

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**RICOSTRUZIONE DI TRAIETTORIE
DI FRAMMENTI NUCLEARI
NELL'ESPERIMENTO FOOT**

Relatore:
Prof. Mauro Villa

Presentata da:
Rebecca Salladini

Correlatore:
Dott. Matteo Franchini

Anno Accademico 2021/2022

Sommario

L'adroterapia e la radioprotezione spaziale sono due esempi di come la radiazione ha effetti concreti sull'uomo. L'esperimento FOOT ha lo scopo di sopperire alla mancanza di informazioni in questi ambiti; in particolare, l'apparato sperimentale mira ad ottenere stime di sezioni d'urto differenziali, con incertezze minori del 5%, relative alla frammentazione nucleare durante l'interazione tra particelle cariche e tessuti biologici. Questi dati sono essenziali per migliorare la qualità delle terapie oncologiche a base di fasci di ioni carichi e possono essere integrati negli studi di radioprotezione nello spazio. Una buona ricostruzione della traccia e la misurazione della quantità di moto sono di fondamentale importanza per l'identificazione precisa dei frammenti e la misurazione della sezione trasversale. I rilevatori dell'esperimento si occupano del tracciamento e forniscono campioni di dati ad alta precisione sul passaggio delle particelle generate dalla frammentazione del bersaglio. Questi dati vengono poi elaborati da algoritmi in grado di ricostruire la traiettoria effettiva dei frammenti. La ricostruzione si sviluppa su un framework basato su ROOT, che utilizza un algoritmo di filtro di Kalman implementato nella libreria GENFIT.

In questa tesi si studia il ruolo del filtro di Kalman all'interno dell'esperimento e si espone una derivazione generale di alcuni tipi di filtri di Kalman, sottolineandone le peculiarità e le differenze.

Indice

Introduzione	3
1 Adroterapia e radioprotezione	5
1.1 L'interazione tra radiazione e materia	5
1.1.1 La sezione d'urto	5
1.1.2 Interazioni con fotoni	6
1.1.3 Interazioni con particelle cariche	9
1.1.4 Frammentazione nucleare	11
1.2 Radiobiologia: parametri fisici e biologici	13
1.2.1 Effetti della radiazione sulle cellule	13
1.2.2 Dose assorbita, equivalente ed efficace	14
1.2.3 Linear Energy Transfer	15
1.2.4 Sopravvivenza cellulare	16
1.2.5 Relative Biological Effectiveness	18
1.2.6 Oxygen Enhancement Ratio	18
1.3 Patologie tumorali	19
1.3.1 Terapie oncologiche	20
1.3.2 Adroterapia	21
1.4 Radioprotezione nello spazio	21
1.4.1 Radiazione nel Sistema Solare	22
1.4.2 Limiti di esposizione	23
1.4.3 Schermatura	24
2 L'esperimento FOOT	25
2.1 Frammentazione del bersaglio	25
2.1.1 Cinematica inversa	26
2.1.2 Composizione del bersaglio	27
2.2 L'apparato sperimentale	28
2.2.1 Setup per frammenti pesanti	28
2.2.2 Setup per frammenti leggeri	34

3 Ricostruzione di traiettorie	37
3.1 Metodo del minimo Chi-Quadro	38
3.2 Filtro di Kalman	40
3.2.1 Filtro di Kalman esteso	43
3.2.2 Filtro di Kalman Sigma-Point	48
3.3 Ricostruzione del momento	51
Conclusioni	53

Introduzione

Studiare e capire come le radiazioni interagiscano con le cellule del nostro organismo è fondamentale in molti ambiti. In medicina, studi di questo genere hanno portato nuove tecniche oncologiche, un esempio fra tutti la radioterapia che utilizza raggi X o elettroni. Rispetto al 2020, nel 2022 i nuovi casi di tumore si stima che siano aumentati dell'1,4 % circa per gli uomini e dello 0,7 % per le donne. Tra le persone che vivono dopo una diagnosi di tumori, il 53 % erano donne, cioè il 6,0 % della intera popolazione femminile italiana e il 47 % uomini (cioè il 5,6 % della popolazione maschile) [1]. La diminuzione dei tassi di mortalità per diversi tipi di tumori è da ricondursi perlopiù agli importanti avanzamenti diagnostici e terapeutici compiuti negli ultimi anni.

Un'alternativa valida alla radioterapia è l'adroterapia, basata sull'uso di adroni (particelle pesanti, come ioni carbonio e protoni) solitamente ad energie comprese tra 100 MeV/n e 400 MeV/n . Nata nel 1946, questa tecnica risulta una delle più efficaci e la sua peculiarità risiede nel profilo con cui il fascio incidente rilascia energia in funzione della profondità nella materia: gli adroni rilasciano la loro energia solo al termine del percorso, in una regione chiamata *picco di Bragg*. Questo fa sì che gli adroni risultino molto precisi nel colpire selettivamente il tumore, risparmiando i tessuti e gli organi sani circostanti. L'adroterapia risulta utile nel trattamento di tumori resistenti ai trattamenti radioterapici e/o difficilmente operabili, in aree dell'organismo particolarmente delicate in cui non è possibile intervenire chirurgicamente.

In Italia, tale tipologia di terapia è eseguita dal centro CATANA di Catania (che utilizza solo protoni), dal Centro Nazionale di Adroterapia Oncologica (CNAO) di Pavia (che utilizza protoni e ioni carbonio), e dal Centro di Protonterapia di Trento (che utilizza anch'esso solo protoni).

La pianificazione del trattamento risulta estremamente importante per diminuire il numero di sedute adroterapiche e aumentarne l'efficacia, evitando effetti nocivi non voluti.

Per quanto apparentemente distanti, la radiazione dello spazio profondo può avere gli effetti sul corpo degli astronauti che hanno il medesimo meccanismo dei trattamenti adroterapici. Le radiazioni potenzialmente pericolose nel Sistema Sola-

re sono formate da Raggi Cosmici (CRs), ovvero particelle cariche (principalmente protoni) accelerate ad alte energie ($100 - 10^{14} MeV$). Le principali Agenzie Spaziali hanno avviato degli studi a lungo termine di radioprotezione, cioè metodi per schermare l'uomo dai danni biologici legati alle radiazioni, per permettere missioni umane interplanetarie.

In questo contesto nasce l'esperimento FOOT, approvato dall'INFN nel 2017, con l'obiettivo di studiare e colmare le lacune sperimentali sulle sezioni d'urto dei processi di frammentazione nucleare, per migliorare la precisione della terapia adronica e, successivamente, per fornire misure di radioprotezione.

Questa tesi si propone di approfondire l'iter di ricostruzione delle traiettorie dei frammenti nell'apparato sperimentale, con particolare attenzione alle modalità di fit e di propagazione dell'errore, quali il metodo del χ^2 e il filtro di Kalman.

La tesi è strutturata come segue. Nel primo capitolo si espone come le radiazioni incidano sulla materia e, nello specifico, sull'organismo. É presente anche una breve dissertazione sulle terapie oncologiche esistenti, con particolare attenzione sull'adroterapia, e sulle principali caratteristiche delle radiazioni nel Sistema Solare. Nel secondo capitolo si presenta l'apparato sperimentale FOOT in ogni sua componente con delle concise motivazioni dietro le scelte di design. Il terzo capitolo si sofferma sulla ricostruzione globale della traccia, vengono illustrate delle derivazioni generali del filtro di Kalman lineare e di quello esteso, attualmente usato nell'algoritmo di ricostruzione, e infine un accenno al filtro di Kalman Sigma-Point (Unscented).

Capitolo 1

Adroterapia e radioprotezione

1.1 L'interazione tra radiazione e materia

Con il termine radiazione intendiamo il fenomeno di emissione e propagazione dell'energia, che comunemente viene ceduta alla materia. Considerando il corpo umano come materia, si possono dedurre importanti applicazioni nel campo medico e biologico. Dopo la scoperta della radioattività del radio, questo è stato usato nel campo cosmetico e nel trattamento della pelle. Oggi, con la moderna tecnologia e le scoperte recenti in questo campo, si stanno studiando il trattamento di neoplasie (o tumori) e gli effetti che possono avere la radiazione cosmica di fondo (GCR) e le particelle provenienti dalla corona solare (SEP) sul corpo degli astronauti.

La propagazione delle onde nella materia dipende dal tipo di radiazione e dal tipo di mezzo. In particolare possiamo distinguere radiazioni elettromagnetiche, descrivibili anche come fotoni, e radiazioni corpuscolari, a loro volta distinte in particelle cariche e neutre. I trattamenti di irraggiamento per le cure oncologiche prevedono l'utilizzo o di radiazioni elettromagnetiche o di particelle cariche. La radiazione di fondo cosmico è costituita invece da fotoni di corpo nero.

1.1.1 La sezione d'urto

Al fine di comprendere gli argomenti trattati andiamo a studiare una quantità adoperata spesso per descrivere l'interazione tra particelle, ovvero la *sezione d'urto*, quantità collegata alla probabilità che un determinato fenomeno avvenga. Consideriamo un fascio di N_f particelle proiettile, di densità e velocità v uniformi e costanti, che incide un bersaglio fisso di spessore infinitesimo dx , di area S e volume infinitesimo $dV = Sdx$.

Il numero di dN_f che avvengono in un tempo dt è proporzionale al flusso di particelle incidenti $\Phi_f = n_f v$ (dove n_f è il numero di particelle del fascio per unità di volume) e alla densità di particelle del bersaglio n_b :

$$dN_f = \Phi_f n_b d\sigma dV dt \quad (1.1)$$

dove la costante di proporzionalità σ è la sezione d'urto relativa al processo considerato.

1.1.2 Interazioni con fotoni

Quando un fascio di fotoni attraversa la materia, l'attenuazione del fascio in funzione dello spessore x di materia attraversata è descritta dalla *Legge di Lambert-Beer*:

$$\Phi_f(x) = \Phi_f(0)e^{-\mu x} \quad (1.2)$$

dove $\mu = \rho N_A \sigma / A$ (in cui ρ è la densità, A è il peso atomico e N_A il numero di Avogadro) è il *coefficiente di assorbimento*, $\Phi_f(0)$ è il numero di particelle del fascio incidente prima di interagire col bersaglio in unità di superficie e di tempo, e σ rappresenta la sezione d'urto totale delle interazioni dei fotoni.

I principali meccanismi con i quali i fotoni interagiscono con la materia sono:

- effetto fotoelettrico;
- scattering Compton;
- produzione di coppia.

Ciascuno dei fenomeni sopra elencati è caratterizzato da una sezione d'urto e da un coefficiente di assorbimento diverso. La probabilità totale con cui un fotone interagisca con la materia può essere espressa tramite la somma dei contributi delle sezioni d'urto:

$$\sigma = \sigma_{pe} + \sigma_C + \sigma_{pair} \quad (1.3)$$

Effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico indica un processo che ha luogo quando un fotone interagisce con un atomo variandone lo stato elettrico; affinché ciò accada il fotone deve possedere un'energia almeno pari a quella di soglia dell'atomo in questione. In questo caso, un elettrone delle shell interne può assorbire il fotone, e con esso anche l'energia sufficiente per liberarsi e per poter essere espulso dall'orbita. Questa espulsione crea una lacuna che può essere colmata da un elettrone di una shell più esterna, se presente. Nella maggior parte dei casi l'energia di questo passaggio è rilasciata sotto forma di raggi X, ma può anche essere trasferita ad un altro elettrone, che

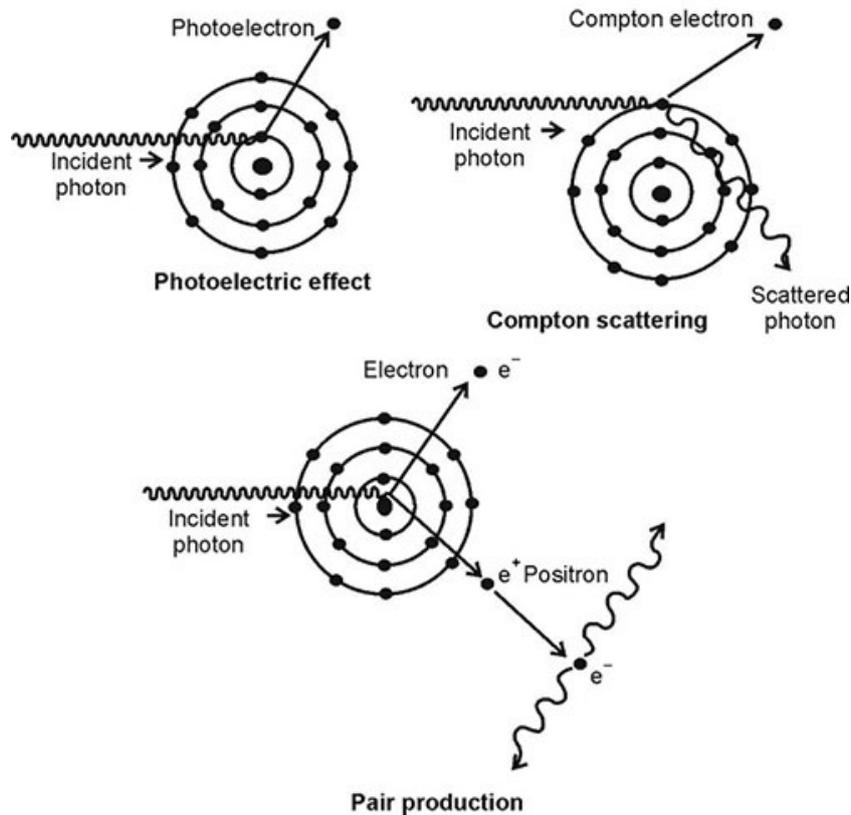


Figura 1.1: Schematizzazione di diversi tipi di interazione tra fotoni e materia: effetto fotoelettrico, scattering Compton e produzione di coppia [2].

prenderà il nome di *elettrone di Auger*, il quale verrà espulso dall'orbita. Come indicato in figura 1.2 l'effetto fotoelettrico domina per energie piuttosto basse [3].

La sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico dipende dal numero atomico Z e dall'energia del fotone E secondo la relazione che segue:

$$\sigma_{pe} \propto \frac{Z^y}{E^7} \quad (1.4)$$

con y che varia tra 4 e 5.

Scattering Compton

Lo scattering (o effetto) Compton, è un fenomeno di diffusione che consiste in un urto elastico tra un fotone ed un elettrone debolmente legato. Il fotone incidente cede parte della sua energia e subisce uno scattering, ovvero una deflessione, mentre l'elettrone assorbe energia a sufficienza per liberarsi dal nucleo atomico ed essere quindi emesso con una certa energia cinetica.

La sezione d'urto dell'effetto Compton risulta:

$$\sigma_C \propto \frac{Z}{E} \quad (1.5)$$

Produzione di coppia

Ad energie del fotone sufficientemente alte, la produzione di coppia (o creazione di coppia elettrone-positrone) è l'interazione più diffusa tra fotoni e materia ed avviene quando un fotone con energia maggiore o uguale a 1.02 MeV urta in modo anelastico un bersaglio, producendo una coppia di particelle composta da un elettrone (materia) ed un positrone (antimateria).

La sezione d'urto di questa produzione di coppia dipende dall'energia del fotone e si può riassumere tramite le relazioni che seguono:

$$\begin{cases} \sigma_{pair} \propto Z^2 \ln E & \text{per basse energie,} \\ \sigma_{pair} \propto Z^2 & \text{per energie dell'ordine di centinaia di MeV.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Il processo inverso è detto *annichilazione elettrone-positrone* [4].

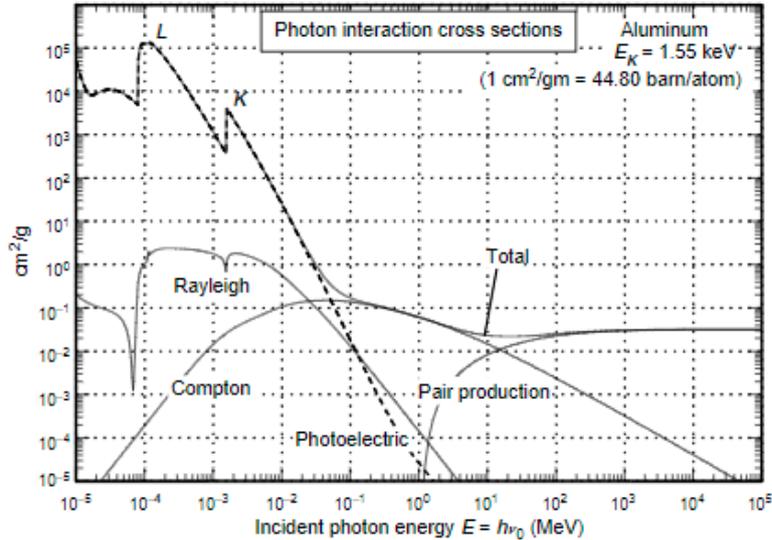


Figura 1.2: Sezioni d'urto dell'interazione fotonica su un atomo di alluminio freddo isolato (dati presi da LLNL EPDL97). Questo database si estende fino a 1 eV . [5]

1.1.3 Interazioni con particelle cariche

Nei trattamenti adroterapici vengono utilizzati fasci proiettile contenenti particelle cariche pesanti, ovvero con una massa molto maggiore rispetto a quella dell'elettrone. Una particella carica, quando interagisce con la materia, subisce interazioni elettromagnetiche sia con gli elettroni sia con i nuclei del mezzo, perdendo energia cinetica e/o venendo deviata fino ad arrestarsi. L'interazione con gli elettroni risulta però più probabile poiché il bersaglio nucleare offre una sezione molto più piccola rispetto al bersaglio atomico ($\sigma_{atomico} = 10^{10}\sigma_{nucleare}$).

Alle basse energie, una particella carica perde energia attraverso collisioni Coulombiane, mentre ad alte energie la dissipa emettendo radiazioni elettromagnetiche attraverso un processo chiamato Bremsstrahlung. Quest'ultimo è un meccanismo di scattering che avviene a causa del campo coulombiano dei nuclei del mezzo. La sezione d'urto del processo è inversamente proporzionale alla massa della particella incidente:

$$\sigma_B \propto \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2, \quad (1.7)$$

quindi l'energia persa è maggiore per particelle non troppo massive.

Il numero di interazioni tra radiazioni e materia per unità di percorso macroscopico è molto grande, di conseguenza viene introdotta la quantità dE/dx chiamata *Stopping Power*, ovvero una grandezza definita come la perdita media di energia del proiettile per unità di percorso, assumendo un rallentamento uniforme e continuo della particella. La sua espressione è comunemente nota come “*formula di Bethe e Bloch*” [6]:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right) = D\rho\frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{max}}{I^2} - 2\beta^2 - \delta\beta\gamma - 2\frac{C}{Z}\right)\right] \quad (1.8)$$

dove le costanti e le grandezze utili per comprendere l'espressione sono riportate nella tabella 1.1, e l'andamento è graficato in figura 1.3.

Nell'equazione 1.8, il termine δ è chiamato *correzione di densità* e tiene conto dell'effetto del campo elettrico generato dal proiettile; a energie inferiori deve essere apportata una correzione di C/Z a causa degli elettroni atomici strettamente legati e ad altri effetti, mentre a energie più elevate gli effetti radiativi iniziano a essere importanti. Questi limiti di validità dipendono sia dal numero atomico effettivo dell'assorbitore sia dalla massa della particella che rallenta [7].

Lo Stopping Power è una quantità che dipende dal materiale attraversato, dall'energia e dal tipo delle particelle incidenti. È interessante osservare il suo andamento in funzione della distanza percorsa in figura 1.4a. Se le particelle cariche percorrono il mezzo con una velocità troppo bassa, il loro rallentamento implica

D	$2\pi N_A r_e^2 m_e c^2$
N_A	Numero di Avogadro
r_e	Raggio classico dell'elettrone
m_e	Massa dell'elettrone
c	Velocità della luce nel vuoto
ρ	Densità del bersaglio
Z	Numero atomico del bersaglio
A	Numero di massa del bersaglio
z	Numero atomico del proiettile
β	v/c
γ	$1/\sqrt{1-\beta^2}$
v	Velocità del proiettile
T_{max}	Massima energia trasferibile ad un elettrone in una singola collisione
I	Potenziale di eccitazione medio

Tabella 1.1: Costanti e grandezze che compaiono nell'equazione di Bethe e Bloch.

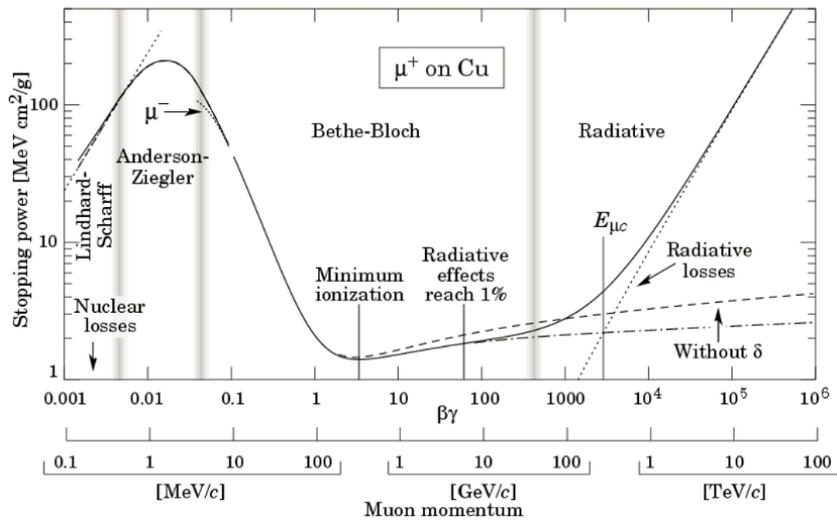
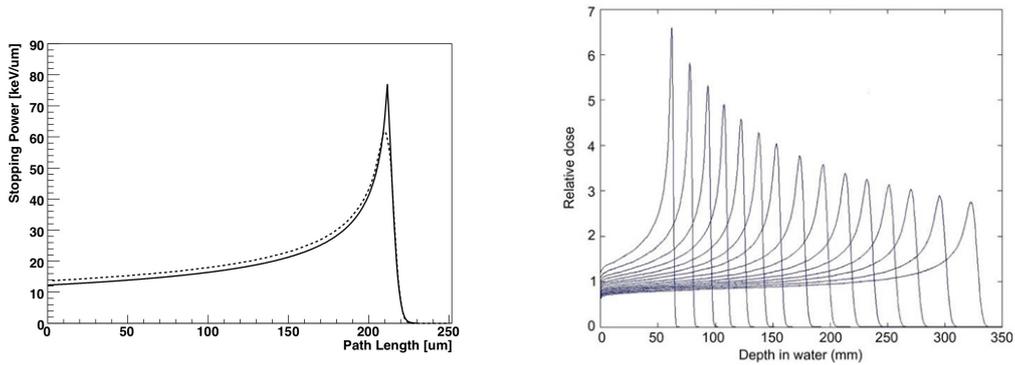


Figura 1.3: La formula di Bethe e Bloch per muoni positivi nel rame.

un aumento di energia depositata (approssimativamente come $1/E$) fino al punto di massimo, chiamato “picco di Bragg”. La profondità del picco è modulata dall’energia del fascio incidente, e questo è il principio su cui si basa l’adroterapia. L’altezza relativa del picco di Bragg, rispetto alla dose di ingresso, diminuisce con l’energia del raggio a causa delle interazioni nucleari che portano alla frammentazione degli ioni. C’è anche un aumento della larghezza dei picchi di Bragg con l’energia del raggio. Questi cambiamenti nei picchi sono illustrati per i protoni in



(a) Stopping Power in funzione della distanza percorsa, ovvero la Curva di Bragg, per dei protoni con energia di 4.94 MeV.

(b) L'andamento dell'altezza e dell'ampiezza dei picchi di Bragg del protone in funzione della profondità di penetrazione [8].

Figura 1.4: L'andamento dello Stopping power in funzione del mezzo attraversato e della distanza percorsa.

figura 1.4b.

Poiché i dettagli delle interazioni microscopiche variano in modo casuale la perdita di energia è descrivibile come un processo stocastico. In presenza di un fascio di particelle cariche pesanti la curva di Bragg alla fine della traiettoria si allarga.

Può essere introdotta anche una nuova grandezza detta *Mass Stopping Power* $dE/d\chi$, ottenuta dividendo lo Stopping Power per la densità del materiale. Si definisce $\chi = \rho \cdot x$ dove ρ indica la densità del materiale e x la distanza percorsa. Nella figura 1.5 è mostrato l'andamento caratteristico di $dE/d\chi$ in funzione di $\beta\gamma$, ed è possibile vedere che la curva segue un andamento come $1/\beta^2$ fino al minimo di ionizzazione ($\beta \sim 0.96$); per valori maggiori di β l'andamento diventa crescente e logaritmico $\ln \gamma^2$ e infine risulta smorzato dal termine correttivo di densità fino al "Plateau di Fermi", in cui $dE/d\chi$ risulta pressoché costante. La maggior parte dell'energia viene quindi ceduta a velocità molto basse.

1.1.4 Frammentazione nucleare

Le particelle usate in adroterapia e quelle che compongono la radiazione nello spazio profondo hanno energie superiori alla barriera Coulombiana, e i loro nuclei possono interagire fortemente con quelli dei bersagli e risentire della forza nucleare forte. Alle energie terapeutiche (100-400 MeV/n) il processo principale è quello della frammentazione nucleare.

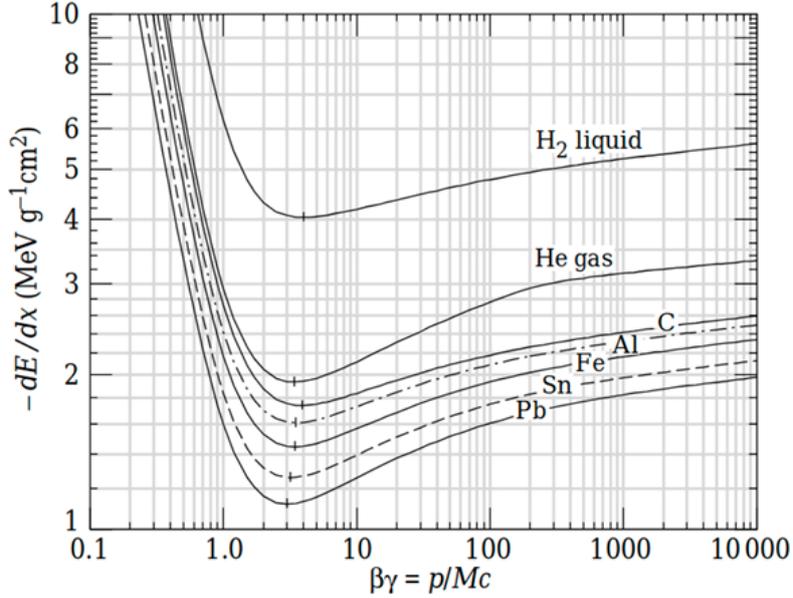


Figura 1.5: Mass Stopping Power per particelle cariche in diversi mezzi [9].

A seconda del parametro d’impatto, ovvero la distanza minima tra le traiettorie delle particelle coinvolte, è possibile avere collisioni centrali, che provocano la disintegrazione di entrambi i nuclei, oppure collisioni periferiche. Queste ultime sono descritte dal modello di Serber [10].

Il modello di Serber coinvolge solamente alcuni nucleoni e divide l’interazione in due fasi: abrasione e ablazione.

La fase iniziale è un processo di eccitazione e termalizzazione che genera un insieme di frammenti eccitati detti *fireball*. La fase successiva consiste nella diseccitazione del frammento del proiettile, del bersaglio e della *fireball* da cui consegue l’emissione di frammenti secondari (nucleoni o ioni). Questi frammenti sono responsabili dell’effetto di coda, cioè del deposito di dose oltre il picco di Bragg e del deterioramento quindi del profilo spaziale di dose, sia longitudinale che laterale.

La sezione d’urto del processo di frammentazione può essere approssimata dalla formula di Bradt-Peters [11]:

$$\sigma = \pi r_0^2 c_1(E) \left[a^{\frac{1}{3}} + A^{\frac{1}{3}} - c_2(E) \right]^2 \quad (1.9)$$

dove r_0 è il raggio di un nucleone, a e A sono i numeri di massa rispettivamente del proiettile e del bersaglio, c_1 e c_2 sono i termini correttivi.

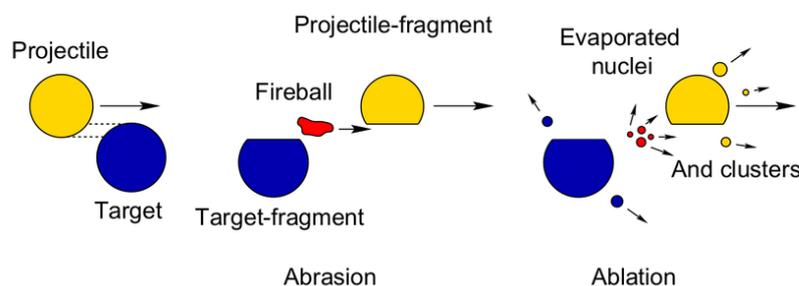


Figura 1.6: Schematizzazione del modello di Serber per la frammentazione nucleare.

1.2 Radiobiologia: parametri fisici e biologici

La radiobiologia è la disciplina che studia gli effetti delle radiazioni sui materiali biologici, sugli organismi viventi e i meccanismi attraverso i quali avvengono.

Tutti questi fenomeni sono conseguenza dell'assorbimento di energia ceduta dal fascio di radiazioni nel materiale irradiato. Il loro studio è finalizzato a spiegare come anche piccole quantità di energia radiante assorbita dall'organismo possano indurre conseguenze morbose, talvolta letali.

1.2.1 Effetti della radiazione sulle cellule

Le cellule sono l'unità elementare di tutti gli organismi animali e vegetali. Ogni cellula è delimitata dalla membrana plasmatica o cellulare, al cui interno si trovano numerosi organelli cellulari immersi nel citoplasma. Le cellule eucariotiche, nello specifico, possiedono una regione nucleare, separata dal citoplasma mediante una propria membrana, al cui interno è presente l'acido desossiribonucleico (DNA), e vanno incontro al caratteristico processo di divisione cellulare.

Quando una radiazione ionizzante colpisce una cellula può agire sul DNA in maniera diretta o indiretta.

Nel primo caso la macromolecola del DNA è colpita direttamente da un elettrone prodotto dalla ionizzazione e questo si ha specialmente con radiazioni densamente ionizzanti. Nel secondo, l'azione indiretta avviene quando la ionizzazione coinvolge le molecole presenti nella cellula e il DNA viene danneggiato dai radicali liberi, specie altamente reattive generate attraverso il processo di radiolisi dell'acqua.

In entrambi i casi il risultato è il danneggiamento e/o l'alterazione della struttura del DNA.

Per la sua forma a due catene polinucleotidiche disposte ad elica, le alterazioni strutturali che il DNA può subire sono solitamente danni di struttura singola

(Single Strand Break), che coinvolgono una singola catena, o danni di struttura doppia (Double Strand Break), che coinvolgono entrambe le catene.

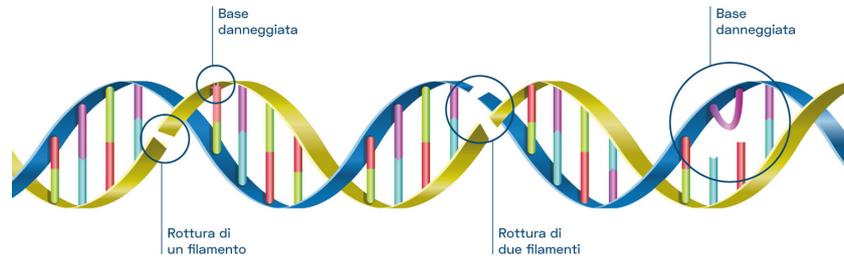


Figura 1.7: Schematizzazione del DNA a seguito di danni di struttura singola e doppia causati da radiazioni ionizzanti.

Nel caso delle SSB esiste un meccanismo di riparazione cellulare in cui il tratto di catena danneggiato viene “asportato” e ricostruito a partire dalla catena complementare ancora intatta. Nel caso delle DSB invece la riparazione è molto difficile e l’informazione che controlla la funzione della cellula e la replicazione è irrecuperabile.

Il DSB risulta quindi la causa principale di morte cellulare, che avviene quando la cellula tenta di duplicarsi.

1.2.2 Dose assorbita, equivalente ed efficace

In radioprotezione, la dose esprime sia la quantità di radiazione emessa sia quella assorbita dai tessuti, che può provocare effetti biologici o curativi.

La **dose assorbita D** è definita come la quantità di energia dissipata per unità di massa del materiale:

$$D = \frac{dE}{dm} \quad (1.10)$$

e viene misurata in Gray (Gy ; pari a $1 J/kg$).

La **dose equivalente H_T** misura il danno biologico provocato dall’assorbimento di radiazioni da parte dei tessuti:

$$H_T = \sum_R \omega_R D_R \quad (1.11)$$

dove con D_R intendiamo le dosi assorbite delle singole radiazioni e con ω_R il rispettivo fattore di pericolosità. La dose equivalente nel Sistema Internazionale si misura in Sievert (Sv).

Tipi di radiazione ed energia R	Fattore di pericolosità ω_R
Fotoni a tutte le energie	1
Elettroni e muoni a tutte le energie	1
Neutroni con energia < 10 KeV	5
Neutroni con energia da 10 KeV a 100 KeV	10
Neutroni con energia > 10 KeV a 2 MeV	20
Neutroni con energia > 2 MeV a 20 MeV	10
Neutroni con energia > 20 MeV	5
Protoni con energia > 2MeV	5
Particelle α , Frammenti di fissione e ioni pensanti	20

Tabella 1.2: Valori di alcuni fattori di pericolosità relativi alle rispettive radiazioni [9].

Per i neutroni, possiamo scrivere:

$$\omega_R = 5 + 17 \exp\left(-\frac{(\ln(2E_n))^2}{6}\right) \quad (1.12)$$

dove E_n indica l'energia del neutrone in MeV [12].

La **dose efficace E** rappresenta la somma ponderata delle dosi equivalenti ai vari tessuti:

$$E = \sum_t \omega_t H_t \quad (1.13)$$

dove ω_t sono i pesi e tengono conto della diversa radiosensibilità dei tessuti irraggiati. La dose efficace, come la dose equivalente, si misura in Sievert (Sv).

Organi e tessuti t	Fattore di sensibilità ω_t
gonadi	0.20
Midollo osseo, polmone, stomaco	0.12
Vescica, seno, fegato	0.05

Tabella 1.3: Fattori di sensibilità per alcuni tipi di tessuti e organi [9].

1.2.3 Linear Energy Transfer

Il *Linear Energy Transfer* (LET) o “trasferimento di energia lineico” è l'energia perduta in unità di percorso da una particella ionizzante in un mezzo condensato (acqua o tessuto):

$$LET = \frac{dE}{dx} \quad (1.14)$$

Questa quantità viene usata per valutare gli effetti biologici di una radiazione ionizzante ed è misurata in $keV/\mu m$.

Il LET è una grandezza strettamente legata allo Stopping Power, ma non contiene le componenti di perdita di energia legate alle interazioni nucleari, dipende dalla velocità e della carica delle particelle ionizzanti.

A parità di dose, a seconda del tipo di radiazione abbiamo due categorie di LET: alto e basso. Le radiazioni ad alto LET depositano molta energia per unità di percorso e hanno perciò un basso potere di penetrazione ma un alto danno biologico, queste hanno maggiore probabilità di danneggiare il DNA con danni di DSB. Al contrario, una radiazione a basso LET deposita meno energia lungo il percorso.

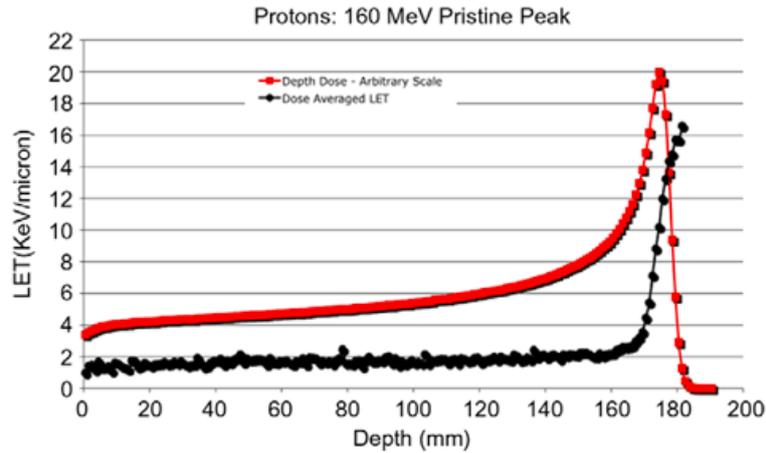


Figura 1.8: Aumento della dose e del LET con la profondità per un fascio di protoni da 160 MeV [8].

1.2.4 Sopravvivenza cellulare

Il numero di cellule vive (frazione sopravvivate) dopo una dose unica di radiazione ionizzante segue il *Linear Quadratic Model* (LQ), nel quale si indica con S la frazione di cellule sopravvissute ad una certa dose D e si ottiene:

$$S = e^{-\alpha D - \beta D^2} \quad (1.15)$$

dove α e β indicano parametri sperimentali dipendenti dal tipo di tessuto.

Come già accennato nel paragrafo 1.2.1, il DNA ha dei meccanismi di riparazione per alcuni danni causati dalla radiazione. Il parametro α è legato ai danni letali irreparabili generati da ionizzazione doppia o multipla lungo la catena del DNA, mentre β è legato ai danni sub-letali riparabili dovuti a ionizzazione singola. Dalle proprietà dei parametri si può dedurre che l'andamento della curva di sopravvivenza per una radiazione ad alto LET sia del tipo $e^{-\alpha D}$, mentre quella per una radiazione a basso LET sia del tipo $e^{-\beta D^2}$. In figura 1.9 è possibile osservare gli andamenti dedotti in scale semi-logaritmiche.

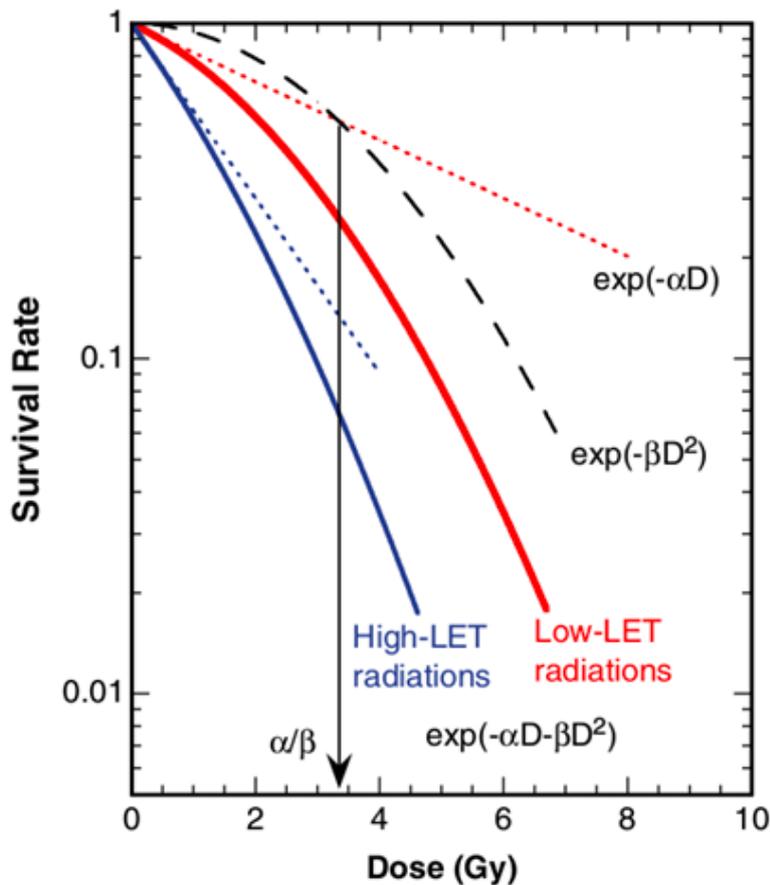


Figura 1.9: Andamento della sopravvivenza cellulare in funzione della dose assorbita per radiazioni ad alto e basso LET.

Il rapporto α/β corrisponde alla dose D per la quale $\alpha D = \beta D^2$ e rappresenta il grado di risposta dei tessuti: se il rapporto è compreso tra 0.5 Gy e 6 Gy, il tessuto risponde in maniera tardiva alle radiazioni e sarà più resistente, mentre se $7 < \alpha/\beta < 20$ Gy allora il tessuto sarà più sensibile.

Il valore $\alpha \cdot \beta$ è differente per ogni tessuto e sarà maggiore del rapporto in tessuti ad alta attività moltiplicativa (come il midollo osseo, cute e mucose) e a valori minori del rapporto per tessuti a bassa attività moltiplicativa (come il midollo spinale, osso e polmone).

1.2.5 Relative Biological Effectiveness

In radiobiologia il Relative Biological Effectiveness è il rapporto fra l'effetto biologico di una data dose di radiazioni D_R e quello della stessa dose di una radiazione di riferimento D_X (raggi X di 200 keV):

$$RBE = \frac{D_X}{D_R}. \quad (1.16)$$

L'RBE di una particella dipende dal numero di ionizzazione e dalla loro distribuzione lungo il percorso.

L'RBE di una radiazione è una funzione del LET, il cui andamento per un particolare campione cellulare è descritto in figura 1.10a, ma dipende anche dal tipo di effetto biologico considerato.

L'aumento della RBE con il LET è strettamente legato al potere frenante degli ioni che produce un danno biologico maggiore nella regione del picco di Bragg, dove la ionizzazione specifica e il LET sono maggiori.

La regione di discesa dopo il picco corrisponde a valori di LET superiori a quelli necessari a determinare danni cellulari letali (overkill).

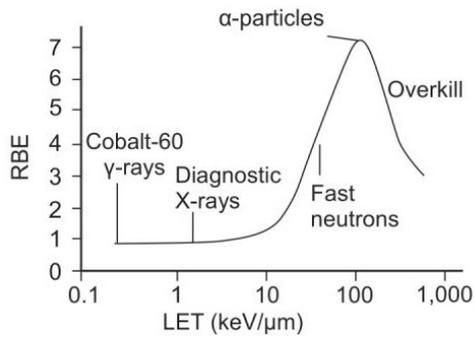
1.2.6 Oxygen Enhancement Ratio

L'Oxygen Enhancement Ratio (OER) in radiobiologia si riferisce al potenziamento dell'effetto terapeutico o dannoso delle radiazioni ionizzanti a causa della presenza di ossigeno.

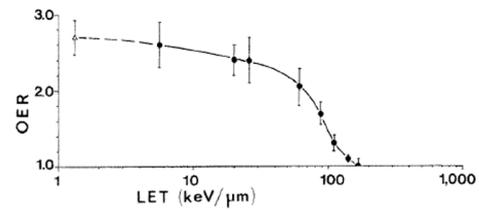
L'OER relativo ad un determinato effetto biologico è definito come il rapporto tra la dose di radiazione durante l'assenza di ossigeno (anossia) e del medesimo tipo di radiazione in condizioni di normale concentrazione di ossigeno:

$$OER = \frac{D_{\text{condizione di anossia}}}{D_{\text{condizione normale di ossigenazione}}} \quad (1.17)$$

Le radiazioni con una maggiore LET e una maggiore RBE hanno un OER più basso nei tessuti cellulari dei mammiferi.



(a) RBE in funzione del LET [13].



(b) OER in funzione del LET utilizzando come radiazione ionizzante un fascio di fotoni.

Figura 1.10: L'andamento dello Stopping power in funzione del mezzo attraversato e della distanza percorsa.

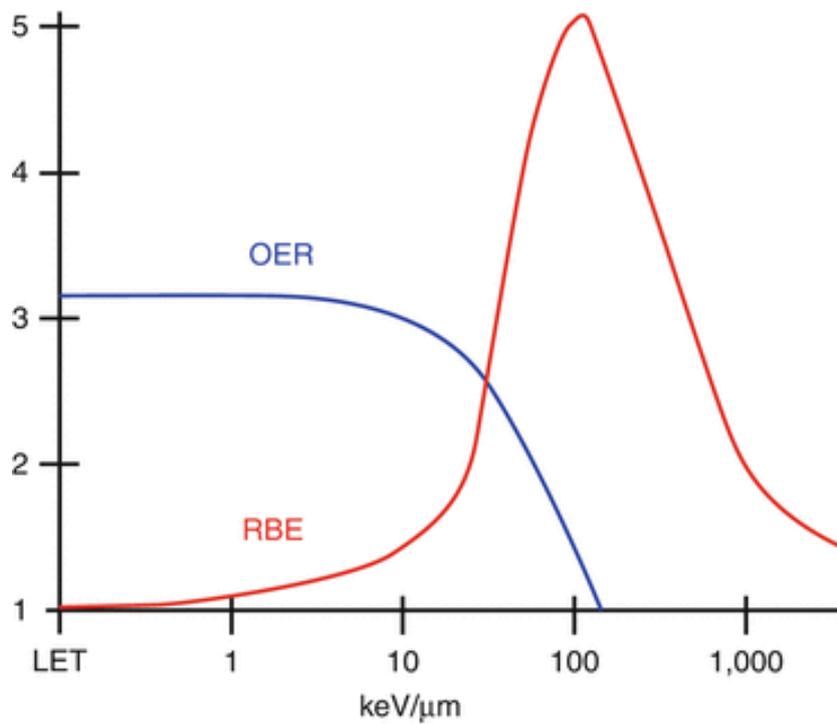


Figura 1.11: Curve di RBE e OER in funzione di LET [14].

1.3 Patologie tumorali

Il tumore è definito come l'alterazione o processo morboso di un organo che si manifesta con un aumento del suo volume.

Una cellula tumorale ha una parte dei geni, compresi quelli che servono a

riparare il DNA, alterata e crea “mutazioni”. A differenza di una cellula sana, questa “impazzisce”, inizia a moltiplicarsi in modo abnorme e non va incontro a morte come dovrebbe.

Sia le cellule di un tumore benigno sia quelle di un tumore maligno tendono a proliferare in maniera disordinata, ma solo in un tumore maligno alcune cellule tendono a staccarsi per invadere i tessuti vicini migrando dall’organo di origine e colonizzando altre zone dell’organismo; fino a compromettere organi vitali quali le ossa, i polmoni, il fegato e/o il cervello.

Questo processo prende il nome di “metastatizzazione” e può richiedere un periodo di tempo molto variabile da individuo a individuo e a seconda del tipo di cancro. Le metastasi rappresentano la fase più avanzata della malattia, oltre che la causa del 90% circa dei decessi per cancro.

1.3.1 Terapie oncologiche

Secondo le stime dell’Organizzazione Mondiale della Sanità (OMS) nel 2019, il cancro è la prima o la seconda causa di morte in 112 paesi su 183 [15].

Lo screening per diagnosticare i tumori, come il colon-retto, il seno, la prostata, il collo dell’utero e il melanoma, in una fase iniziale è determinante per la sopravvivenza a lungo termine. L’identificazione di un tumore in una fase iniziale consente usualmente di intervenire in modo meno invasivo e più efficace.

Esistono diverse terapie oncologiche: chemioterapia, immunoterapia, chirurgia oncologica, radioterapia e adroterapia. A seconda del tipo di tumore si decide in che modo sia opportuno intervenire clinicamente, solitamente utilizzando anche più tecniche in modo complementare per aumentare l’efficacia del trattamento.

Il farmaco ideale colpirebbe solo le cellule tumorali e non avrebbe effetti avversi sulle cellule normali.

La **chemioterapia** consiste nella somministrazione non localizzata di sostanze chimiche capaci di aggredire le cellule che si moltiplicano più rapidamente, quindi in particolare quelle citotossiche, durante il processo di replicazione; ha conseguenze però anche su alcuni tipi di cellule sane soggette a rapida replicazione.

L’**immunoterapia** oncologica utilizza le citochine, proteine responsabili della comunicazione tra le cellule, per attivare e rinforzare il sistema immunitario del paziente spingendolo ad attaccare le cellule malate.

La **chirurgia oncologica** si usa nei casi di tumore localizzato e consiste nella rimozione del cancro dal corpo del paziente, a opera di un chirurgo specializzato. Solitamente, a seguito dell’asportazione del tessuto maligno, fanno seguito sedute di chemioterapia o di radioterapia per eliminare le ultime cellule malate rimaste.

La **radioterapia** è una terapia localizzata, non invasiva e indolore che sfrutta l’utilizzo di radiazioni ionizzanti ad alta energia che spesso sono raggi X. Le radiazioni, dirette contro i tessuti tumorali (target), danneggiano la capacità delle

cellule cancerose di moltiplicarsi. Nonostante l'aumento della precisione della terapia nel corso degli anni, può accadere che siano colpite anche cellule sane vicine alla massa tumorale; per questo è importante che il Fisico medico si occupi di determinare la dose totale da sottoporre al paziente (ossia la dosimetria), in quante sessioni suddividere l'irraggiamento e con quale frequenza.

1.3.2 Adroterapia

L'**adroterapia** o terapia adronica è una forma di radioterapia a fasci esterni per il trattamento e la cura di tumori spesso inoperabili o resistenti ai tradizionali trattamenti radioterapici. Dal 2017 questa tecnica è entrata a far parte dei Livelli Essenziali di Assistenza previsti dal Sistema Sanitario Nazionale. A differenza della radioterapia tradizionale, l'adroterapia prevede l'uso di protoni e ioni carbonio ad energie tra i 100 MeV/n e i 400 MeV/n . Queste particelle atomiche (definite "adroni") hanno il vantaggio di essere più pesanti e dotate di maggior energia rispetto agli elettroni e di conseguenza di essere ancora più efficaci nel distruggere le cellule tumorali.

Attualmente, in Italia sono presenti tre centri di Adroterapia: CATANA (Centro di AdroTerapia ed Applicazioni Nucleari Avanzate), CNAO (Centro Nazionale di Adroterapia Oncologica) e il Centro di Protonterapia di Trento.

Il primo, situato presso i Laboratori Nazionali del Sud a Catania, è un centro in cui è possibile trattare i tumori della regione oculare con fasci di protoni.

Il CNAO a Pavia è l'unico centro in Italia che utilizza sia protoni che ioni Carbonio per il trattamento. In questo centro l'acceleratore è un sincrotrone, ovvero un anello lungo 80 m con un diametro di 25 m al cui interno della circonferenza sono situate le sorgenti dei fasci di protoni e ioni Carbonio.

Il Centro di Protonterapia di Trento è il terzo in Italia per la cura con protoni.

1.4 Radioprotezione nello spazio

Oltre ai rischi relativi all'assenza di gravità e all'isolamento, il principale ostacolo ai viaggi nello spazio interplanetario, fuori dal campo magnetico terrestre (Magnetosfera), è l'esposizione alle radiazioni spaziali.

Tra le principali componenti dell'ambiente spaziale troviamo radiazioni cariche, caratterizzate da un'alta energia, come: raggi cosmici di origine extra-galattica, particelle emesse dal sole, particelle intrappolate dal campo magnetico planetario e forti contributi di ioni pesanti ad alto LET.

Questo tipo di radiazioni sono sostanzialmente diverse da quelle presenti sulla superficie terrestre o sulla Stazione Spaziale Internazionale poiché non risultano schermate (interamente o in parte) dalla Magnetosfera; a causa di queste differenze

e delle condizioni straordinarie di esposizione, la conoscenza dei loro effetti biologici sugli astronauti è molto scarsa.

La progettazione e l'ottimizzazione della schermatura del veicolo spaziale deve richiedere quindi una conoscenza dettagliata dei processi di frammentazione. Le misurazioni del progetto FOOT possono colmare molte delle lacune presenti nel database delle sezioni d'urto nucleari utili per la modellizzazione delle interazioni di proiettili e/o bersagli leggeri.

Il terreno comune tra la protezione spaziale e le terapie antitumorali è il pool di particelle e l'intervallo energetico considerato consente lo scambio di dati; le specie di particelle attualmente disponibili in radioterapia (protoni e Carbonio) o le candidate alternative (Elio, Litio e Ossigeno) sono tra le più abbondanti nello spazio e una trattazione simile si può fare anche per i range di energia con cui vengono sparati i fasci adroterapici e posseduti dalle radiazioni spaziali.

1.4.1 Radiazione nel Sistema Solare

I Raggi Cosmici (Cosmic Rays, CRs) sono un flusso costante formato da particelle cariche accelerate ad alte energie (dai 10^8 fino a 10^{20} eV) da sorgenti astrofisiche. Le CRs investono la Terra in ogni punto e da ogni direzione e sono costituite per l'89% da protoni, $\sim 10\%$ da particelle α , e $\sim 1\%$ da nuclei pesanti detti HZE (High Z and Energy). Nonostante abbiano una percentuale così bassa, questi nuclei contribuiscono significativamente alla dose assorbita dagli astronauti.

All'interno del flusso di particelle, si possono distinguere diverse componenti: i Raggi Cosmici Galattici (Galactic Cosmic Rays, GCRs), i Raggi Cosmici Solari (Solar Energetic Particles, SEP) e i Raggi Cosmici Anomali (Anomalous Cosmic Rays, ACRs) [16].

I Raggi Cosmici Galattici hanno un flusso che può considerarsi in prima approssimazione *isotropo e costante nel tempo* e costituiscono un fondo di radiazione ionizzante quasi uniforme. I GCRs hanno origine da sorgenti situate al di fuori del Sistema Solare, ma generalmente nella nostra galassia; e sono una conseguenza di eventi astrofisici, come l'esplosione di una Supernova, oppure vengono prodotti all'interno di sorgenti molto energetiche come Pulsar o Stelle di Neutroni.

Le particelle provenienti da atomi di gas interstellare neutro, che fluiscono nel Sistema Solare, costituiscono i Raggi Cosmici Anomali.

Il Sole rappresenta un'importante sorgente di radiazione all'interno del Sistema Solare. **La Radiazione Cosmica Solare** è formata da particelle quali protoni, elettroni, particelle α , una percentuale ridotta di He-3 e ioni pesanti fino al ferro. Le SEP hanno energia di qualche decina di MeV e derivano per la maggior parte da brillamenti solari o da onde d'urto associate ad espulsioni di massa coronale. Gli Eventi di Protoni Solari (Solar Proton Events, SPE) hanno maggiori effetti biologici dannosi per gli astronauti.

Infine, attorno alla Terra, troviamo flussi di particelle cariche originarie dal confinamento della Magnetosfera, cioè protoni ed elettroni intrappolati a causa del campo magnetico terrestre. Questi flussi, chiamati **Radiazione Intrappolata** (o Confinata), si distinguono in regioni toroidali, appartenenti alla Magnetosfera, chiamate *fasce di Van Allen* a seconda dell'energia delle particelle.

1.4.2 Limiti di esposizione

A causa di quanto discusso fin'ora sulle radiazioni ionizzanti, la NASA e altre agenzie spaziali hanno avviato da diversi anni lo studio della valutazione del rischio per gli astronauti in vista di missioni spaziali di lunga durata. Il rapporto NCRP 132 fissa un limite massimo di esposizione in ambiente di Low Earth Orbit (LEO). Questo protocollo stabilisce che la probabilità massima di mortalità per cancro a seguito di tale esposizione, ovvero il Risk Exposure Induced Death (REID), debba essere inferiore al 3%.

Età di esposizione (<i>anni</i>)	Dose per donne (<i>Sv</i>)	Dose per uomini (<i>Sv</i>)
25	0.4	0.7
35	0.6	1.0
45	0.9	1.5
55	1.7	3.0

Tabella 1.4: Limiti di esposizione e dosi efficaci per gli astronauti impegnati in missioni spaziali in ambiente LEO. I limiti sono basati su una esposizione di 10 anni [17].

Periodo di tempo	BFO (<i>Sv</i>)	Occhio (<i>Sv</i>)	Pelle (<i>Sv</i>)
Intera carriera		4.0	6.0
1 anno	0.50	2.0	3.0
30 giorni	0.25	1.0	1.5

Tabella 1.5: Limiti di dose raccomandati per effetti deterministici in ambiente LEO per tutte le età e per ambo i sessi. Con BFO si intendono i *blood-forming organs*, essenzialmente il midollo rosso [17].

In ambiente di LEO gli astronauti vengono esposti principalmente alla radiazione intrappolata, mentre nello spazio profondo sono soggetti ai Raggi Cosmici Galattici. La conoscenza accurata dello spettro delle particelle in termini di composizione ed energia non è però sufficiente per fare una valutazione completa del rischio. Nello spazio profondo la radiazione viene modificata dall'interazione con

le pareti dell'ipotetico veicolo spaziale e il suo materiale (schermante) creando un campo misto. Per quantificare il campo di radiazione all'interno della navicella e la dose cumulativa ricevuta dagli astronauti ci affidiamo a modelli e calcoli teorici che simulano il trasporto deterministici di radiazione e le interazioni atomiche e nucleari tra le particelle incidenti e il materiale della navicella [18]. Le stime di dose possono essere ottenute attraverso codici Monte Carlo e le sezioni trasversali relative ai processi di interesse.

1.4.3 Schermatura

Per limitare i danni biologici e l'esposizione alle radiazioni ionizzanti, la radioprotezione si prefigge il compito di: aumentare la distanza dalla fonte delle radiazioni, diminuire i tempi di esposizione e schermare la radiazione.

Se la prima non è applicabile a causa dell'isotropia delle radiazioni GCRs e SEPs, la seconda risulta ancora difficoltosa a causa della limitazione della tecnologia odierna.

É invece molto interessante discutere delle possibili schermature di future astronavi spaziali, le quali possono essere passive, cioè basate su schermi o scudi che bloccano le radiazioni, oppure attive, utilizzando attrezzature capaci di deviare le traiettorie delle particelle cariche.

La **Schermatura passiva** si differenzia a seconda delle radiazioni prese in analisi. Per schermare i flussi di Radiazione Confinata nelle fasce di Van Allen e le SEPs, che hanno generalmente un'energia relativamente bassa, le astronavi sono dotate di una struttura in alluminio, in grado di bloccare protoni con energia fino a 200 *MeV*. I GCRs sono più ostici da schermare a causa delle elevate energie e del contributo delle HZE. Per questo tipo di particelle si opta per la frammentazione nucleare con conseguente creazione di particelle con carica elettrica minore e quindi RBE più bassa. La produzione di neutroni a seguito della frammentazione viene deviata con una schermatura costituita da materiali ricchi di idrogeno.

La **Schermatura attiva** utilizza macchinari in grado di deviare le particelle attraverso dei campi magnetici; in particolare si sfruttano campi magnetici confinati estremamente intensi, di solito toroidali e ottenuti tramite bobine di materiali superconduttori che circondano l'astronave. Questi campi generano un momento di dipolo magnetico totale nullo e perciò la navicella non sarà soggetta a rotazione sotto l'influenza di altri campi magnetici.

Capitolo 2

L'esperimento FOOT

L'esperimento FOOT (FragmentatiOn Of Target) nasce nel 2017 con lo scopo di colmare le lacune sperimentali sugli effetti della frammentazione nucleare dei fasci adroterapici che interagiscono con i nuclei degli atomi del corpo umano e di raggiungere una risoluzione sulle stime di almeno il 5%.

In particolare si vuole studiare il percorso dei frammenti del bersaglio e la cessione di energia da parte dei frammenti proiettile al di là del picco di Bragg, al fine di migliorare i sistemi di pianificazione dei trattamenti. È stato studiato infatti che in condizioni anossiche l'ossigeno ricopre un ruolo fondamentale, ma in condizioni normali la grande frammentazione del fascio nelle regioni oltre il tumore lo rende meno conveniente. L'elio è una valida alternativa ai protoni a causa del basso impatto dello Scattering Coulombiano Multiplo, fornendo una migliore risoluzione laterale nelle aree vicine al tumore.

L'obiettivo è quindi la misurazione delle sezioni d'urto sia per i frammenti del fascio proiettile sia per i frammenti del bersaglio in un range più ampio di energia; ossia sopra i 250 MeV per protoni e $400 \text{ MeV}/n$ per ioni carbonio.

L'apparato sperimentale è stato progettato in modo tale da poter essere trasportato comodamente tra i centri in cui esistono strutture in grado di accelerare i fasci di adroni alle energie richieste; anche se le simulazioni Monte Carlo (MC) hanno mostrato che è difficile raggiungere l'accettanza desiderata per tutti i frammenti secondari con un apparato di dimensioni ridotte. Un compromesso tra l'efficienza e la portabilità è dato dall'implementazione di uno spettrometro magnetico con un sistema di tracciamento ad alta precisione.

2.1 Frammentazione del bersaglio

Nel range energetico adroterapico, le misure delle sezioni d'urto dei processi di interazione nucleare relativi alla frammentazione del bersaglio sono ancora molto

Frammenti	E (MeV)	LET (keV/ μ m)	Range (μ m)
¹⁵ O	1.0	983	2.3
¹⁵ N	1.0	925	2.5
¹⁴ N	2.0	1137	3.6
¹³ C	3.0	951	5.4
¹² C	3.8	912	6.2
¹¹ C	4.6	878	7.0
¹⁰ B	5.4	643	9.9
⁹ Be	6.4	400	15.7
⁶ Li	6.8	215	26.7
⁴ He	6.0	77	48.5
³ He	4.7	89	38.8
² H	2.5	14	68.9

Tabella 2.1: Valori medi dei parametri fisici (energia cinetica (E), LET e range) per frammenti del bersaglio prodotti da un fascio di protoni a 180 MeV/n in acqua.

poche, come mostrato in figura 2.1. Nella misurazione della frammentazione del bersaglio i frammenti prodotti hanno basse energie (massimo 10 MeV/n) quindi coprono un corto range (dell'ordine dei μ m) e hanno perciò una bassa probabilità di “scappare” dallo stesso target, come mostrato in tabella 2.1.

Da queste osservazioni si evince quindi che un bersaglio con uno spessore significativo non può essere una scelta idonea per l'esperimento. Un bersaglio sottile (dell'ordine dei μ m), più adatto, potrebbe però portare delle difficoltà tecniche di produzione e di gestione.

Per ovviare a questo problema l'esperimento FOOT sfrutta la tecnica della cinematica inversa, basata sull'invarianza relativistica per la sezione d'urto per l'interazione nucleare.

2.1.1 Cinematica inversa

Questa pratica consiste nell'invertire il ruolo del bersaglio, costituito da tessuti biologici (generalmente ¹²C e ¹⁶O), e del proiettile (protoni) per poi applicare il *boost* di Lorentz inverso ottenendo le misure richieste nel sistema di riferimento in cui i protoni incidono sui tessuti biologici. Utilizzare questo approccio risolve il problema legato ai frammenti poco energetici e con range molto piccoli nella cinematica diretta, e permette uno studio preciso di questi ultimi attraverso un alto numero di dati a livello stocastico.

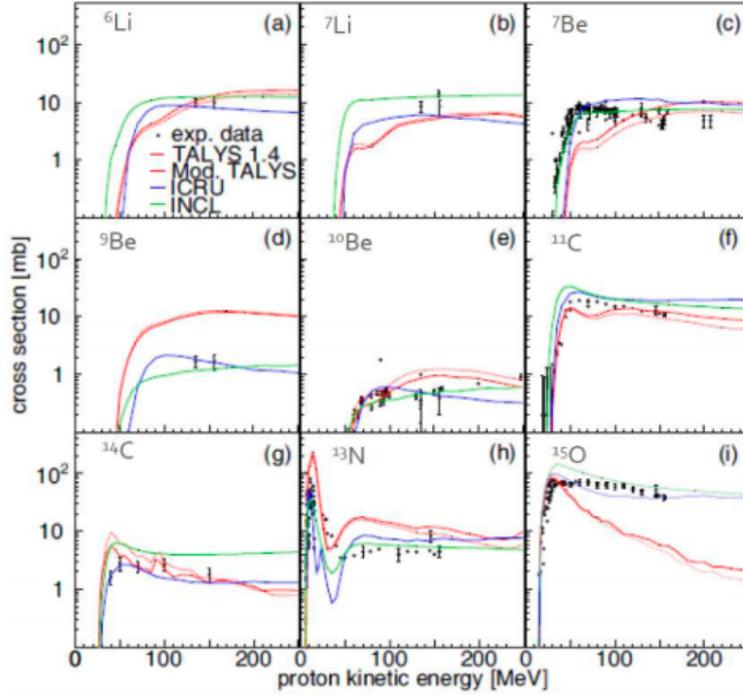


Figura 2.1: Sezioni d'urto dei processi di interazione nucleare relativi alla frammentazione del bersaglio di ossigeno O in seguito allo scontro con un fascio di protoni.

2.1.2 Composizione del bersaglio

Nell'apparato quindi abbiamo un fascio di ^{12}C o ^{16}O accelerato contro un bersaglio di protoni. Per quanto illustrato fino ad ora sarebbe necessario utilizzare un bersaglio di idrogeno, ma poiché l'idrogeno a temperatura ambiente è nello stato gassoso ciò risulterebbe impraticabile.

Per misurare la sezione d'urto differenziale rispetto all'energia cinetica relativa all'idrogeno si usano invece in successione un bersaglio di polietilene (C_2H_4) e uno di grafite spesso 2 mm (carbonio, C). La sezione d'urto si ottiene dalla sottrazione dei contributi dei due bersagli:

$$\frac{d\sigma}{dE_{kin}}(H) = \frac{1}{4} \left[\frac{d\sigma}{dE_{kin}}(C_2H_4) - 2 \frac{d\sigma}{dE_{kin}}(C) \right]. \quad (2.1)$$

La validità di questo approccio è dimostrata grazie a simulazioni sviluppate attraverso il codice FLUKA, i cui risultati sono riportati in figura 2.2.

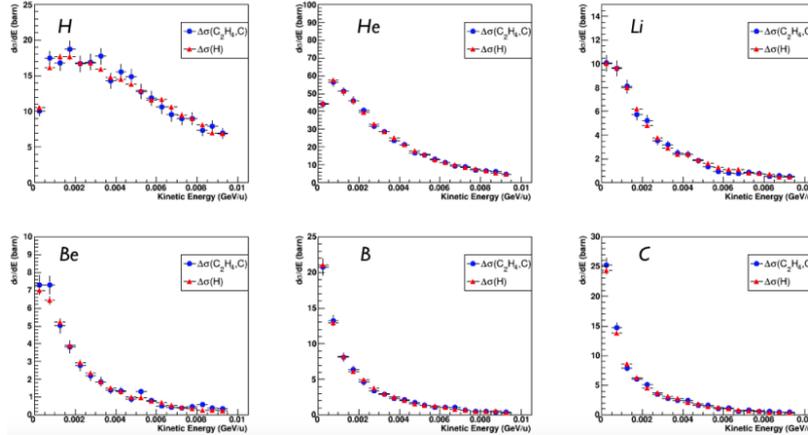


Figura 2.2: Confronto fra sezioni d’urto differenziali ricavate tramite un fascio di ioni carbonio (^{12}C) di energia $200\text{ MeV}/u$ in cinematica inversa contro un bersaglio di atomi di idrogeno (rosso) e per sottrazione di polietilene e carbonio (blu).

2.2 L’apparato sperimentale

L’apparato di FOOT è stato realizzato in modo tale che il sistema sia in grado di registrare simultaneamente tutte le quantità cinematiche (impulso, velocità ed energia cinetica), in modo da poter discriminare efficacemente tra i diversi frammenti prodotti.

Le simulazioni Monte Carlo, considerando fasci di ioni a 200 MeV , hanno mostrato che i frammenti pesanti ($Z \geq 3$) vengono prodotti con una semi-apertura rispetto alla direzione del fascio incidente inferiore a 10° (figura 2.3); considerando un fascio di 700 MeV questo valore si riduce a 5° . Per quanto riguarda invece i frammenti leggeri si misurano deviazioni più ampie rispetto al fascio primario.

Al fine di contenere le dimensioni dell’apparato sperimentale, il progetto ha previsto due diversi setup, uno per la rivelazione di frammenti pesanti e uno per quelli leggeri, con diversi angoli di accettazione.

2.2.1 Setup per frammenti pesanti

La struttura complessiva, mostrata in figura 2.4, si estende per $\sim 1.5\text{ m}$ e può essere suddivisa in tre regioni principali: la parte antecedente e contenente il bersaglio (Start Counter e Beam Monitor), la parte dedicata al tracciamento (Vertex, Inner Tracker, Microstrip Silicon Detector e due magneti permanenti) e la parte finale adibita all’identificazione del frammento (Scintillatore e Calorimetro). Queste componenti sono adibite a misurare la quantità di moto p , il tempo di volo TOF

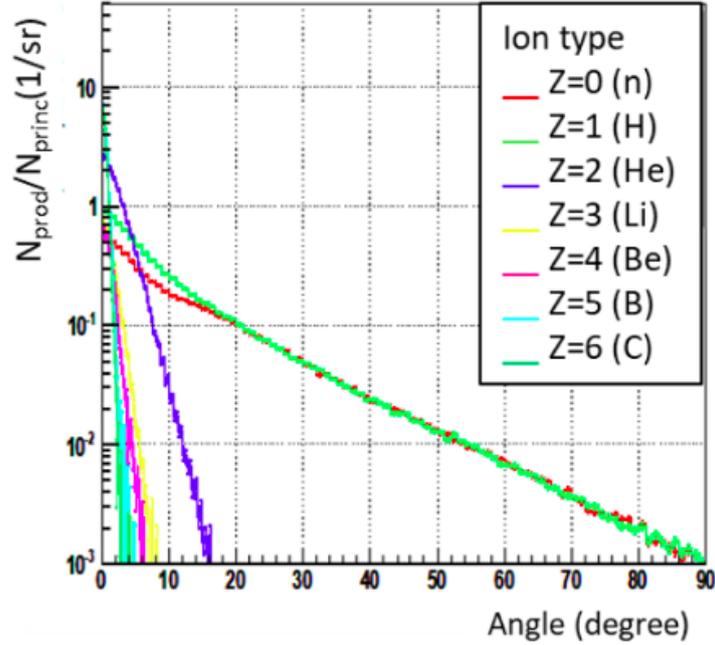


Figura 2.3: Distribuzione angolare dei frammenti secondari al variare di Z per un fascio di carbonio a 200 MeV su un target di atomi di carbonio [19].

(Time Of Flight), lo *Stopping Power* dE/dx e l'energia cinetica E_{kin} dei frammenti prodotti.

Per poter identificare unicamente i frammenti, ricostruendone il numero atomico Z e il numero di massa A e calcolandone poi la sezione d'urto differenziale, la precisione delle misure deve mantenersi entro i seguenti limiti [20]:

- risoluzione sull'impulso $\sigma(p)/p$ al 5%;
- risoluzione sul tempo di volo (*TOF*) al livello di 100 ps ;
- risoluzione sull'energia cinetica $\sigma(E_{kin})/E_{kin}$ al 2%;
- $\sigma(\Delta E)/\Delta E$ al 2%.

Il funzionamento dei rilevatori si basa sulla lettura dei segnali elettrici derivanti dalla ionizzazione o eccitazione degli atomi del materiale attraversato dal fascio principale.

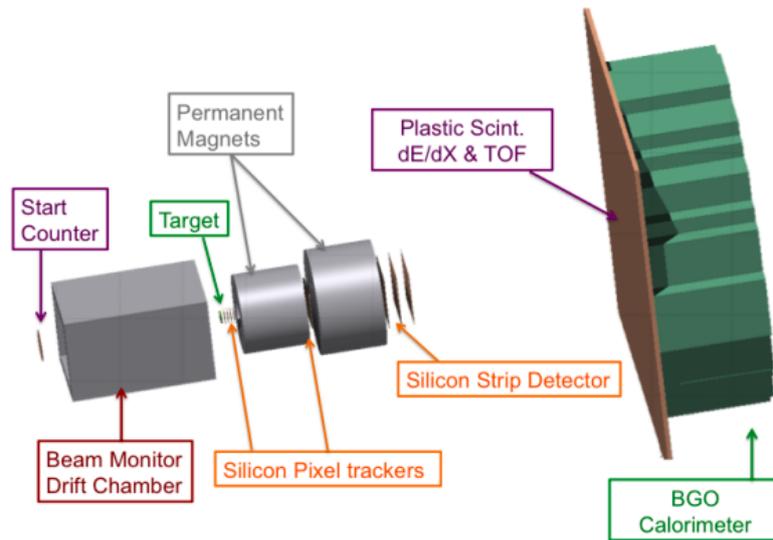


Figura 2.4: Schematizzazione dell'apparato FOOT

Start Counter

Lo *Start Counter*, utilizzato nei primi esperimenti anche per il setup dei frammenti pesanti, è ora implementato unicamente nel setup dei frammenti leggeri, mostrato nella sezione 2.2.2.

Questa regione consiste in un foglio di scintillatore plastico a disco (EJ-228) posizionato prima del bersaglio. Il disco è spesso $250 \mu\text{m}$ e ha un raggio di 26 mm , sufficiente a coprire la tipica dimensione trasversale del fascio ($2.5 \times 2.5 \text{ cm}^2$). Lo spessore è stato scelto in modo tale che sia abbastanza sottile da ridurre i fenomeni di frammentazione che precedono il bersaglio (di grafite o polietilene) del 5% rispetto a quelli sul bersaglio di grafite di 2 mm e abbastanza spesso da mantenere un'efficienza vicina al 100% al passaggio del fascio. Il segnale luminoso prodotto dallo scintillatore è raccolto da 160 fibre ottiche, raggruppate in quattro fasci, e mandato a quattro fotomoltiplicatori.

Lo Start Counter ha una duplice funzione: misura il flusso entrante e agisce come trigger, dando il segnale d'arrivo di una particella del fascio all'interno dell'apparato e misurando l'istante iniziale del *TOF*, che verrà poi correlato con quello finale registrato dallo Scintillatore.

Attualmente è stato realizzato un nuovo rivelatore che viene letto da Silicon Photo Multiplier (SiPM) connessi direttamente al rivelatore.

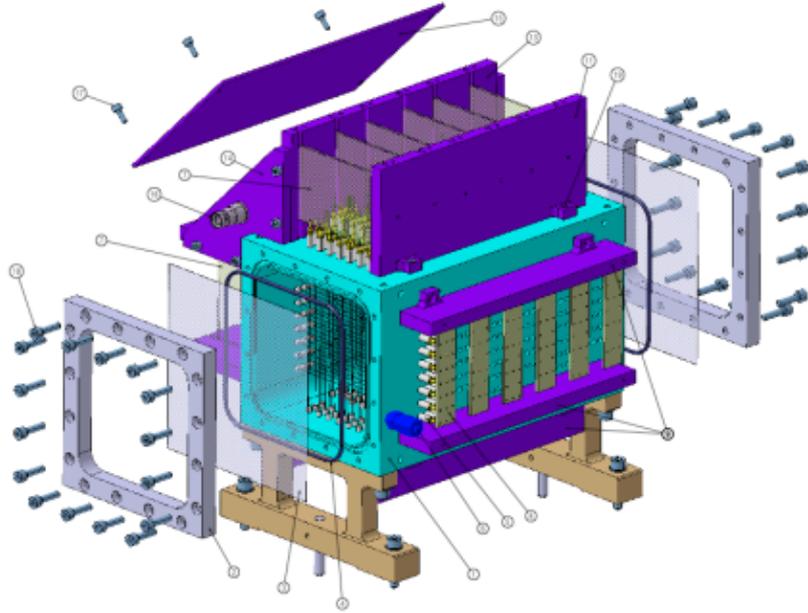


Figura 2.5: Disegno tecnico della camera di deriva del Beam Monitor.

Beam Monitor

Il *Beam Monitor* (BM) è posto a valle dello SC e consiste in una camera di ionizzazione a deriva composta da dodici strati di fili anodici (mantenuti ad un potenziale elettrico positivo di 1.8 kV), ognuno dei quali è compreso tra due piani catodici (mantenuti a potenziale elettrico nullo). I fili sono disposti ortogonalmente sul piano perpendicolare alla direzione del fascio, in maniera alternata, e per questioni di precisione nella ricostruzione della traiettoria, i reticoli di due piani successivi sono sfasati di mezza cella. La camera, mostrata in figura 2.5, è riempita di una miscela di gas (80% Ar , 20% CO_2 a pressione atmosferica).

Il *Beam Monitor* registra eventuali frammentazioni precedenti al bersaglio, da rimuovere nell'analisi finale, e misura la direzione del fascio incidente e il punto in cui questo incide sul bersaglio. A questo proposito si sfrutta la produzione di ioni positivi ed elettroni all'interno del gas causata dal passaggio delle particelle ionizzanti del fascio proiettile: gli ioni si spostano verso il piano catodico, gli elettroni verso il filo anodico più vicino. Gli elettroni viaggiando acquistano energia e sono in grado di creare altri ioni positivi ed elettroni creando un meccanismo a valanga. Gli elettroni prodotti sono raccolti dal filo anodico da cui viene infine prodotto un impulso elettrico.

Misurando il tempo impiegato dagli elettroni per raggiungere il filo si può rico-

struire la traccia del fascio incidente con una risoluzione spaziale (nella direzione perpendicolare al fascio) di circa $140 \mu m$ per nuclei di carbonio.

Bersaglio

Come accennato nel paragrafo 2.1.2, il *bersaglio* (o target) è costituito da due strati di spessore $2 mm$ disposti uno di seguito all'altro. Il primo strato è composto da grafite (C) mentre il secondo da polietilene (C_2H_4).

Spettrometro magnetico

Dopo il bersaglio inizia la regione designata al tracciamento, i frammenti prodotti raggiungono una zona in cui è presente un campo magnetico perpendicolare alla direzione del fascio, in modo tale da discernere le particelle in base al loro impulso e alla loro carica q .

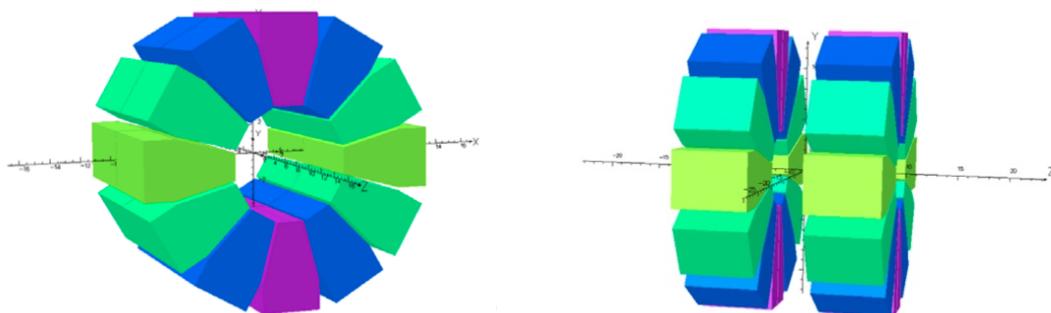
Il funzionamento dello spettrometro si basa sulla legge di Lorentz:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.2)$$

dove \mathbf{F}_L indica la forza di Lorentz, \mathbf{v} è la velocità del frammento, e \mathbf{B} è il campo magnetico. Conoscendo la carica e la traiettoria (il raggio di curvatura) di un frammento è possibile ricavarne l'impulso $|\mathbf{p}|$:

$$|q\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow |\mathbf{p}| = m|\mathbf{v}| = rq|\mathbf{B}| \quad (2.3)$$

Il campo è prodotto da due magneti cavi permanenti in configurazione di *Halbach* a geometria cilindrica, come mostrato in figura 2.6. All'interno dei due magneti in NbFeB (Niobio-Ferro-Boro) il campo risulta pressoché costante con intensità massima di $1.4T$ e $0.85T$ rispettivamente.



(a) Tipica configurazione Halbach.

(b) Double magnet design.

Figura 2.6: Spettrometro magnetico.

In questa regione i frammenti attraversano tre rivelatori che ne registrano le posizioni successive, dalle quali si può ricavare la curvatura della traccia e quindi l'impulso della particella.

- Il *Vertex Tracker* (VTX) è posto tra il bersaglio e il primo magnete, copre un angolo di rivelazione di circa 40° ed è formato da quattro strati di quattro sensori al silicio Mimosa28 (M28) della famiglia CMOS MAPS (Monolithic Active Pixel Sensor). Ogni sensore è una matrice di 928×960 pixel ognuno di sezione quadrata di lato $20.7 \mu m$ e area complessiva di $20.22 \times 22.71 mm^2$. Lo spessore del sensore è inferiore a $50 \mu m$ per minimizzare lo scattering multiplo dei frammenti. Questo sito ha il compito di identificare il punto di formazione dei frammenti, ossia il vertice, e di ricostruire il primo segmento della traccia.
- L'*Inner Tracker* (IT) è posizionato tra i due magneti permanenti in una zona quindi di campo magnetico circa pari a $0.6T$ e copre una superficie di $8 \times 8 cm^2$. Questo tracker si compone di due strati di rivelatori al silicio, ognuno dei quali contiene 16 sensori M28, identici a quelli presenti nel Vertex, ognuno con superficie di $2 \times 2 cm^2$. I due piani di sensori sono separati da uno strato di carburo di silicio (SiC) spessa $2 mm$, una schiuma solida con densità atomica molto bassa. Il campo magnetico non influisce significativamente sull'elettronica del sensore. La funzione di questo rivelatore è quella di acquisire un nuovo punto per la ricostruzione delle traiettorie dei frammenti.
- L'*Outer Tracker* è posizionato subito dopo il secondo magnete permanente e copre un'area di $10 \times 10 cm^2$. Questo rivelatore è costituito da tre piani di *Microstrip Silicon Detector* (MSD) in grado di misurare le coordinate dei frammenti. I piani sono distanti tra loro $2 cm$ e ognuno di essi è formato da due strati di silicio di spessore $200 \mu m$ incollati da un foglio di Kapton biadesivo di spessore $30 \mu m$. Gli elettrodi a strip corrono lungo l'intera lunghezza del sensore e raccolgono il segnale elettrico in seguito alla creazione di coppie elettrone-lacuna nel silicio. Ogni striscia, lunga $10 cm$, è separata da quella adiacente da una distanza di $150 \mu m$ e permettono una risoluzione sulla posizione di circa $35 \mu m$. La ricostruzione del momento \mathbf{p} è dovuta a questo ultimo rivelatore.

TOF-wall

Il *TOF-wall* è un rivelatore composto da due strati di 20 barre di materiale scintillatore plastico EL-208 ciascuna spessa $3 mm$ e di sezione $2 \times 40 cm^2$, necessaria

per raccogliere i frammenti pesanti nel cono di 10° a 1 m di distanza dal punto di formazione.

Questo rivelatore ha la funzione di misurare l'istante finale del TOF e l'energia ΔE depositata per ricavare lo *Stopping Power* dE/dx (e di conseguenza la carica) del frammento.

Calorimetro

L'ultimo rivelatore è il Calorimetro è composto da 320 cristalli BGO di germanato di bismuto ($Bi_4Ge_3O_{12}$) di sezione trasversale $2 \times 2\text{ cm}^2$. La sezione è scelta in modo tale da limitare la probabilità che due o più frammenti incidano sullo stesso cristallo.

Questo rivelatore ha il compito di misurare l'energia cinetica E_{kin} della particella incidente e deve necessariamente essere posto come ultimo componente poiché utilizza un metodo distruttivo che assorbe totalmente i frammenti. Tra le particelle, solo i neutroni, avendo carica elettrica nulla, possono lasciare il calorimetro senza depositare completamente la loro energia; questo fenomeno comporta una sottostima dell'energia cinetica dei frammenti.

2.2.2 Setup per frammenti leggeri

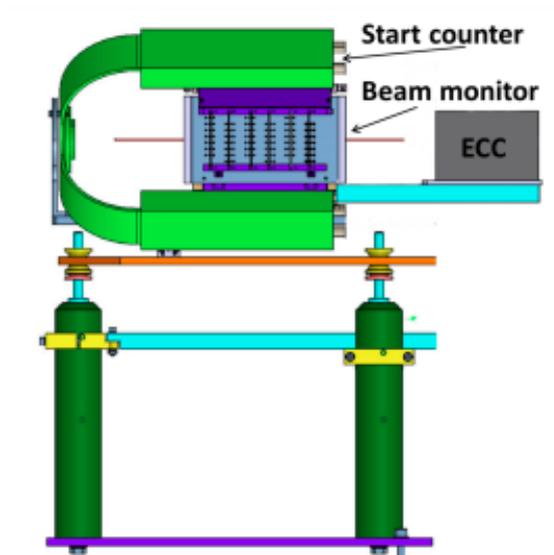


Figura 2.7: Spettrometro ad emulsione all'interno del detector di FOOT

Per i frammenti leggeri ($Z \leq 2$) come protoni, deuterio e nuclei di elio, l'apparato rimane invariato fino al *Beam Monitor*, dopo il quale il target e i rivelatori

successivi vengono sostituiti da uno spettrometro ad emulsione (figura 2.7) che riesce ad estendere l'accettanza angolare fino a 70° ed oltre. Gli ioni che entrano nella camera attraversano diversi strati di materiali, tra cui pellicole ad emulsione nucleare di bromuro di argento ($AgBr$). Queste pellicole assorbono energia quando eccitate da luce o da particelle cariche.

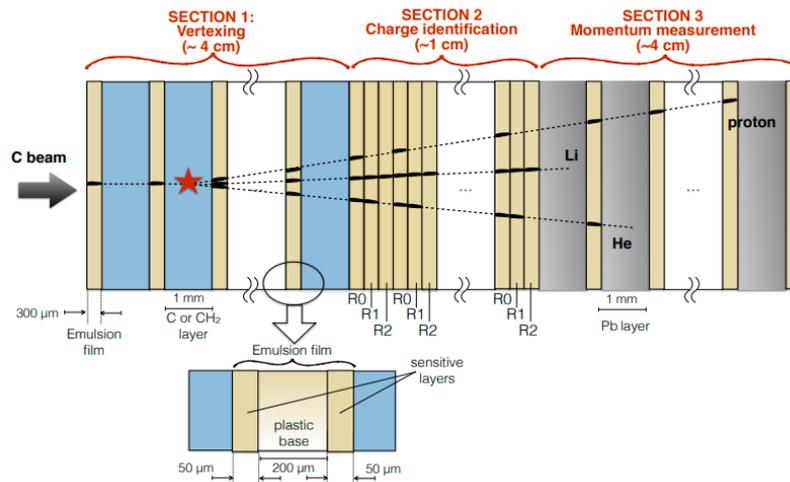


Figura 2.8: Schema della composizione dello spettrometro di emulsione per l'esperimento FOOT

La camera ad emulsione (ECC) è divisa in tre sezioni:

sezione 1

La prima sezione permette la ricostruzione del vertice di frammentazione ed è costituita da strati di pellicole ad emulsioni, spesse $300\ \mu m$, alternati a tre strati di C (o di C_2H_4) che fungono da bersaglio, spesse $1\ mm$. La lunghezza di questa sezione è di circa $4\ cm$. Questi strati di emulsione stabilizzano i frammenti generati dall'interazione del fascio primario con i nuclei del bersaglio che li attraversano e ne registrano la traccia.

sezione 2

La sezione successiva è costituita da soli strati di emulsione ed è lunga circa $1\ cm$. L'apparato è in grado di identificare la carica della particella a partire dal numero di pixel che compongono la traccia in esame (Track Volume); la densità di grani è infatti proporzionale all'energia rilasciata dalla particella nell'emulsione che, a sua volta, dipende dalla carica del frammento stesso.

sezione 3

L'ultima sezione ha il compito di misurare l'impulso del frammento ed è caratterizzata dall'alternanza di emulsioni e materiale passivo per arrestare la corsa dei frammenti. La misura dell'impulso è possibile grazie alla ricostruzione della lunghezza della traccia della particella e attraverso le relazioni *Range-Energia*, viste nel primo capitolo, è possibile ricavarne l'energia.

Capitolo 3

Ricostruzione di traiettorie

La ricostruzione delle traiettorie dei frammenti, ovvero l'identificazione dei loro parametri cinetici (posizione, direzione e impulso), nell'esperimento FOOT è eseguita da un framework basato su ROOT; questo codice utilizza una struttura gerarchica per ottenere un'architettura orientata agli oggetti, la quale permette di definire oggetti software in grado di interagire gli uni con gli altri attraverso lo scambio di messaggi. La ricostruzione si effettua a partire dai punti (detti "hit") rilasciati dalla particella nei diversi piani sensibili.

La prima fase del codice consiste nel leggere, interpretare e convertire in un unico formato di oggetto software i dati e gli eventi che vengono forniti in un primo momento con diversi formati di input. Nella seconda fase, gli eventi vengono elaborati dagli algoritmi di identificazione e di ricostruzione delle tracce, dai quali si possono estrapolare le informazioni necessarie per gli studi di frammentazione.

Il primo livello di ricostruzione (Level0) consiste nel decodificare i segnali raccolti durante le tracce di acquisizione, a cui vengono applicate le costanti di calibrazione, per poi classificarli in oggetti "hit", "cluster" e "track" a seconda del tipo di rivelatore associato alle informazioni.

Nel secondo livello (HighLevel) gli oggetti costruiti dalle diverse unità sub-detector (il Beam Monitor, il Vertex Detector, il Tracking System, il TOF-wall e il Calorimetro) sono combinati per ottenere una ricostruzione finale dell'evento globale; i diversi frammenti saranno identificati, la loro traccia sarà ricostruita e saranno forniti tutti gli input necessari per il calcolo della sezione trasversale.

Il codice per la ricostruzione della traccia si basa su un algoritmo di filtro di Kalman implementato nella libreria esterna open source GENFIT [21].

Questa tesi si vuole soffermare sul processo di fitting, ovvero di ottimizzazione dei parametri che descrivono lo stato di una particella, per la riproduzione delle "hit" selezionate e del loro andamento attraverso l'utilizzo dell'algoritmo di filtro di Kalman.

Nell'esperimento FOOT, ogni superficie del rivelatore con un possibile "hit" di misura viene considerato dal filtro come un diverso stato dell'equazione, caratterizzato dall'insieme dei parametri (vettore di stato). In primo luogo, l'algoritmo estrapola una possibile traiettoria da un punto di misurazione su uno stato allo stato successivo, tenendo conto della dispersione multipla e della perdita di energia attraverso la materia. Successivamente, sul nuovo stato, calcola una media ponderata, tramite minimizzazione di χ^2 , tra l'estrapolazione (previsione) e la misurazione del rivelatore ("hit").

In ogni evento, la ricostruzione viene eseguita separatamente su raccolte indipendenti di "hit" appartenenti allo stesso frammento e che passano attraverso tutti e tre i rilevatori di tracciamento a valle; si parte dal vertice, fornito dal rivelatore Vertex, e si procede sommando gli "hit" rilevati dall'Inner Tracker e dai rilevatori Micro Strip.

3.1 Metodo del minimo Chi-Quadro

Il metodo più usato per trovare la funzione che meglio approssima l'andamento dei dati sperimentali è quello dei minimi quadrati (Ordinary Least Squares). Questa tecnica di ottimizzazione (o regressione) permette di trovare una funzione che si avvicini il più possibile ad un insieme di dati. Il test del χ^2 è una verifica non parametrica a posteriori che si basa sulla minimizzazione della funzione omonima e fornisce una valutazione sull'accettabilità dell'ipotesi.

La distribuzione χ^2 , in statistica, fornisce un criterio per stabilire se ci sia connessione o meno tra due caratteri statistici qualitativi, ed è definita come la somma dei quadrati dei residui pesati Δ_i :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2. \quad (3.1)$$

Se l'andamento dei dati sperimentali si può descrivere tramite l'espressione in forma chiusa $f_\lambda(l)$, dove λ sta per l'insieme dei parametri, l è la traiettoria di volo ed f è la coordinata che potrebbe essere misurata, un set di misurazioni m_i con deviazione standard σ_i potrà fornire una stima dei parametri secondo il principio dei minimi quadrati ponendo:

$$\Delta_i^2 = \frac{(m_i - f_\lambda(l_i))^2}{\sigma_i^2}. \quad (3.2)$$

Il valore del χ^2 corrispondente fornirà una misura sulla correttezza del set di parametri stesso.

I parametri di output possono essere visti come coordinate di uno spazio N-dimensionale. In questo spazio, il punto di minimo globale del χ^2 corrisponde ai valori di output più vicini ai valori attesi. Data l'esistenza di possibili minimi locali, un modo per accertarsi che il minimo trovato sia quello globale è fornito dal metodo Minuit (Function Minimization and Error Analysis), ovvero un insieme di librerie usate in programmi di analisi dati per la ricerca di minimi di funzioni a più parametri e per analizzare la forma di una funzione nell'intorno di un suo minimo. L'idea dietro questo codice, consiste nel variare sistematicamente la posizione nello spazio N-dimensionale dei parametri liberi e di calcolare, per ogni punto considerato, il valore dei χ^2 . Ogni minimo così ottenuto deve essere sottoposto a un algoritmo decisionale attraverso il quale viene accettato come minimo globale o scartato.

La ricostruzione globale della traccia dei frammenti viene eseguita combinando i risultati dei rilevatori Vertex, Inner Tracker e Micro Strip. Durante il tracciamento del Vertex, ad esempio, la particella attraversa quattro piani di rilevamento (M28, appartenenti alla famiglia dei sensori monolitici a pixel attivi), dalle quali è possibile estrapolare 4 "hit", ovvero 4 vettori con coordinate $m_i = (x_i, y_i)$ e $l_i = z_i$. Nell'atto pratico, la traccia è parametrizzata separatamente sulle due visioni (X,Z) e (Y,Z) e vengono eseguiti due diversi fit lineari:

$$X_i = x_0 + t_x z_i, \quad (3.3)$$

$$Y_i = y_0 + t_y z_i, \quad (3.4)$$

dove $\lambda = (x_0, y_0, t_x, t_y)$ sono i parametri liberi. Le distribuzioni dei χ^2 corrispondenti sono:

$$\chi_x^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(x_i - (x_0 + t_x z_i))^2}{(\sigma_{i,x})^2}, \quad (3.5)$$

$$\chi_y^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(y_i - (y_0 + t_y z_i))^2}{(\sigma_{i,y})^2}. \quad (3.6)$$

Inizialmente, si prenda in considerazione solo la visione (X,Z), minimizzando l'equazione 3.5, secondo il metodo dei minimi quadrati, ponendo $\nabla \chi^2 = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(\chi_x^2) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\sum_{i=1}^4 \frac{(x_i - (x_0 + t_x z_i))^2}{(\sigma_{i,x})^2} \right] = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_x}(\chi_x^2) = \frac{\partial}{\partial t_x} \left[\sum_{i=1}^4 \frac{(x_i - (x_0 + t_x z_i))^2}{(\sigma_{i,x})^2} \right] = 0, \quad (3.8)$$

si ottengono le miglior stime dei parametri:

$$\hat{x}_0 = \frac{\overline{z^2} \cdot \bar{x} - \bar{z} \cdot \overline{zx}}{\overline{z^2} - \bar{z}^2} \quad (3.9)$$

$$\hat{t}_x = \frac{\overline{zx} - \bar{z} \cdot \bar{x}}{\overline{z^2} - \bar{z}^2} \quad (3.10)$$

dove \bar{z} e \bar{x} corrispondono alle medie pesate:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{z_i}{(\sigma_{i,x})^2}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{(\sigma_{i,x})^2}} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{(\sigma_{i,x})^2}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{(\sigma_{i,x})^2}}. \quad (3.11)$$

La matrice di covarianza dei parametri \hat{x}_0 e \hat{t}_x , ottenuta invertendo la matrice Hessiana, è:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\overline{z^2}}{\sum_{i=1}^4 (1/\sigma^2)(\overline{z^2} - \bar{z}^2)} & \frac{-\bar{z}}{\sum_{i=1}^4 (1/\sigma^2)(\overline{z^2} - \bar{z}^2)} \\ \frac{-\bar{z}}{\sum_{i=1}^4 (1/\sigma^2)(\overline{z^2} - \bar{z}^2)} & \frac{1}{\sum_{i=1}^4 (1/\sigma^2)(\overline{z^2} - \bar{z}^2)} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

dove σ è la risoluzione dei semipiani (uguale per tutti i piani), i termini diagonali rappresentano le varianze di \hat{x}_0 e \hat{t}_x , mentre quelli fuori dalla diagonale la loro covarianza:

$$\sigma(\hat{x}_0) = \frac{\sqrt{\overline{z^2}}\sigma}{\sqrt{4}\sqrt{(\overline{z^2} - \bar{z}^2)}}, \quad (3.13)$$

$$\sigma(\hat{t}_x) = \frac{\sigma}{\sqrt{4}\sqrt{(\overline{z^2} - \bar{z}^2)}}, \quad (3.14)$$

$$cov(\hat{x}_0, \hat{t}_x) = -\frac{\sqrt{\bar{z}}\sigma}{\sqrt{4}\sqrt{(\overline{z^2} - \bar{z}^2)}}. \quad (3.15)$$

Lo stesso procedimento viene eseguito anche per la vista y-x. I coefficienti angolari della traccia appena stimati vengono poi utilizzati per inizializzare il vettore dello stato del fit Kalman.

3.2 Filtro di Kalman

Il filtro di Kalman è un algoritmo ricorsivo che utilizza una serie di dati osservati nel tempo, che possono contenere rumore e altre imprecisioni, per valutare lo stato

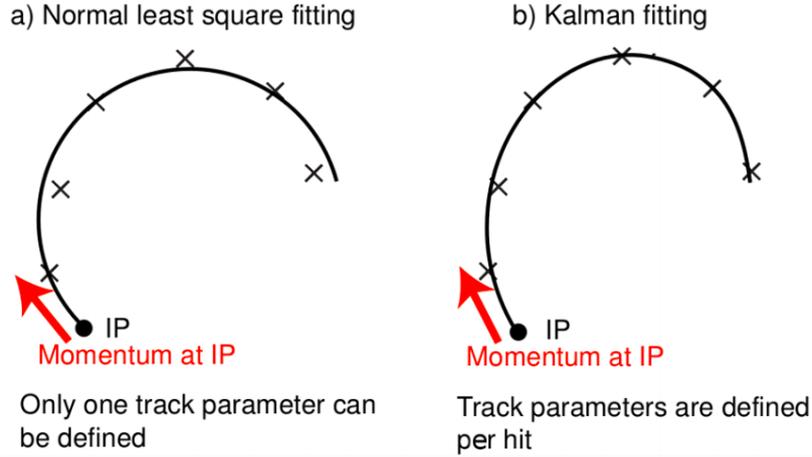


Figura 3.1: Confronto tra il test del chi quadro e il filtro di Kalman [22].

di un sistema dinamico e stimare variabili sconosciute con maggiore precisione. Il filtro consiste in un set di equazioni matematiche che fornisce un'efficiente soluzione computazionale del metodo dei minimi quadrati.

La differenza fondamentale dal test del χ^2 è che con questo metodo i parametri della traccia vengono aggiornati man mano che vengono aggiunti nuovi punti di misurazione, ed è possibile quindi tenere in considerazione anche lo scattering multiplo di Coulomb e la perdita di energia, mentre il test precedente, non essendo un processo iterativo, lavora con l'insieme dei dati completi.

Si consideri una traccia costituita da n punti ("hit"), il filtro affronta il problema generale di stimare lo stato $x \in \mathbb{R}^n$ del processo controllato a tempo discreto, governato dall'equazione lineare [23]:

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_k; \quad (3.16)$$

con una misura $z \in \mathbb{R}^m$ definita:

$$z_k = H x_k + v_k. \quad (3.17)$$

Nelle equazioni appena mostrate x_k e z_k sono rispettivamente il vettore di stato e il vettore di osservazione, le variabili casuali Gaussiane w_k e v_k sono rispettivamente il vettore di rumore del sistema e il vettore di rumore dell'osservazione (ad esempio lo scattering multiplo), A_k è la matrice $n \times n$ di transizione di stato, B_k è la matrice $n \times l$ legata al vettore di controllo del sistema u_{k-1} , e infine H_k è la matrice $m \times n$ di osservazione.

Le variabili stocastiche w_k e v_k , che vengono supposte indipendenti tra loro, definite positive, simmetriche, di rumore bianco e a media nulla, soddisfano:

$$E(w) = 0, \quad cov(w) = E[ww^T] = Q \quad (3.18)$$

$$E(v) = 0, \quad cov(v) = E[vv^T] = R \quad (3.19)$$

$$E[ww^T] = 0. \quad (3.20)$$

dove con $E(x)$, in teoria delle probabilità, si indica il valore atteso (o media, o ancora speranza matematica) di una variabile casuale x .

L'algoritmo di Kalman discreto lavora con un processo a due passi: il primo è definito dall'inclusione delle informazioni di misurazione di un "hit" k in un vettore di stato che contiene già le informazioni di tutti gli "hit" fino a $k - 1$ e produce la stima delle variabili di stato correnti, insieme alle loro incertezze (matrice di covarianza); il secondo è una fase di aggiornamento in cui le stime vengono aggiornate utilizzando una media ponderata, tramite minimizzazione del χ^2 , dando più peso alle stime con incertezza più piccola.

Si definisce x_k come il "vero" valore (ovviamente sempre incognito) del vettore di stato legato al piano dell'"hit" k , \hat{x}_k^- come la stima dello stato *a priori* allo step k data la conoscenza del processo fino alla k -esima "hit", e infine \hat{x}_k la stima *a posteriori* dello stato allo step k date le misurazioni z_k .

La formula di calcolo di \hat{x}_k è la combinazione lineare della stima *a priori* e della differenza ponderata tra misurazioni reali e valore misurato:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H_k\hat{x}_k^-), \quad (3.21)$$

dove la differenza ($z_k - H_k\hat{x}_k^-$) è chiamata l'innovazione di misura, o il residuo. Il residuo dà una qualche misura della discrepanza tra le stime teoriche $H_k\hat{x}_k^-$ e le reali misurazioni z_k . Un residuo nullo implica che le due stime coincidono.

Con queste notazioni si possono assumere gli errori *a priori* e *a posteriori*:

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^- \quad (3.22)$$

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k. \quad (3.23)$$

La covarianza dell'errore di stima *a priori* è:

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}], \quad (3.24)$$

mentre quella *a posteriori* è:

$$P_k = E[e_k e_k^T]. \quad (3.25)$$

Dalla teoria del filtro di Kalman, nel secondo passaggio dell'algoritmo si definiscono le seguenti equazioni di previsione:

$$\hat{x}_k^- = A_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_{k-1} \quad (3.26)$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_k \quad (3.27)$$

e di aggiornamento:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} = \frac{P_k^- H_k^T}{H_k P_k^- H_k^T + R_k} \quad (3.28)$$

$$\hat{x}_{k-1} = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-) \quad (3.29)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (3.30)$$

dove K_k è la matrice dei guadagni di Kalman e I la matrice unitaria.

CORREZIONE		PREDIZIONE
<p>(1) Calcolo del Guadagno $K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}$</p> <p>(2) Aggiornamento della stima con la misurazione $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-)$</p> <p>(3) Aggiornamento della covarianza dell'errore $P_k = (I - K_k H_k) P_k^-$</p>	<p>→</p> <p>←</p>	<p>(1) Previsione dello stato futuro $\hat{x}_k^- = A_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_{k-1}$</p> <p>(2) Previsione della covarianza dell'errore $P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_k$</p>

Tabella 3.1: Schematizzazione del filtro di Kalman; per iniziare il ciclo servono le stime iniziali di \hat{x}_k^- e P_k^- da cui è possibile calcolare il primo guadagno.

3.2.1 Filtro di Kalman esteso

Nella maggior parte dei casi sperimentali, così come avviene nell'esperimento FOOT, si trovano sistemi dinamici non lineari, a questo proposito è stato sviluppato il filtro di Kalman esteso.

Il suo algoritmo si basa sulla linearizzazione della stima attraverso un'approssimazione simile all'espansione di Taylor, utilizzando le derivate parziali delle funzioni di processo e di misurazione, anche a fronte di relazioni non lineari. L'espansione di Taylor, infatti, appartiene al processo lineare, quindi solo se lo stato del sistema e le equazioni di osservazione sono vicine ad essere lineari e continue i risultati

saranno relativamente vicini al valore vero. La matrice di covarianza dello stato del sistema e il rumore di osservazione rimangono invariati nel processo.

Questo filtraggio è un metodo consolidato nella fisica delle particelle e prevede ottime prestazioni nella ricostruzione della traccia e nella misurazione della quantità di moto; inoltre potendo combinare le informazioni provenienti da diversi tipi di rivelatori sfrutta appieno il design specifico di FOOT con tre diversi rivelatori distanziati da magneti che massimizzano le prestazioni di identificazione del momento.

Come accennato nell'introduzione al capitolo 3, nell'esperimento FOOT l'algoritmo considera ogni superficie del rivelatore, con un possibile "hit" di misura, come un diverso stato dell'equazione caratterizzato dall'insieme dei parametri.

Si consideri quindi il seguente vettore di stato $x \in \mathbb{R}^n$ e un processo governato da un'equazione stocastica non lineare [24]:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_k) \quad (3.31)$$

con una stima $z \in \mathbb{R}^m$:

$$z_k = h(x_k, v_k) \quad (3.32)$$

dove le variabili casuali w_k e v_k rappresentano il processo di misurazione del rumore, f è una funzione non lineare che mette in relazione lo stato al passo temporale $k - 1$ con lo stato al passo k , e la funzione non lineare h lega lo stato x_k alla stima z_k .

Si può definire l'approssimazione del vettore di stato in funzione della stima *a priori* dello stesso vettore come:

$$\tilde{x}_k = \hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (3.33)$$

e l'approssimazione del vettore di osservazione come:

$$\tilde{z}_k = h(\tilde{x}_k, 0). \quad (3.34)$$

Per stimare il processo si riscrivono le equazioni che lo governano nel modo seguente:

$$x_k \approx \tilde{x}_k + A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + W_k w_k, \quad (3.35)$$

$$z_k \approx \tilde{z}_k + H_k(x_k - \tilde{x}_k) + V_k v_k; \quad (3.36)$$

Si definisce ora la nuova notazione per l'errore, dipendente dal guadagno di Kalman K_k , come:

$$\hat{e}_k = K_k \tilde{e}_{z_k} \quad (3.37)$$

x_k	il vettore di stato
z_k	vettore di misurazione
\hat{x}_k	stima <i>a posteriori</i> dello stato allo step k
A	matrice Jacobiana delle derivate parziali di f rispetto a x , $A_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{x}_k, u_k, 0)$
W	matrice Jacobiana delle derivate parziali di f rispetto a w , $W_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{x}_k, u_k, 0)$
H	matrice Jacobiana delle derivate parziali di h rispetto a x , $H_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0)$
V	matrice Jacobiana delle derivate parziali di h rispetto a v , $V_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0)$

Tabella 3.2: Costanti e grandezze che compaiono nelle equazioni 3.35-3.36.

con

$$\tilde{e}_{z_k} \equiv z_k - \tilde{z}_k \approx H\tilde{e}_{x_k} + \eta_k, \quad (3.38)$$

$$\tilde{e}_{x_k} \equiv x_k - \tilde{x}_k \approx A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \epsilon_k \quad (3.39)$$

dove ϵ_k e η_k sono le nuove variabili stocastiche indipendenti con media zero e matrici di covarianza WQW^T e VRV^T .

Si esplicita inoltre l'equazione per la stima dello stato *a posteriori* per il processo non lineare:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \tilde{x}_k + \hat{e}_k = \tilde{x}_k + K_k \tilde{e}_{z_k} = \tilde{x}_k + K_k(z_k - \tilde{z}_k) \\ &= \tilde{x}_k + K_k(z_k - h(\tilde{x}_k, 0)). \end{aligned} \quad (3.40)$$

L'algoritmo aggiorna semi-analiticamente le matrici Jacobiane di trasporto insieme alla valutazione numerica dei parametri della traccia.

Le equazioni di previsione sono definite:

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (3.41)$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_k W_k^T \quad (3.42)$$

mentre quelle di aggiornamento sono:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \quad (3.43)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \quad (3.44)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- . \quad (3.45)$$

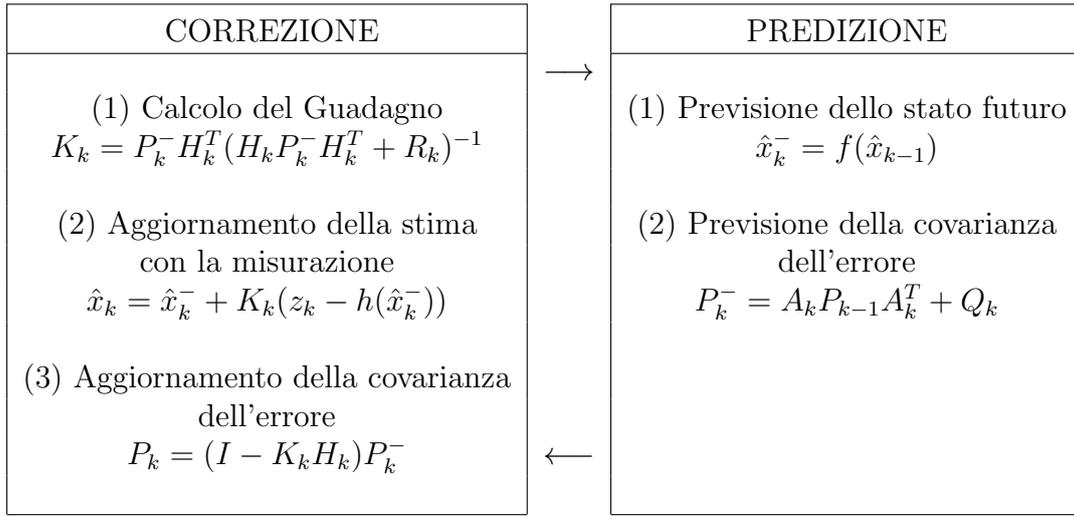


Tabella 3.3: Schematizzazione del filtro di Kalman esteso; per iniziare il ciclo servono le stime iniziali di x_0 e P_0 da cui è possibile calcolare il primo guadagno.

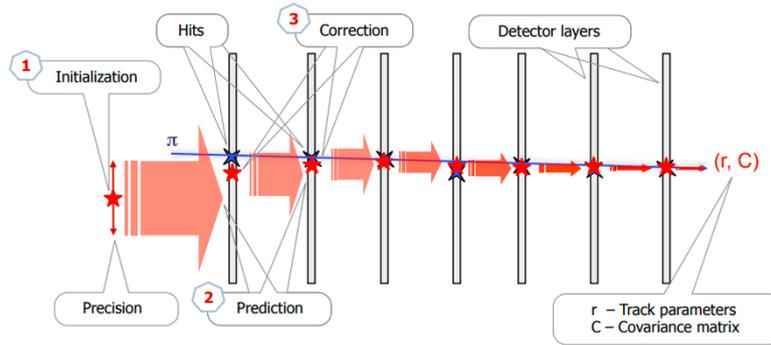


Figura 3.2: Visualizzazione grafica della stima del filtro di Kalman dei parametri della traccia in uno o più punti lungo la traccia.

L'efficacia del filtro risiede nel fatto che durante la fase di aggiornamento la matrice di covarianza si riduce ad ogni step grazie alle informazioni contenute nelle misurazioni, come mostrato in figura 3.2:

$$P_k < P_k^- . \quad (3.46)$$

Il filtro sfrutta la formula ricorsiva per migliorare la stima dello stato grazie all'accumulazione dei vettori di misura ed è iterato su tutte le misurazioni selezionate in ogni livello.

Alla fine della ricostruzione, una volta che il filtro è stato eseguito su tutti i risultati della traccia, per evitare che il risultato venga distorto da valori iniziali errati (denominati “seme”), si ripete la procedura all'indietro. L'algoritmo ricorsivo viene eseguito nella direzione opposta, ovverosia dall'ultimo rivelatore fino al Vertex, utilizzando i risultati degli adattamenti precedenti come valori iniziali.

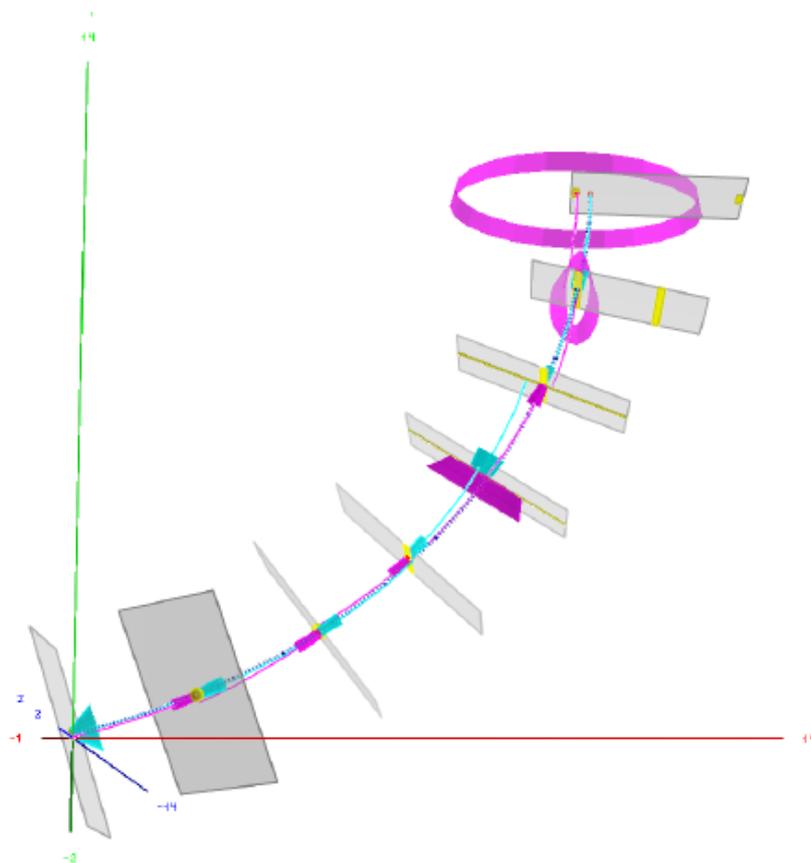


Figura 3.3: Fit “in avanti” (ciano) e “all'indietro” (magenta) con covarianze degli aggiornamenti di stato della traccia lungo i piani detector. Questo è un test tramite GENFIT e non rappresenta la geometria di FOOT [21].

Gli stati finali sono la media ponderata tra gli stati previsti del filtro “in avanti” e gli stati aggiornati del filtro “all’indietro”.

3.2.2 Filtro di Kalman Sigma-Point

Nello stesso caso non lineare, per trovare stime dello stato man mano che vengono acquisite nuove misure è possibile sfruttare anche il filtro di Kalman a Punti Sigma, che tende a fornire risultati più precisi rispetto al filtro esteso. È interessante studiarlo e notare le differenze con i filtri introdotti in precedenza.

La differenza principale è che in questo algoritmo la propagazione dell’errore è linearizzata da un punto di vista statistico, al contrario dell’espansione in serie di Taylor vista nel capitolo precedente. L’idea di base è che la media e la covarianza possano essere rappresentate da un certo numero di punti campionati adeguatamente nello spazio, detti Sigma Point. Questo permette una stima delle variabili con un modello del secondo ordine, e, in aggiunta, non è necessario che il rumore additivo sia gaussiano. Il vantaggio principale risiede inoltre nel fatto che il metodo non richiede il calcolo delle matrici Jacobiane e consente una stima migliore di media e deviazione standard del processo.

Una delle versioni del filtro a Punti Sigma è il filtro di Kalman Unscented (letteralmente “inodore”). Questo filtraggio è stato proposto da Julier e Uhlmann, ed è un’altra grande classe di metodi in cui si applica la strategia di campionamento vicino alla distribuzione non lineare [25]:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_k), \quad (3.47)$$

$$z_k = h(x_k, v_k). \quad (3.48)$$

dove, come nei paragrafi precedenti, k è il passo temporale, $x_k \in \mathbb{R}^n$ è il vettore di stato, $z_k \in \mathbb{R}^m$ è il vettore di osservazione, e w_k e v_k sono rispettivamente il vettore rumore di processo e quello di misura, f indica la funzione di stato, mentre h indica la funzione di misura che restituisce la stima delle osservazioni z_k .

Si presume che i termini di rumore w_k e v_k non siano correlati, abbiano medie nulle e matrici di covarianza Q_k e R_k , rispettivamente.

Così come in tutte le varianti del filtro di Kalman, anche in questa versione esiste una struttura con uno stato di predizione (stima *a priori*) e uno di correzione (stima *a posteriori* o di aggiornamento).

Si prenda in considerazione la propagazione della variabile casuale x (di dimensione n) attraverso la funzione non lineare f , e si indichi con \hat{x} la sua media e con P_x la sua covarianza. Per calcolare la statistica di x , si forma una matrice χ di $2n + 1$ campioni nello spazio degli stati (detti vettori sigma) χ_i , con corrispondenti pesi W_i :

$$\chi_{0,k} = \hat{x}_k, \quad (3.49)$$

$$\chi_{i,k} = \hat{x}_k + (\sqrt{(n+\lambda)P_{x_k}})_{i,k}^T, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.50)$$

$$\chi_{i+n,k} = \hat{x}_k - (\sqrt{(n+\lambda)P_{x_k}})_{i,k}^T, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.51)$$

$$W_0^m = \lambda/(\lambda+n), \quad W_i^m = 1/(2(\lambda+n)), \quad (i = 1, \dots, 2n) \quad (3.52)$$

$$W_0^c = W_0^m + (1 - \alpha^2 + \beta), \quad W_i^c = 1/(2(\lambda+n)), \quad (i = 1, \dots, 2n) \quad (3.53)$$

$$\text{con} \quad \lambda = \alpha^2(k+n) - n \quad (3.54)$$

$$\text{e tali che} \quad \sum_{i=0}^{2n} W_i = 1 \quad (3.55)$$

dove λ è un parametro di ridimensionamento, α determina la diffusione dei punti sigma attorno al valore medio \hat{x} (il suo valore di default è $\alpha = 1$), β viene utilizzato per incorporare la conoscenza precedente della distribuzione di x (per le distribuzioni gaussiane, $\beta = 2$ è ottimale), W_i^m e W_i^c rappresentano il valore ponderato del primo punto quando si risolvono la media e la varianza, e infine $(\sqrt{(n+\lambda)P_{x_k}})_i$ è la riga i -esima della radice quadrata della matrice simmetrica e definita positiva. Gli apici m e c indicano quali utilizzare nell'algoritmo per il computo rispettivamente delle medie e delle covarianze.

Il filtro deve essere inizializzato impostando un valore per la media dello stato, la sua covarianza e quelle dei rumori:

$$\hat{x}_0 = E[x_0] \quad (3.56)$$

$$P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \quad (3.57)$$

$$Q_0 = E[(w_0 - \hat{w}_0)(w_0 - \hat{w}_0)^T] \quad (3.58)$$

$$R_0 = E[(v_0 - \hat{v}_0)(v_0 - \hat{v}_0)^T] \quad (3.59)$$

e un valore per una nuova variabile chiamata stato aumentato $x^a \in \mathbb{R}^{n^a}$, con $n^a = n + q$, formata dallo stato x , e la sua matrice di covarianza:

$$\hat{x}_0^a = E[x^a] = [\hat{x}_0^T, 0, 0]^T \quad (3.60)$$

$$P_0^a = E[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T] \quad \text{per } k \in 1, \dots, \infty. \quad (3.61)$$

La covarianza aumentata, costruita dalle matrici di covarianza dello stato $P_{x_k, (n \times n)}$ e dei rumori, risulta:

$$P_{x_k}^a = \begin{pmatrix} P_{x_k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

e rappresenta l'incertezza associata allo stato aumentato x_k^a .

Il primo passo è la selezione dei punti sigma χ_k^a che rappresentano la distribuzione *a posteriori* della precedente stima dello stato \hat{x}_k^a . Questo può essere fatto nel modo seguente:

$$\chi_k^a = [\hat{x}_k^a, \hat{X}_k^a \pm \sqrt{(n + \lambda)P_{x_k}^a}] \quad (3.63)$$

in cui \hat{X}_k^a è una matrice quadrata $n \times n$:

$$\hat{X}_k^a = [\hat{x}_k^a, \dots, \hat{X}_k^a] \quad \text{con} \quad \hat{X}_k^a \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3.64)$$

Di conseguenza, le equazioni di previsione si possono esprimere come:

$$\chi_k^- = f(\chi_{k-1}^-, u_{k-1}) \quad (3.65)$$

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2n-1} W_i^m \chi_{i,k}^- \quad (3.66)$$

$$P_{x_k}^- = \sum_{i=0}^{2n-1} W_i^c (\chi_{i,k}^- - \hat{x}_k^-)(\chi_{i,k}^- - \hat{x}_k^-)^T + Q_k. \quad (3.67)$$

È utile modificare questo insieme di punti sigma, includendo le informazioni sul rumore di processo presente in Q_k (e quindi in $P_{x_k}^-$):

$$\chi_k^- = [\hat{x}_k^-, \hat{X}_k^- \pm \sqrt{(n + \lambda)P_{x_k}^-}] \quad (3.68)$$

dove \hat{X}_k^- è una matrice quadrata $n \times n$ tale che:

$$\hat{X}_k^- = [\hat{x}_k^-, \dots, \hat{X}_k^-] \quad \text{con} \quad \hat{X}_k^- \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3.69)$$

La trasformazione non lineare h deve essere applicata all'insieme dei punti sigma, che porta all'output stimato \hat{z}_k ; in questo passo risiede il principio dell'*Unscented transformation*:

$$Z_k^- = h(\chi_k^-, u_k) \quad (3.70)$$

$$\hat{z}_k^- = \sum_{i=0}^{2n-1} W_i^m Z_{i,k}^- \quad (3.71)$$

$$P_{z_k}^- = \sum_{i=0}^{2n-1} W_i^c (Z_{i,k} - \hat{z}_k)(Z_{i,k} - \hat{z}_k)^T + R_K \quad (3.72)$$

$$P_{x_k, z_k}^- = \sum_{i=0}^{2n-1} W_i^c (X_{i,k} - \hat{x}_k)(Z_{i,k} - \hat{z}_k)^T \quad (3.73)$$

Questo permette di definire il guadagno di Kalman K_k e, successivamente, la ponderazione della differenza tra l'output stimato e l'output misurato. L'aggiornamento della misura e la correzione consiste nel calcolo dello stato stimato *a posteriori* e della relativa covarianza:

$$K_k = P_{x_k, z_k}^- P_{z_k}^{-1} \quad (3.74)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - \hat{z}_k) \quad (3.75)$$

$$P_{x_k} = P_{x_k}^- - K_k P_{z_k} K_k^T \quad (3.76)$$

$$\hat{x}_k^a = E[x_k^a] \quad (3.77)$$

$$P_{x_k}^a = E[(x_k^a - \hat{x}_k^a)(x_k^a - \hat{x}_k^a)^T] \quad (3.78)$$

3.3 Ricostruzione del momento

Il filtro di Kalman esteso dovrebbe consentire una risoluzione del momento $\sigma(p)/p$ al livello del 5%, sufficiente a migliorare la separazione degli isotopi attraverso la misurazione del numero di massa A e a soddisfare gli obiettivi fisici dell'esperimento FOOT [20]. Per verificare e ottimizzare la risoluzione del momento angolare sono stati simulati una serie di campioni attraverso il metodo Monte Carlo. Per ogni evento, le misurazioni eseguite dai rilevatori oltre il bersaglio vengono usate per la ricostruzione della traccia attraverso raccolte indipendenti di "hit" appartenenti allo stesso frammento. L'algoritmo di Kalman usato per il tracciamento presenta, per tutti i frammenti di interesse, un'efficienza di pattern recognition del 99%.

Per lo studio è stato utilizzato un campione simulato di un proiettile di ^{16}O con 200, 350 e 700 MeV/n che colpisce un bersaglio di C_2H_4 . Il confronto tra la quantità di moto generata dai frammenti (verde) e quella corrispondente ricostruita (rosso) è riportato in figura 3.4. Nella figura, tutte le distribuzioni presentano dei picchi che corrispondono ai diversi frammenti considerati. Le distribuzioni della quantità di moto ricostruita sono compatibili con quella generata nonostante i picchi siano meno distinti.

Per stimare la risoluzione dell'impulso relativo $\sigma(p)/p$, la quantità $(p_{gen} - p_{rec})/p_{gen}$ viene plottata in bin della quantità di moto generata larghi 200 MeV e viene fittata utilizzando una funzione gaussiana senza alcun background. Se

la distribuzione di un dato bin ha un'incertezza maggiore del 10%, il bin viene scartato.

In figura 3.5 è possibile osservare la risoluzione della quantità di moto in funzione del momento generato dalla simulazione Monte Carlo, per proiettili di ^{16}O da 200, 350 e 700 MeV/n . Questa risoluzione preliminare del momento varia dal 4,5% al 5,5%, non lontana dall'obiettivo dell'esperimento. Nell'estremità inferiore, in corrispondenza a quantità di moto minori, la risoluzione è limitata dallo Scattering Multiplo nei materiali del rivelatore, mentre sembra essere guidata dalla risoluzione del sistema di tracciamento ai momenti più elevati.

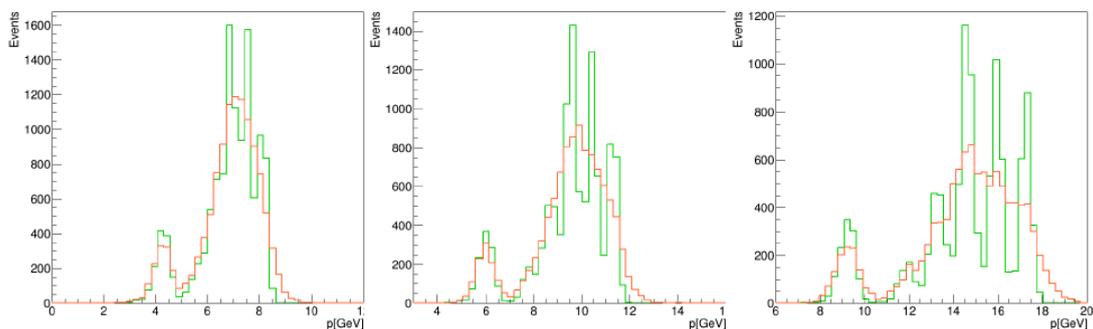


Figura 3.4: Distribuzione dell'impulso generata (verde) e ricostruita (rosso) dei frammenti considerati in ciascun evento per un proiettile di Ossigeno di 200 MeV/n (sinistra), di 350 MeV/n (centro) e di 700 MeV/n (destra).

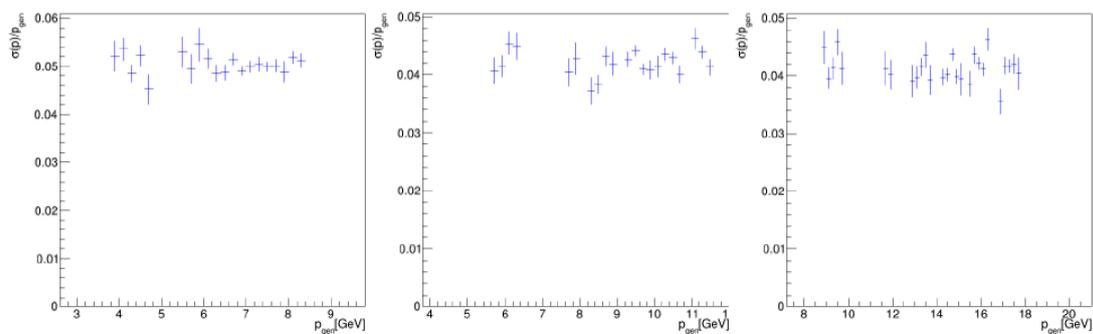


Figura 3.5: Risoluzione del momento differenziale in funzione del momento generato per un proiettile di Ossigeno di 200 MeV/n (sinistra), di 350 MeV/n (centro) e 700 MeV/n (destra).

Conclusioni

L'obiettivo dell'esperimento FOOT è stimare con incertezze minori del 5% le sezioni d'urto relative alla frammentazione nucleare durante l'interazione tra ioni carichi e tessuti biologici. L'esperimento utilizza la cinematica inversa per superare le difficoltà sul rilevamento dei frammenti e, per questioni logistiche, è costituito da due setup: il primo studiato per l'utilizzo di frammenti pesanti ($Z \geq 3$) e il secondo per frammenti leggeri ($Z \leq 2$). Le stime delle sezioni d'urto differenziali, utili per studi oncologici e di radioprotezione, si basano su una buona ricostruzione della traccia, ovvero sull'identificazione dei parametri cinetici dei frammenti. L'apparato sperimentale per i frammenti pesati, dopo il bersaglio, è costituito da diversi rilevatori dedicati al tracciamento: il Vertex, il Inner Tracker e l'Outer Tracker (formato da Microstrip Detector). Il setup per frammenti leggeri sostituisce questi rilevatori con uno spettrometro ad emulsione con il medesimo scopo: fornire campioni di dati con alta precisione sul passaggio dei frammenti generati nell'urto con il bersaglio. L'elaborazione di questi dati è eseguita da un framework basato su ROOT, dove il codice per la ricostruzione della traccia utilizza un algoritmo di filtro di Kalman implementato dalla libreria esterna GENFIT.

Questo elaborato si sofferma sull'analisi del codice di ottimizzazione della ricostruzione degli eventi attraverso i punti ("hit") registrati, e in particolar modo sull'utilizzo dell'algoritmo di filtro di Kalman esteso.

Il filtro di Kalman è un algoritmo ricorsivo che viene aggiornato man mano che vengono aggiunti nuovi punti di misurazione e lavora con un processo a due passi: il primo è definito dall'inclusione delle informazioni dei punti fino alla k-esima misurazione e il secondo dall'aggiornamento delle stime con le relative incertezze. Le prime stime dei parametri della traccia sono fornite attraverso il metodo dei minimi quadrati e vengono utilizzati per inizializzare il vettore dello stato del fit Kalman. Ogni piano del rivelatore con un possibile "hit" di misura viene considerato come un diverso step dell'equazione di stato. Il filtro sfrutta la formula ciclica per migliorare la stima dello stato ed è possibile eseguirlo anche in direzione opposta per diminuire l'incertezza sui primi punti.

L'uso del filtro di Kalman nella ricostruzione delle tracce, condotta su eventi Monte Carlo, conduce ad una efficienza di pattern recognition in media superiore

al 99% e ad una ricostruzione del momento, sugli ioni di interesse ($3 \leq Z \leq 8$), con una precisione attorno al 4%. Tale precisione sull'impulso permette poi la misura delle sezioni d'urto d'interesse all'esperimento FOOT con precisioni migliori del 5%, come da progetto.

Bibliografia

- [1] AIOM (Associazione Italiana di Oncologia Medica). «I numeri del cancro in italia 2022». In: *Intermedia Editore* (2022) (cit. a p. 3).
- [2] Kuppusamy Thayalan. *Medical X-ray Film Processing*. Jaypee Brothers Medical Publishers, 2020 (cit. a p. 7).
- [3] Anders Brahme. *Comprehensive biomedical physics*. Newnes, 2014 (cit. a p. 7).
- [4] Handel Davies, H. A. Bethe e L. C. Maximon. «Theory of Bremsstrahlung and Pair Production. II. Integral Cross Section for Pair Production». In: *Phys. Rev.* 93 (4 1954), pp. 788–795. DOI: 10.1103/PhysRev.93.788. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.93.788> (cit. a p. 8).
- [5] Neal Jay Carron. *An introduction to the passage of energetic particles through matter*. Taylor& Francis, 2006 (cit. a p. 8).
- [6] Sylvie Braibant, Giorgio Giacomelli e Maurizio Spurio. *Particelle e interazioni fondamentali: Il mondo delle particelle*. Springer Science & Business Media, 2012 (cit. a p. 9).
- [7] Claude Leroy. «Radiation interaction in matter and principles of detection». In: *AIP Conference Proceedings* 958.1 (2007), pp. 85–91. DOI: 10.1063/1.2825838. eprint: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.2825838>. URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.2825838> (cit. a p. 9).
- [8] Herman Suit et al. «Proton vs carbon ion beams in the definitive radiation treatment of cancer patients». In: *Radiotherapy and Oncology* 95.1 (2010), pp. 3–22 (cit. alle pp. 11, 16).
- [9] William R Leo. *Techniques for nuclear and particle physics experiments: a how-to approach*. Springer Science & Business Media, 2012 (cit. alle pp. 12, 15).
- [10] JD Bowman, WJ Swiatecki e CF Tsang. «Abrasion and ablation of heavy ions». In: (1973) (cit. a p. 12).

- [11] HL Bradt e B Peters. «The heavy nuclei of the primary cosmic radiation». In: *Physical Review* 77.1 (1950), p. 54 (cit. a p. 12).
- [12] Jack Valentin. «Relative biological effectiveness (RBE), quality factor (Q), and radiation weighting factor (wR): ICRP Publication 92». In: *Annals of the ICRP* 33.4 (2003), pp. 1–121 (cit. a p. 15).
- [13] BS Rao. «Handbook of radiobiology». In: *Journal of Medical Physics* 42.3 (2017), p. 194 (cit. a p. 19).
- [14] David S Chang et al. «Oxygen Effect, Relative Biological Effectiveness, and Linear Energy Transfer». In: *Basic Radiotherapy Physics and Biology* (2021), pp. 255–260 (cit. a p. 19).
- [15] SVS Deo, Jyoti Sharma e Sunil Kumar. «GLOBOCAN 2020 Report on Global Cancer Burden: Challenges and Opportunities for Surgical Oncologists». In: *Annals of Surgical Oncology* (2022), pp. 1–4 (cit. a p. 20).
- [16] Franco Ferrari e Ewa Szuszkiewicz. «Cosmic rays: a review for astrobiologists». In: *Astrobiology* 9.4 (2009), pp. 413–436 (cit. a p. 22).
- [17] *NCRP: Report No. 132 – Radiation Protection Guidance for Activities in Low-Earth Orbit*. 2000 (cit. a p. 23).
- [18] Luca Lunati e Valerio Parisi. «Viaggi interplanetari: possibili nonostante le radiazioni?» In: (2020) (cit. a p. 24).
- [19] A Alexandrov et al. «The FOOT experiment: fragmentation measurements in particle therapy». In: *RADIATION & APPLICATION* 3.3 (2019), pp. 190–196 (cit. a p. 29).
- [20] *FOOT Conceptual Design Report*. 2018 (cit. alle pp. 29, 51).
- [21] Johannes Rauch e Tobias Schlüter. «GENFIT—a generic track-fitting toolkit». In: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 608. 1. IOP Publishing, 2015, p. 012042 (cit. alle pp. 37, 47).
- [22] Keisuke Fujii. «Extended kalman filter». In: *Reference Manual* 14 (2013) (cit. a p. 41).
- [23] Felix Govaers. *Introduction and implementations of the Kalman filter*. BoD—Books on Demand, 2019 (cit. a p. 41).
- [24] Greg Welch, Gary Bishop et al. «An introduction to the Kalman filter». In: (1995) (cit. a p. 44).
- [25] Simon J Julier e Jeffrey K Uhlmann. «New extension of the Kalman filter to nonlinear systems». In: *Signal processing, sensor fusion, and target recognition VI*. Vol. 3068. Spie. 1997, pp. 182–193 (cit. a p. 48).