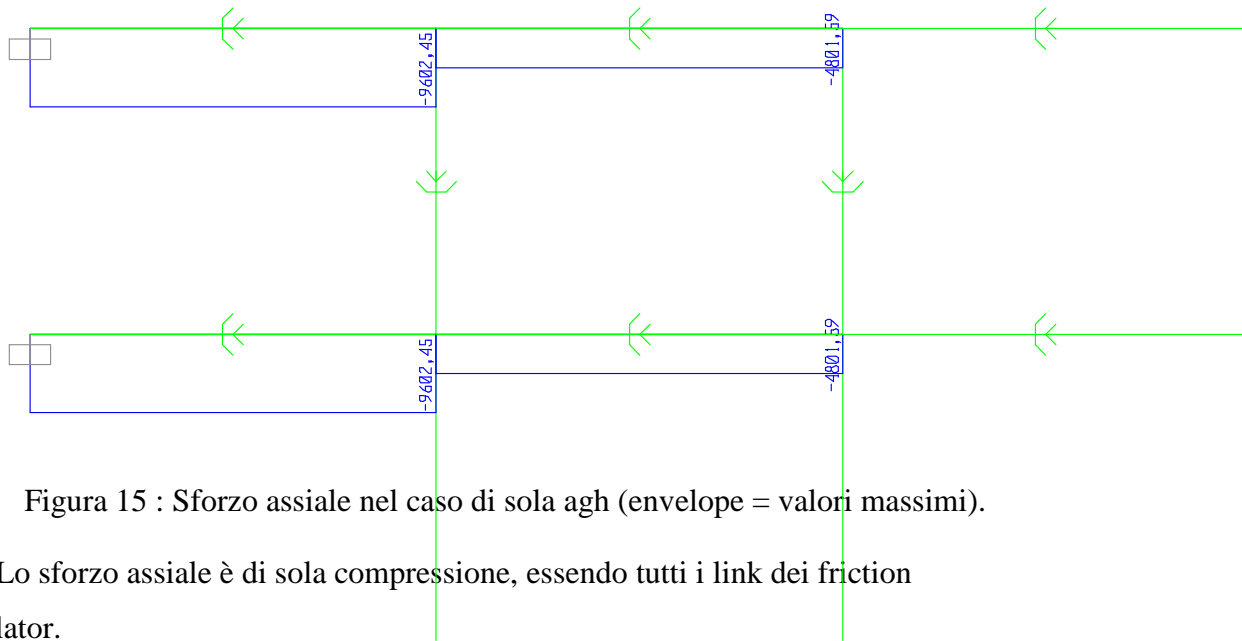
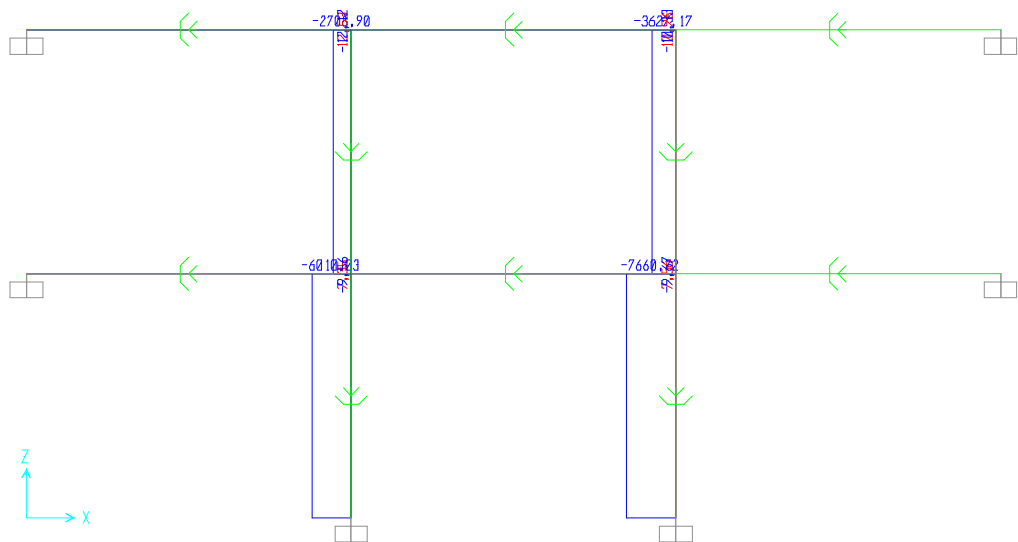


Figura 15 : Sforzo assiale nel caso di sola agh (envelope = valori massimi).

Lo sforzo assiale è di sola compressione, essendo tutti i link dei friction isolator.

3.7.2.4 Taglio

Il taglio è presente solo nel caso 2 (cioè in presenza di accelerazione orizzontale aggiuntiva):



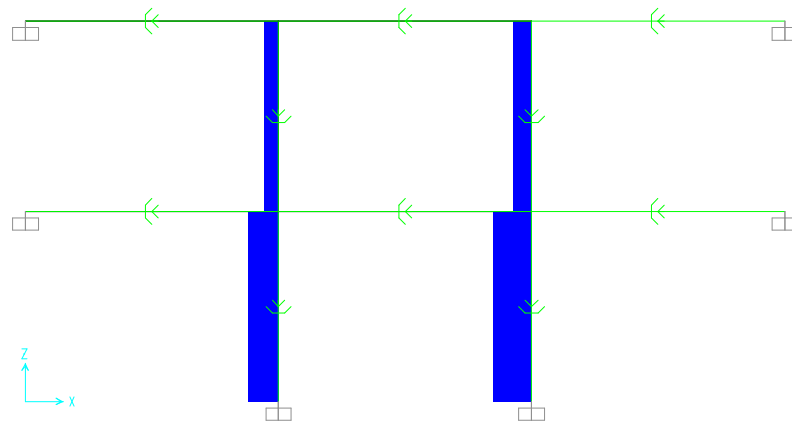


Figura 16: Taglio nel caso $g + agh$ (envelope = valori massimi).

3.7.2.5 Spostamenti

Gli spostamenti si possono graficare in funzione del tempo.

Gli spostamenti verticali assoluti nel caso di peso proprio, per due nodi a sinistra, i numeri 2 e 3, rispettivamente a quota 0,75 m e 1,5 m, sono:

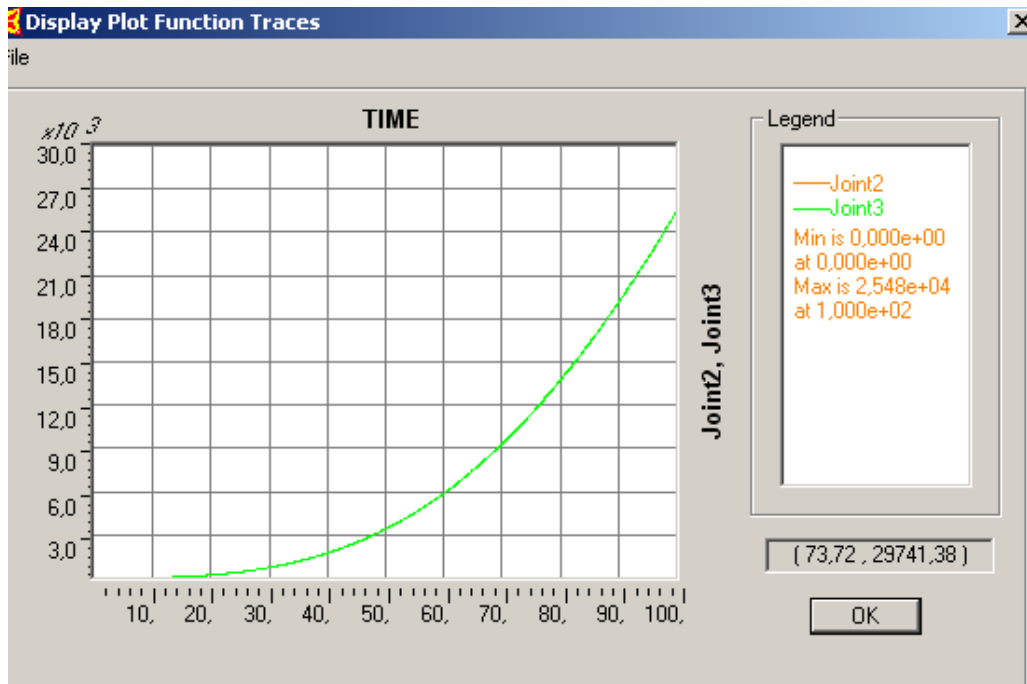
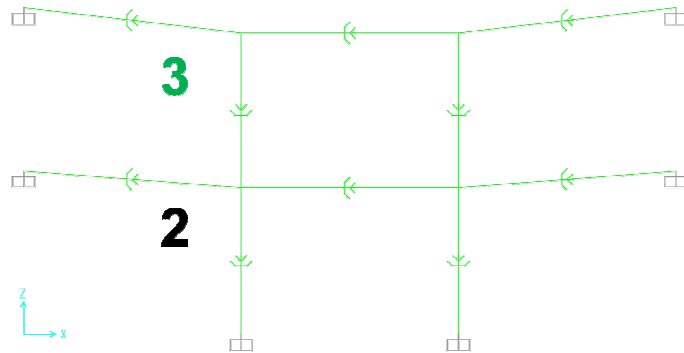


Figura 17: Grafico della funzione Spostamento assoluto verticale dei nodi 2 e 3 nel caso di peso proprio in funzione del tempo .

Gli spostamenti verticali assoluti dei nodi due e tre sono identici, quindi nel grafico si ha una linea sola perché in realtà sono due linee sovrapposte.

Gli spostamenti assoluti verticali nel caso $g + agh$, sempre per due nodi a sinistra, 2 e 3, sono:

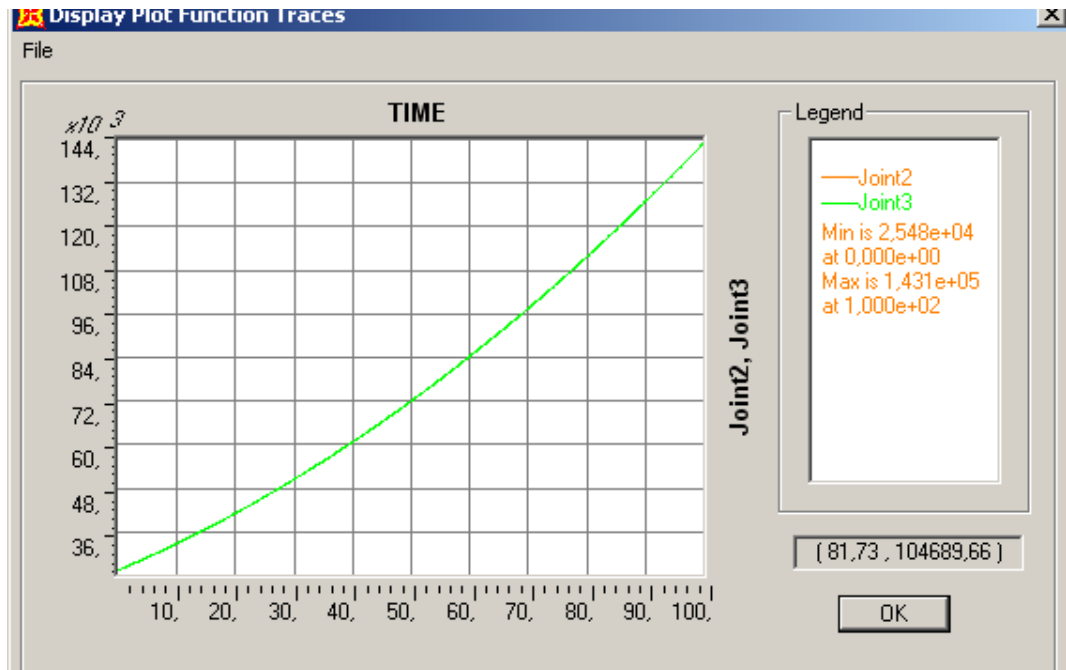


Figura 18: Grafico della funzione spostamento assoluto verticale nel caso $g + agh$, in funzione del tempo.

Gli spostamenti orizzontali assoluti nel caso $g + agh$, sempre per i nodi 2 e 3, sono:

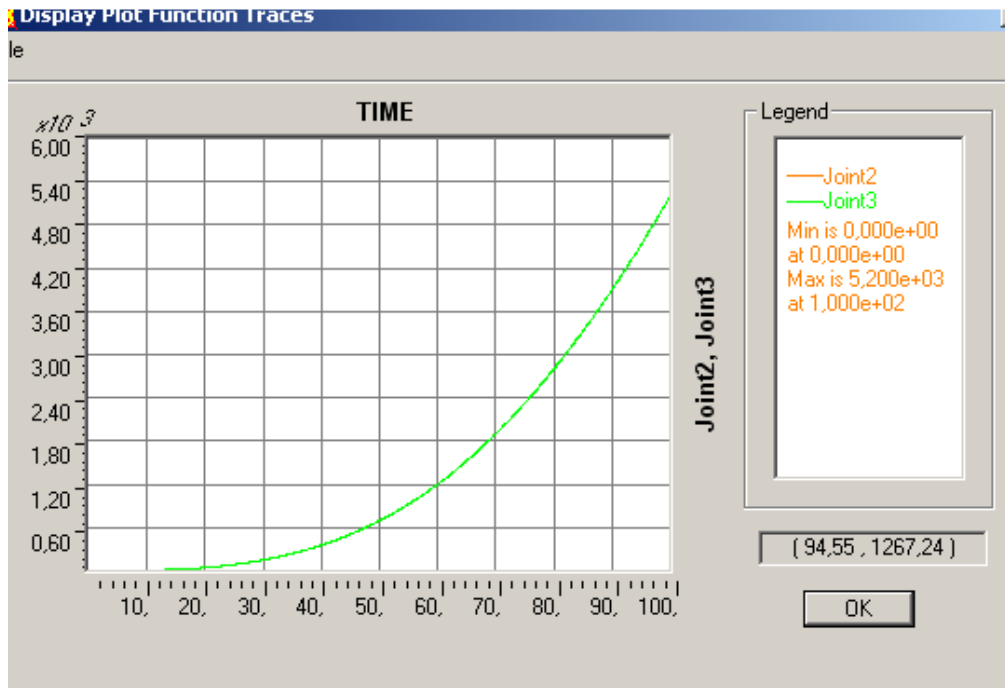


Figura 19: Grafico della funzione Spostamento orizzontale assoluto nel caso g +agh dei nodi 2 e 3, in funzione del tempo.

Gli spostamenti verticali relativi dei nodi 2 e 3 nel caso di peso proprio sono:

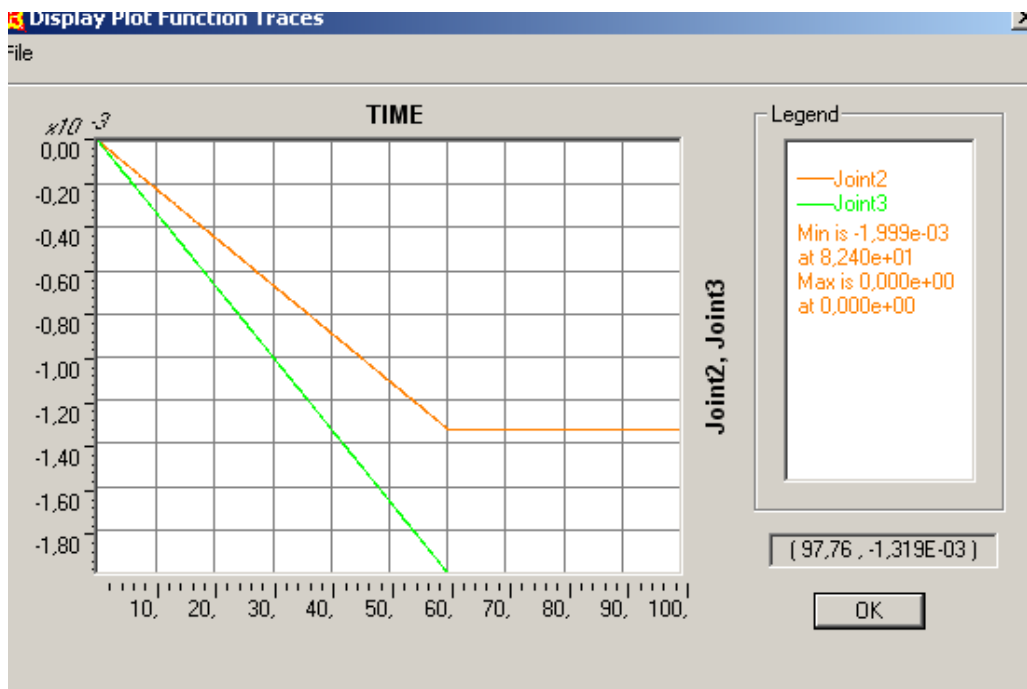


Figura 20: Grafico degli spostamenti relativi verticali dei nodi 2 e 3 nel caso di peso proprio.

Da questo ultimo grafico si osserva che il nodo 3(verde) si sposta più del nodo 2(arancione) poiché riceve due input di spostamento, mentre il nodo 2 solo un input.

$$\delta_3 = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2}$$

$$\delta_2 = \frac{F}{K_2}$$

Il grafico dello spostamento orizzontale relativo dei nodi 2 e 3 nel caso g + agh è riportato nella figura sotto, in funzione del tempo:

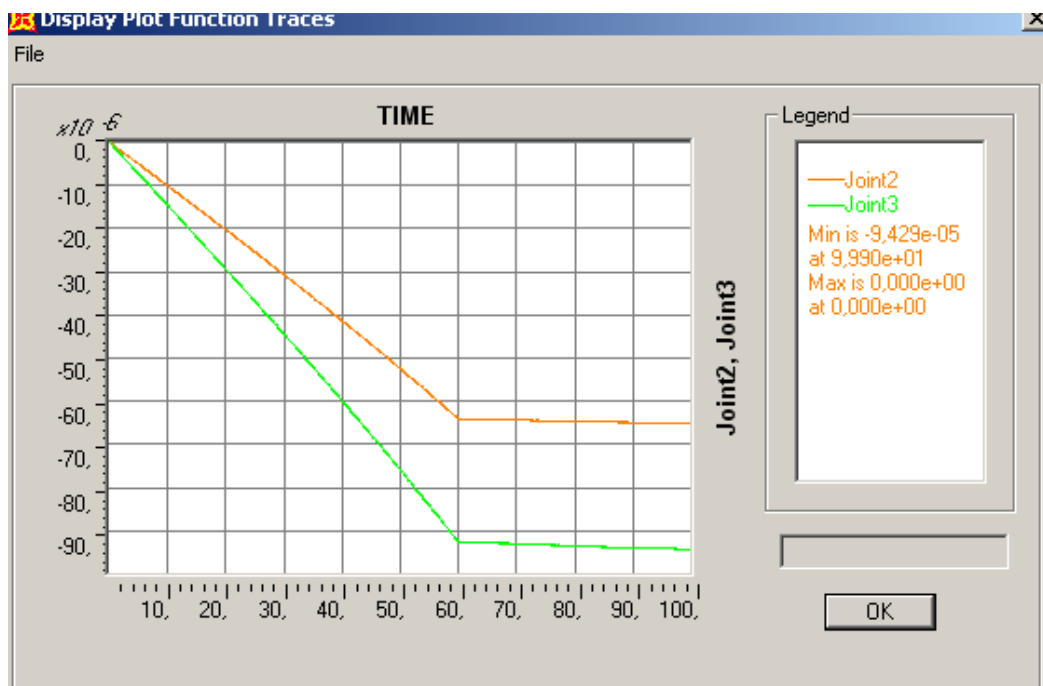


Figura 21: Grafico dello spostamento orizzontale relativo nel caso g + agh in funzione del tempo, per i nodi 2 e 3.

Ecco la tabella riassuntiva degli spostamenti dei primi nodi:

Joint Displacements									
File View Format-Filter-Sort Select Options									
Units: As Noted						Joint Displacements			
	Joint Text	OutputCase Text	CaseType Text	StepType Text	U1 mm	U2 mm	U3 mm	R1 Radians	R2 Radians
▶	1	peso proprio	NonDirHist	Max	0	0	0	0	0
	1	peso proprio	NonDirHist	Min	0	0	0	0	0
	1	acc horiz	NonDirHist	Max	0	0	0	0	0
	1	acc horiz	NonDirHist	Min	0	0	0	0	0
	1	only horiz acc	NonDirHist	Max	0	0	0	0	0
	1	only horiz acc	NonDirHist	Min	0	0	0	0	0
	2	peso proprio	NonDirHist	Max	0	0	0	0	0
	2	peso proprio	NonDirHist	Min	0	0	-1,332918	0	0
	2	acc horiz	NonDirHist	Max	0	0	-1,332146	0	0
	2	acc horiz	NonDirHist	Min	-0,065077	0	-1,332448	0	0
	2	only horiz acc	NonDirHist	Max	0	0	0	0	0
	2	only horiz acc	NonDirHist	Min	-0,272024	0	0	0	0
	3	peso proprio	NonDirHist	Max	0	0	0	0	0
	3	peso proprio	NonDirHist	Min	0	0	-1,999405	0	0
	3	acc horiz	NonDirHist	Max	0	0	-1,998162	0	0
	3	acc horiz	NonDirHist	Min	-0,09429	0	-1,998663	0	0
	3	only horiz acc	NonDirHist	Max	0	0	0	0	0
	3	only horiz acc	NonDirHist	Min	-0,272024	0	0	0	0
	4	peso proprio	NonDirHist	Max	0	0	0	0	0
	4	peso proprio	NonDirHist	Min	0	0	-1,999405	0	0

Tabella: spostamenti dei nodi 2 e 3 nei tre casi di carico: peso proprio, g + agh (= "acc horiz") e solo agh (= "only agh") in mm.

Abbiamo notato che, per valori di rigidzze dei link friction isolator (quindi del materiale insilato) molto basse, i grafici sono oscillanti (la funzione time history ramp è la stessa di prima e anche le masse):

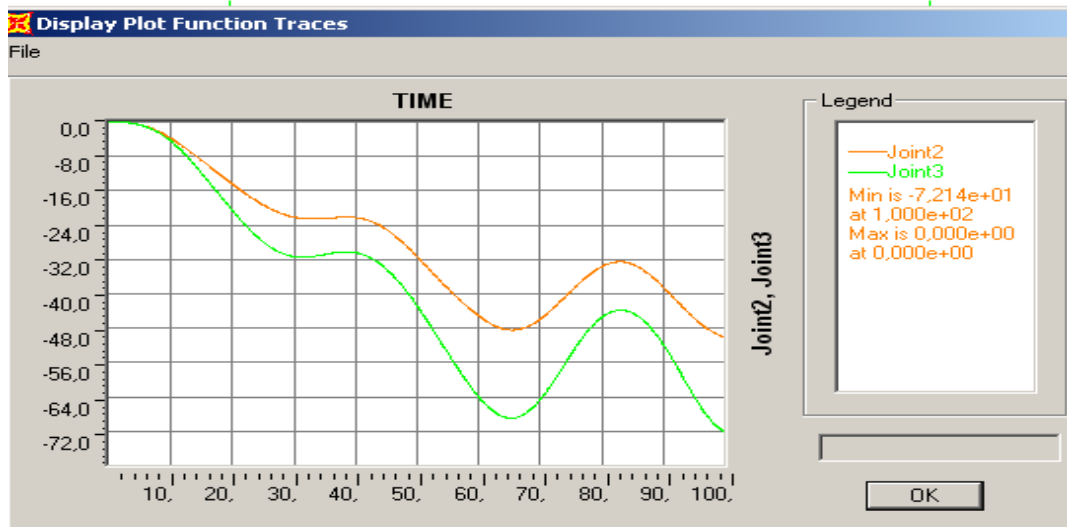


Figura 22: Grafico dello spostamento relativo orizzontale nel caso g è agh con un K piccolo, in funzione del tempo.

3.7.2.6 Confronto teoria – modello FEM

Ora si confrontano i risultati del modello FEM con i risultati analitici teorici. Le reazioni orizzontali degli incastri laterali vengono confrontate con le pressioni Δp_h dovute alla accelerazione orizzontale aggiuntiva. Ricordo che Δp_h si ottiene dalla differenza tra il caso 2 (che comprende: peso proprio, accelerazioni orizzontale e verticale) e il caso 1 (solo peso proprio e accelerazione verticale). Questo argomento è trattato nella sezione due (teoria).

$$p_h - p_{h1} = \Delta p_h(z, \vartheta)$$

$$\Delta p_h(z, \vartheta) = \frac{a_{g\perp}(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_{g\perp}(z)}$$

In questo caso si pone nulla l'accelerazione aggiuntiva verticale, poiché nel modello FEM non compare, quindi $\nu=1$.

Inoltre Δp_h è una pressione radiale, per confrontarla con una reazione vincolare in Newton è necessario moltiplicarla per l'area su cui agisce. E' stata calcolata una Δp_h media, considerata applicata ad $H/2 = 0,75m$. Questo valore, moltiplicato per la superficie laterale del cilindro, verrà confrontato con il valore della reazione di incastro del modello FEM alla stessa quota 0,75m.

quota	z	Δp_h	Δp_h	ph media Rh	Rh
		0,0 [Kg/mq]	0 [N/mq]	[Kg/mq]	
1,5	0	0,0	0		
1,4925	0,0075	0,3	3		
1,3125	0,1875	6,9	69		
1,125	0,375	13,8	138		
0,9375	0,5625	20,8	208		
0,75	0,75	27,7	277	25,0	
0,5625	0,9375	34,6	346	352,7Kg	
0,375	1,125	41,5	415		
0,1875	1,3125	48,5	485		
0	1,5	55,4	554		

$\Delta p_h \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$
 3527,3N
 Valore medio [Kg/mq]

Tabella con calcolo Δp_h e corrispondente forza orizzontale applicata a 0,75 m.

		Δp_h [N]	Reazioni [N]	Reazioni [N]
			g + agh	solo agh
Quota	75 cm	3527	2297	9600

Tabella: confronto risultato teorico e risultato modello FEM.

Il confronto risulta soddisfacente nel caso g + agh, dove la reazione è circa il 66% di un valore riconducibile alla teoria esposta nella seconda sezione.

3.7.3 Modello a 184 Masse

Ora si espone il caso meno grossolano in cui si è diviso l'insilato in 184 masse.

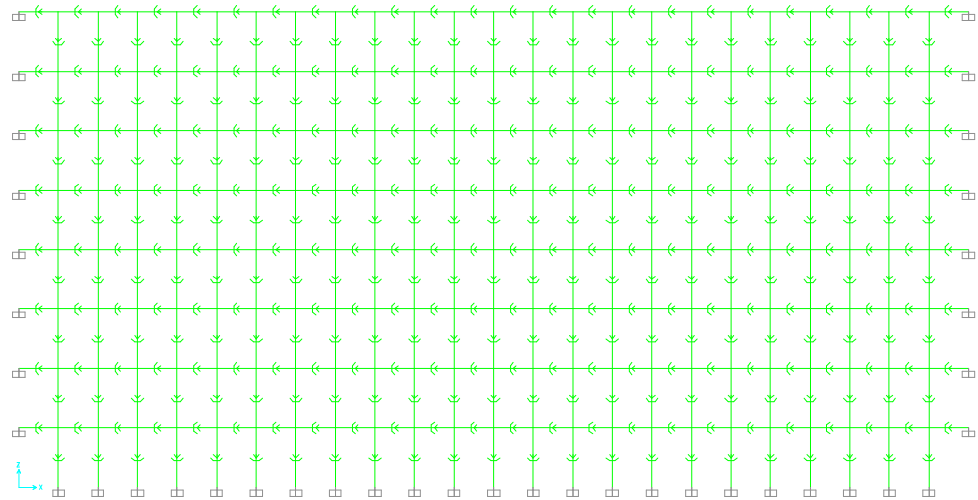


Figura 23 . Modello a 184 masse

Rispetto al modello a 4 masse vengono modificate le rigidità dei friction isolator e le masse da attribuire ai nodi.

3.7.3.1 Rigidezza friction isolator

La rigidezza assiale sarà quella di Winkler per l'area che compete alla singola massa: alle quote dei vari livelli si susseguono 23 masse, quindi l'area relativa sarà 1/23 dell'area del cerchio di raggio pari al raggio del provino.

$$K_{axial} = 10^7 \frac{N}{m^3} \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{23} = \left(10^7 \frac{N}{m^3} \right) \cdot \left(\frac{\pi \cdot 1,5^2}{23} \cdot m^2 \right) = 3,07 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$$

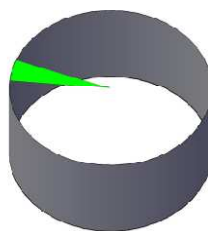


Figura 24: Area relativa a un friction isolator.

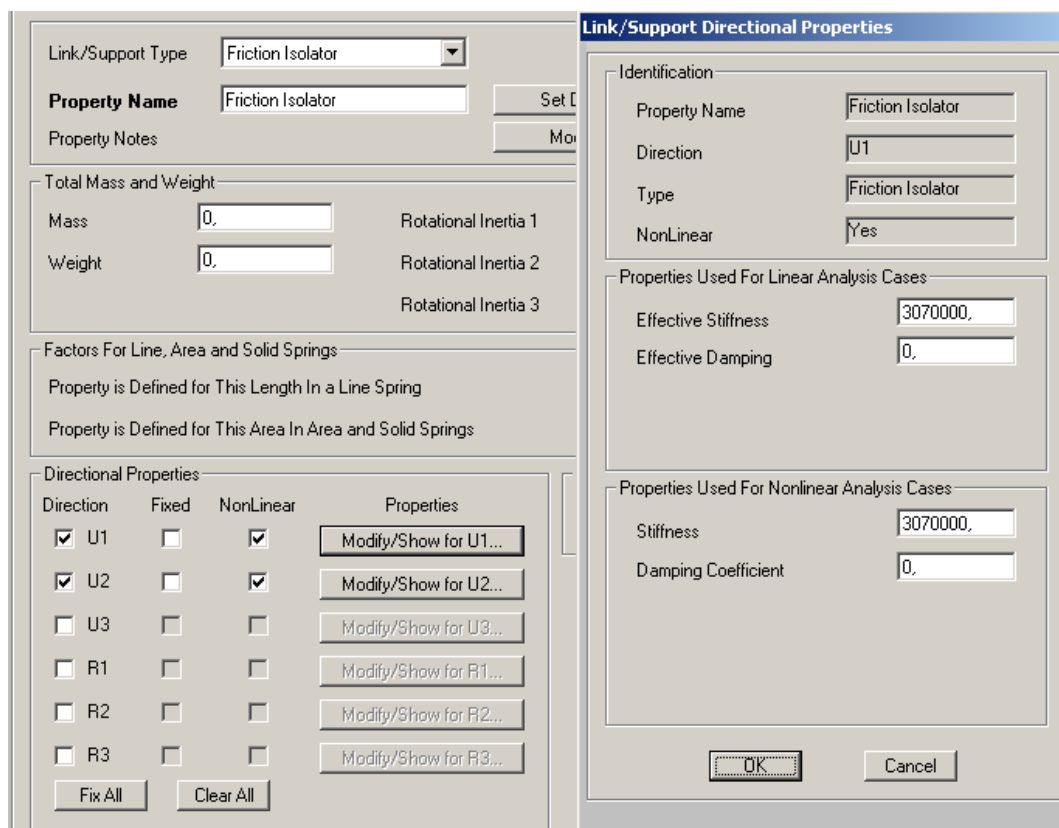


Figura: Maschera per regolare la rigidità assiale del friction isolator.

Tale rigidità assiale sarà applicata anche ai link verticali, quindi con un'evidente approssimazione.

La rigidità a taglio dovrebbe essere un ordine di grandezza in più dell'assiale, quindi:

$$K_{shear} = 1 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$$

Per un problema di malcondizionamento della matrice, questa rigidità è stata modificata in :

$$K_{shear} = 1 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$$

Altrimenti l'analisi non arrivava con successo a convergenza.

3.7.3.2 Masse

Le masse da attribuire ai nodi sono pari al volume dell'insilato per il peso specifico diviso 184.

$$\frac{\gamma \cdot V}{184} \approx 52 \text{ Kg}$$

Inserendo la massa "as weight" in Newton, si inserisce 520 N.

3.7.4 Risultati

Le deformate nei soliti tre casi di carico sono:

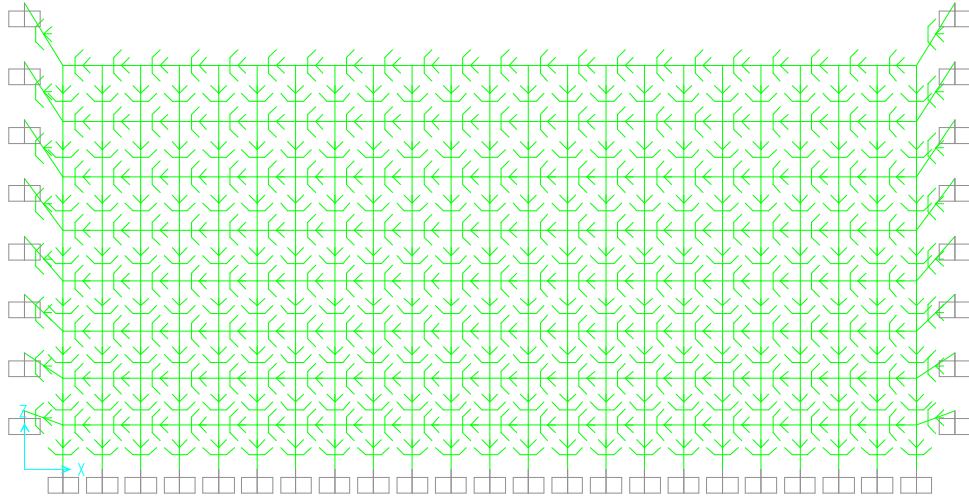


Figura 25. Deformata caso: peso proprio

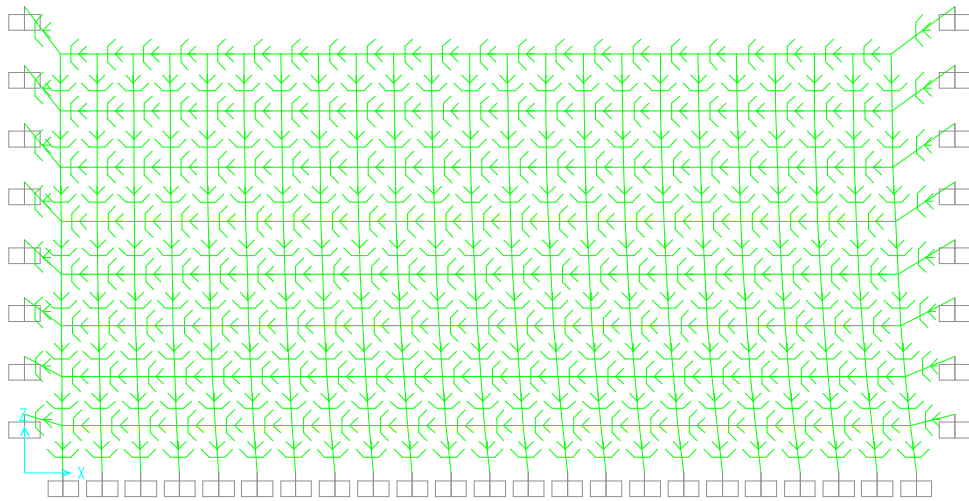


Figura 26: Deformata caso g + agh

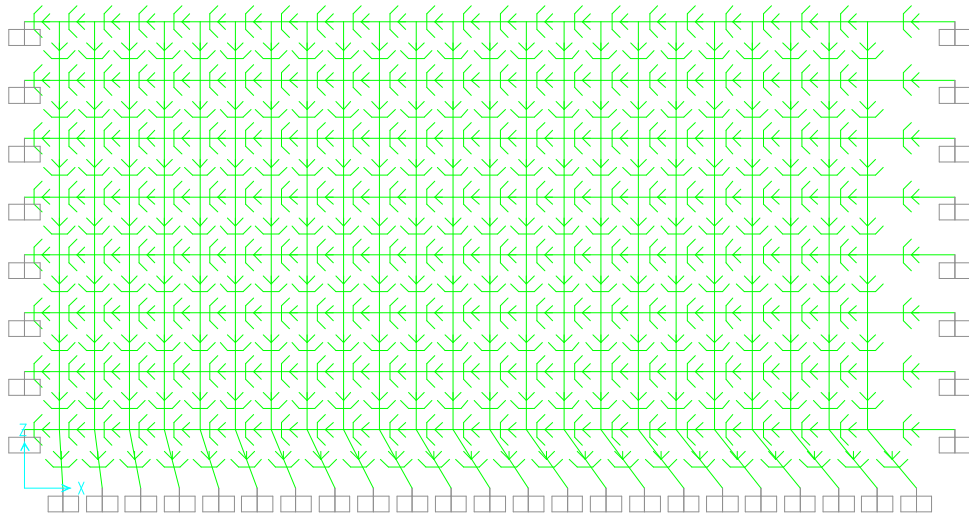


Figura 27. Deformata caso di solo accelerazione orizzontale

3.7.4.1 Sforzo assiale

Risultati da un'analisi con 100 steps.

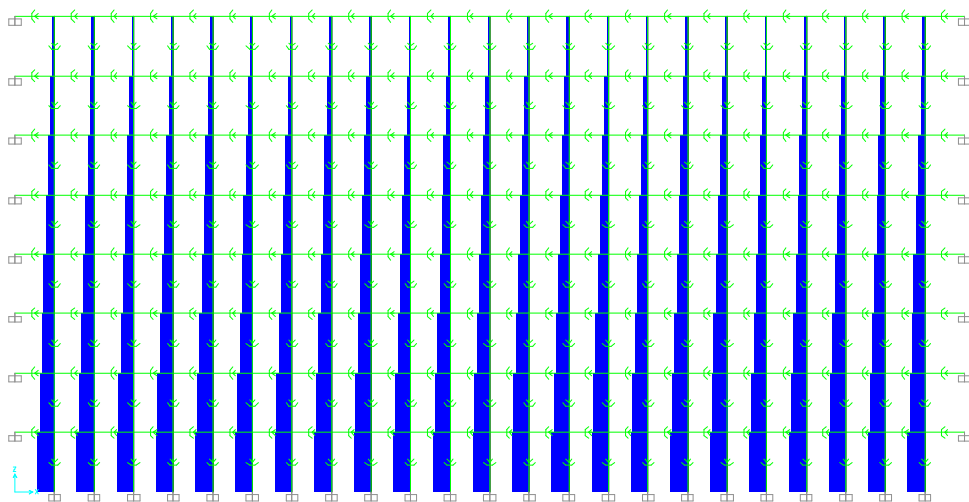


Figura 28: Sforzo assiale caso peso proprio

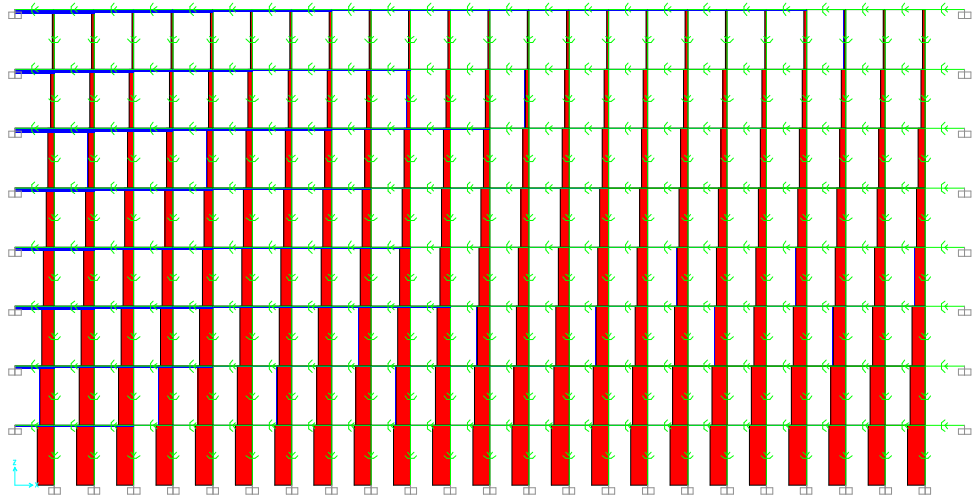


Figura 29: Sforzo assiale caso g + agh

3.7.4.2 Taglio

Risultati da un'analisi con 100 stps.

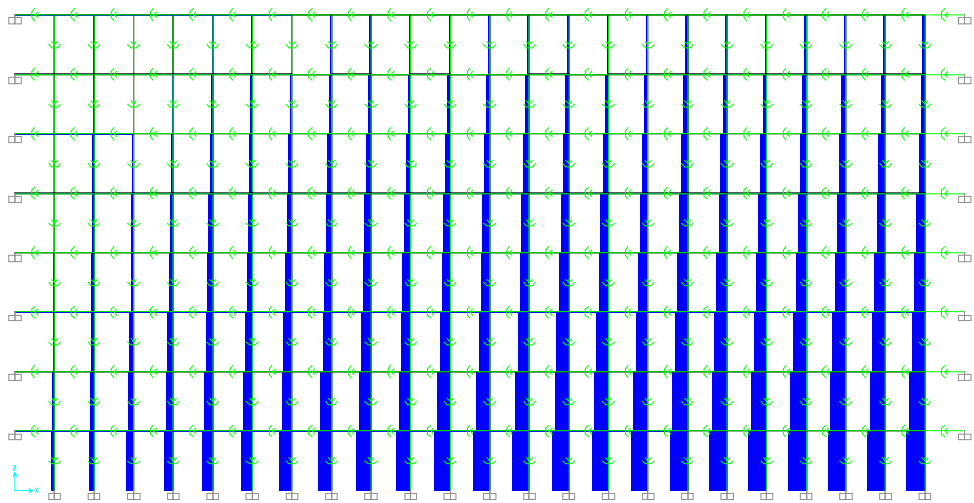


Figura 30: taglio caso g + agh

3.7.4.3 Reazioni

Reazioni degli incastri con un'analisi con 1000 steps:

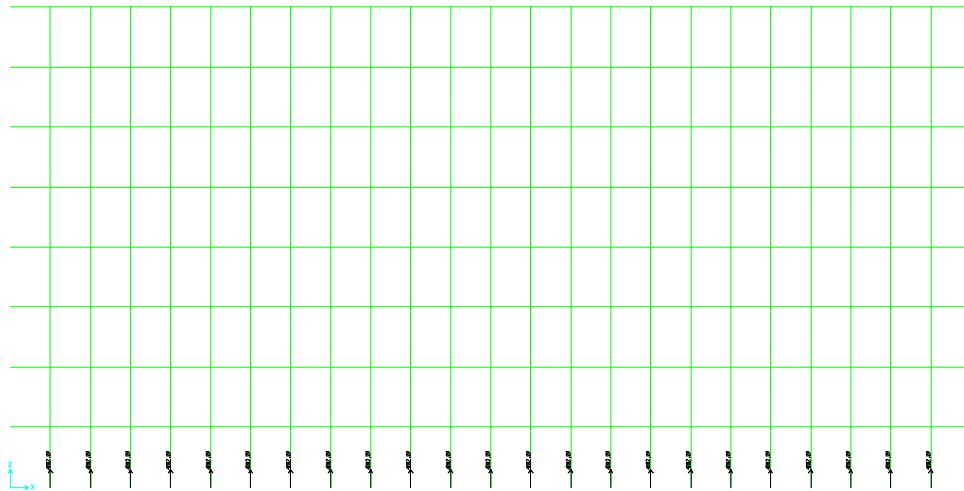
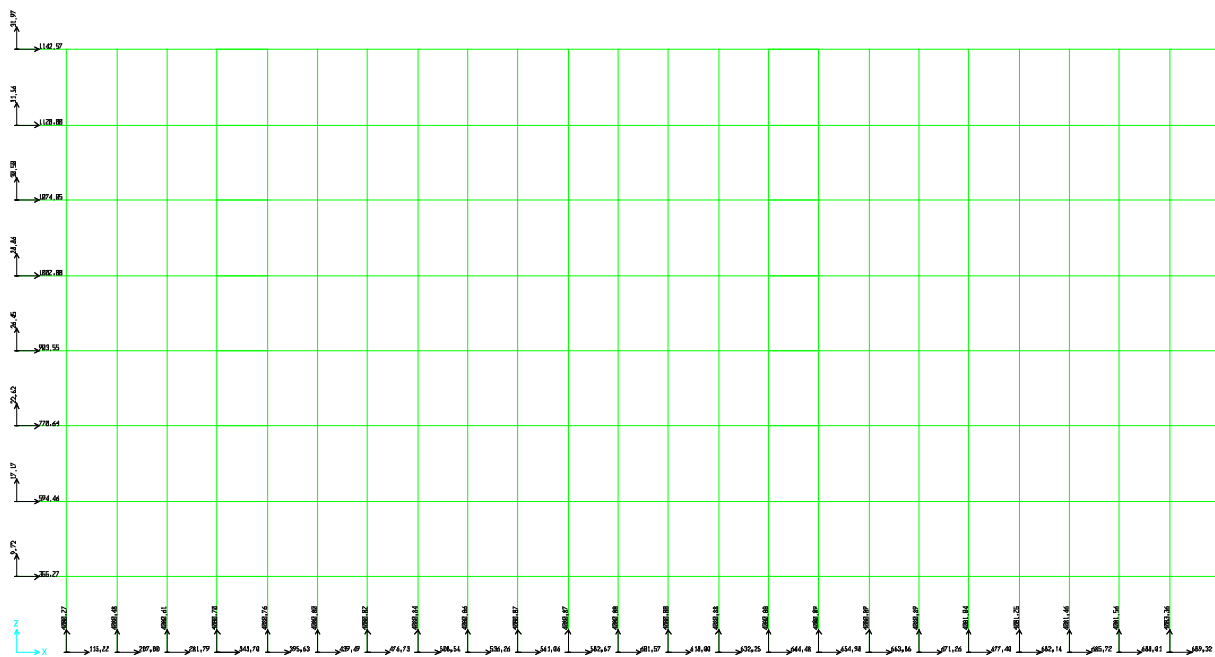


Figura 31: Reazioni Vincolari nel caso di peso proprio

Le reazioni verticali degli incastri nel caso di peso proprio valgono 4082 N: infatti se il peso delle masse era 52 Kgf = 520N e abbiamo in corrispondenza di ogni incastro 8 masse che gravano sull'incastro, si trova alla base $8 \cdot 520 = 4160$ N, un valore molto vicino a quello della reazione verticale (=4082N).



Rh [N]
1143
1120
1074
1003
904
771
595
355
115 (Base)

Figura 32 Reazioni nel caso g + agh

Tabella reazioni orizzontali degli incastri a sinistra, nel caso g + agh

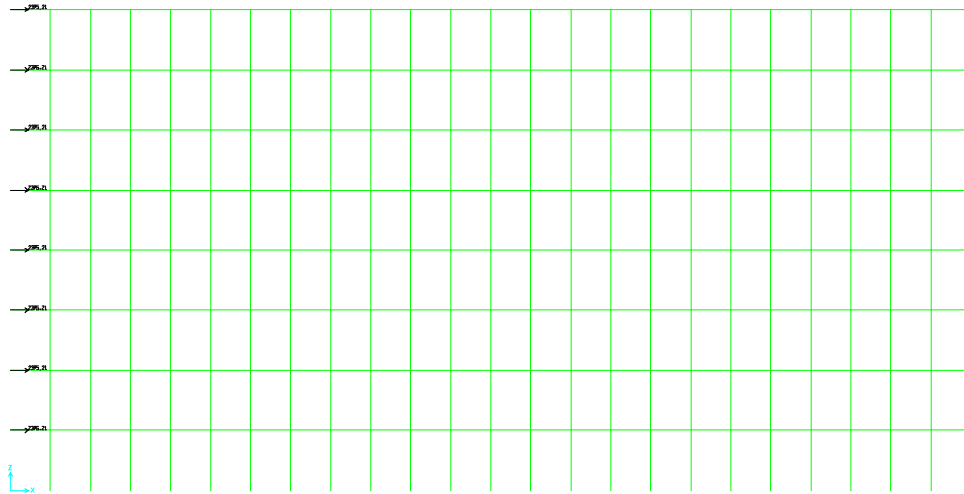


Figura 33: Reazioni nel caso di sola agh: valore 2395N.

3.7.4.4 Confronto

Si confrontano ora le reazioni orizzontali alla quota 0,75 m con la risultante delle pressioni orizzontali teorica Δp_h ; creando un collegamento tra la teoria e il modello FEM.

		Δp_h [N]	Reazioni [N]	Reazioni [N]
			g + agh	solo agh
Quota	75 cm	3527	904	2395

Tabella: confronto teoria – modello FEM.

Per il calcolo della Δh_h o meglio ΔR_h , visto che la pressione viene trasformata in una risultante, si rimanda alla parte del confronto del modellino a quattro masse col modello FEM, dove sono riportati i passaggi e i valori e di Δh_h media, moltiplicata per la superficie laterale del cilindro, al fine di passare da una pressione a una forza in Newton.

Dal confronto ora si osserva maggior corrispondenza nel caso di presenza di sola agh.

3.7.5 Osservazioni

Un aspetto positivo che si può osservare è rappresentato dalla corrispondenza tra le reazioni orizzontali degli incastri laterali, posti a sinistra dei modelli, e i valori che si ottengono dalla teoria presentata nella seconda sezione (primo caso “approssimato”).

Un problema di questo modello è costituito dal fatto che non si possa cogliere l’effetto Poisson. Nella teoria presentata nella seconda sezione, l’effetto Poisson è rappresentato da λ , costante che lega la pressione verticale all’orizzontale:

$$p_h = \lambda \cdot p_v$$

Questo legame fisicamente si traduce con una deformazione laterale a seguito di una pressione verticale su un corpo. Nel modello FEM appena descritto, i singoli punti-masse non possono realizzare questo effetto. L’effetto Poisson potrebbe essere colto con un elemento di tipo plate che sostituisca il nodo semplice:

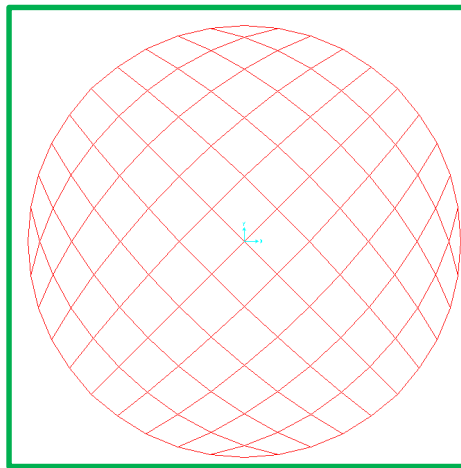


Figura 34: elemento plate che rappresenta la massa per cogliere l’effetto Poisson e la deformazione laterale.

Una rappresentazione 3D dell’insilato probabilmente si avvicinerebbe maggiormente alla realtà: è rimasta insospesa la creazione di un modello di questo tipo con 4 sfere rappresentative di 4 parti di insilato.

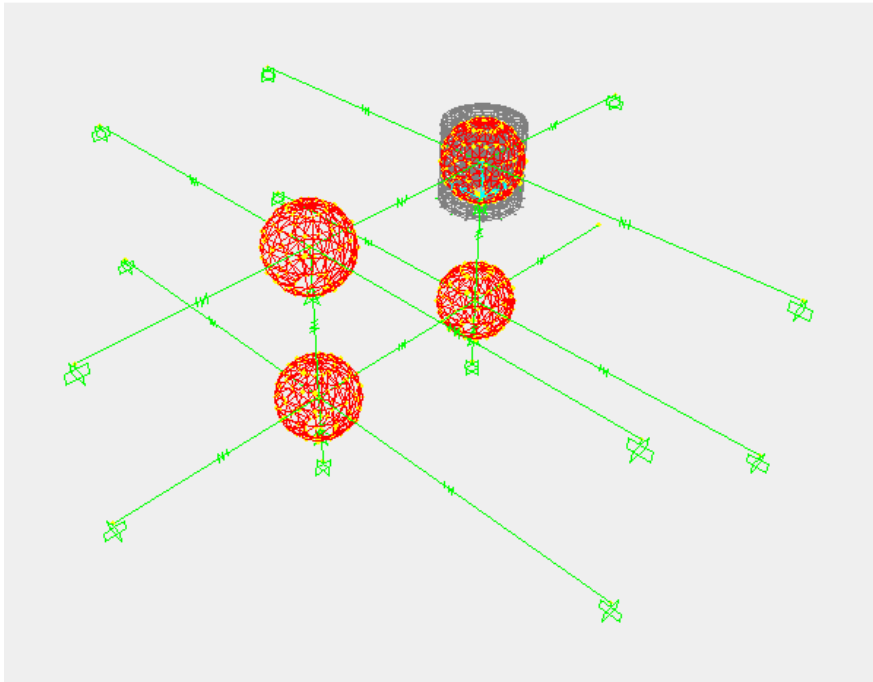


Figura 35: Modello 3D per 4 masse: quattro sfere e link.

Inoltre esistono metodi all'avanguardia per quanto riguarda la rappresentazione del materiale granulare: ad esempio DEM e CA.

3.7.5.1.1 DEM

Il metodo degli elementi distinti particellari (DEM) permette di passare a un'analisi microscopica del comportamento del materiale, ottenendo poi risultati in termini macroscopici perfettamente aderenti alla realtà. Il DEM schematizza un sistema come un insieme di particelle che interagiscono per reciproco contatto, rappresentando i singoli grani con elementi sferici di un certo diametro e con le caratteristiche fisiche imposte dall'utente. Attualmente il Dipartimento di Strade (DISTART) dell'Università di Bologna ha simulato una prova triassiale su un terreno rinforzato e un test ITMS (Indirected Tensile Stiffness Modulus) per la determinazione del modulo di rigidezza a trazione indiretta di un campione in conglomerato bituminoso. Le particelle del materiale granulare inserito nella cella

cella triassiale sono state caratterizzate da un modello di contatto composto da tre parti:

1. un modello di rigidità tipo lineare forza – spostamento
2. un modello di slittamento (riconducibile alla legge d'attrito)
3. un legame di adesione

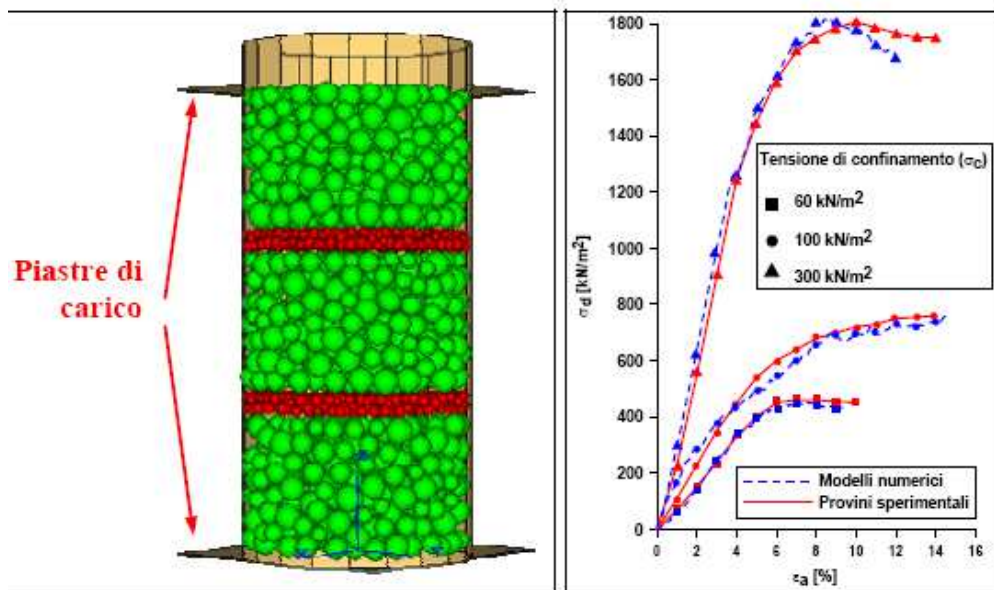


Figura 36: Rappresentazione del materiale granulare contenuto in una cella triassiale ; Risultati tensione – deformazione% sperimentali (in rosso) e da modellazione numerica DEM (in blu).

Come si può osservare dalla figura soprastante, il modello numerico è strettamente prossimo ai risultati sperimentali.

Gli unici problemi legati alla modellazione DEM sono:

1. Lunghi tempi di calcolo (anche mesi con gli attuali processori)
2. Individuazione dei parametri microscopici da usare nella modellazione, diversi da quella macroscopici derivanti dalla letteratura o dai tests di laboratorio
3. Individuazione di leggi di interazione fra le particelle dei materiali analizzati.

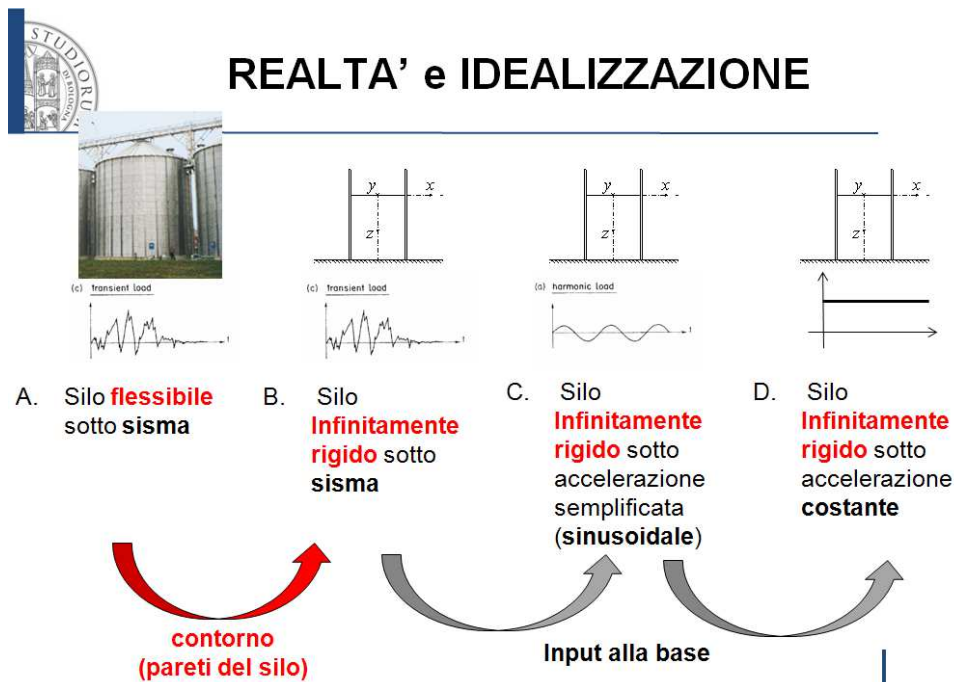
Il metodo CA sembra analogo al DEM: è più veloce nella risoluzione e più agevole nell'inserimento dei dati, ma offre risultati più qualitativi.

3.8 21 NOVEMBRE 2011 BRISTOL

Il 21 Novembre 2011 è avvenuto a Bristol un ulteriore incontro tra i ricercatori che studiano questa problematica:

Data:	21 e 22, Novembre 2011	
Luogo:	Bristol	
Partecipanti:		
Colin Taylor	Univ. of Bristol	Colin.Taylor@bristol.ac.uk
Luiza Dihoru	Univ. of Bristol	Luiza.Dihoru@bristol.ac.uk
Dora Foti	Politecnico of Bari	d.foti@poliba.i
Tomaso Trombetti	Univ. of Bologna	tomaso.trombetti@unibo.it
Stefano Silvestri	Univ. of Bologna	stefano.silvestri@unibo.it
Salvador Ivorra	Univ. of Alicante	sivorra@ua.es

Durante questo incontro è stata ripercorsa l'analisi teorica e la progettazione della prova con lo studio degli otto provini in acciaio e plexiglass attraverso il modello FEM e il metodo delle bande. Il riferimento teorico è stato quello della trattazione approssimata, la prima parte della seconda sezione. Sono stati ridefiniti gli obiettivi e i compiti di ogni componente dell'equipe di ricerca.



3.8.1 Obiettivi principali

1. Maggior conoscenza del comportamento del material granulare nei silo durante sisma
2. Verificare l'efficacia della teoria di *Trombetti et al.* riferita al caso D (contorno infinitamente rigido e accelerazione costante)
3. Verificare l'efficacia del caso D come rappresentazione del comportamento del materiale granulare contenuto in un silo reale sotto sisma.

3.8.2 Progettazione prova

3.8.2.1 Individuazione caratteristiche del provino da testare

Poiché dall'analisi numerica dei modelli FEM degli 8 provini in acciaio e plexiglass risultava che le deformazioni dei provini in plexiglass risultavano tutte leggibili dallo strumento (quindi rientravano nel range dei $2\mu\epsilon$), è stato scelto il plexiglass come materiale di un unico provino cilindrico.

H = altezza 65 cm

D = diametro 65 cm

t = spessore 5 mm

Il provino è stato trovato nel sito "Alternative Plastic":

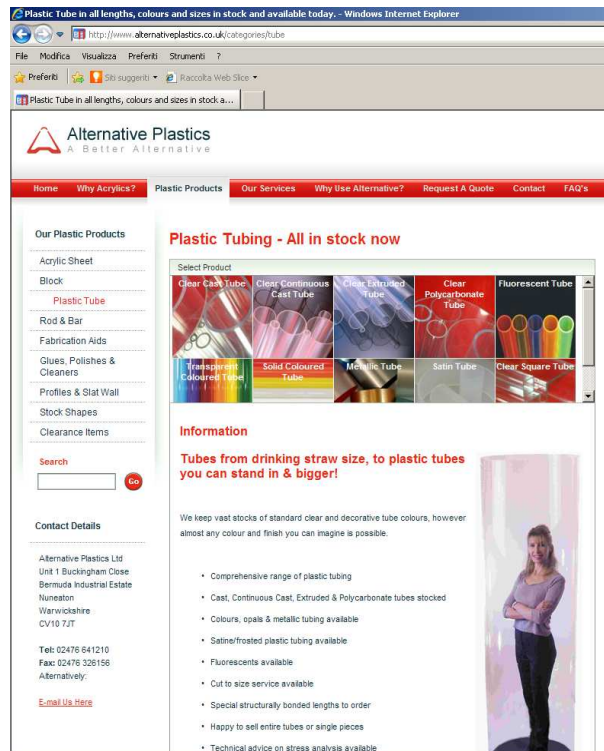


Figura 37: Sito internet Alternative Plastic per il provino in plexiglass

Le caratteristiche del plexiglass sono:

$$E = 3300 \text{ Mpa}$$

$$\gamma = 1200 \text{ Kg/m}^3$$

Per quanto riguarda il materiale insilato si è pensato a sfere di vetro, chiamati “Ballottini Glass” Queste sfere hanno:

$$d = \text{diametro} = 0,6 \text{ mm}$$

$$\gamma = \text{peso specifico} = 1600 \text{ Kg/m}^3$$

$$\varphi = \text{angolo d'attrito} = 50^\circ$$

Il peso specifico γ dei Ballottini glass è quasi il doppio di quello del materiale granulare, questo fattore è a favore di sicurezza.

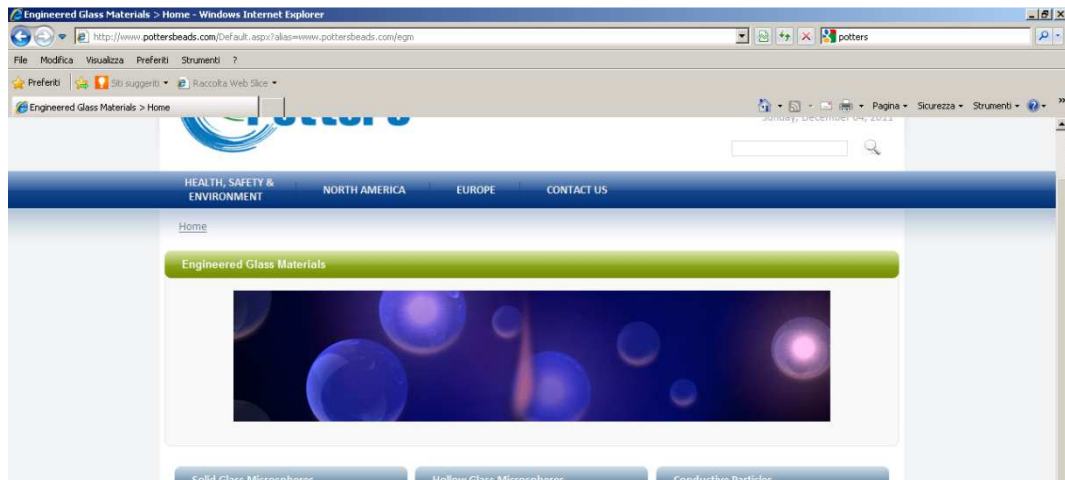


Figura 38: Ballottini Glass

Sono necessarie ora informazioni precise sui coefficienti di attrito sfera-sfera e sfera –parete.

I ballottini glass hanno un angolo d'attrito

$$\varphi = 50^\circ$$

Quindi i calcoli di λ (legame tra pressione verticale e orizzontale) sono:

Secondo la formula di Camiz suggerita da Pozzati nel Vol I capitolo quarto del suo Testo di Tecnica delle Costruzioni:

Camiz:

$$\lambda = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} \Rightarrow 0,26$$

La formula di Camiz vale sotto ipotesi di tensione tangenziale verticale diversa da zero (quindi nella teoria di Trombetti vale all'interno del disco D, cioè all'interno dell'insilato). Al confine del disco D con l'elemento E le tensioni tangenziali verticali sono nulle (assunzione della teoria di Trombetti), quindi vale la formula di Rankine per il suolo che prevede tensioni tangenziali verticali nulle:

Rankine:

$$\lambda = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \Rightarrow 0,13$$

Per considerare entrambi i casi è stata fatta una media tra i due valori di λ , ottenendo un valore pari a 0,2.

Sempre nel capitolo quarto del Volume I del Testo di Tecnica delle Costruzioni di Pozzati le indicazioni per l'attrito grano-parete sono:

$\beta = 0.6$ superficie abbastanza liscia

$\beta = 0.5$ superficie liscia

$$\mu = \tan(\beta \cdot \varphi) = \tan(0.6 \cdot 50^\circ) \approx 0.58$$

$$\mu = \tan(\beta \cdot \varphi) = \tan(0.5 \cdot 50^\circ) \approx 0.47$$

$\mu = 0.6$

Sono le stesse formule usate nel metodo delle bande e nel calcolo delle pressioni da applicare ai modelli FEM descritti nei capitoli precedenti, si modifica solo l'angolo d'attrito φ , che passa da 30° a 50° .

Questioni insospese riguardanti il provino

1. Coperchio
2. Base (fondo con serraggio)

3.8.2.2 Input

L'accelerazione durante la prova non potrà essere costante come nella teoria, ma sarà una porzione del platò della prima onda della funzione seno.

L'accelerazione di input in teoria può essere una funzione tipo seno, ma in pratica sarà un'onda con creste di diverse altezze.

3.8.2.3 Programma del test

Tre fasi:

0. Testare gli strumenti e le altre informazioni
1. Test Preliminare
2. Test Finale

3.8.2.4 Obiettivi scientifici della prova:

1. Comportamento dei grani nel silo
2. Profile delle pressioni
3. Azioni sul silo (T, M, σ, ϵ)

3.8.2.5 Nuove Idee

Sono scaturite nuove idee in questo incontro a Bristol:

- Eseguire prove con il materiale granulare a diverse altezze di riempimento
- Porre gli strumenti di misura delle deformazioni in cima, con e senza coperchio
- Con coperchio si simula un contorno infinitamente rigido, al fine di misurare le tensioni
- Senza coperchio si simula un contorno flessibile, al fine di misurare le deformazioni

3.8.2.6 Divisione compiti

- Problematiche legate al contenuto e al fattore di scala 1/20 tra provino e silo (Università di Alicante)
- Studio delle strumentazioni di misura: per le deformazioni, per le pressioni (Tekscan), studio degli accelerometri e di un possibile raggio laser che per riflesso fornirebbe indicazioni sulla densità dei Ballottini Glass contenuti nel provino (Università di Bristol)
- Calcolo sforzi e deformazioni di un provino in plexiglass ($H = 65\text{cm}$ $D = 65\text{ cm}$) usando le pressioni calcolate con la teoria del caso D.

Valutazione delle frequenze di un provino nei tre casi:

1. Vuoto
2. Con una massa corrispondente all'anello esterno A2

3. Con un materiale elastico all'interno.

(Università di Bologna)

Lo studio di questo provino è in atto durante la conclusione di questa tesi, quindi il nostro percorso che racconta la ricerca, sulle pressioni sulle pareti dei silo contenenti materiale granulare durante sisma, è sospeso davanti a questo nuovo orizzonte scaturito dall'ultimo incontro di Bristol.

BIBLIOGRAFIA

Normative

- [1] Decreto Ministeriale 14/01/2008: “Norme tecniche per le costruzioni”
- [2] Circolare 2/02/2009, n. 617 del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici
- [3] UNI EN 1991-4: Eurocodice 1. Azioni sulle strutture. Parte 4: Azioni su silos e serbatoi
- [4] UNI EN 1998-1: Eurocodice 8. Progettazione delle strutture per la resistenza sismica. Parte 1: Regole generali, azioni sismiche e regole per gli edifici
- [5] UNI EN 1998-4: Eurocodice 8. Progettazione delle strutture per la resistenza sismica. Parte 4: Silos, serbatoi e condotte

Libri di testo

- [6] Ghali A., (1979): “*Circular Storage Tanks and Silos*”, Taylor&Francis Group, London and New York.
- [7] Chopra, A.K., (1995): *Dynamics of Structures, Theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [8] Clough, R.W., Penzien, J., (1993): *Dynamics of Structures*, 2nd edition - McGraw-Hill International Editions, Civil Engineering Series, New York.
- [9] Pozzati P., (1992): “*Raccolta di scritti*”, Istituto di Tecnica delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi di Bologna.
- [10] Belluzzi O., (1941): “*Scienza delle Costruzioni*” Vol. 1, Zanichelli, Bologna.
- [11] Belluzzi O., (1950): “*Scienza delle Costruzioni*” Vol. 2, Zanichelli, Bologna.
- [12] Belluzzi O., (1961): “*Scienza delle Costruzioni*” Vol. 3, Zanichelli, Bologna.
- [13] Belluzzi O., (1955): “*Scienza delle Costruzioni*” Vol. 4, Zanichelli, Bologna.

- [14] Brown C.J., Nielsen, Taylor&Francis, (1998): “*Silos, fundamentals of theory, behaviour and design*”, London and New York
- [15] Pozzati, P., Ceccoli, C., (1972): “*Teoria e Tecnica delle Strutture*” Vol. 1, UTET, Torino.
- [16] Pozzati, P., Ceccoli, C., (1972): “*Teoria e Tecnica delle Strutture*” Vol. 2*, UTET, Torino.
- [17] Pozzati, P., Ceccoli, C., (1972): “*Teoria e Tecnica delle Strutture*” Vol. 2**, UTET, Torino.
- [18] Pozzati, P., Ceccoli, C., (1972): “*Teoria e Tecnica delle Strutture*” Vol. 3*, UTET, Torino.
- [19] Viola E., (2010): “Teoria delle Strutture. Volume secondo: Gusci di rivoluzione”, Pitagora, Bologna.

Publicazioni scientifiche

- [20] Capellari A. (2010): “Analisi lineare e non lineare di silos spiralati in acciaio per il contenimento di materiali sciolti”, Bologna, Tesi di Laurea presso D.I.C.A.M..
- [21] Lenzi M. e Gambi A., (2005): “Strutture cilindriche soggette ad azioni orizzontali: un approccio unitario”, *ACMAR Report*, Ravenna.
- [22] Holler S. and Konstantin M., (2006): “Granular Material Silos under Dynamic Excitation: Numerical Simulation and Experimental Validation”, *Journal of structural engineering*, **Ottobre 2006**, 1573-1579.
- [23] Trombetti T., Silvestri S, Giada S., (2005): “Sviluppi analitici per la valutazione dell’azione indotta dai cereali su silos a fondo piano a seguito di input sismico”, D.I.S.T.A.R.T., Bologna.

4 APPENDICI

A SCHEDE RIASSUNTIVE DELLE PROCEDURE

4.1 Eurocode accurate procedure

STATIC CONDITIONS

The evaluation of the horizontal pressure in static conditions follows the Janssen's theory (§ 5.2 Eurocode 1 Part 4).

STEP 1
$$z_0 = \frac{1}{K \mu} \frac{A}{U}$$

where:

- A: plan cross-sectional area of the silos
- U: internal perimeter of the plan cross-section of the of the silos
- K: characteristic value of lateral pressure ratio =

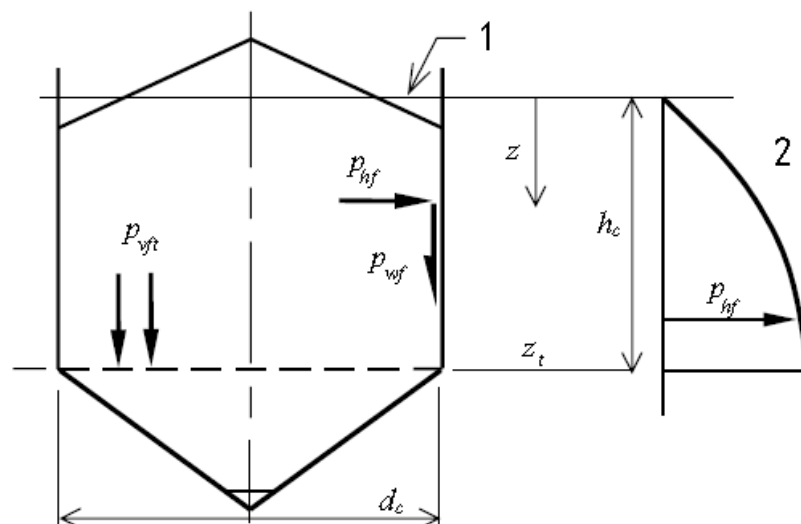
$$K = a_K K_m = a_K \cdot 1.1 \cdot (1 - \sin \varphi_{im})$$
- μ : characteristic value of coefficient of wall friction for a vertical wall

STEP 2
$$p_{h0} = \gamma \cdot K \cdot z_0$$

where:

- γ : is the characteristic value of the unit weight

STEP 3
$$p_{hf} = p_{h0} \cdot \left(1 - e^{-z/z_0}\right)$$



SEISMIC CONDITIONS

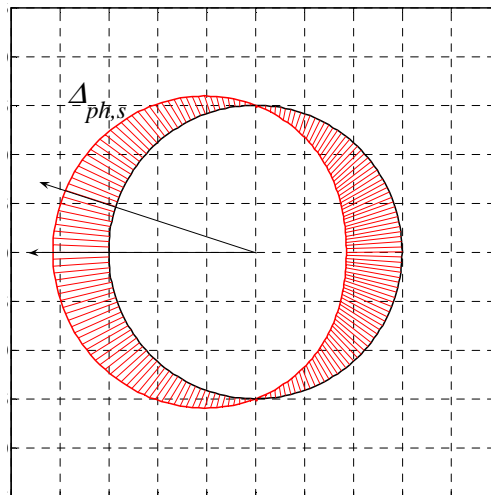
The seismic action may be represented through an additional normal horizontal pressure on the walls (§ 3.3 Eurocode 8 Part 4).

STEP 4

For circular silos: $\Delta_{ph,s} = \Delta_{ph,s0} \cdot \cos \vartheta$

where:

- $\Delta_{ph,s0} = \alpha(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x)$ plan cross-sectional area of the silos
- ϑ : is the angle ($0^\circ \leq \vartheta \leq 360^\circ$) between the radial line to the point of interest on the wall and the direction of the horizontal component of the seismic action
- $\alpha(z)$: is the ratio of the response acceleration of the silos at vertical distance z from the equivalent surface of the stored contents, to the acceleration of gravity
- $r_s^* = \min\left(h_b, \frac{d_c}{2}\right)$
- h_b : is the overall height of the silos
- d_c : is the inside dimension of the silos parallel to the horizontal component of the seismic action
- x : vertical distance from a flat bottom or the apex of a conical or pyramidal hopper



For rectangular silos: $\left\{ \begin{array}{l} \text{for leeward walls: } \Delta_{ph,s} = \Delta_{ph,s0} \\ \text{for windward walls: } \Delta_{ph,s} = -\Delta_{ph,s0} \\ \text{for parallel walls } \Delta_{ph,s} = 0 \end{array} \right.$

STEP 5

The total base shear and total base bending moment (at the silos foundation) can be assessed as follows:

For circular silos:

$$T = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \left(H - \frac{R}{6} \right)$$
$$M = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \left(H^2 - \frac{R^2}{27} \right)$$

For rectangular silos:

$$T = 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot A \cdot B \cdot \left(H - \frac{A}{6} \right)$$
$$M = 2 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot A \cdot B \cdot \left(H^2 - \frac{A^2}{27} \right)$$

where:

- A: half-width of the base of the rectangular silos
- B: half-length of the base of the rectangular silos

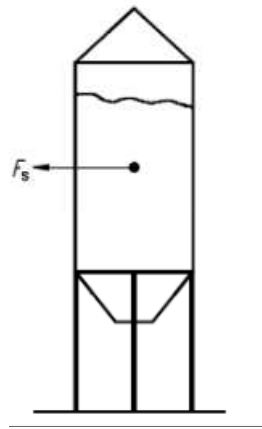
4.2 Eurocode simplified procedure

SEISMIC CONDITIONS

In a simplified way, the seismic action can be calculated:

- assuming that the particulate contents move together with the silos shell
- modelling them with their effective mass at their centre of gravity and its rotational inertia with respect to it.

The contents of the silos may be taken to have an effective mass equal to 80% of the total mass (§ 3.3 Eurocode 8 Part 4).



The base shear and base bending moment (at the silos foundation) can be assessed respectively as follows:

For circular silos:

$$T = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot H) \cdot 0.8$$
$$M = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot H) \cdot 0.8 \cdot \frac{H}{2}$$

For rectangular silos:

$$T = 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (A \cdot B \cdot H) \cdot 0.8$$
$$M = 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (A \cdot B \cdot H) \cdot 0.8 \cdot \frac{H}{2}$$

where:

- A: half-width of the base of the rectangular silos
- B: half-length of the base of the rectangular silos

4.3 Trombetti et al. procedure

According to this procedure, the portion of grain mass that interacts with the silos walls turns out to be lower than the total mass of the grain in the silos.

The seismic action may be represented through an additional normal horizontal pressure on the walls.

4.3.1 For circular silos:

$$p_{v,GG}(z) = \frac{\gamma}{\nu} \cdot z$$

vertical pressure

$$p_{h,GG}(z) = \lambda \cdot \frac{\gamma}{\nu} \cdot z$$

horizontal pressure

$$\Delta_{ph} = a_g \cdot \cos \vartheta \cdot \gamma \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z$$

additional horizontal
pressure due to
horizontal seismic
action

$$\tau_{t,GW}(z, \theta) = \frac{a_{gh} \sin \theta \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu_{GW}}{1 - \nu \cdot a_{gh} \cos \theta \cdot \mu_{GW}}$$

tangential stress

$$T = a_g \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R \cdot H^2 \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)$$

total base shear

$$M = \frac{1}{3} \cdot a_g \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R \cdot H^3 \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)$$

total base bending

where:

$$\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_g \cdot \cos \theta \cdot \mu)}$$

- ϑ : is the angle ($0^\circ \leq \vartheta \leq 360^\circ$) between the radial line to the point of interest on the wall and the direction of the horizontal component of the seismic action
- λ : characteristic value of lateral pressure ratio

- μ : characteristic value of coefficient of wall friction for a vertical wall
- a_g : is the ratio of the response acceleration of the silos at vertical distance z from the equivalent surface of the stored contents, to the acceleration of gravity
- $$\nu = \frac{1}{1 + a_{g\text{-vert}}}$$
- $a_{g\text{-vert}}$: is the vertical component of seismic acceleration