Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Sir William Rowan Hamilton: il Numero nella Scienza del Tempo Puro

Tesi di Laurea in STORIA DELLA MATEMATICA

Relatore:
Prof. SALVATORE COEN

Presentata da:
LUCA MONTELPARE

II Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Figlio, sin dalla giovinezza ricerca l'istruzione
e fino alla vecchiaia troverai la sapienza.
Ascoltami, figlio, e impara la scienza,
e nel tuo cuore tieni conto delle mie parole.
(Siracide 6, 18 - 16, 24)

Introduzione

"Non stupitevi se mi vedete occuparmi di storia e magari di filosofia: questa non è che l'altra faccia dell'onesto lavoro dello scienziato."
(F.Enriques)

La tesi si dedica alla conoscenza dell'opera e degli studi in algebra di William Rowan Hamilton, forse il più insolito tra i precursori della costruzione dei reali e il più "curioso" algebrista e studioso dei fondamenti dell'algebra tra i matematici inglesi di metà Ottocento. Nel 1835 all'incontro annuale della British Association a Dublino, egli presenta la prima delle sue due opere di algebra (un lungo articolo, intitolato "*Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; With a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as tha Science of Pure Time*"), in cui raccoglie le sue idee risalenti a una decina di anni prima, riguardo all'interpretazione dei numeri complessi, ma con una ampia introduzione sui fondamenti dell'algebra, sulla introduzione e sulla costruzione del Numero. Alcuni risultati sui logaritmi complessi, mostrati dal matematico T.J.Graves, spingono Hamilton a indagare la natura e l'interpretazione dei numeri immaginari, cercando così di rispondere allo stesso problema dei numeri interi, cioè di spiegare il significato teorico di alcuni simbolismi, ancora "misteriosi" per i matematici tra il XVIII e il XIX secolo. Questo tentativo (in parte condiviso con altri colleghi della scuola britannica) motiva lo studio di approfondire le convinzioni filosofiche per poter dare un significato teorico e un fondamento metafisico alla Scienza dell'algebra e al Numero. Nell'introduzione generale (*General Introductory Remarks*) si trova una interessante, o stravagante, interpretazione dell'algebra, mentre nel saggio preliminare (*Preliminary and Elementary Essay on Algebra As the Scienza of Pure Time*) si costrusce il concetto di numero, dai numeri interi e le frazioni fino ai reali, a partire dalla originale visione hamiltoniana dell'algebra.

Il primo capitolo presenta alcuni tratti della vita del matematico irlandese, considerando la sua formazione e i suoi studi, con attenzione all'Hamilton algebrista, all'interno del panorama matematico della prima metà dell'Ottocento, in rapporto agli algebristi inglesi contemporanei (tra cui G. Peacock, A. De Morgan, D.F. Gregory, J. Graves), che si dedicano alla discussione sui fondamenti dell'algebra. Diverse posizioni e "scuole", si confrontano in merito alle funzioni e interpretazioni degli oggetti e dei metodi di studio dell'algebra, pensata come *linguaggio*, in un approccio sintattico e simbolico, o come *scienza della grandezza in quanto tale*, nell'approccio hamiltoniano fortemente teorico e metafisico[1].

La convinzione di Hamilton risente del pensiero della filosofia di Kant, di cui approfondisce la *Critica della Ragion Pura*, e di una precisa visione della *Scienza*[2] condivisa con il poeta inglese S.T. Coleridge. Dal filosofo tedesco, viene prenda a fondamento di tutta l'algebra l'*intuizione del Tempo Puro*, così la costruzione del concetto di *Numero*, in accordo con l'interpretazione di Kant, è possibile a partire dalle verità intuitive di Tempo e di Ordine nella Progressione del Tempo. Da questo presupposto nasce l'identificazione dell'algebra come *Scienza del Tempo Puro*.

Hamilton espone le sua convinzioni ed affronta lo studio della Scienza del Tempo Puro nell'introduzione generale e nel saggio preliminare, a cui è dedicato l'intero secondo capitolo. In questa parte vengono presentati i concetti fondanti di *momento* dato nel Tempo e di *steps* temporali, che sono particolari relazioni tra momenti, da cui discendono i numeri interi, le frazioni e i numeri reali stessi, pensati come particolari rapporti tra steps; inoltre

[1]Nelle diverse scuole l'algebra si avvia comunque verso la sua natura simbolica, astratta, anche di tipo logico.

[2]La Scienza è ritenuta possibile solo se fondata sulla Verità , che è essenzialmente spirituale, di cui la Ragione è fonte e sostanza.

vengono affrontate le questioni relative all'ordinamento nei numeri e alla continuità, che entrambe derivano dai concetti intuitivi di *Ordine nel Tempo* e di *continuità della Progressione nel Tempo.* Nella sua trattazione Hamilton offre una particolare costruzione e definizione di "numero algebrico"[3], che verrà generalizzato al caso di coppie, terne ed n-uple di numeri, interpretati come segni di particolari relazioni tra coppie (e rispettivamente terne, $n+1$-uple) di relazioni tra steps temporali. Con tale definizione e con il linguaggio, seppure poco rigoroso, viene affrontata la distinzione tra commensurabilità e incommensurabilità , la continuità del campo dei reali e la loro costruzione come sezione del campo razionale.

Il terzo capitolo si concentra, infine, sulla discussione riguardo ai contributi di Hamilton come "precursore" dei reali, osservando gli argomenti precocemente moderni e gli elementi di novità nel suo approccio algebrico; dunque, si riconoscono le potenzialità e i limiti del pensiero e del lavoro di Hamilton, in confronto con la sua scoperta più famosa dei quaternioni, rispetto alla quale rimane oscuro il tentativo di fondare sul Tempo l'algebra e le costruzioni del Numero e del numero reale. I contributi possono essere sintetizzati in due aspetti: da un lato l'attribuzione dell'importanza dell'approccio e degli studi hamiltoniani per il futuro sviluppo dell'algebra astratta e la nascita di strutture algebriche non standard, di cui i quaternioni (che sono comunque frutto delle idee e del lavoro di Hamilton sull'algebra come Scienza del Tempo Puro) rappresentano uno degli esempi più notevoli; dall'altro il riconoscimento delle anticipazioni, seppure con linguaggi e metodi poco rigorosi e privi di dimostrazioni complete, riguardo ai concetti di continuità e di introduzione dei reali come sezione del campo razionale o come coppie di classi contigue, a cui gli argomenti hamiltoniani sono vicini, al punto da suggerire una domanda sull'esistenza di legami o influenze di Hamilton ai matematici successivi, come R. Dedekind, nella costruzione dei reali.[4]

[3]Il termine *algebrico* in Hamilton assume un significato differente dal consueto senso matematico. Numero algebrico nella Scienza del Tempo Puro è il numero, dato come rapporto di steps.

[4]Questa domanda è accolta da alcuni storici. Per esempio Pellicer in [13] propone il

Le conseguenze effettive della Scienza del Tempo Puro non sono state importanti e riconosciute da essere ricordate e apprezzate, per i limiti dell'opera, dovuti alle conoscenze di Hamilton, matematico di metà del XIX secolo e portatore di originali fondamenti metafisici; inoltre le critiche dei colleghi, sulle restrizioni del suo approccio, spingono Hamilton a non approfondire dell'algebra come Scienza del Tempo Puro. Così la validità storica dei contributi di Hamilton si trova in una lettura a posteriori, dovuta ad un ritorno di interesse nella discussione sui fondamenti nel XX secolo, in particolare attorno al programma dell'Intuizionismo, con cui la Scienza Pura trova molte affinità , ma senza un legame diretto.

Le pagine della Storia e della Filosofia della Matematica, che si dedicano ad Hamilton algebrista, iniziano proprio da questo ritorno di interesse e dalla considerazione del suo ruolo come esempio di matematico moderno, nello sviluppo dell'algebra astratta. La tesi condivide questo interesse, cercando di richiamare la sua influenza nella costruzione del numero reale; nelle parole di R. Dedekind si intuisce, infatti, che il lavoro di Hamilton, seppure senza sostenitori e prosecutori, ha prodotto qualche eco, da cui il matematico tedesco dichiara la propria distanza:

"*Nel concepire l' aritmetica (algebra, analisi) soltanto come una parte della logica io intendo già di considerare il concetto di numero come del tutto indipendente dalle rappresentazioni o idee dello spazio e del tempo e di riconoscere piuttosto in questo concetto una emanazione diretta delle pure leggi del pensiero*"[5].

L'intenzione di Dedekind è centrale per comprendere e collocare storicamente l'importanza del suo lavoro (nello sviluppo del concetto di coninuità e di numero reale); se l'idea di spazio conduce a pensare all'approccio geometrico, in particolare euclideo, il "tempo" può , invece, ricordare il tentativo hamiltoniano e l'unico esempio di scienza matematica del Tempo.

confronto con le sezioni di Dedekind.

[5] [5], pp. 1 - 118, 119 - 303.

Indice

Capitolo 1

Sir William Rowan Hamilton

Matematico, fisico e astronomo, William Rowan Hamilton è tra gli scienziati inglesi più importanti del XIX secolo. La sua vita, gli interessi e gli studi sono noti, seppure la sua fama ha avuto diverse vicissitudini; durante la propria carriera Hamilton è certamente famoso ma poco compreso e accettato, mentre solo nel ventesimo secolo ritornano interesse e apprezzamento per il suo lavoro.[1]
Nel panorama scientifico dagli anni trenta agli anni sessanta del XIX secolo Hamilton spazia dalla fisica alla matematica, coltivando interessi e studi di filosofia e poesia; così la sua figura di scienziato è interessante e poliedrica. Il suo percorso personale e accademico lo conduce a risultati importanti in diversi campi; in particolare il suo nome, come matematico, rimane legato alla scoperta dei *quaternioni*, "nuovi numeri che non obbediscono alla familiare legge commutativa dell'aritmetica ordinaria"[2] e che dunque ancora oggi rappresentano un oggetto storicamente curioso e un esempio di struttura algebrica non-stardand. La scoperta dei quaternioni ha radici profonde nel contesto matematico in cui avviene e nelle convizioni e intezioni algebriche dello scienziato.

[1][15], p. 49; [11], p. 25.
[2][6], p. 362.

Il primo capitolo racconta queste radici, a partire dalla vita e gli studi di Hamilton, ponendo attenzione ai suoi lavori di algebra e ai rapporti con gli altri matematici inglesi algebristi dell'ottocento; non secondari i suoi interessi e studi di filosofia e letteratura completano e motivano i lavori di algebra.

1.1 La vita e gli studi

Hamilton nasce a Dublino nel 1805 e muore nel 1865; il padre è avvocato e un suo zio sacerdote, in un piccolo paese vicino Dublino, si occupa della sua educazione fino all'età dell'Università , quando Hamilton torna nella capitale irladense nel 1823, per gli studi alla Trinity College. Fin dall'infanzia spiccano alcuni forti interessi per le lingue[3] e la matematica[4]. In giovane età Hamilton studia i *Principia* di Newton e la *Mécanique cèleste* di Laplace, coltivando interessi per l'astronomia e scrivendo rigurado all'ottica e alle proprietà di curve e superfici.
Dal 1827 è Astronomo Britannico al Dunsink Observatory (vicino Dublino) e Professore di Astronomia presso Trinity College. Gli studi e i primi lavori sono del 1827 Hamilton si occupa dei sistemi della meccanica e dell'ottica, pubblicando la sua opera principale di ottica, intitolata *Theory of a System of Rays* e presentata alla Royal Irish Academy nel 1827, ed altre opere di dinamica, tra cui *On a General Method in Dynamics* verso la fine degli anni venti. La riformulazione hamiltoniana della meccanica classica di Newton risale intorno al 1833, quando derivandola dalla meccanica lagrangiana[5], Hamilton giunge ad una nuova descrizione di un sistema meccanico classico, che prende il nome di *meccanica hamiltoniana.*

[3]Hamilton conosce a cinque anni Latino, Greco, Ebraico; aggiunge a otto anni Italiano e Francesce; ancora prima dei dieci anni Arabo e Sanscrito.

[4]A quindici anni, dopo l'amore per i classici e per la poesia, dichiara il suo interessa per i calcoli, svolti a mente, per lunghe operazioni aritmetiche e ogni cosa relativa alle proprietà dei numeri. (Hamilton citato da Whittaker in [15], p. 49).

[5]Lo studio di un sistema meccanico classico di Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) del 1788.

Figura 1.1: *Sir W.R. Hamilton*

Sempre tra gli anni venti e trenta, Hamilton inizia ad interessarsi di algebra, in particolare ai numeri complessi, coinvolto dal suo amico matematico irlandese John T.Graves (1806-1870), che cerca di costruire i logartmi per i numeri negativi e complessi.[6] Con Graves esiste un'intensa corrispondenza epistolare, in cui i due matematici si scambiano opinioni e risultati dei propri studi[7]; da questo rapporto viene il suggerimento di leggere l'opera di John Warren (1796-1852), *Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities* (1828), in cui è descritta la rappresentazione Argand dei numeri complessi come punti del piano reale. Hamilton rimane particolarmente interessato da questa rappresentazione dei complessi ed inizia ad approfondirla. Già negli anni venti scopre, indipendentemente da Augustin Louis Cauchy (1789-1857), le equazioni di Cauchy-Riemann[8],

[6]Gli studi di Graves risalgono agli anni 1826 e 1827 e coinvolgono Hamilton nell'approfondimento riguardo la natura, il significato e l'intepretazione dei negativi e dei complessi. (Vedere [6], p. 364).

[7]Lettera di Hamilton a Graves riportata da Ewald in [6], p. 365.

[8]Gli studi e i risultati indipendenti sono sostenuti da Hankins in [9] e da Ewald in [6], mostrando come Hamilton negli anni venti arriva ai risultati di Cauchy del 1821. Il lavoro di Hamilton sull'interpretazione e rappresentazione dei complessi viene pubblicato

che chiama *equazioni di coniugazione* e la rappresentazione di una funzione a variabile complessa come coppia di funzioni a variabile reale, chiamate *funzioni coniugate*; successiva a questi lavori è poi l'interpretazione dei complessi come coppie di numeri reali, da usare per indagare i problemi di Graves, relativi ai logartimi complessi. In tali studi di carattere algebrico Hamilton rafforza le sue convizioni sui fondamenti dell'algebra e le proprietà ordinali dei numeri; quindi dal 1830 fino alle edizioni nel 1837 vengono prodotte una serie di riflessioni e pubblicazioni sui lavori simultanei di fisica, algebra e filosofia. In particolare iniziano i suoi studi di metafisica e la discussione sul fondamento dell'algebra e delle scienze fisiche, raccolti nell'opera presentata alla Royal Irish Academy nel 1835, *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; With a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as tha Science of Pure Time*[9]. Le influenze del pensiero scientifico di Hamilton derivano dalla lettura dei lavori dei filosofi George Berkeley (1675-1753) e Rudjer Bošković (1711-1787) e del poeta inglese Samuel Taylor Coleridge (1772-1834), con cui si avvicina alla filosofia di Immanuel Kant (1724-1804). Nel 1835 Hamilton, intanto, riceve il titolo onorifico di cavalierato e viene eletto preside del Royal Irish Academy, mentre trascorre anni difficili di vita familiare e personale.

Negli anni quaranta inizia a studiare triple di numeri reali, fino alla scoperta nel 1843 dei quaternioni, a cui dedica il resto dei suoi studi. Segue ancora un periodo difficile per alcune vicende private, durante il quale continua gli studi e gli scritti sul calcolo dei quaternioni, con l'opera *Lectures on Quaternions*, pubblicata nel 1853, e il libro *Elements of Quaternions*[10], lasciato incompiuto e pubblicato dopo la sua morte, con l'introduzione a cura del figlio William Edwin Hamilton.

---

solo negli anni trenta. (Vedere [6], p. 365).

[9] Riguardo al pensiero di Hamilton, ai suoi studi e ai suoi lavori sui fondamenti dell'Algebra vedere il capitolo 2.

[10] È probabile che Hamilton avesse intenzione di rifarsi all'opera degli *Elementi* di Euclide.

1.2 Un algebrista dell'Ottocento

Agli inizi dell'Ottocento l'algebra ha già compiuto gran parte del suo sviluppo come disciplina autonoma e potente della Matematica. I suoi oggetti di studio e il suo metodo, come scienza della grandezza in generale e del numero, sono chiaramente distinti dalla Geometria; inoltre la sua storia ha conosciuto l'evoluzione di un linguaggio simbolico proprio e risultati fondamentali, riguardo alla manipolazione di equazioni e alla manipolazione di numeri. Qualcosa ancora presenta dubbi o oggetti il cui significato rimane oscuro, complesso o misterioso; il caso dei numeri negativi e dei numeri immaginari pone le nuove domande a un algebrista dell'Ottocento.
Per molti matematici si tratta dunque di fare chiarezza su tali questioni misteriose, meglio sul problema di quale relazione sussiste tra i *simboli* e gli *oggetti* dell'algebra.[11] In questo contesto nascono interessanti riflessioni; si presentano teorie e scoperte nuove[12] e si accreditano sempre più le due principali concezioni dell'algebra: l'estensione di tecniche algebriche alla logica simbolica[13] e lo sviluppo dell'algebra astratta[14].

1.2.1 Gli algebristi inglesi

I matematici inglesi durante gli anni venti e trenta dell'Ottocento mostrano un nuovo e rinnovato interesse per i fondamenti dell'algebra, cercando di

[11] [6], pp. 362, 363.

[12] Ewald presenta due esempi degli anni 40: la pubblicazione in Germania di H.G. Grassmann (1809-1877) della *Ausdehnungslehre* (o Teoria dell'Estensione) nel 1848; la scoperta di Hamilton dei quaternioni (1843). I due esempi mostrano i primi passi di nuovi approcci alla geometria e all'algebra, accomunati da una scarsa comprensione e considerazione durante gli anni dei studio e di pubblicazione dei propri risultati. L'opera di Grassmann diviene centrale nella caratterizzazione dei fondamenti della geometria, introducendo novità nel calcolo vettoriale - ad esempio le operazioni di prodotto esterno e prodotto vettoriale -. ([6], p. 362).

[13] G. Boole (1815-1864), C.S. Peirce (1839-1914), E. Schröder (1841-1902). ([6], p. 363).

[14] A. Cayley (1821-1895), J.J. Sylvester (1814-1897), W.K. Clifford (1845-1879), J.W. Gibbs (1839-1903), J.W.R. Dedekind (1831-1916). ([6], p. 363).

rispondere alle questioni riguardo ai concetti dell'algebra, in particolare il concetto di numero: da dove derivano e come si usano. I fondamenti logici e metafisici dell'algebra hanno un urgente bisogno di revisione.[15] L'algebra, che nel XVII e XVIII secolo si è sviluppata come generalizzazione dell'aritmetica, pone l'esigenza di dare significato ai suoi simboli, alle relazioni tra gli oggetti e le operazioni, ai numeri, alle quantità non conosciute e alla generalizzazione di equazioni aritmetiche.

Il compito di cercare i fondamenti dell'algebra diviene quasi un monopolio inglese, tra il 1820 e il 1840, grazie ad alcuni algebristi protagonisti - quali George Peacock (1791-1858), Augustus De Morgan (1806-1871), Duncan F. Gregory (1813-1844), John Graves e Hamilton -, che danno i loro contributi e si confrontano su posizioni diverse.

La concezione nuova dell'algebra, che si impone maggiormente e viene condivisa da molti, è quella *sintattica* dell'*algebra simbolica*, che considera la disciplina come sistema di segni o simboli, in accordo con regole date, che danno un'interpretazione consistente dei simboli stessi. Il matematico più convinto, sostenitore di questa idea di algebra come manipolazione di simboli, è Peacock, il quale scrive il suo pensiero nelle due opere *Treatise of Algebra* (1830) e *Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis* (prima della British Association del 1833). Peacok pone una distinzione tra "l'algebra aritmetica" e "l'algebra simbolica": nella prima[16] i simboli indicano grandezze aritmetiche, mentre nella seconda possono avere qualunque significato venga loro attribuito; inoltre risulta che le regole dell'algebra simbolica derivano da quelle dell'algebra aritmetica. Le *operazioni*, cui Peacok presta particolare attenzione, sono completamente arbitrarie, seppure quelle dell'algebra sembrano ridotte a quelle aritmetiche e, se interpretate come regole di manipolazione, esse coincidono con quelle

[15] [9], pp. 248, 249.

[16] L'algebra aritmetica è chiamata *aritmetica universale* e corrisponde ad una generalizzazione dell'aritmetica elementare (vedere [1], p. 125).

dell'aritmetica.[17]
Tra gli altri algebristi Gregory aggiunge alcune osservazioni sul significato dei simboli, che non indicano solamente i numeri ma possono essere intesi anche per operazioni. Negli anni quaranta De Morgan estende la nuova algebra simbolica, dotata di un approccio logico forte, alla *logica delle relazioni* e al calcolo formale.
La direzione opposta a questo approccio condivso dagli algebristi inglesi viene percorsa da Hamilton. In alcune lettere Hamilton stesso dichiara il suo studio indipendente e le sue convizioni divergenti con Peacock e gli altri colleghi, mostrando il suo approccio metafisico completamente differente.[18].
Per Hamilton l'algebra è una pura scienza del numero e i numeri sono fondati sulle intuizioni mentali; si tratta di un sistema di verità riguardanti a qualcosa della realtà esterna, così i simboli stessi rappresentano qualcosa di reale, non nel senso di oggetti concreti, ma nel senso di costruzioni mentali. La concezione di Hamilton è quindi in completa antitesi con Peacok: egli enfatizza gli *elementi* dell'algebra, non le regole e le operazioni, volendo trovare in essi un significato che determini secondariamente regole e operazioni.[19]
L'idea di Hamilton, così come tutto il suo pensiero con cui costruisce l'algebra e il concetto di numero, non trova il consenso dei colleghi, anche se lo sviluppo futuro dell'algebra moderna (algebra astratta[20]) deve molto ai suoi studi. Infatti, se da un lato l'approccio di Peacock sembra logico e più "libero", quello metafisico di Hamilton riesce a condurre alla scoperta e

[17]Peacock ha una chiara distinzione tra le due algebre, ma la sua impostazione logica e la stretta connessione con l'aritmetica pone grandi limiti alla generalità dell'algebra, come ad esempio nell'attribuzione di significato e nel rapporto tra operazioni e regole (vedere [1], pp. 125, 126).

[18]In una lettera a Aubrey De Vere:"*I differ from my great contemporaries, my brother-band, not in transient or accidental, but in essential and permanent things: in the whole spirit and view with which I study Science*"(Hamilton citato da Hankins in [9], p. 249).

[19][6], pp. 267, 268; [9], pp. 249, 250, 251.

[20]Bottazzini sottolinea come proprio Hamilton offre l'occasione per affermare l'idea di poter costruire una struttura algebrica astratta su oggetti e classi di operazioni sconosciute (vedere [1], p. 126).

alla costruzione di nuovi numeri, di ordine sempre più grande; senza limitarsi ai reali potevano costruirsi nuovi strani oggetti, a partire dall'intuizione del tempo, senza seguire le regole dell'aritmetica, ma determinando proprie operazioni e proprietà .

1.2.2 Le "scuole" e l'opinione di Hamilton

Il confronto tra Hamilton e gli altri algebristi inglesi mette in luce aspetti diversi, forse sempre compresenti, dell'algebra. Hamilton apre le osservazioni *General Introductory Remarks* con una chiara analisi di tre approcci dell'algebra, chiamate *scuole*: *scuola Pratica, scuola Filologica* e *scuola Teoretica.*[21] In queste tre scuole sono indivuati oggetti, metodi e problemi dello studio dell'algebra, che Hamilton ritiene allo stesso modo presenti e necessari.
L'algebrista Pratico cerca una *regola da applicare* e studia problemi in cui trova uno strumento limitato; l'algebrista Filologico cerca una *formula da scrivere*, ponendo attenzione al linguaggio, e studia i casi in cui non si ha semplicità nella notazione, simmetria nella sintassi, e il simbolismo non è universale; l'algebrista Teoretico, infine, cerca un *teorema da meditare* e studia il caso in cui la chiarezza della sua contemplazione risulta oscura e i ragionamenti di una scienza sono in contraddizione tra loro.
Queste scuole possono essere distinte ma non divise, ovvero non possono avere pieno significato senza completarsi reciprocamente, nel proprio studio e sviluppo; mentre, ogni studioso o ogni composizione di algebra può al più porre attenzione ad una o l'altra in particolare, secondo le proprie esigenze e abitudini.
L'opinione di Hamilton, dichiarata a termine della presentazione delle tre scuole, è che la tendenza a concepire l'algebra come Arte o Linguaggio, rifiu-

[21] "*The Study of Algebra may be persued in three very different schools, the Practical, the Philological, or the Theoretical, according as Algebra itself is accounted an Instrument, or a Language, or a Contemplation; according as ease of operation, or symmetry of expression, or clearness of thought, (the* agere, *the* fari, *or the* sapere,*) is eminently prized and sought for.*" ([8], p. 3.)

tando la concezione come Scienza, non offre un fondamento valido ed occorre invece pensare l'algebra come Sistema di Verità in un approccio teoretico. Hamilton specifica allora che il suo interesse e il suo tentativo è quello di studiare l'Algebra come Scienza.[22]

1.3 Dalla letteratura alla filosofia

Nel saggio *Preliminary and Elementary Essay* Hamilton, quando parla di *scienza* o sottolinea il ruolo dell'algebra come *scienza*, usa la lettera maiuscola; così Algebra e *Scienza* sono caricate di un significato teorico forte: si tratta di *Scienza in quanto tale*, *Scienza Pura*, come preferisce Hamliton. Una Scienza è una creazione della mente, che lavora sulle proprie capacità intuitive, senza riferimento al mondo esterno.[23]
Questo particolare significato dato alla scienza, che riflette la posizione hamiltoniana nella discussione sui fondamenti, deriva dal pensiero del poeta e filosofo romantico S.T. Coleridge[24], del quale il matematico stesso si considera discepolo. Con la poesia di Colerdige Hamilton si avvicina alla Filosofia della Natura, nata nell'età del Romanticismo, con sviluppo nel Romanticismo della scienza; le idee forti riguardano la bellezza e la verità , cercate nella filosofia ed espresse in poesia, rispondenti ad un "tutto" che acquista un profondo senso di forma e pensiero strutturale. Hamilton è molto vicino alle strutture dei filosofi della Natura e la sua affinità con Coleridge lo coinvolge negli studi di Metafisica e nei pensieri sulla costruzione della scienza e l'orgine della conoscenza.
Sempre il poeta e filosofo inglese approfondisce la competenza della Ragione sulla scienza; la sua riflessione insiste sulla distinzione, già originaria del pen-

[22] [8], pp. 3, 4, 5.

[23] "*A* Science *(or* Pure Science, *as Hamilton would prefer to call it) is a creation of the mind working on its own intuitive powers without reference to the external world.*" ([9], p. 254.)

[24] Hamilton studia i lavori del poeta inglese: *The Friend, Aids to reflection*, *Biographia Literaria*.

siero kantiano, tra *Ragione* ed *Intelletto*: mentre la Ragione è la fonte e la sostanza delle verità , evidenti in sé, l'Intelletto è la facoltà di giudizio secondo i sensi.[25] Hamilton medita e condivide questa riflessione, soprattutto in merito all'usurpazione[26] della Ragione da parte dell'Intelletto nella Scienza Inglese moderna. Il riferimento è alla convizione di Coleridge, per cui la verità è essenzialmente spirituale e solo la verità spiritule e costante può essere una base per la Scienza[27]; quindi ricordando la sua distanza dalla scienza come praticata dai suoi colleghi inglesi, Hamilton insiste sul difficile rapporto tra Intelletto e Ragione nella scienza, rafforzando la sua idea di costruire l'algebra dalle intuizioni del pensiero, quale lavoro della Ragione.
La stretta vicinanza con Coleridge influenza il pensiero di Hamilton suggerendo di approfondire la filosofia Kantiana, con cui il matemtico (come già il poeta inglese) trova forti affinità . Durante i suoi studi e lavori sui fondamenti dell'algebra, Hamilton legge l'opera di Kant, *Critica della Ragion Pura* (1781), con attenzione all'Estetica Trascendentale ed elabora una sua interpretazione in continutità con i concetti presentati dal filosofo tedesco, ma anche con l'intenzione di volere meglio esplicitare ciò che ritiene non precisato o ambiguo riguardo all'algebra e alla costruzione del numero.
Kant individua la possibiltà di una scienza del Tempo; in analogia con la geometria, eletta scienza dello spazio e dell'estensione, un'altra scienza può svilupparsi dall'intuizione interiore del tempo. Nell'Estetica Trascendentale e nell'Analitica Trascendentale, non c'è riferimento ad alcuna branca della matematica; solamente nei *Prolegomena* viene detto che l'aritmetica è la scienza del tempo; per Kant "l'aritmetica Universale", cioè l'algebra, è una scienza generale, e le parti della matematica pura progrediscono grazie ad essa, considerata la "teoria Universale delle grandezze."[28] Le intuizioni di

[25] Reason: "*the power of universal and necessary convictions, the source and substance of truths above sense, and having their evidence in themselfs*"; Understanding: "*the faculty juding according to sense.*" (Coleridge citato da Hankins in [9], p. 255).

[26] Hamilton citato da Hankins in [9], p. 256.

[27] [9], p. 256.

[28] Kant citato da Winterbourne in [16], p. 198.

Spazio e Tempo sono dunque centrali nella filosofia kantiana, in una ampia riflessione sul valore e sulla possibilità della Matematica Pura, che ha influenzato il pensiero scientifico e lo sviluppo matematico, soprattutto attorno alla geometria, ma anche in merito alla concezione e alla costruzione del numero. Nell'Analitica Trascendentale si presenta lo *schematicismo* dei concetti puri dell'intelletto[29], in cui l'intuizione del tempo svolge una funzione cruciale; attraverso gli schemi si realizza la mediazione tra i concetti puri dell'intelletto e le sensazioni dell'esperienza esterna: uno schema di un concetto puro è la rappresentazione pura, metiatrice tra inteletto e sensibilità . Uno schema è, dunque, una determinazione di tempo[30], in cui ha particolare importanza la categoria della quantità : secondo Kant "*lo schema puro della quantità (quantitas), intesa come concetto dell'intelletto, è invece il numero: esso è una rappresentazione, che raccoglie la successiva addizione di uno a uno (omogenei). Il numero non è altro se non l'unità della sintesi del molteplice di un'intuizione omogenea in generale, per il fatto che io produco il tempo stesso nell'apprensione dell'intuizione.*"[31]
Hamilton si muove a partire da questi presupposti della filosofia di Kant, in particolare le due nozioni cruciali di *intuizione* e *costruzione*, che motivano la scelta di scrivere le sue convizioni sul fondamento dell'algebra e la sua costruzione del numero.[32]

[29] [10], da p. 217 a p. 226.

[30] "*Gli Schemi, perciò non sono altro che determinazioni a priori di tempo, in base a regole, le quali si riferiscono secondo l'ordine delle categorie, alla serie di tempo, al contenuto di tempo, all'ordine di tempo [...].*" ([10], p. 224).

[31] [9], p. 222. Kant definisce qui il numero e confronta la quantità come schema puro (*quantitas*) con la quantità come immagine pura (*quanta*), derivante dal senso esterno dello spazio; per questo confronto vedere anche il paragrafo 2.1.3.

[32] Intuizione e costruzione avvicinano Hamilton alle argomentazioni dei moderni intuzionisti; per questo vedere il capitolo 3.

Capitolo 2

Nella Scienza del Tempo Puro

L'opera di Hamilton di maggior rilievo in algebra si intitola "*Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; With a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as tha Science of Pure Time*" (1835)[1]; in essa confluiscono le idee e i tentativi riguardo alla teoria "dell'Algebra come Tempo Puro".[2] Già in alcuni memorandum e appunti, tra fine degli anni venti e il 1830[3] e in successive lettere Hamilton scrive le sue "osservazioni metafisiche" sulla Scienza e sull'Algebra; si tratta di riflessioni e discussioni sui fondamenti e sulla natura dell'Algebra e sulla filosofia di Kant. In occasione dell'incontro a Dublino della Britsh Association, nell'Agosto del 1835, Hamilton presenta per la prima volta le sue idee nella loro totalità , nell'opera che egli stesso definisce il primo fascicolo del suo lungo lavoro di unione tra Matematica e Metafisica. [4]L'opera si compone di tre parti, scritte ed ultimate tra il 1833 e il 1835."Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples" è la terza

[1] [8].

[2] Anche nell'introduzione dell'opera "*Lectures on Quaternions*"(1853) Hamilton richiama le sue idee originarie sull'Algebra come Tempo Puro e su queste fonda la teoria dei quaternioni.

[3] Due esempi citati da Hankins in [9], p. 258: "*Consideration on Some Points in the Metaphysics of Pure Mathematics*" è memorandum datato 15 Novembre 1827; "*Metaphysical Remarks on Algebra*" è libretto datato Febbraio 1831.

[4] "*The first installment of my long-aspired-to work no the union of Mathematics and Metaphysics.*" (Hamilton citato da Hankins in [9], p. 265).

parte, conclusa prima delle altre e presentata il 4 Novembre del 1833 alla Royal Irish Academy; in essa sono trattati i numeri complessi come coppie di numeri reali. La seconda e più estesa parte risale alla primavera del 1835 ed è intitolata "Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time"; si tratta della costruzione dell'Algebra a partire dal suo fondamento filosofico. Infine la prima parte, finita nell'estate, si intitola "General Introductory Remarks".

Il secondo capitolo di questa tesi è interamente dedicato all'opera algebrica di Hamilton, di cui si espongono alcuni contenuti, presenti nelle prime due parti dell'opera, per indicare il percorso dal fondamento filosofico dell'Algebra alle definizioni dei principali insiemi numerici (i numeri interi, i numeri razionali e irrazionali), e mostrare i presupposti teorici, le costruzioni e i metodi proposti da Hamilton.

2.1 Il fondamento dell'Algebra

Le *osservazioni generali*, che introducono al saggio sull'Algebra come Scienza del Tempo Puro, racchiudono le idee, le convinzioni e le motivazioni che hanno ispirato e guidato Hamilton nei suoi studi di carattere algebrico. La riflessione sulle tre diverse *scuole* dell'Algebra conduce Hamilton a dichiarare il suo punto su come considerare l'Algebra tra le discipline della Matematica e il suo obiettivo all'inizio dell'opera *On conjugate functions.*
L'intepretazione dell'Algebra, come Scienza e non solamente un'*Arte* o un *Linguaggio* da descrivere o mettere in pratica, presenta un *Sistema di Verità* che hanno una propria validità , più generale e profonda dell'uso pratico di un sistema di *segni* o *regole*. Una Scienza, in quanto tale, è *rigorosa, pura e indipendente*, deducibile da suoi principi intuitivi. Hamilton non ritiene possibile nelle interpretazioni dell'Algebra come sitema di regole o come linguaggio riconoscere una scienza e soprattutto trovare qualche *rudi-*

mento, come principio elementare di una scienza.[5] L'interesse di Hamilton è dunque approfondire lo studio teorico dell'Algebra, cercando di stabilire una base filosofica, metafisica, teorica[6]; solo a partire da questa base è possibile costruire tutta l'Algebra.
La convizione iniziale è che l'*Intuizione del Tempo* sia il rudimento dell'Algebra. Le premesse per pensare a tale fondamento sono sintetizzate da Hamilton in tre aspetti: il legame tra l'Algebra e la nozione di Tempo; la possibilità e la consistenza di una *Scienza Pura* o *Scienza del Tempo Puro*; l'identità tra questa Scienza Pura e l'Algebra, in quanto *Scienza Matematica del Tempo.*

2.1.1 Il tempo e l'algebra

La prima riflessione riguardo all'Algebra come Scienza del Tempo Puro pone attenzione non tanto sul Tempo come intuizione (o Tempo Puro), secondo il suo significato filosofico derivato dal pensiero di Kant, ma sulla nozione di *Tempo* e di *Progressione Continua*, considerati da Hamilton concetti legati a molti risultati importanti della Matematica. Questo legame Hamilton lo sente con l'esistenza e la storia dell'Algebra, nel momento in cui la disciplina nasce e sostituisce, nei concetti e nei metodi, l'impostazione della Geometria: l'Algebra considera ciò che discute su come *scorre*, così come la Geometria ha considerato ciò che è discusso come *fisso.*[7]La nuova impostazione fondata su concetti rivoluzionari - quali *flussazione, punti in scorrimento, variabilità,*

[5] "*[...]existing Algebra, in the state to which it has been already unfolded by the masters of its rules and of its language, offers indeed no rudiment which may encourage a hope of developing a SCIENCE of Algebra: a Science properly so called; strict, pure, and indipendent; deduced by valid reasoning from its own intuitive principles; [...]*" ([8], p. 5).

[6] Hankins sottolinea il sorprendente legame tra matafisica e matematica nella ricerca di Hamilton dei fondamenti dell'Algebra. ([9], p. 247) Winterbuorne continua, sulle osservazioni di Hankins, riguardo al rapporto tra matematica e metafisica e alla natura filosofica dell'intenzione di Hamilton: "*Hamilton was trying to establish a philosophical basis for algebra that was abchir the latter in the ordinal character of real numbers.*" ([16], p. 195).

[7] "*It is the genius of Algebra to consider what it reasons on as* flouwing, *as it was the genius of Geometry to consider what it reasoned on as* fixed." ([8], p. 5).

progressioni continue, velocità , tempi[8] - porta l'Algebra teorica e applicata a discutere di *Cambiamento* e *Progressione*, che sono nozioni sotto le quali Hamilton ritiene presente necessariemente la nozione di Tempo.[9]
Quindi il primo legame tra Tempo e Algebra coinvolge la nozione di variazione, progressione, che trovano poi nella filosofia di Kant la loro giustificazione teorica e dalle quali Hamilton deduce l'azione matematica, oltre che nel pensiero, di *passaggio* e *trasformazione* e infine di *Numero*.[10]

2.1.2 Una Scienza del Tempo

La seconda premessa per fare dell'Algebra la Scienza del Tempo Puro è quella di riconoscere la possibilità e la validità di una *Scienza del Tempo*, cioè di fondare una disciplina sull'intuizione del Tempo. La convizione di Hamilton dunque poggia sulle nozioni cardine della filosofia di Kant e si confronta con il legame tra Matematica e Metafisica.
Il fondamento dell'Algebra sulla intuizione kantiana del tempo, fa così derivare il concetto di numero da quello intuitivo di *momento* dato nel tempo. Un *momento di tempo* è accettabile come intuizione vera, certa e chiara, non empirica, così come la stessa nozione di spazio o come, dice Hamilton, il fatto stesso per cui due rette non possono mai comprendere un'area. Quindi

[8]Hamilton richiama alcuni nomi di scienziati e loro studi, legati a questi concetti rivoluzionari: Newton e il suo Metodo delle Tangenti, che definisce in modo "dinamico" le curve; Nepero e la definizione di Logaritmo; Lagrange e le nozioni di Variabilità e di Funzioni. ([8], pp. 5, 6.)

[9]"*But where* Change *and* Progression *are, there is TIME. The notion of Time is, therefore, inductively found to be connected with existing Algebra.*"([8], p. 6).

[10]"*In all Mathematical Science we consider and compare relations. In algebra the relations which we first consider and compare, are relations between successive states of some changing thing or thought. [...] For with Time and Space we connect all continuous change, and by symbols of Time and Space we reason and realise progression. [...] And such a transformation there is, when in Algebra, we contemplate the change of our own thoughts as if it were the progression of some foreign thing, and introduce Numbers as the marks of signs to denote place in that progresion.*"(Hamilton citato da Hankins in [9], p. 258).

Hamilton, dall'intuizione del Tempo, vuole introdurre la nozione di momento, con la stessa possibilità e lo stesso valore di verità con cui nella geometria (come per la geometria di Euclide), dall'intuizione di Spazio, sono dati e accettati come veri e validi gli assiomi su cui si basa tutta la geometria piana euclidea. La filosofia di Kant pone attenzione alle due fonti della conoscenza, Tempo e Spazio, da cui deriva la struttura della conoscenza sintetica a priori, di cui la matematica è un esempio brillante, in particolare secondo Kant per quanto riguardo lo spazio e le sue relazioni[11]; infatti, la geometria euclidea (nei contenuti e nella struttura) ha avuto nel pensiero kantiano una propria lettura e un fondamento. Hamilton, in modo equivalente, considera la lettura e il fondamento a priori dell'algebra, valido a partire dall'intuizione diversa del Tempo.[12]

Ancora dal confronto con l'intuizione di Ordine nello Spazio, Hamilton introduce la nozione o intuizione di *Ordine nel Tempo*, riconoscendo la possibilità di fondare su questa nozione una Scienza matematica, così come si può fare (meglio si è fatto) con l'intuizione di Ordine nello Spazio.[13] L'intuizione di Ordine nel Tempo, come l'idea di successione, è meno sconosciuta e meno separabile dall'uomo, secondo Hamilton, rispetto alle idee di figura o estensione[14]; tali nozioni derivano da tempo e spazio, che si distinguono come forme opposte dell'intuzione: lo spazio è una forma esteriore, mentre il tempo è interiore e più generale dell'altra. In questa specificazione Hamilton trova la motivazione per considerare l'algebra come una disciplina più generale e fondamentale della Matematica, rispetto alla geometria.[15]

[11] Kant citato da Winterbourne in [16], p. 197.

[12] In Winterbourne, studiando le affinità di Hamilton e Kant, è chiara l'influenza dell'*Estetica Trascendentale* nell'opera di Hamilton, ma anche la sua preoccupazione per l'enfasi che Kant pone sullo spazio e la scienza dello spazio; dunque Hamilton rende più esplicito il confronto tra geometria e algebra, a partire dalla natura diversa delle due intuizioni.

[13] [8], p. 7.

[14] "*[...] the ideas of order and succession appear to be less foreing, less separable from us, than those of figure and exent.*"(Hamilton citato da Øhrstrøm in [12], p. 47).

[15] [9], p. 268; [16], p. 197.

Le verità intuitive che riguardo gli aspetti definiti e chiari dell'idea di Tempo sono oggetto di studio della Matematica; mentre ciò che di misterioso e trascendente coinvolge la nozione di Tempo è oggetto di riflessione filosofica, della Metafisica.[16] Hamilton è interessato, allora, a trovare e studiare gli aspetti definiti del Tempo Puro[17], quali forme della mente umana (*il prima e il dopo, la precedenza, la conseguenza e la simultaneità , la progressione indefinita continua*), che si impongono con forza nell'indagare i principi della Scienza dell'Algebra.[18]

2.1.3 La Scienza Matematica del Tempo

L'ultima premessa riflette sulla conclusione del tentativo di Hamilton di analizzare ciò che è scientifico in Algebra e di costruire una Scienza del Tempo Puro: l'identità della *Scienza Matematica del Tempo* con l'*Algebra.* [19]
Lo studio di Hamilton fornisce una prima risposta alla questione da lui sollevata sulle Grandezze Negative e Immaginarie; l'intensa riflessione sul fondamento dell'Algebra, infatti, è motivata dai dubbi che i numeri negativi e le unità immaginarie ponevano nella loro traizionale trattazione. Hamilton ritiene non adeguati i principi in partenza, ad esempio: "una grandezza più grande può essere sottratta da una grandezza più piccola e la grandezza rimanente è meno di nulla."[20] I sistemi di segni e regole nella scrittura e nell'uso dei numeri negativi o immaginari non ponevano grandi domande teoriche, ma anche non potevano rispondere al problema di accettere "grandezze"[21] che denotano qualcosa meno di nulla o né meno, né più , né uguale al nulla. Per poter dare significato a tali grandezze occorre derivarle non dalla nozione

[16][8], p. 7.

[17]Con "Puro" Hamilton sottolinea che con Tempo non si riferisce a nulla di legato alla nozione di *tempo apparente* o di *cronologia esterna* di eventi, neppure alla relazione di *causa-effetto* della Scienza Dinamica ([8], p. 268).

[18]Hamilton citato da Øhrstrøm in [12], p. 47.

[19][8], p. 7.

[20][8], p. 4.

[21]Nel senso euclideo, come descritto dalle nozioni comuni e usato in geometria.

di Grandezza, ma dal pensiero originale e più comprensivo di *Ordine in Progressione*[22]; le relazioni del *Prima* e del *Dopo* o le *Coppie di momenti* sono considerate da Hamilton nella Teoria delle Funzioni Coniugate, per dare una nuova intepretazione ai numeri interi e ai numeri complessi.[23]
L'idea di Hamilton prende come riferimento l'intuizione del Tempo e dell'Ordine nel Tempo in modo radicale, ma rispondendo alla riflessione di Kant, nell'Estetica Trascendentale, in cui si distingue la costruzione delle grandezze (*quanta*), come nella geometria, dalla costruzione delle grandezze in quanto tali (*quantitas*), come nell'algebra[24]. Questa riflessione torna a dare supporto alla elezione dell'Algebra come *Scienza in quanto tale*, e più generale della geometria; non solo, ma per questo stesso fatto, occorre un fondamento diverso, che Hamilton individua nel pensiero dell'Ordine in Progressione.[25] In accordo con le precedenti premesse, l'Algebra viene definita da Hamilton, in alcuni manoscritti del 1832, "Scienza dell'Ordine", secondo una visione analatica, o "teoria della variazione continua", secondo una visione sintetica[26], tornando a fissare la natura delle relazioni dell'algebra come relazioni tra pensieri successivi, relativi a stati di un cambiamento di pensiero più generale e regolare[27], che dunque dipendono dalla nozione di ordine continuo nella successione del tempo[28]. Ogni grandezza estensiva è fermata nello spazio e nel tempo da una successione o sequenza continua di atti della percezione; così senza l'intuizione pura del Tempo non si può avere nessun concetto di grandezza o di numero: l'algebra deve essere fondata sulle proprietà ordinali del numero.[29]

[22] [8], p. 7.

[23] Queste relazioni temporali, che Hamilton riconosce come *relazioni ordinali* (vedere il paragrafo 2.2.1), permettono di superare i concetti di negativo e di immaginario. Nel caso dei numeri negativi, ad esempio, invece di grandezze minori dello zero, si usano momenti precedenti e conseguenti nella Progressione del tempo (vedere il paragrafo 2.3.1).

[24] Kant citato da Winterbourne in [16], p. 197, 198.

[25] Winterbourne osserva come l'Algebra secondo Hamilton, in accordo con Kant, si fonda sull'idea di successione ([16], p. 197, 198, 199).

[26] [12], p. 47.

[27] Hamilton citato da Øhrstrøm in [12], p. 47.

[28] [9], p. 273.

[29] [9], p. 269.

2.2 I concetti del tempo pensati: *momento, progressione e temporal step*

Le principali relazioni e proprietà tra numeri, e dunque gli stessi insiemi numerici, vengono cercate o trovate, più che definite, a partire dalle analoghe relazioni e proprietà tra momenti di tempo. Così nei concetti di equivalenza o coincidenza (cioè simultaneità) e di non-equivalenza (cioè conseguenza e precedenza) tra momenti si riconoscono la relazione di identità e le due relazioni d'ordine ($>$ e $<$) tra numeri. Nel concetto di analogia tra coppie di momenti, e relative proprietà , si ritrova la relazione di uguaglianza. Infine dalla "continuità della Progressione nel Tempo" e dal concetto di analogia continua deriva una nozione intuitiva di continuità .
Così i primi concetti fondanti sono quelli di *momento di tempo*, *progressione nel tempo* (in particolare di *progressione continua* o *serie equidistante di momenti nel tempo*), e infine il concetto di *temporal step*.
Hamilton, però , accanto a tali concetti dati nel tempo, nella Scienza del Tempo Puro, ritiene necessario precisare lo studio svolto dell'Aritmetica, come scienza del contare, che è parte della Scienza del Tempo Puro, ma così familiare e semplice da poter essere presunta; le nozioni di aritmetica conosciute e le proprietà principali dei numeri naturali sono considerate già acquisite e sono necessarie per poter passare dalle intuizioni (o dai concetti che da esse derivano come oggetti e atti del pensiero) ai numeri.[30]

L'introduzione degli insiemi dei numeri interi, frazionari e infine reali è contenuta in una parte preliminare dell'opera di Hamilton sulle funzioni coniugate, rivolta allo studio dei numeri complessi; perciò il suo carattere e la sua estensione non mostra una struttura rigorosa e non utilizza termini e nomi che conoscono le teorie attuali come si studiano nei corsi.
Nei paragrafi seguenti si focalizza l'attenzione sui concetti che Hamilton assume e definisce alla base di tutta l'opera e sui quali si fondano le definizioni

[30] [8], p. 16.

dei numeri e delle operazinoi algebriche. Le notazioni e i termini che verranno usati fanno rifermento al testo originale di Hamilton[31], volendo rimanere fedeli allo stile usato dal matematico, lasciando ad osservazioni successive il compito di riconoscere con occhi odierni i concetti matematici principali.

2.2.1 Momenti, relazioni e combinazioni tra momenti

I primi paragrafi del saggio preliminare di Hamilton iniziano subito dal concetto di momento. Come già presentato prima, il momento di tempo deriva dall'intuizione pura del Tempo, e non richede una definzione; Hamilton iniza allora dall'atto del *pensare* uno e successivi momenti. Il confronto tra momenti pensati e dati nel tempo conduce poi a individuare delle *relazioni ordinali* nel tempo e di tempo che rispondono e rendono possibile un ordinamento tra i momenti pensati. Infine da più momenti dati si possono esprimere altri momenti, come *combinazione* di quelli assegnati.

Momenti e relazioni ordinali

Il pensiero di un **momento** di tempo si forma nella mente umana, che può "ripeterlo" o può pensarne uno "differente". Indichiamo con le lettere A e B due termini che denotano ciascuno dei momenti di tempo conosciuti, cioè A e B possono riferirsi allo stesso momento, nel caso in cui il pensiero ha ripetuto il momento, oppure possono indicare due momenti differenti, nel secondo caso in cui si hanno pensieri di momenti differenti. In entrambi i casi la coppia di termini (A, B)[32] denota la coppia di momenti, che saranno momenti coincidenti o distinti. Per avere una espressione e scrittura concisa delle relazioni in cui si trovano i momenti, si scrive:

$$B = A \tag{2.1}$$

[31] Nel proseguo dei paragrafi del 2.2 e in quelli del successivo 2.3 si rimanda ai capitoli del saggio *Preliminary and Elementary Essay* di Hamilton, in [8], da p. 9 a p. 59.

[32] Nel testo le coppie di momenti vengono indicate con l'odierno simbolo di coppia ordinata, che non è usato da Hamilton.

se tra il momento indicato B e il momento indicato con A esiste una **relazione di identità** *, o analogamente diciamo che i termini A e B sono* **equivalenti**. È evidente che se vale $B = A$, sarà anche $A = B$;

$$B \neq A \tag{2.2}$$

se non siamo nella precedente relazione, ma tra i due momenti esiste una **relazione di diversità** *, o i termini A e B sono* **non-equivalenti**. Se vale $B \neq A$, come sopra, è evidente che sarà anche $A \neq B$.

La scrittura nel primo caso si chiama *equazione*. La scrittura nel secondo caso, invece, indica una relazione che si suddivide in due ulteriori casi: di *conseguenza* e di *precedenza*, a seconda se il momento B è posteriore o anteriore al momento A. In forma più concisa si scrive:

$$B > A \quad \text{se } B \text{ è } \textbf{conseguente} \text{ ad } A \text{ nel tempo} \tag{2.3}$$

$$B < A \quad \text{se } B \text{ è } \textbf{precedente} \text{ ad } A \text{ nel tempo} \tag{2.4}$$

È evidente che se $B > A$ allora $A < B$ e se $B < A$ allora $A > B$.
Una relazione ordinale del momento B rispetto al momento A si indica con il simbolo $B - A$, essendo sia una relazione di identità sia una relazione di diversità .

Se (C, D) sono una seconda coppia di termini, che denotano altri due momenti di tempo, *si dice che le coppie (A, B) e (C, D) sono* **analoghe** *se D è in relazione con C come B lo è con A* e si scrive:

$$D - C = B - A \quad \text{o} \quad B - A = D - C \tag{2.5}$$

dove il segno $=$ indica l'identità tra relazioni (tra momenti) e la scrittura si chiama equazione.[33] *Due coppie sono in* **analogia** *sia quando $C = A$ e $D = B$ sia quando i momenti C e D non coincidono con i momenti A e B.*

[33] Il segno $-$ nella scrittura $B - A$, indica la relazione tra i momenti A e B; non è legato al significato di sottrazione, ma alla distanza temporale di due momenti.

La *relazione di analogia* 2.5 afferma, infatti, che "D sta a C come B sta ad A", ovvero, se il momento B è identico ad A, allora D è identico a C; se B è dopo di A, allora D è esattamente tanto dopo di C; se B è prima di A, allora D è esattamente tanto prima di C. È inoltre evidente che assegnati A, B e C c'è sempre uno ed un solo momento D connesso a C esattamente come B lo è ad A, cioè tale che valga 2.5. Dalla analogia 2.5 seguono altre espressioni di analogie:

$$\text{se} \quad D - C = B - A \quad \text{allora} \quad D - B = C - A \tag{2.6}$$

$$\text{se} \quad D - C = B - A \quad \text{allora} \quad C - D = A - B \tag{2.7}$$

Quando, infatti, le coppie (A, B) e (C, D) sono analoghe allora vale anche che il momento D è in relazione (identico, conseguente o precedente) con B come C lo è con A; in questo caso anche le coppie (A, C) e (B, D) sono analoghe e si chiamano **alternate** di (A, B) e (C, D). Il cambiamento di forma della relazione che lega i quattro momenti A, B, C e D si chiama **alternazione** di una analogia 2.6. Inoltre le coppie (B, A) e (D, C) sono in analogia ancora tra loro e si chiamano **inverse** di (A, B) e (C, D). Il cambiamento dell'espressione della relazione tra i quattro momenti si chiama **inversione** di una analogia 2.7.
Così , dati quattro momenti di tempo A, B, C e D, sono equivalenti le seguenti espressioni della stessa relazione tra i momenti, assegnata mediante otto equazioni, tra loro equivalenti:

$$\begin{aligned} D - C = B - A, \quad B - A = D - C, \\ D - B = C - A, \quad C - A = D - B, \\ C - D = A - B, \quad A - B = C - D, \\ B - D = A - C, \quad A - C = B - D. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Le precedenti otto equazioni esprimono i cambiamenti alternazione, di inversione e di inversione dell'alternata dell'analogia tra le coppie (A, B) e (C, D).

Come nel caso di non-equivalenza tra momenti di tempo, si definisce la **non-analogia** tra coppie di momenti, quando non esiste la relazione 2.5, assegnate le coppie (A, B) e (C, D). Si scrive allora

$$D - C \neq B - A. \tag{2.9}$$

Distinguendo i due casi per cui

$$D - C > B - A, \tag{2.10}$$
$$D - C < B - A; \tag{2.11}$$

quando D è dopo di C più di quanto B sia dopo di A oppure quando D è prima di C più di quanto B sia prima di A; questi si chiamano, rispettivamente, **non-analogia di conseguenza** e **non-analogia di precedenza**, dicendo che D con C, rispetto B con A, è in una relazione di ritardo relativo o anticipo relativo. Applicando come per la relazione di analogia le alternazioni e inversioni, si ottengono le seguenti espressioni, rispettivamente, equivalenti a 2.10 e 2.11:

$$\begin{array}{ll} D - C > B - A, & B - A < D - C, \\ D - B > C - A, & C - A > D - B, \\ C - D < A - B, & A - B > C - D, \\ B - D < A - C, & A - C > B - D; \end{array} \tag{2.12}$$

e

$$\begin{array}{ll} D - C < B - A, & B - A > D - C, \\ D - B < C - A, & C - A > D - B, \\ C - D > A - B, & A - B < C - D, \\ B - D > A - C, & A - C < B - D. \end{array} \tag{2.13}$$

Infine, assegnate le coppie di momenti (A, B) e (C, D), siano esse analoghe o non-analoghe tra loro, si chiamano **estremi** i momenti A e D, **medi** i momenti B e C; **antecedenti** i momenti B e D, **conseguenti** i momenti A e C. Secondo le definizioni di alternazione e inversione, un'analogia o una non-analogia non cambia se si scambiano tra loro i medi o gli estremi o entrambi, oppure se si scambiano i conseguenti o gli antecedenti o entrambi ma invertendo la direzione.

Combinazioni di momenti

Esistono alcune condizioni in cui poter combinare fra loro due analogie, o non-analogie, tra momenti, in modo tale da generare una terza nuova analogia. Tali condizioni riguardano le posizioni degli estremi e dei conseguenti o degli estremi e dei medi delle relazioni. Sia $D-C=B-A$ la prima analogia assegnata, e sia anche data una seconda analogia $D'-C'=B'-A'$, allora:

- se le due analogie di partenza hanno gli stessi antecedenti o gli stessi conseguenti, sono analoghi i conseguenti o, rispettivamente, gli antecedenti delle prime;

- se le due analogie hanno gli stessi estremi, i medi di entrambe combinati come estremi con i medi dell'altra come medi formano una nuova analogia;

- se le due analogie hanno gli stessi medi, gli estremi di entrambe combinati come medi con gli estremi dell'altra come estremi formano una nuova analogia;

- se gli estremi di una analogia sono uguali ai medi dell'altra, i medi della prima combinati come medi con gli estremi della seconda come estremi formano una nuova analogia.

2.2.2 Continuità tra momenti nel tempo

Un concetto sempre presente e centrale è quello della *continuità* . Hamilton, prima di parlare della continutà tra numeri, introduce la *continuità della progressione nel tempo* tra momenti. Si tratta ancora di un concetto che discende naturalmente dall'intuizione pura, e che dunque non richiede una definizione, ma va riconosciuta. La continutià del tempo si esprime

attraverso le nozioni di una particolare relazione ordinale di analogia ; da questa Hamilton può discutere un modo in cui deteminare e rappresentare i momenti: quello di *serie* di momenti.
Nella continutà tra momenti ci sono le condizioni principali per poter assumere l'esistenza di un momento o l'identità , o diversità , tra due momenti; queste condizioni saranno poi generalizzate al caso della continutà tra step.

Analogia continua o serie equidistante

Si può osservare che se esiste la analogia $B' - A' = B - A$ allora le coppie (A, B) e (A', B') possono coincidere solo se i momenti di ciascuna coppia sono identici tra loro; in questo caso si avrebbe un solo momento. Inoltre gli antecedenti A e A' coincidono solo se coincidono anche i conseguenti B e B', e viceversa. Solamente il caso in cui la analogia è costruita a partire da tre momenti distinti nel tempo, due momenti delle coppie (A, B) e (A', B') possono coincidere, ovvero o coincidono gli estremi, $A = B'$, oppure i medi, $B = A'$. Poichè per inversione i due casi di coincidenza cambiano l'uno nell'altro, si può considerare il solo tipo di analogia in cui:

$$B' - B = B - A \tag{2.14}$$

Tale analogia, composta dai tre momenti A, B e B', si chiama **analogia continua***; inoltre si dice che i tre momenti A, B e B' formano una* **serie equidistante***, cioè il momento B' è prima, o dopo, il momento B così come B è prima, o dopo, il momento A.* Il momento B è perciò detto il **momento intermedio** o **medio** (oppure bisettore) ai due momenti B' e A. Assegnati due momenti A e B' qualsiasi, esiste sempre, ed è unico, il momento medio B; quindi è sempre possibile costruire una analogia continua di momenti, inserendo il medio, quando sono assegnati i due momenti estremi. Ancora è evidente che il momento medio insieme ad uno dei due estremi determina l'altro estremo, così che è sempre possibile completare un'analogia continua, a partire da un momento estremo e il momento medio assegnati.
Il concetto di analogia continua e di serie equidistante di tre momenti può

essere esteso, più in generale, ad un numero arbitrario di momenti. Se A, B e B' sono in analogia continua tra loro e B, B' sono in analogia con un quarto momento B'', allora tutti e quattro i momenti A, B, B' e B'' formano una analogia continua e costituiscono una serie equidistante i momenti, e si scrive:

$$B'' - B = B' - B = B - A \tag{2.15}$$

Quindi l'intervallo compreso tra i momenti A e B'' è trisecato da due momenti intermedi B e B', chiamati rispettivamente primo e secondo trisettore. Anche in questo caso, come nell'analogia continua di tre momenti, dati il primo estremo A e il primo trisettore B, si possono determinare in uno e un solo modo il secondo trisettore B' e il secondo estremo B'', e di più , dati due momenti tra A, B, B', B'' e le loro posizioni (come estremi o trisettori) è possibile determinare gli altri due nella analogia continua. In generale una analogia continua può essere costruita a partire da un numero n qualunque di momenti di tempo, e avere un intervallo di estremi il primo e l'n-esimo momento diviso in $n - 1$ parti uguali dagli altri $n - 2$ momenti di tempo intermedi. Inoltre se di una qualunque serie equidistante di momenti sono dati due momenti (e le relative posizioni come estremi o momenti intermedi) possono essere determinati tutti gli altri momenti della serie. Per esempio, dati il primo estremo A e il terzo quadrisettore B'' (si tratta di una serie di cinque momenti equidistanti), allora trisecando l'intervallo tra A e B'' si determinano il primo e il secondo quadri settori B e B', infine si determina l'ultimo estremo B''', nel tempo dopo B''. Inoltre conclusa la serie di n momenti in analogia continua tra loro, si può allungare la stessa serie, prima del primo estremo o dopo l'ultimo estremo in modo illimitato, determinando il momento di tempo equidistante, ogni volta, precedente al primo estremo e quello equidistante, ogni volta, conseguente all'ultimo estremo, nell'ordine in progressione, costruendo una serie equidistante illimitata

$$\ldots E''' \; E'' \; E' \; E \; A \; B \; B' \; B'' \; B''' \; B'''' \ldots, \tag{2.16}$$

che soddisfa la seguente condizione di analogia continua

$$\begin{aligned} \dots B'''' - B''' = B''' - B'' = B'' - B' = \\ B' - B = B - A = A - E = E - E' = E' - E'' \dots \end{aligned} \tag{2.17}$$

Così , dati due momenti A e B, esiste sempre una serie equidistante di momenti di tempo che arrivi dal momento A al momento B, comunque siano A e B distanti o vicini nel tempo. Dalle precedenti affermazioni segue, dunque, che è sempre possibile proseguire nel tempo una serie data equidistante di momenti, prima o dopo i suoi estremi, e suddividere un qualunque in intervallo di estremi dati, in modo illimitato. Si dice che tre o più momenti sono in un'unica serie appartengono tutti a una comune analogia continua, o serie equidistante.

Il concetto di analogia continua permette di determinare, indagare ed esprimere (o di concepire come indagata e espressa), con un certo livello di approssimazione o accuratezza, la posizione di un qualunque momento di tempo cercato, nella progressione generale del tempo, attraverso la sua relazione con una serie equidistante di momenti conosciuta, opportunamente finita. Infatti mediante la costruzione di una serie equidistante si può avere una dimostrazione sufficiente, seppure non rigorosa, del fatto che due momenti assegnati C e D siano distinti o identici. Se $C \neq D$ sono due momenti distinti, comunque vicini tra loro nel tempo, si possono inserire momenti medi, sufficientemente numerosi, tra due momenti noti A e B, prolungando la serie prima o dopo i due estremi, fino a determinare un elemento B' della serie equidistante che si trovi tra i momenti C e D, come conseguente del precedente e precedente il conseguente degli stessi C e D. Reciprocamente, dati C e D, si può concludere che rappresentano lo stesso momento di tempo, cioè $C = D$, mostrando che nessun momento B'', appartenente ad una serie equidistante di momenti, può interporsi fra C e D.

2.2.3 Steps nella progressione del tempo

Nella nozione precedente di analogia continua o di serie equidistante di momenti di tempo, basata sull'intuizione pura di Ordine in Progressione nel tempo e parte centrale nello studio del Tempo Puro, ricorre come concetto fondante quello di *trasferimento ripetuto nel tempo di una relazione ordinale comune* (a tre o più momenti), cioè il trasferimento della relazione di analogia tra i momenti successivi di una serie. Hamilton dedica particolare attenzione a questo concetto di trasferimento, o *passaggio*, riconusciuto come l'*atto del pensiero in grado di determinare e rappresentare i momenti di tempo.* Il passaggio tra momenti è , infatti, centrale per poter parlare di successione: la presenza di due o più momenti distinti nel tempo richiede che vi sia stato un passaggio, e vicersa; questo passaggio è ciò che caratterizza e genera un momento successivo a partire da uno iniziale.

Temporal step

Il trasferimento di una relazione ordinale è una applicazione continua di un comune **step** *mentale (nel pensiero) di tempo*[34]*, chiamato anche* ***temporal step****, con cui si passa, nel pensiero, da un momento di una serie al momento immediatamente successivo*[35]. Lo step non indica propriamente la relazione tra momenti, ovvero l'intervallo compreso tra due momenti di tempo, ma l'atto di passaggio tra due momenti consecutivi nel tempo: dati i momenti A e B, $B - A$ è la relazione ordinale tra i due momenti e si pone

$$B - A = a; \tag{2.18}$$

[34]Il termine step, che è proprio della teoria di Hamilton, non viene tradotto. Può significare una gradino di passaggio da un momento ad un altro, o può indicare l'intervallo temporale che separa due momenti.

[35]Successivo non è legato al significato matematico di successivo di un numero, ma indica il momento a cui si può passare spostandosi di uno step da un momento iniziale.

a è lo step corrispondente all'atto di passaggio da A a B, determinato in *direzione* e *misura*[36] dalla relazione ordinale $B - A$ (ovvero da quanto B precede o segue A). Nel pensiero il momento B viene generato come prodotto o risultato dell'atto a e dell'oggetto A. Tale relazione si può esprimere come

$$B = (B - A) + A \quad \text{o} \quad B = a + A \tag{2.19}$$

dove il simbolo $+$ è il segno di combinazione e viene interposto tra il simbolo dello step a e dell'oggetto A, ovvero tra il simbolo che indica il passaggio temporale e quello che indica il momento dal quale è fatto il passaggio. Nell'equazione $B = a + A$, il momento A viene chiamato **antecedente** e il momento B **conseguente della relazione ordinale** a, che indica e determina il passaggio.

Le relazioni di identità , conseguenza e precedenza tra momenti, introdotte nel primo paragrafo, si possono ripensare ed esprimere nuovamente in termini dello step temporale a. Con il simbolo 0 si indica la relazione di identità tra due momenti, cioè quando un momento viene ripetuto nel pensiero per cui risulta $B = A$, e si scrive

$$B - A = 0. \tag{2.20}$$

Similmente, nel caso della relazione di diversità , $B \neq A$, si scrive $B - A \neq 0$; distinguendo i casi di conseguenza e precedenza:

$$\text{se} \quad B > A \quad \text{allora} \quad B - A > 0 \tag{2.21}$$

$$\text{se} \quad B < A \quad \text{allora} \quad B - A < 0 \tag{2.22}$$

[36]Direzione è legato all'Ordine in Progressione; misura indica l'ampiezza della distante temporale tra momenti.

Introducendo il simbolo dello step a, le relazioni di identità 2.1 e diversità 2.2, 2.3, 2.4 diventano

$$a = 0,$$
$$a \neq 0,$$
$$a > 0,$$
$$a < 0;$$

e se sono dati i momenti C e D, indicando con b lo step relativo alla relazione tra C e D, $b = D - C$, le relazioni di analogia 2.5 e non-analogia 2.9, 2.10, 2.11 diventano

$$b = a,$$
$$b \neq a,$$
$$b > a,$$
$$b < a.$$

Inverso di uno step

In 2.7 venivano indicate due equivalenti relazioni ordinali opposte in direzione; allora, *si indica con il simbolo θ il segno di* **inversione**, per cui i simboli *θa e θb indicano le relazioni di A rispetto a B e di C rispetto a D, che sono le* **inverse** *delle relazioni di B rispetto ad A e di D rispetto a C; θa e θb sono gli* **steps inversi** *o* **opposti** *di a e b*, e risulta:

$$B - A = a \quad \text{e} \quad A - B = \theta a \tag{2.23}$$
$$D - C = b \quad \text{e} \quad C - D = \theta b \tag{2.24}$$

Così valgono anche le seguenti affermazioni, da quelle analoghe scritte in termini di relazioni tra momenti:

$$\theta a = 0, \quad \text{se} \quad a = 0;$$
$$\theta a \neq 0, \quad \text{se} \quad a \neq 0;$$
$$\theta a < 0, \quad \text{se} \quad a > 0;$$
$$\theta a > 0, \quad \text{se} \quad a < 0;$$

e ancora, confrontando due coppie di momenti, segue:

$$\theta b = \theta a, \quad \text{se} \quad b = a; \tag{2.25}$$

$$\theta b \neq \theta a, \quad \text{se} \quad b \neq a; \tag{2.26}$$

$$\theta b < \theta a, \quad \text{se} \quad b > a; \tag{2.27}$$

$$\theta b > \theta a, \quad \text{se} \quad b < a; \tag{2.28}$$

infine è evidente che

$$\theta(\theta a) = a.$$

Tramite la nozione di inverso o oppsto di uno step temporale l'equazione 2.18, o l'espressione equivalente 2.19, per indicare la relazione tra i momenti A e B, si può anche riscrivere

$$A = \theta a + B, \tag{2.29}$$

in modo da indicare come ritornare, nel pensiero, dal momento B al momento A.

Relatively late-making e early-making step

Il concetto di step nella progressione del tempo permette, quindi, di esprimere e studiare tutte le relazioni ordinali tra momenti, le relazioni di alternazione e le combinazioni di analogie. Dato un momento A, se a è lo step che da A genera B, come già detto se $B - A$ è una relazione di identità , cioè $a = 0$, l'atto di passaggio non produce nessun cambiamento nell'oggetto dell'atto; si tratta di una ripetizione nel pensiero del momento A, e si dice perciò che la transizione è nulla, o in modo equivalente che a è uno **step nullo**. Uno step non nullo ($a \neq 0$), invece, corrisponde ad una relazione di diversità ed è chiamato **effective step**[37] perchè è l'atto del pensiero che realmente altera l'oggetto A, passando dal momento A al momento $a + A$. Dato un effective step a, corrispondentemente ai due casi di relazione di diversità , quello di conseguenza e quello di precedenza, si dice che a è uno

[37] Il termine si può tradurre con efficace, effettivo o reale, operante.

step che *ritarda* (**late-making**) o che *anticipa* (**early-making**) se il risultato dell'atto del pensiero $a + A$ è conseguente o precedente rispetto ad A. Lo step nullo 0 è , invece, può essere considerato come uno step che *ritarda relativamente* (**relatively late-making**) rispetto uno step a che anticipa, essendo $0 + A > a + A$, se $a < 0$, oppure come uno step che *anticipa relativamente* (**relatively early-making**) rispetto uno step b che ritarda, quando $0 + A < b + A$ se $b > 0$. Ora è possibile esprimere nuovamente le relazioni di non-analogia 2.27 e 2.28 usando i concetti di effetti relativi; in particolare considerando due step a e b, se $b > a$, allora $b + A > a + A$ ovvero b ritarda relativamente rispetto ad a; mentre se $b < a$ allora $b + A < a + A$, ovvero b anticipa relativamente rispetto ad a.

Composizione di steps

L'equazione 2.18 mostra come si forma nel pensiero un momento di tempo a partire da un altro momento dato A e mediante un atto di passaggio del pensiero, dato da uno step a, quindi per poter continuare a determinare nuovi momenti si può considerare il momento risultato $a + A$, come oggetto, e un secondo step b come atto, ottenendo un nuovo risultato $b + (a + A)$.[38]. Se $B - A = a$ e $C - B = b$, (cioè a è la relazione ordinale di B rispetto ad A e b quella di C rispetto a B) allora si può scrivere

$$C = b + (a + A); \tag{2.30}$$

dove dal primo momento A è stato generato l'ultimo momento C, mediante due passaggi successivi da A a B e da B a C. Si può dunque considerare uno step totale, ovvero un unico o totale passaggio da A a C composto da due steps parziali o intermedi a e b, e la relazione ordinale di C rispetto ad A è composta da due relazioni ordinali intermadie a e b. Come unico passaggio che dal momento A genera il momento C, si scrive

$$C - A = b + a \tag{2.31}$$

[38]Le parentesi occorrono per distinguere l'oggetto già pensato e l'atto del pensiero, tra cui è interposto il segno di combinazione.

e indicando con $c = b + a$ lo **step composto** dai due steps parziali si ha

$$C = c + A. \tag{2.32}$$

Dunque in generale, il passaggio da A a C, attraverso il momento intermedio B, permette di scrivere le due equazioni 2.31 e 2.32, che esprimono la stessa cosa, seppure non nello stesso modo; infatti la 2.32, $C = (b + a) + A$, mostra un passaggio unico del pensiero da A a C, mentre la 2.31 mostra il passaggio dal momento $a + A$ a C.

Infine si può osservare che se la relazione ordinale totale $C - A$ è una relazione di identità , cioè l'ultimo momento C coincide con il primo momento A, per la 2.29 è evidente che essendo $C = b + (a + A) = b + B$ e $A = C$ lo step b è lo step opposto ad a; quindi

$$C = \theta a + (a + A) \quad \text{o equivalentemente} \quad C = (\theta a + a) + A$$

per cui, data la relazione di identità $C = A$, lo step composto è nullo: $\theta a + a = 0$. Allo stesso modo, considerando lo step b, che è inverso di a, si ha $b + \theta b = 0$.

Ogni momento che è risultato di una *composizione*, insieme un nuovo step, può generare, a sua volta, un nuovo momento nel tempo; così , come nel caso precedente, dati due step a e b, il momento C risulta generato da A mediante lo step composto $b+a$, dati tre steps successivi, che collegano rispettivamente quattro momenti A, B, C e D, si determinano un passaggio totale da A a D, composto dai tre steps parziali a, b e c. La relazione ordinale di D rispetto ad A è perciò lo step totale $c + b + a$, e l'ultimo momento D, se pesato come generato direttamente da A o considerando i momenti intermedi, risulta: $(c + b + a) + A = c + b + (a + A) = c + (b + a) + A$ o semplicemente $c + b + a + A$.
In generale, quindi, assegnato un arbitrario numero di step successivi nel tempo, è possibile applicare a un qualunque momento uno step composto dagli

steps intermedi dati, o equivalentemente applicare nel loro ordine i singoli steps componenti successivamente, o ancora applicare è possibile comporre alcuni degli steps componenti tra loro e comporre successivamente con gli altri fino ad avere uno step composto finale.

L'applicazione richiesta per determinare uno degli steps componenti, noto una composizione di steps e alcuni componenti, si chiama *decomposizione*. Nel caso della composizione $c = a + b$ di due steps, allora è evidente che

$$a = \theta b + c \quad \text{e} \quad b = c + \theta a; \tag{2.33}$$

osservando che il problema è ben determinato, poichè se si trova uno step componente, ad esempio $\theta b + c$ o $c + \theta a$, per arrivare allo step composto c, combinato con b o a, rispettivamente, non esiste nessun altro componente diverso da quelli trovati, che soddisfi la stessa composizione che ha c come risultato. Dunque i componenti a e b possono essere determinati l'un dall'altro e dallo step composto c, componendo lo step c con lo step opposto allo step componente dato, nel giusto ordine di composizione. La decomposizione è essenzialmente una composizione di uno step composto con l'opposto del componente noto; ed è importante osservare che, rispettando l'ordine temporale della composizione, l'opposto di uno step composto sarà la composizione degli steps opposti in ordine inverso:

$$\theta(b + a) = \theta a + \theta b, \tag{2.34}$$

perchè nell'ordine, per invertire l'effetto del passaggio $b + a$ (composto dallo step a e poi dallo step b, nell'ordine), occorre applicare prima lo step θb, opposto dell'ultimo step b, e poi θa per invertire l'effetto del primo step applicato a.

Con il linguaggio degli steps si possono esprimere alcuni teoremi significativi, legati ai teoremi visti riguardo alle combinazioni tra momenti. In particolare si tratta di mostrare quali sono le conseguenze della composizione di steps

equivalenti e della alternazione di una analogia.
Se a' e a sono due steps equivalenti, combinati similmente con steps equivalenti, gli steps composti sono ancora equivalenti, cioè

$$\text{se} \quad a' = a \quad \text{allora} \quad \begin{array}{ll} b + a' = b + a, & a' + b = a + b, \\ b + \theta a' = b + \theta a, & \theta a' + b = \theta a + b, \\ \theta b + a' = \theta b + a, & a' + \theta b = a + \theta b; \end{array} \tag{2.35}$$

se due steps sono equivalenti ad uno stesso terzo step, sono equivalenti tra loro:

$$\text{se} \quad a'' = a' \quad \text{e} \quad a' = a, \quad \text{allora} \quad a'' = a. \tag{2.36}$$

L'alternazione di una analogia 2.6 è equivalente a dire che nella composizione di due qualsiasi steps l'ordine degli steps componenti può essere cambiato senza alterare il risultato dello step composto:

$$a + b = b + a; \tag{2.37}$$

tale equivalenza si vede facilmente. Dati quattro momenti A, B, C e D in relazione di analogia o non-anaolgia, siano a, b, a' e a' gli steps che indicano le relazioni stesse

$$B - A = a,\ D - B = b,\ C - A = b',\ D - C = a';$$

lo step totale da A a D è dunque $b + a$ o $a' + b'$, e si ha la relazione

$$a' + b' = b + a.$$

Se si considera l'analogia $D - C = B - A$ allora la relazione tra gli steps composti diventa $a + b' = b + a$; se poi vale 2.37, si ha anche $b = b'$, o $D - B = C - A$, che è l'alternazione dell'analogia fissata. Viceversa, dall'alternazione di una analogia si trova la relazione 2.37. Si considerano due step componenti a e b, applicati successivamente ad uno stesso momento A, in modo da generare altri due momenti B e C, ed applicando ancora a a C, un quarto momento D:

$$B = a + A,\ C = b + A,\ D = a + C,$$

quindi vale $D - A = a + b$ e l'analogia $D - C = a = B - A$; per alternazione della analogia segue che $D - B = C - A = b$, $D = b + B = b + a + A$, dunque

$$b + a = D - A = a + b.$$

La proprietà di una relazione ordinale, o degli steps nella progressione del tempo, di poter rovesciare l'ordine è la proprietà più importante ed estensiva. La possibilità che esprime riguardo all'ordine di composizione risulta evidente anche per un numero qualunque di steps; la proprietà segue sempre dai teoremi di alternazione e composizione tra momenti.

2.3 Dalle intuizioni ai numeri

Un momento, uno step, una serie equidistante di momenti sono concetti propri della Scienza del Tempo Puro, e così rappresentano la chiave per poter passare dall'intuizione di tempo al concetto di numero; quindi dal Tempo all'Algebra, che Hamilton fonda sul Tempo stesso.
Nell'opera non c'è un'occasione e una scelta precisa che segna questo passaggio dalle intuzioni ai numeri, mentre è chiara la separazione tra l'introduzione dei numeri interi e delle frazioni da quella dei numeri reali. Mentre a partire dai concetti appena definiti Hamilton, in modo chiaro seppure non pienamente distinto e rigorosa, parla di *numeri* - interi e frazionari - e di *addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione* tra essi, ritorna al concetto di step e di nuove relazioni tra steps per definire il numero reale.

2.3.1 Gli interi e le frazioni

Le nozioni di momento, relazioni ordinali (componenti e composte) e steps (successivi e composti) in progressione nel tempo rappresentano i concetti portanti per poter introdurre quelli nuovi di *multiplo* e *sottomultiplo* di uno step, da cui deriveranno il concetto di *numero intero*, *positivo o negativo*, ed il concetto di *numero reciproco* e *numero frazionario* (o *frazione*). Le operazioni di addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione algebriche seguiranno, ancora, dalle regole di composizione di steps.

Multipli di uno step e numeri interi

La teoria generale, presentata nel paragrafo precedente, si applica ora al caso specifico di una serie equidistante di momenti, costruita in modo da soddisfare le condizioni di analogia continua tra i momenti della serie stessa, come mostravano le espressioni 2.16 e 2.17; si tratta perciò di riscrivere le serie dei momenti equidistanti in termini della relazione di analogia che li ha generati, ovvero in termini degli atti di passaggio, applicando un comune step nell'ordine di progressione nel tempo.
Si fissa il momento A della serie 2.16 come **momento standard o di riferimento**, chiamato **momento zero**, rispetto al quale sono confrontati e generati tutti gli altri momenti, conseguenti e precedenti A stesso. *Tali momenti vengono indicati con* $B, B', \ldots$, *se si tratta di momenti che seguono A, chiamati* **positivi**, *mentre si usa* $E, E', \ldots$, *se si tratta di momenti che precedono A, chiamati* **contra-positivi**; in particolare tutti i momenti positivi e contra-positivi si possono contare, ovvero si possono distinguere chiamando, nell'ordine, il momento B *primo positivo* (o primo momento della serie a lato positva dello zero), B' *secondo positivo* e analogamente i momenti successivi; il momento E è il *primo contra-positivo* o il primo momento della serie a lato contra-positivo dello zero, così E' è il *secondo contra-positivo* ed analogamente gli altri momenti precedenti. La natura equidistante della serie, o la natura continua delle relazioni di analogia 2.17 che legano i momenti consecutivi della serie, si esprime in termini di step pensando che i momenti positivi sono generati dall'applicazione continua e successiva di uno step comune a, mentre i momenti contra-positivi sono generati dall'applicazione

continua e successiva dello step opposto θa; in questo modo si può scrivere:

$$B = a + A,\ B' = a + B,\ B'' = a + B',\ \ldots, \tag{2.38}$$

$$E = \theta a + A,\ E' = \theta a + E,\ E'' = \theta a + E', \ldots, \tag{2.39}$$

mentre il momento zero $A = 0 + A$, perchè generato da se stesso dall'applicazione dello step nullo.
La serie equidistante di momenti 2.16, secondo la costruzione dei momenti della serie, mediante le applicazioni continue e successive dello step non nullo a, come in 2.38 e 2.39, si può esprimere nel seguente ordinamento:

$$\begin{aligned}
&\ldots\\
&E'' = \theta a + \theta a + \theta a + A,\\
&E' = \theta a + \theta a + A,\\
&E = \theta a + A,\\
&A = 0 + A,\\
&B = a + A,\\
&B' = a + a + A,\\
&B'' = a + a + a + A,\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{2.40}$$

e le corrispondenti relazioni ordinali rispetto il momento zero A sono così espresse in funzione degli atti di passaggio:

$$\begin{aligned}
&\ldots\\
&E'' - A = \theta a + \theta a + \theta a,\\
&E' - A = \theta a + \theta a,\\
&E - A = \theta a,\\
&A - A = 0,\\
&B - A = a, B' - A = a + a,\\
&B'' - A = a + a + a,\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Nelle equazioni 2.41 lo step a e i successivi steps $a+a, a+a+a, \ldots$ si chiamano **steps positivi**; lo step opposto θa e i precedenti $\theta a + \theta a, \theta a + \theta a + \theta a, \ldots$ si

chiamano **steps contra-positivi**, mentre lo step nullo 0 è detto **step zero**. Gli steps delle 2.41 costituiscono un *sistema di steps generato a partire dallo step originale a, da un sistema di atti* di passaggio dello stesso tipo; similmente come le relazioni 2.41 si dicono un *sistema di relazioni* dello stesso tipo. Così fissato lo step originale a come **step base**, o **unità** , *il sistema 2.41 viene detto sistema di* **multipli** *di* a; in particolare si dice che: 0 è il *multiplo 0*, $a, a + a, a + a + a, \ldots$ sono i *multilpli positivi* di a mentre $\theta a + \theta a, \theta a + \theta a + \theta a, \ldots$ sono i *multipli contra-positivi* di a.
Ogni multiplo generato da a risulta caratterizzato e individuato (quindi distinto dagli altri multipli) dalla base (comune a tutti i multipli del sistema) e da un **ordinale di determinazione**, ovvero dal nome o numero ordinale (cioè zero, o il primo positivo, o il secondo positivo) e la serie di multipli 2.41 può essere denotata dai seguenti simboli

$$\ldots 3\theta a,\ 2\theta a,\ 1\theta a,\ 0a,\ 1a,\ 2a,\ 3a, \ldots \tag{2.42}$$

in cui

$$\begin{array}{ll} & 0a = 0, \\ 1a = a, & 1\theta a = \theta a, \\ 2a = a + a, & 2\theta a = \theta a + \theta a, \\ 3a = a + a + a & 3\theta a = \theta a + \theta a + \theta a \\ \ldots & \ldots \end{array} \tag{2.43}$$

I simboli $1, 2, 3, \ldots$ *indicano i numeri ordinali (positivi) mentre i simboli* $\theta 1, \theta 2, \theta 3, \ldots$ *denotano i nomi ordinali contra-positivi; tali simboli precedono la base a per poter determinare un multuplo poisitvo o contrapositivo di a, e formano la seguente* **serie di simboli ordinali**:

$$\ldots 3\theta,\ 2\theta,\ 1\theta,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{2.44}$$

I simboli della serie appena scritta possono essere interpretati anche come **cardinali**, distinguendo tra **cardinali positivi**, **cardinali contra-positivi** e il **cardinale nullo**; infatti $2\theta a$ è un simbolo *cardinale* o il *numero contra-positivo due*, che indica che a partire dal momento zero A, sono stati applicati due steps uguali, alla grandezza della base a, ma nella direzione temporale opposta. In generale i simboli 2.44 possono essere considerati come numeri ordinali (contando e determinando i multipli della serie 2.41) oppure come numeri cardinali (mostrando quale step è stato generato e come). *Interpretati come cardinali, i simboli 2.44 si chiamano* **numeri interi***; gli interi sono, dunque, i segni di un certo atto mentale, che a partire dalla base a genera un suo multiplo della base, moltiplicandola per se stesso.*

Operazioni algebriche tra interi

Il concetto di numero intero ha dunque una definizione naturale dalla nozione di sistema di multipli di uno step non nullo a. Ogni multiplo di a è un nuovo step, così da poter essere combinato insieme ad un altro multiplo o da poter essere considerato come nuova base per determinare altri steps, ancora multipli della base orignale a. Per distinguere la moltiplicazione tra il numero intero μ e la base a, nella generazione del multiplo μa, si usa il segno $\times$; così ogni multilplo si scrive $\mu \times a$.

Due o più multilpli di a, ad esempio $\mu \times a$, $\nu \times a$, $\xi \times a$, possono essere composti tra loro come steps successivi, nel modo visto nei paragrafi precedenti, determinando come risultato uno step composto, $(\xi \times a) + (\nu \times a) + (\mu \times a)$ (dove le parentesi aiutano a distinguere gli steps componenti e il simbolo $+$ è il segno della composizione tra steps, già usato). Lo step composto è ancora un multiplo della stessa base a, del tipo $\omega \times a$, dove ω è il numero intero che determina il nuovo multiplo, dipendente dagli interi che determinano gli steps componenti. Sia

$$\omega \times a = (\nu \times a) + (\mu \times a), \tag{2.45}$$

allora si pone:

$$\omega = \nu + \mu \tag{2.46}$$

e

$$\omega = \xi + \nu + \mu \quad \text{se} \quad \omega \times a = (\xi \times a) + (\nu \times a) + (\mu \times a). \tag{2.47}$$

Le leggi di composizione tra steps successivi sono espresse dalle seguenti equazioni:

$$\begin{gathered}(\nu \times a) + (\mu \times a) = (\nu + \mu) \times a, \\ (\xi \times a) + (\nu \times a) + (\mu \times a) = (\xi + \nu + \mu) \times a, \\ \dots \end{gathered} \tag{2.48}$$

che si considerano vere per definizione e servono a spiegare il significato del segno $\nu + \mu$ o $\xi + \nu + \mu$ tra numeri interi. Se i numeri μ, ν, ξ sono interi positivi la legge di composizione di questi numeri, $\nu + \mu$ o $\xi + \nu + \mu$, seguente dalla 2.48, è la **addizione aritmetica**, e il numero che si ottiene come risultato indica la **somma aritmetica** dei numeri.
Questa operazione si può estendere in Algebra, (come Scienza del Tempo Puro) definendo per ogni intero μ, ν, ξ, positivo o contra-positivo o nullo, la combinazione della forma $\nu + \mu$ o $\xi + \nu + \mu$, che soddisfa le 2.48, come **somma algebrica** tra due o più numeri interi, e l'operazione di composizione **addizione algebrica**.
Il segno + indica quindi, oltra la composizione tra steps, l'operazione di addizione; più in generale rappresenta il segno di una qualsiasi combinazione algebrica e ha il nome, usato in aritmentica, *più* , seppure dal punto di vista algebrico non corrisponde necessariamente all'idea di accrescimento. È una somma algebrica quella tra steps, ovvero la composizione $b + a$ tra gli steps a e b (che addiziona b ad a, non necessariamente ottenendo uno step di misura nel tempo maggiore di a); mentre non è una somma algebrica l'applicazione di uno step ad un momento, $a + A$, indicata ancora dal segno +, si tratta di una addizione algebrica impropria tra un momento e uno step, che non sono omogenei tra loro.
Dalla definizione di addizione algebrica tra interi, seguono alcune considera-

zioni. I numeri addizionati possono essere combinati in qualunque ordine:

$$\nu + \mu = \mu + \nu \tag{2.49}$$

$$\xi + \nu + \mu = \mu + \xi + \nu = \dots \tag{2.50}$$

I numeri interi positivi si sommano come nel caso aritmetico, e la loro somma è ancora positiva; la somma di numeri contra-positivi è un numero contra-positivo, opposto della somma algebrica dei numeri positivi opposti dei suoi addendi; infine la somma tra due numeri, uno positivo e uno contra-positivo, se la quantità del positivo eccede in misura quella del contra-positivo, è positiva ed uguale all'eccesso, viceversa se il numero contra-positivo eccede l'altro positivo, la somma degli addendi è contra-positiva ed uguale all'eccesso, ma opposta; se i due numeri sono uguali in misura la loro somma è l'intero nullo. Inoltre è possibile definire la sottrazione algebrica, che segue dall'operazione di decomposizione di steps multipli, quindi dalla composizione con l'opposto di uno step componente; così la sottrazione di un numero equivale alla somma del numero opposto, positivo o contra-positvo, secondo che il numero da sottrarre è contra-positvo o positivo, rispettivamente.

Un multiplo $\mu \times a$ dello step base a può essere considerato come una nuova base e così generare altri steps suoi multipli, ed ancora multipli della base originale a. In questo caso si tratta di combinare un intero ν con la nuova base $\mu \times a$ moltiplicandoli tra loro per generare il multiplo $\nu \times (\mu \times a)$ di $\mu \times a$, dove il segno $\times$ dentro e fuori dalle parentesi indica sempre la combinazione tra un intero e uno step.
Il nuovo step multiplo di $\mu \times a$, come multiplo dello step originale a, è dato dalla combinazinoe di a con un intero ω, dipendente dai numeri interi μ e ν, e si ha che

$$\omega = \nu \times \mu \quad \text{se} \quad \omega \times a = \nu \times (\mu \times a), \tag{2.51}$$

dove il segno $\times$ interposto tra gli interi μ e ν è definito dalla seguente legge

$$\nu \times (\mu \times a) = (\nu \times \mu) \times a \tag{2.52}$$

In modo analogo al caso della addizione, la legge 2.52 è la **moltiplicazione aritmentica**, quando μ e ν sono positivi; ed ancora come nel caso della addizione algebrica, dall'operazione aritmetica si può definire in modo più esteso nella Scienza del Tempo Puro, la **moltiplicazione algebrica** e il **prodotto algebrico** $\nu \times \mu$, per ogni intero μ e ν positivo, contrapositvo o nullo.

Definita la motliplicazione algebrica, occorono le regole per formare il prodotto tra numeri interi, mostrando come il prodotto dipende dai fattori nella direzione e nella misura. Riguardo alla direzione, basta osservare che il prodotto sarà un numero contra-positivo o positivo, rispettivamente, se i fattori contra-positivi sono in numero dispari o meno; mentre per la misura, in ogni caso, il prodotto algebrico è uguale a quello aritmetico dei fattori, considerti tutti positivi. Infine, è evidente osservare che se un fattore è nullo il prodotto $\nu \times 0 = 0$, per qualsiasi ν.

Come per la addizione algebrica, dalla legge 2.52 seguono alcune proprietà, riguardo all'ordine di moltiplicazione dei fattori e all'ordine di esecuzione dell'operazioni, se si considerano come fattori, steps composti:

$$\nu \times \mu = \mu \times \nu, \; \xi \times \nu \times \mu = \mu \times \xi \times \nu = \ldots, \; \ldots \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} (\nu' + \nu) \times \mu &= (\nu' \times \mu) + (\nu \times \mu), \\ \nu \times (\mu' + \mu) &= (\nu \times \mu') + (\nu \times \mu). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Se μ è un intero non nullo, allora determina una serie di numeri interi che sono suoi multipli

$$\ldots 3\theta \times \mu, \; 2\theta \times \mu, \; 1\theta \times \mu, \; 0 \times \mu, \; 1 \times \mu, \; 2 \times \mu, \; 3 \times \mu, \ldots \tag{2.55}$$

in modo che un qualunque altro step ω sarà o un numero di questa serie, cioè un multiplo di μ del tipo

$$\omega = \nu \times \mu \quad \text{o} \quad \theta(\nu \times \mu) + \omega = 0, \tag{2.56}$$

oppure un numero compreso tra due interi successivi della stessa serie 2.55, cioè

$$\omega = \rho + \nu \times \mu \quad \text{o} \quad \theta(\nu \times \mu) + \omega = \rho, \tag{2.57}$$

dove ρ è un intero tra 0 e μ, in misura minore di μ ed è positivo o contra-positivo, secondo che sia positivo o contra-positivo il fattore μ.
In entrambi i casi, si dice che ω è stato **diviso algebricamente** da μ, e ν è detto **quoziente**; in particolare nel caso 2.56 il quoziente è *preciso*, mentre nel caso 2.57 è *approssimato* dal *primo intero precedente* e ρ è detto **resto** della divisione.

Sottomultipli di uno step e frazioni

Nelle serie 2.41 e 2.42 ogni multiplo è generato nel pensiero dalla base da un particolare atto di moltiplicazione, che si distingue o è determinato da un proprio numero intero. Ogni atto può avere, nel pensiero, un atto inverso o reciproco, con cui poter legare la base con un suo multplio, e, dato questo multiplo, ritornare alla base. In generale è , infatti, possibile passare, nel pensiero, da un multiplo a un altro multiplo; e quindi passare dalla base a un suo multiplo o dal multiplo alla base. Questo passaggio avviene anche tra steps, quando essi sono **commensurabili** tra loro, cioè quando sono *multipli di una base comune.*
Nel passare da un multiplo dato alla base, di cui è mutiplo, lo step base è chiamato **sottomultiplo**, precisamente si dice *primo sottomultiplo positivo*, o *contra-positvo*, del suo *primo mutiplo positivo*, o *contra-positivo*, e analogamente rispetto gli altri multipli successivi; si conserva quindi il numero ordinale del mutiplo corrispondente. L'atto di passaggio nel ritornare da un multiplo alla sua base si chiama **sotto-moltiplicazione** per lo stesso numero cardinale da cui la base viene moltiplicato per generare il multiplo.
Se b e c sono due steps commensurabili non nulli, essi sono multipli di una base comune:

$$b = \mu \times a$$
$$c = \nu \times a;$$

si può passare da b a c, sottomoltiplicando da b alla base a (cioè passando dal multiplo alla base)

$$a = \frac{1}{\mu} \times b$$

e poi moltiplicando questo step intermedio per generare c:

$$c = \nu \times (\frac{1}{\mu} \times b) \quad \text{o} \quad c = \frac{\nu}{\mu} \times b. \tag{2.58}$$

Ogni step c può essere considerato come multiplo di un sottomultiplo di un altro step b, se c e b sono tra loro commensurabili, e l'atto di passaggio è la composizione, nell'ordine, di una sottomoltiplicazione con una moltiplicazione.

Il concetto di sottomultiplo e del passaggio di sottomoltiplicazione introduce a quello più generale di **moltiplicazione algebrica**, con cui si chiamano tutti gli atti composti da passaggi di moltiplicazione e sottomoltiplicazione; l'oggetto di tali atti è chiamato **moltiplicando** e il risultato **prodotto**; infine il segno o pensiero che determina l'atto è detto **moltiplicatore algebrico**. Tra il prodotto algebrico e il moltiplicando algebrico (da cui il prodotto è generato) c'è una relazione chiamata **ratio o ratio algebrico**[39]. Ogni particolare prodotto con il proprio particolare moltiplicando sono in rapporto particolare tra loro, che dipende dal particolare atto di moltiplicazione, che genera il prodotto a partire dal moltiplicando; *il* **numero** *che determina l'atto particolare specifica, così , anche il rapporto, ed è chiamato* **segno di una moltiplicazione** *o* **segno di un rapporto**. In questo senso, ogni intero della serie dei simboli ordinali 2.42 è il segno del rapporto di un multiplo $\mu \times a$ con la sua base a.

Considerando l'atto più generale di moltiplicazione algebrica, si definisce il **reciproco di un numero intero** e il **reciproco di un rapporto intero**. Inoltre *l'atto della moltiplicazione algebrica, il numero che la determina o la relazione di rapporto prendono il nome di* **atto di frazionamento***,* **numero frazionario** *o* **rapporto frazionario***; lo step prodotto è detto* **frazione** *dello step moltiplicando.* Un numero frazionario è , dunque, determinato sempre

[39]Il termine può essere tradotto con **rapporto algebrico**.

da due numeri interi, che sono il numero che sottomoltiplica, **denominatore**, e il numero che moltiplica, **numeratore**, che rappresentano i due atti successivi che compogno il frazionamento.

Secondo i concetti introdotti, nell'espressione 2.58, *lo step c è una frazione di b, legato a b dalla relazione in rapporto $\frac{\nu}{\mu}$, chiamato rapporto di ν su μ.* Come c è generato dall'atto di frazionamento moltiplicando b per il numero frazionario $\frac{\mu}{\nu}$, è possibile considerare l'atto di frazionamento inverso e ritornare a b da c mediante l'atto di frazionamento inverso, o reciproco:

$$b = \frac{\mu}{\nu} \times c \quad \text{se} \quad c = \frac{\nu}{\mu} \times b, \tag{2.59}$$

e vale

$$b = \frac{\mu}{\nu} \times (\frac{\nu}{\mu} \times b) \quad \text{e} \quad c = \frac{\nu}{\mu} \times (\frac{\mu}{\nu} \times c).$$

Così i due numeri $\frac{\nu}{\mu}$ e $\frac{\mu}{\nu}$ sono atti reciproci, chiamati quindi **numeri frazionari reciproci** tra loro, o **frazioni reciproche**. Come segno che indica la reciprocità tra due frazioni si usa R, cioè :

$$\frac{\nu}{\mu} = \mathrm{R}\frac{\mu}{\nu}, \ \frac{\mu}{\nu} = \mathrm{R}\frac{\nu}{\mu}.$$

Lo zero e l'ordine tra frazioni

Nel precedente paragrafo, sono stati considerati steps non nulli. Occorre fare una precisazione riguardo al caso in cui numeratore e denominatore di un numero frazionario possano essere nulli.

In generale, il concetto di frazione come multiplo di un sottomultiplo non esclude di pensare che il numero che moltiplica (numeratore) sia uguale zero; in tal caso se il denominatore è diverso da zero, la frazione è uguale a zero:

$$\frac{0}{\mu} \times b = 0 \quad \text{se} \quad \mu \neq 0. \tag{2.60}$$

Diversamente va discusso il caso in cui è zero il denomintore di una frazione. Secondo la definizione un sottomutiplo di uno step b, per un intero μ, è uno step a tale da generare b se moltiplicato per μ; ed ancora, per definizione, la moltiplicazione di uno step a per 0 è uguale a 0, indipendentemente da a. Dunque se $b \neq 0$ si ha $0 \times a \neq b$, ed è impossibile trovare nella progressione del tempo uno step a che soddisfi l'equazione

$$\frac{1}{0} \times b = a$$

perchè dovrebbe verificare anche $0 \times a = b$.
Il segno $\frac{1}{0}$ rappresenta un atto *impossibile*, se applicato ad uno step non nullo; non ha dunque senso lo *zero-sottomultiplo di uno step non nullo*. Solamente il caso che considera lo zero-sottomultiplo di zero soddisfa le equazioni sopra scritte, ma non in modo unico, e l'atto di sottomoltiplicare per zero risulta *indeterminato*.
La regola generale, che viene fissata, è di considerare il denominatore di ogni numero frazionario diverso da zero.

Nel caso dei numeri frazionari occorre ancora introdurre un ordine, secondo l'ordine nella progressione del tempo, che deriva infatti dalle definizione precedenti di late-making e early-making step.
Si dice che $\frac{\nu}{\mu}$ è un **numero frazionaio positivo** quando lo step $\frac{\nu}{\mu} \times b$ è un late-making step ed è una frazione di uno step positvo; per cui vale

$$\frac{\nu}{\mu} > 0 \quad \text{se} \quad \frac{\nu}{\mu} \times b > 0 \quad \text{e} \quad b > 0; \tag{2.61}$$

$\frac{\nu}{\mu}$ è un **numero frazionario contra-positivo** se $\frac{\nu}{\mu} \times b$ è un early-making step e una frazione di uno step positivo:

$$\frac{\nu}{\mu} < 0 \quad \text{se} \quad \frac{\nu}{\mu} \times b < 0 \quad \text{e} \quad b > 0; \tag{2.62}$$

infine si possono ordinare due numeri frazionari tra loro, avendo:

$$\frac{\nu'}{\mu'} > \frac{\nu}{\mu} \quad \text{se} \quad \frac{\nu'}{\mu'} \times b > \frac{\nu}{\mu} \times b,\ b > 0, \tag{2.63}$$

$$\frac{\nu'}{\mu'} < \frac{\nu}{\mu} \quad \text{se} \quad \frac{\nu'}{\mu'} \times b < \frac{\nu}{\mu} \times b,\ b > 0. \tag{2.64}$$

Se due numeri frazionari sono interi, le definizioni introdotte includono quelle già note nel caso dei numeri interi; inoltre anche per gli step che sono frazioni e i numeri frazionari si estendono le definizioni di positivo e contrapositivo; in particolare un numero frazionario positivo è al lato positivo dello zero e, viceversa, un numero frazionario contrapositivo è al lato contrapositivo della zero; nelle 2.63 e 2.64 $\frac{\nu'}{\mu'}$ è rispettivamente alla parte positiva e contra-positiva di $\frac{\nu}{\mu}$, cioè seguente o precedente nella generale progressione del tempo, nella direzione dai contra-positivi ai positivi.
Due frazioni si possono confrontare direttamente secondo il seguente principio, per cui moltiplicando il numeratore e il denominatore di una frazione per uno stesso numero intero positivo o contra-positivo non cambia il numero frazinario:

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{\omega \times \nu}{\omega \times \mu}; \tag{2.65}$$

La proprietà 2.65 permette, così , di ricondurre allo stesso denominatore positivo due frazioni con denominatori diversi, per cui basterà confrontare solo i loro numeratori per confontarle tra loro:

$$\frac{\nu'}{\mu'} \gtreqless \frac{\nu}{\mu} \quad \text{se} \quad \mu \times \mu \times \mu' \times \nu' \gtreqless \mu' \times \mu' \times \mu \times \nu. \tag{2.66}$$

Riguardo al confronto tra due frazioni valgono altri risultati, relativi al cambiamento della direzione, quando si confrontano numeri frazionari reciproci fra loro. Tali risultati seguono dalle definizioni precedenti e dalla seguente di **opposto** *di una frazione*: *si chiamano* **numeri frazionari opposti** *le frazioni* $\frac{\theta\nu}{\mu}$ *e* $\frac{\nu}{\mu}$*, che sono numeri che generano steps opposti, quando moltiplicano uno stesso step* b; per indicare l'opposizione tra loro si scrive

$$\frac{\theta\nu}{\mu} = \theta\frac{\nu}{\mu}$$

.

Operazioni algebriche tra frazioni

L'atto di moltiplicazione algebrica genera a partire da un step b un altro step, chiamato frazione di b. Anche gli steps frazione possono essere combinati tra loro, cioè , secondo le definizioni già note, possono essere composti due o più steps successivi (mediante il segno di composizione $+$) oppure può essere frazionato uno step frazione (mediante il segno di combinazione $\times$). Le leggi di composizione per i casi descritti sono le seguenti:

$$\begin{gathered}(\frac{\nu'}{\mu'} \times b) + (\frac{\nu}{\mu} \times b) = (\frac{\nu'}{\mu'} + \frac{\nu}{\mu}) \times b, \\ (\frac{\nu''}{\mu''} \times b) + (\frac{\nu'}{\mu'} \times b) + (\frac{\nu}{\mu} \times b) = (\frac{\nu''}{\mu''} + \frac{\nu'}{\mu'} + \frac{\nu}{\mu}) \times b,\end{gathered} \tag{2.67}$$

$$\begin{gathered}\frac{\nu'}{\mu'} \times (\frac{\nu}{\mu} \times b) = (\frac{\nu'}{\mu'} \times \frac{\nu}{\mu}) \times b, \\ \frac{\nu''}{\mu''} \times \{\frac{\nu'}{\mu'} \times (\frac{\nu}{\mu} \times b)\} = (\frac{\nu''}{\mu''} \times \frac{\nu'}{\mu'} \times \frac{\nu}{\mu}) \times b;\end{gathered} \tag{2.68}$$

da tali leggi si definiscono le operazioni tra i numeri frazionari di **addizione** e **moltipliazione**, nel modo suggerito dalle 2.67 e 2.68 e in modo da estendere le definizioni date di addizione e moltiplicazione algebrica tra interi. Si chiama **somma algebrica** di $\frac{\nu}{\mu}$, $\frac{\nu'}{\mu'}$ e $\frac{\nu''}{\mu''}$ il numero frazionale risultante $\frac{\nu'}{\mu'} + \frac{\nu}{\mu}$ o $\frac{\nu''}{\mu''} + \frac{\nu'}{\mu'} + \frac{\nu}{\mu}$, che si determina, usando il principio, scrivendo: 2.65

$$\frac{\nu'}{\mu'} + \frac{\nu}{\mu} = \frac{(\nu' \times \mu) + (\mu' \times \nu)}{\mu' \times \mu}. \tag{2.69}$$

Il numero frazionario $\frac{\nu'}{\mu'} \times \frac{\nu}{\mu}$, o $\frac{\nu''}{\mu''} \times \frac{\nu'}{\mu'} \times \frac{\nu}{\mu}$, risultato della composizione 2.68 tra $\frac{\nu}{\mu}$, $\frac{\nu'}{\mu'}$ e $\frac{\nu''}{\mu''}$, si chiama **prodotto algebrico**, e si calcola

$$\frac{\nu'}{\mu'} \times \frac{\nu}{\mu} = \frac{\nu' \times \nu}{\mu' \times \mu}, \qquad \frac{\nu''}{\mu''} \times \frac{\nu'}{\mu'} \times \frac{\nu}{\mu} = \frac{\nu'' \times \nu' \times \nu}{\mu'' \times \mu' \times \mu}, \ldots . \tag{2.70}$$

Anche per le operazioni di addizione e moltiplicazione algebriche tra frazioni valgono le proprietà analoghe a 2.53 e 2.54; infine, si defiscono la **sottrazione** e la **divisione algebrica**, interpretando la sottrazione di un numero frazionario da un altro come la addizione del suo opposto, e la divisione di un numero frazionario per un altro come la moltiplicazione per il reciproco di quest'ultimo.

2.3.2 I reali

Il concetto di numero reale appare nel saggio preliminare quando, una volta esteso il concetto di *rapporto algebrico* (definito prima come frazione) al caso di *rapporto tra steps non nulli* (chiamato come *numero algebrico*), Hamilton vuole dimostrare che esiste sempre la radice quadrata di un qualunque numero positivo, riconoscendo la possibilità che tale radice non sia commensurabile (secondo la definizione data) con nessun altro numero. Hamilton distingue così il caso delle radici esprimibili come frazione di numeri interi e delle radici o numeri *incommensurabili*.
Le espressioni e le notazioni usate fanno riferimento sempre al concetto di rapporto (*ratio*) tra steps, o alla nozione di radice quadrata, ma non si usano i termini razionale e irrazionale.

Rapporto di steps non nulli

Nel paragrafo precedente è stato definito il rapporto algebrico come atto di passaggio tra steps, ovvero il numero frazionario corrispondente ai successivi atti di sottomoltiplicazione e di moltiplicazione, con cui si genera uno step prodotto, a partire da uno step dato. Il concetto più esteso di rapporto algebrico include la relazione tra due steps non nulli a e b, determinata dalla misura e direzione relativa degli stessi steps. Similmente la **moltiplicazione algebrica**, già definita, è pensata come atto che aumenta o diminuisce, o preserva uguale, la misura di uno step proposto, e ne può preservare o invertire la direzione. *Gli steps, dati, a e b, si chiamano* **antecedente** *e* **conseguente***, o* **moltiplicando** *e* **prodotto***, quando sono in rapporto tra loro, di b rispetto ad a*

$$\frac{b}{a};$$

questo rapporto è detto **numero algebrico** *o* **moltiplicatore***, tale che se moltiplicato per lo step moltiplicando a genera lo step prodotto b*, e si scrive:

$$b = \frac{b}{a} \times a, \tag{2.71}$$

o più brevemente,

$$b = \tilde{a} \times a \quad \text{se} \quad \frac{b}{a} = \tilde{a}. \tag{2.72}$$

Questa definizione estende la nozione di rapporto tra interi, o numero frazionario (ora chiamato rapporto frazionario) denotato dal simbolo $\frac{\nu}{\mu}$, dove μ e ν sono due numeri interi. Ciò significa che ogni rapporto frazionario $\frac{\nu}{\mu}$ rappresenta anche un rapporto tra steps, infatti è il rapporto tra gli steps multipli di a, $\nu \times a$ e $\mu \times a$, come mostra la seguente espressione:

$$\frac{\nu \times a}{\mu \times a} = \frac{\nu}{\mu}. \tag{2.73}$$

Inoltre, allo stesso modo segue che

$$\frac{\frac{\nu}{\mu} \times b}{b} = \frac{\nu}{\mu}, \tag{2.74}$$

dunque il rapporto tra ν e μ indica il rapporto tra uno step frazione di uno step base e la base stessa; e si ha reciprocamente che

$$b' = \frac{\nu}{\mu} \times b \quad \text{se} \quad \frac{b'}{b} = \frac{\nu}{\mu}. \tag{2.75}$$

Il concetto di rapporto algebrico, ancora più in generale, si può esprimere come

$$\frac{\frac{b}{a} \times c}{c} = \frac{b}{a} \tag{2.76}$$

e reciprocamente

$$d = \frac{b}{a} \times c \quad \text{se} \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}; \tag{2.77}$$

dove a, b, c e d sono step non nulli.
A partire dalle operazioni algebriche definite nella teoria degli interi e delle frazioni, si possono estendere anche tra rapporti di steps, o *numeri algebrici generali*, i concetti di **Addizione**, **Sottrazione**, **Moltplicazione** e **Divisione**. Le definizioni di **Somma** e **Prodotto** di due o più numeri algebrici generali derivano, come sempre, dalle leggi di composizione e combinazione tra steps:

$$\frac{b''}{a''} = \frac{b'}{a'} + \frac{b}{a} \qquad \text{se} \qquad \frac{b''}{a''} \times c = (\frac{b'}{a'} \times c) + (\frac{b}{a} \times c), \tag{2.78}$$

e

$$\frac{b''}{a''} = \frac{b'}{a'} \times \frac{b}{a} \qquad \text{se} \qquad \frac{b''}{a''} \times c = \frac{b'}{a'} \times (\frac{b}{a} \times c), ; \tag{2.79}$$

mentre le regole per esprimere operativamente Somma e Prodotto sono:

$$\begin{gathered} \frac{b'}{a} + \frac{b}{a} = \frac{b'+b}{a} \\ \frac{b''}{a} + \frac{b'}{a} + \frac{b}{a} = \frac{b''+b'+b}{a}, \end{gathered} \tag{2.80}$$

e

$$\begin{gathered} \frac{b'}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{b'}{a} \\ \frac{b''}{b'} \times \frac{b'}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{b''}{a}; \end{gathered} \tag{2.81}$$

Un rapporto tra due steps non nulli si dice *positivo* o *contra-positivo* se i due steps hanno la stessa direzione o direzione contraria, nella direzione generale del tempo; così il prodotto di due rapporti, positivi o contra-positivi, è contra-positivo o positivo se il numero dei rapporti moltiplicati è un numero dispari o meno.
Dalle seguenti espressioni derivano le definizioni di *opposto* e *reciproco* di un

numero algebrico generale:

$$\frac{b'}{a'} = \theta\frac{b}{a} \qquad \text{se} \qquad \frac{b'}{a'} \times c = \theta(\frac{b}{a} \times c), \tag{2.82}$$

$$\frac{b'}{a'} = \mathrm{R}\frac{b}{a} \qquad \text{se} \qquad \frac{b'}{a'} \times (\frac{b}{a} \times c) = c, \tag{2.83}$$

e si scrive:

$$\frac{\theta b}{a} = \theta\frac{b}{a}, \tag{2.84}$$

$$\frac{a}{b} = \mathrm{R}\frac{b}{a}. \tag{2.85}$$

Si dice, allora, che sottrarre un rapporto equivale ad addizionare il suo opposto; mentre dividere per un rapporto significa moltiplicare per il reciproco. Infine si estendono le relazioni con cui poter ordinare tra loro, nella direzione del tempo, due o più rapporti:

$$\frac{b''}{a''} \gtreqless \frac{b'}{a'} \qquad \text{se} \qquad \frac{b''}{a''} \times a \gtreqless \frac{b'}{a'} \times a \tag{2.86}$$

dove $a > 0$ è un late-making step; quindi, per le definizioni date nei paragrafi precedenti, si ha che :

$$\frac{b''}{a''} \gtreqless \frac{b'}{a'} \qquad \text{se} \qquad (\frac{b''}{a''} \times a) + A \gtreqless (\frac{b'}{a'} \times a) + A, \tag{2.87}$$

dove A è un momento di tempo qualunque.

La possibilità di confrontare e ordinare nel tempo due momenti

$$(\frac{b'}{a'} \times a) + A, (\frac{b''}{a''} \times a) + A, \ldots$$

determinati e rappresentati dai numeri $\frac{b'}{a'}, \frac{b''}{a''}, \ldots$ permette di concepire una progressione indefinita di rapporti da contra-positivi a positivi, comprendendo la progressione dei numeri interi 2.44, e più in generale quella dei numeri frazionari; inoltre è evidente, così , che ogni numero frazionario è un rapporto algebrico, mentre ci sono molti rapporti algebrici che non possono essere espressi nella forma di numeri frazionari.

Questa progressione di numeri algebrici generali (o rapporti) corrisponde al pensiero della progressione del tempo, dai momenti indefinitamente precedetni a quelli indefinitamente conseguenti, da cui deriva la stessa progressione di rapporti.

Analogia o proporzione continua tra steps

Se a, b, c e d sono quattro steps non nulli possono essere tra loro nella relazione

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}, \tag{2.88}$$

in cui il rapporto di d su c è lo stesso del rapporto di b su a; in tal caso le due coppie di step (a, b) e (c, d) si dicono **analoghe** o **proporzionali**; e come per le analogie tra coppie di momenti, si dice che a, c sono **antecedenti** e b, d sono **conseguenti**, mentre a, d sono gli **estremi** e b, c sono i **medi**.
Assegnati quattro steps proporzionali tra loro, valgono anche le seguenti analogie, ottenute per inversione o alternazione da 2.88:

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \tag{2.89}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}, \tag{2.90}$$

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c}. \tag{2.91}$$

Le precedenti analogie non cambiano se si moltiplica ogni coppia per uno stesso moltiplicatore $\tilde{a}$, che denota il rapporto di un qualunque step non nullo su un altro; inoltre valgono le solite proprietà , che estendono tra rapporti quelle già viste tra steps:

$$\tilde{a} \times (a + b) = (\tilde{a} \times a) + (\tilde{a} \times b), \tag{2.92}$$

$$\tilde{a} \times (\tilde{b}' + \tilde{b}) = (\tilde{a} \times \tilde{b}') + (\tilde{a} \times \tilde{b}), \tag{2.93}$$

$$(\tilde{b}' + \tilde{b}) \times \tilde{a} = (\tilde{b}' \times \tilde{a}) + (\tilde{b} \times \tilde{a}), \tag{2.94}$$

$$\tilde{b} + \tilde{a} = \tilde{a} + \tilde{b}, \tag{2.95}$$

$$\tilde{b} \times \tilde{a} = \tilde{a} \times \tilde{b}, \tag{2.96}$$

$$\theta(\tilde{b} + \tilde{a}) = \theta\tilde{b} + \theta\tilde{a}, \tag{2.97}$$

$$\mathrm{R}(\tilde{b} + \tilde{a}) = \mathrm{R}\tilde{b} \times \mathrm{R}\tilde{a}. \tag{2.98}$$

Un caso particolare di analogia, centrale nella progressione di steps nel tempo, è quello analogo alla analogia continua tra momenti di una serie equidistante. *Tre steps non nulli a', b, b' formano una* **analogia continua** *o una* **proporzione continua** *quando il rapporto di b' su b è uguale al rapporto di b su a*, e si scrive

$$\frac{b'}{b} = \frac{b}{a}, \tag{2.99}$$

dove a e b' sono detti **estremi** e b è chiamato **medio** o **medio proporzionale** tra a e b'; inoltre b' si dice anche **terzo proporzionale** di a e b, mentre a è il terzo proporzionale di b' e b, perchè vale

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'}.$$

Se si denota con $\tilde{a}$ il rapporto tra steps $\frac{b}{a}$, la relazione 2.99 risulta

$$b' = \tilde{a} \times b = \tilde{a} \times \tilde{a} \times a.$$

La relazione che esprime una proporzione continua tra steps si completa sempre, in un solo modo, se sono dati i due steps a e b; infatti è sempre possibile determinare (o pensare determinato) uno ed un solo terzo proporzionale b' che soddisfi 2.99. Inoltre si osserva che comunque sia il rapporto $\tilde{a}$, positivo o contra-positivo (secondo che siano co-direzionali o contra-direzionali[40] gli steps a e b), il terzo proporzionale b' è co-direzionale con lo step a. Non sarebbe possibile, infatti, determinare inserire un medio proporzionale tra due steps contra-direzionali. Se infatti $b' = \theta\nu a$, di direzione opposta ad a, non esisterebbe nessuno step b tale da completare la proporzione continua

$$\frac{\theta\nu a}{b} = \frac{b}{a},$$

poichè dovrebbe essere soddisfatta anche la condizione

$$\tilde{a} \times \tilde{a} = \theta\nu$$

ma il prodotto del rapporto $\tilde{a}$ per se stesso è un numero positivo.
È invece possibile inserire in due modi diversi un medio proporzionale b tra due steps co-direzionali e non nulli a e νa, tale da soddisfare la relazione

$$\frac{\nu a}{b} = \frac{b}{a},$$

o allo stesso modo determinare due rapporti diversi che soddisfano l'equazione

$$\tilde{a} \times \tilde{a} = \nu.$$

In generale i due rapporti opposti $\tilde{a}$, che soddisfano $\tilde{a} \times \tilde{a} = \tilde{b}$, si esprimono con in simboli

$$\sqrt{\tilde{b}}(> 0) \quad \text{e} \quad \theta\sqrt{\tilde{b}}(< 0),$$

dove $\tilde{b}$ è un rapporto positivo, mentre $\sqrt{\tilde{b}}$ e $\theta\sqrt{\tilde{b}}$ sono due rapporti, rispettivamente uno positivo e l'altro contra-positivo, che si chiamano **radici** o **radici quadrate** del numero positivo b. Gli steps, invece, che sono medi proporzionali tra a e b' si esprimono con i simboli

$$\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a \quad \text{e} \quad \theta\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a$$

[40] I termini "co-" e "contra-" direzionale si attribuiscono agli steps che hanno uguale o opposta direzione nella Progressione del Tempo, che scorre dal positivo al contra-positivo.

e per entrambi valgono le equazioni della analogia (o proporzione) continua

$$\frac{b'}{\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a} = \frac{\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a}{a} \quad , \quad \frac{b'}{\theta\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a} = \frac{\theta\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a}{a}.$$

Esistenza della radice quadrata positiva, commensurabile e incommensuralbile

Nella definizione precedente di radice quadrata di un qualunque rapporto positivo non si pone attenzione alla sua esistenza, per la quale occorre fare un'osservazione preliminare, riguardo alla continuità della progressione in rapporto di due differenti steps.
L'idea della continuità di una progressione di momenti nel tempo implica anche la *continuità della progressione in grandezza da un qualunque step non nullo ad un altro differente step non nullo*, pensando gli steps come intervalli (o relazioni ordinali) tra due momenti. Da questa idea di continutità segue anche l'idea di una *progressione continua in rapporto*, che sussiste da un grado di disuguaglianza (di misura relativa diversa tra due steps) ad un altro grado. Così momenti, steps e rapporti di steps sono dati, pensati e concepiti in progressione continua nel tempo. Questa continuità costringe a concepire (quindi ad ammettere) l'esistenza di una grandezza determinata b che sia medio proporzionale tra due grandezze disuguali assegnate a e b'; quindi si ammette anche l'esistenza di un rapporto determinato $\tilde{a}$ che è la radice quadrata di un rapporto positivo dato $\tilde{b}$. [41]

[41] Hamilton affronta la delicata questione dell'esistenza della radice quadrata, con l'intenzione di fornire una dimostrazione a riguardo, richiamando la "verità intuitiva" della continuità della progressione di momenti nel tempo (che appare come un principio di continutà , senza una rigorosa e soddisfacente formalizzazione matematica). Nel paragrafo 2.2.2 di questo capitolo si presentano le conseguenze della continuità della progressione nel tempo, in particolare quella di determinare un momento intermedio tra due momenti fissati nel tempo; quindi Hamilton richiama ed usa questo fatto per parlare di continutità tra rapporti di steps e affrontare la dimostrazione dell'esistenza di un rapporto, medio proporzionale tra due rapporti fissati. Dalle considerazioni di Hamiton stesso, si può notare

Siano A, B e D tre momenti qualsiasi dati, distinti e tali che

$$\frac{D-A}{B-A} = \tilde{b}, \quad \tilde{b} > 1, \tag{2.100}$$

quindi il momento B è intermedio tra A e D. Sia C un momento fissato tra B e D nella progressione continua del tempo, e siano indicati i rapporti positivi di larghezza tra gli steps temporali individuati da D, C e B con il momento A:

$$\frac{C-A}{B-A} = \tilde{x} \quad , \quad \frac{D-A}{C-A} = \tilde{y} = \mathrm{R}\tilde{x} \times \tilde{b}.$$

Si può osservare che se il momento C è vicino al momento B il rapporto $\tilde{x}$ si avvicina al rapporto di uguaglianza 1, mentre il rapporto $\tilde{y}$ si avvicina al rapporto $\tilde{b}$. Introducendo il simbolo $\underline{\mathrm{L}}$ per indicare il *limite* a cui si avvicinano, o tendono, il momento variabile C e rispettivamente i rapporti $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, si può scrivere:

$$\text{se} \quad \underline{\mathrm{L}}C = B \quad \text{allora} \quad \underline{\mathrm{L}}\tilde{x} = 1 \quad \text{e} \quad \underline{\mathrm{L}}\tilde{y} = \tilde{b}. \tag{2.101}$$

Se, invece, C è vicino al momento D i due rapporti $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ si comportano inversamente; ovvero si ha:

$$\text{se} \quad \underline{\mathrm{L}}C = D \quad \text{allora} \quad \underline{\mathrm{L}}\tilde{x} = \tilde{b} \quad \text{e} \quad \underline{\mathrm{L}}\tilde{y} = 1. \tag{2.102}$$

Fissato dunque il rapporto di larghezza $\tilde{b} > 1$, al variare di C da B a D, si determinano due progressioni opposte di rapporti, denotate con $\tilde{x}$ e $\mathrm{R}\tilde{x} \times \tilde{b}$, da $\tilde{x} = 1$ e $\mathrm{R}\tilde{x} \times \tilde{b} = \tilde{b}$, per cui risulta $\mathrm{R}\tilde{x} \times \tilde{b} > \tilde{x}$, a $\tilde{x} = b$ e $\mathrm{R}\tilde{x} \times \tilde{b} = 1$, per cui si ha $\mathrm{R}\tilde{x} \times \tilde{b} < \tilde{x}$.

Quindi deve esistere un qualche stato intermedio della progressione del momento C, tra B e D, in corrispondenza del quale le due progressioni dei rapporti $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ si incontrano, ovvero sono uguali:

$$\mathrm{R}\tilde{x} \times \tilde{b} = \tilde{y} = \tilde{x} \quad \text{cioè} \quad \frac{D-A}{C-A} = \frac{C-A}{B-A}; \tag{2.103}$$

come tali argomentazione e dimostrazione rimangono sfuggenti e del tutto non rigorose, seppure contengono elementi intuitivamente accettabili.

da 2.103 e 2.100 si concepisce l'esistenza di un rapporto positivo $\tilde{a}$ che soddisfi $\tilde{a} \times \tilde{a} = \tilde{b} > 1$, cioè si tratta dell'esistenza della radice quadrata positiva di $\tilde{b}$. In modo analogo si può dichiarare che esiste la radice quadrata positiva di un rapporto $\tilde{b} < 1$ o $b = 1$.

Una proprietà importante dei rapporti, che viene provata, seppure senza una dimostrazione rigorosa, ma discende dall'esistenza della radice quadrata di un qualunque rapporto positivo, è il fatto che può e deve considerarsi esistente qualunque tipo di rapporto, anche i raporti che non possono esprimersi come interi o numeri frazionari. Secondo la definizione data di steps commensurabili, vuol dire che *esistono rapporti di steps* **incommensurabili**[42] *tra loro; ovvero che ogni step non nullo a ha altri steps incommensurabili con se stesso.* In termini di momenti di tempo, dati due momenti A e B, è possibile assegnare (non in un unico modo) un terzo momento C che non appartiene con A e B a nessuna serie equidistante di momenti, che comprenda tutti e tre i momenti A, B, C.
Un esempio noto è la radice quadrata di 2, per cui non esiste alcuna coppia di interi n, m tale che $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$; infatti proprietà aritmetiche mostrano l'impossibilità di questa scrittura. Così se

$$b = \sqrt{2} \times a, \quad a > 0,$$

lo step b, medio proporzionale tra gli steps co-direzionali e non nulli a e $2a$, è incommensurabile con lo step a, ovvero non esiste nessuno step c come loro base comune, tale che $a = m \times c, b = n \times c$; si avrebbe infatti che il rapporto tra steps $\frac{b}{a} = \frac{n}{m} = \sqrt{2}$, che non è possibile.
Inoltre, anche per il caso della radice quadrata di 3 e di altri esempi si può mostrare l'esistenza di tale radice e di coppie di steps tra loro incommensurabili; in tal caso il loro rapporto viene chiamato **rapporto incommensurabile** o **numero incommensurabile**.

[42]Due steps sono incommensurabili, quindi, se non sono multipli di una base comune e, dunque, il loro rapporto non è uguale ad un rapporto di numeri interi.

Una prova più formale, o rigorosa, dell'esistenza della radice quadrata positiva, commensurabile o incommensurabile, di un qualunque rapporto positivo, può essere presentata considerando la continuità della progressione del quadrato di un rapporto dato; quindi non confrontando due progressioni opposte, ma le due progressioni, legate tra loro e non opposte, dei rapporti positivi $\tilde{x}$ e $\tilde{x} \times \tilde{x}$, dove la seconda è la progressione dei quadrati (che denotiamo anche con $\tilde{x}\,\tilde{x}$) dei rapporti della prima progressione.[43] Attraverso l'uso di alcuni lemmi, si vuole mostrare che il quadrato $\tilde{x}\,\tilde{x}$ cresce costantemente e con continuità con la radice $\tilde{x}$, da zero, passando attraverso gli stati successivi di un rapporto positivo $\tilde{b}$.[44]

Lemma 2.3.1. *Se $\tilde{x}'$ e $\tilde{x}''$ sono due rapporti positivi tali che $\tilde{x}' \gtreqless \tilde{x}$, allora i loro quadrati soddisfano*

$$\tilde{x}'\,\tilde{x}' \gtreqless \tilde{x}\,\tilde{x}.$$

L'enunciato precedente segue facilmente dai concetti di rapporto e quadrato e le proprietà dell'operazione di moltiplicazione; inoltre dal lemma discende come corollario la proposizione inversa. Così questo risultato mostra come il quadrato aumenta costantemente con la sua radice.
Per provare che si tratta di un aumento anche continuo occorono ulteriori lemmi.

Lemma 2.3.2. *Se $\tilde{a}'$ e $\tilde{a}''$ sono due rapporti diversi, tali che $\tilde{a}'' > \tilde{a}'$, è possibile scegliere un rapporto intermedio $\tilde{a}$ in modo che risulti*

$$\tilde{a} > \tilde{a}', \quad \tilde{a} < \tilde{a}''.$$

[43]L'esigenza di questa seconda dimostrazione può nascere dal fatto che la precedente argomentazione riguardo all'esistenza di un rapporto medio proporzionale tra due rapporti fissati appare sfuggente e non rigorosa. Ora, Hamilton usa argomenti "più matematici" (non solamente legati al fondamento metafisico del Tempo da cui si muove) che anticipano, o almeno richiamano, la costruzione del numero reale come sezione di Dedekind o come coppia di classi contigue. Nel capitolo 3 viena discussa questa analogia, sulla scia dell'osservazione di Pellicer in [13], che trova nell'approccio di Hamilton la costruzione della sezione dei razionali.

[44]Per leggere e completare gli enunciati dei seguenti lemmi con le dimostrazioni e le osservazioni di Hamilton vedere [8] da p. 54 a p. 59.

Il risultato espresso in 2.3.2 è centrale per poter concepire, con i successivi lemmi, l'esistenza di un qualunque rapporto positivo, radice quadrata di un rapporto fissato. La dimostrazione discende da un risultato che Hamilton discute nella trattazione della continutà dei momenti nel tempo, per cui risulta possibile determinare un momento intermedio tra due momenti fissati nel tempo, che appartengano o meno ad una stessa serie equidistante.[45]
Dalle ipotesi del lemma e le definizioni di relazioni di conseguenza tra rapporti di steps, segue che

$$\tilde{a}''(B-A)+A > \tilde{a}'(B-A)+A \quad \text{se} \quad B>A, \tag{2.104}$$

sia C un momento intermedio tra $\tilde{a}'(B-A)+A$ e $\tilde{a}''(B-A)+A$, tale che

$$C > \tilde{a}'(B-A)+A, \qquad C < \tilde{a}''(B-A)+A \quad \text{se} \quad B>A, \quad \tilde{a}''>\tilde{a}';$$

allora si pone

$$\tilde{a} = \frac{C-A}{B-A},$$

avendo infine

$$\begin{aligned} C = \tilde{a}(B-A)+A, \quad B>A, \\ \tilde{a}(B-A)+A > \tilde{a}'(B-A)+A, \\ \tilde{a}(B-A)+A < \tilde{a}''(B-A)+A, \end{aligned} \tag{2.105}$$

cioè $\tilde{a} > \tilde{a}', \quad \tilde{a} < \tilde{a}''$.

Corollario 2.3.3. *È possibile scegliere un rapporto $\tilde{a}$ tale che*

$$\begin{aligned} &\tilde{a} > \tilde{a}', \quad \tilde{a} > \tilde{b}', \quad \tilde{a} > \tilde{c}', \quad \dots \\ &\tilde{a} < \tilde{a}'' \quad \tilde{a} < \tilde{b}'', \quad \tilde{a} < \tilde{c}'', \quad \dots \end{aligned} \tag{2.106}$$

[45] Il lemma 2.3.2, insieme ai succesivi corollario 2.3.3 e lemma 2.3.4 nasconde la costruzione della sezione dei razionali. Fissato un rapporto di steps positivo, individua la possibilità di scegliere un rapporto intemerdio; inoltre con i successivi enunciati si afferma che esiste un rapporto positivo di steps, $\tilde{a}$, maggiore e minore dei rapporti di interi, $\frac{n'}{m'}$ e $\frac{n''}{m''}$, che hanno quadrato, rispettivamente, maggiore e minore di un rapporto positivo fissato $\tilde{b}$, di cui $\tilde{a}$ è la radice quadrata.

se l'ultimo (o il più piccolo) dei rapporti $\tilde{a}'', \tilde{b}'', \tilde{c}'', \ldots$ è il più avanzato nella progressione dei rapporti (o il più grande) rispetto al più avanzato (o più grande) dei rapporti $\tilde{a}', \tilde{b}', \tilde{c}', \ldots$.

L'enunciato del corollario presenta un caso particolare di quanto si afferma nel lemma 2.3.2. Se, ad esempio, i rapporti $\tilde{b}'$ e $\tilde{c}''$ sono tali che

$$\begin{array}{llll} \tilde{c}'' \leq \tilde{a}'' & \tilde{c}'' \leq \tilde{b}'' & \tilde{c}'' \leq \tilde{d}'' & \ldots \\ \tilde{b}' \geq \tilde{a}' & \tilde{b}' \geq \tilde{c}' & \tilde{b}' \geq \tilde{d}' & \ldots \end{array}$$

allora le condizioni 2.106 sono soddisfatte se

$$\tilde{a} > \tilde{b}', \quad \tilde{a} < \tilde{c}'',$$

così si hanno rispettate le ipotesi del lemma $\tilde{c}'' > \tilde{b}'$.

Lemma 2.3.4. *Se $\tilde{b}$ è un rapporto positivo fissato, è possibile trovare uno ed un solo rapporto positivo $\tilde{a}$ tale che*

$$\tilde{a} > \frac{n'}{m'}, \quad \tilde{a} < \frac{n''}{m''} \tag{2.107}$$

dove m', n', m'', n'' denotano quattro numeri interi qualsiasi, tali che soddisfano

$$\frac{n'n'}{m'm'} < \tilde{b}, \quad \frac{n''n''}{m''m''} > \tilde{b}$$

L'esistenza di $\tilde{a}$ segue dai precendenti lemmi, mentre si prova l'unicità , verificando che non può esistere nessun rapporto oltre $\tilde{a}$ che soddisfi le condizioni 2.107.

Lemma 2.3.5. *Se $\tilde{b}'$ e $\tilde{b}''$ sono due rapporti positivi distinti e tali che $\tilde{b}'' > \tilde{b}'$, è sempre possibile inserire tra loro un rapporto frazionario, quadrato di un altro rapporto frazionario $\frac{n}{m}$, in modo da soddisfare*

$$\frac{nn}{mm} > \tilde{b}', \quad \frac{nn}{mm} < \tilde{b}''.$$

Teorema 2.3.6. *Il quadrato $\tilde{a}\,\tilde{a}$ di un rapporto positivo fissato $\tilde{a}$, la cui esistenza è mostrata nel lemma 2.3.4, è uguale al rapporto positivo b dato nello stesso lemma. Si ha dunque:*

$$\begin{gathered} \textit{se} \quad \tilde{a} > \frac{n'}{m'} \quad \textit{ogni volta che} \quad \frac{n'n'}{m'm'} < \tilde{b}, \\ \textit{e} \quad \tilde{a} < \frac{n''}{m''} \quad \textit{ogni volta che} \quad \frac{n''n''}{m''m''} > \tilde{b}, \\ \textit{allora} \quad \tilde{a}\,\tilde{a} = b, \ \tilde{a} = \sqrt{\tilde{b}}, \end{gathered} \tag{2.108}$$

dove m', n', m'', n'' denotano numeri interi qualsiasi, e $\tilde{b}$ un qualunque rapporto positivo fissato.

Il teorema enunciato discende dai lemmi precedenti; con tale risultato, infine, si può dare la prova per poter concepire e affermare che un qualunque rapporto $\tilde{a}$ cresce costantemente e con continuità da 0, e il suo quadrato $\tilde{a}\,\tilde{a}$ cresce allo stesso modo costantemente e con continuità , così da passare successivamente, una sola volta, attraverso diversi stati di un rapporto positivo $\tilde{b}$. Da questo risultato discende il fatto che ogni rapporto positivo $\tilde{b}$ fissato ammette una determinata radice quadrata positiva $\sqrt{\tilde{b}}$; tale radice è commensurabile o incommensurabile, a seconda se $\tilde{b}$ si può esprimere come quadrato di una frazione, cioè la radice è un rapporto di steps commensurabili. Infine, si può osservare che se $\tilde{b}$ non è il quadrato di una frazione la sua radice quadrata $\sqrt{\tilde{b}}$ è una rapporto incommensurabile approssimabile in frazioni, seppure senza una perfetta precisione; usando la notazione di limite si ha:

$$\sqrt{\tilde{b}} = \underline{\mathrm{L}}\frac{n'}{m'}, \quad \text{se} \quad \frac{n'\,n'}{m'\,m'} < \tilde{b}, \quad \frac{1+n'}{m'} \times \frac{1+n'}{m'} > \tilde{b}, \tag{2.109}$$

dove la condizione cui debbono soddisfare n', m' segue dalla dimostrazione del lemma 2.3.4.[46]

[46][8], p. 57, 59.

Capitolo 3

I contributi di Hamilton

La Storia della Matematica accoglie tra i suoi protagonisti Hamilton, attribuendogli un ruolo importante nello sviluppo dell'algebra, per la scoperta dei quaternioni; infatti, seppure questa strana struttura algebrica non trova subito consenso e comprensione, gli studi e le applicazioni successive del calcolo dei quaternioni restituiscono apprezzamento e fama per il lavoro del matematico inglese. Così non vi è dubbio che quando si parla dei contributi di Hamilton l'attenzione cade sulla sua maggiore scoperta; oltre ai risultati di fisica matematica.
La letteratura e una conoscenza più approfondita delle opere algebriche di Hamilton, invece, suscitano interesse per la particolare figura di matematico e, come alcuni articoli di storia e filosofia raccontano, per le attente, dettagliate e logiche critiche ai fondamenti dell'algebra. Inoltre, lo stretto legame e la solida organicità dei suoi studi e delle sue opere motivano l'interesse a chiedersi se oltre ai quaterioni e alla rappresentazione dei complessi - per cui è cresciuta una particolare e rinnovata attenzione - esistano altri contributi o elementi di valenza storica, per lo sviluppo della Matematica in generale o di alcuni concetti specifici.

Questo terzo capitolo è dedicato ad una riflessione sui contributi di Hamilton riguardo alle definizioni e alle costruzioni del concetto di numero in generale e

più in particolare del numero reale (alla base del quale costruisce i concetti di coppie, terne e quaterne di numeri, nel proseguo dell'opera studiata del capitolo 2 e in *Lectures on Quaternions*). Infine, si aprono alcune osservazioni sulle conseguenze attribuibili al lavoro del matematico inglese.
La spinta, che incoraggia e guida la lettura critica e interessata dei contributi di Hamilton, nasce dalla constatazione di alcune idee nuove o alcune anticpazioni sorprendentemente moderne in Hamilton, in merito a questioni centrali - quali l'ordinamento, la continutà , la trattazione di grandezze incommensurabili e la definizione di numero reale, forme di relazione di equivalenza - o, ancora, in merito ad ultime considerazioni e successivi sviluppi del ruolo del Tempo nella discussione sui fondamenti.
In definitiva, una domanda che è possibile porre, a seguito della lettura del saggio preliminare di Hamilton, è quella di cercare l'importanza scientifica, concettuale e storica, di ciò che precede ed è alla base dei lavori sulle funzioni coniugate e successivamente sui quaternioni; dietro questi risultati nuovi, infatti, ci sono idee e concetti che Hamilton sviluppa in forma di appunti, ma che anticipano passi importanti nella Matematica di fine Ottocento ed oltre.

3.1 La costruzione del Numero

Leggere e studiare ciò che scrive Hamilton, in merito a nozioni matematiche, ad affermazioni che cercano di definire o dimostrare concetti matematici e loro proprietà o conseguenze, è un'attività non facile. Per un matematico di oggi, che usa un linguaggio formale, rispettoso delle esigenze di rigore e di chiarezza, frutto delle intense discussioni[1] sui fondamenti della Matematica tra il XIX e il XX secolo, è difficile ritrovarsi nell'approccio, nello stile e nel linguaggio usati da Hamilton.
L'opera del matematico inglese risente delle sue intenzioni di dichiarare le

[1]La crisi dei fondamenti e la loro discussione e ricostruzione hanno fissato e orientato il significato logico-matematico dei concetti alla base di tutta la Matematica; seppure ancora oggi si confrontano tesi differenti, lo studio accademico o nelle scuole secondarie poggia su pilastri saldi o comunque su una organizzazione precisa del sapere Matematico.

convizioni metafisiche a fondamento dei significati e della costruzione degli elementi dell'algebra e quindi di far discendere da queste i concetti matematici. Le definizioni, gli enunciati, le dimostrazioni o le osservazioni sembrano confondersi e non avere chiarezza e rigore. Con gli strumenti della Matematica di oggi, si possono dare interpretazioni più precise e fare confronti con concetti moderni più forti.
Prima di rileggere criticamente la definizione e l'atteggiamento di Hamilton riguardo al concetto di numero in generale e di numero "reale"[2] è utile raccogliere delle osservazioni preliminari sull'approccio di Hamilton e da queste passare a vedere come Hamilton introduce i numeri[3] ed affronta alcune questioni centrali[4] che da sempre interrogano la Matematica.

3.1.1 L'approccio algebrico

Le basi metafisiche dell'algebra, di ispirazione kantiana, rimandano necessariamente al valore di verità *a prori* di certe intuizioni e nozioni, come il Tempo e tutto ciò che Hamilton introduce a partire da esso - i concetti di momento, relazione tra momenti, atto di passaggio (o temporal step), continutà di progressione di momenti o steps nel Tempo -, non trovando così nessun altra necessità per dare definizioni in maniera più rigorosa, in quanto è sufficiente il *valore intuitivo*[5]
L'impostazione sembra perciò di carattere *assiomatico*; questa intepretazione

[2]Hamilton non usa il termine *reale*, ma chiaramente la sua idea di numero si riferisce a quello che oggi chiamiamo numero reale; suggerisce ciò il modo in cui sono introdotti gli interi e i razionali e l'importanza data successivamente al *numero algebrico*, che include tutti gli altri e introduce i rapporti incommensurabili.

[3]In generale è difficile parlare di "definizione" di numero ed ancora di più Hamilton intende derivare il concetto di numero dal Tempo secondo l'intepretazione kantiana; così si usa l'espressione "introduzione" del numero, o numeri distinguendo le diverse forme.

[4]La presentazione nel paragrafo 2.1 delle nozioni di Ordine nel Tempo o Ordine in Progressione nel Tempo o teoria della variazione continua rivela l'attenzione e una nuova intepretazione riguardo al problema dell'ordinamento e della continuità .

[5]Questa convinzione lega Hamilton all'approccio euclideo, che infatti anche Kant convalida riguardo alla geometria.

sostenuta da alcuni storici[6] lancia l'algebra di Hamilton come esempio di algebra astratta, non solo per la scoperta di nuove strutture algebriche, ma per come esse sono trovate e costruite. L'organicità e la consequenzialità logica nella trattazione del saggio rivelano l'intenzione matematica di Hamilton[7], seppure può sembrare nascosta - e ai suoi colleghi contemporanei sembra tale - dal riferimento ad oggetti di significato teorico e metafisico, non strettamente pratico o filologico.[8] Le definizioni, gli enunciati e le loro dimostrazioni, così come le osservazioni presenti nel saggio non rispondono mai alle caratteristiche dell'algebra dei matematici inglesi di metà Ottocento, rispettando l'attenzione al valore e al rigore dell'algebra come sistema di segni o regole. Inoltre vengono usate espressioni che rendono difficile comprendere quando si definiscono o introducono concetti e in che misura o come si derivano e dimostrano le proprietà e i teoremi enunciati: ricorrono espressioni[9] quali "*è evidente che ...*", "*è facile vedere che ...*" o "*segue ...*", in questioni importanti si afferma "*non possiamo non ammettere che ...*" o "*si concepisce (o non possiamo non ammettere come concepito) che ...*". Le precedenti espressioni rivelano l'atteggiamento a volte incerto di Hamilton, come se qualcosa ancora sfuggisse e non venisse messo correttamente e completamente a fuoco dal matematico; la presenza di cenni di dimostrazione o la ricerca di dimostrazioni più rigorse (come nel caso dell'esistenza della radice quadrata positiva di un qualunque rapporto positivo tra steps) confermano

[6]MacDuffe in [11], p. 28, parla di un "*postulation approach*"; Bottazzini valuta il lavoro di Hamilton come "*uno dei primi seri tentativi verso l'aritmetizzazione dell'analisi e la costruzione assiomatica dei numeri reali*" ([1], p. 127).

[7]Hamilton è intenzionato a unire matematica e metafisica, così già nel saggio dove espone la Scienza del Tempo Puro non rinuncia a scrivere un'opera matematica.

[8]Nelle opere di algebra Hamilton mostra quanto sia euclideo, anche nel tentativo di dare una struttura organica alla sua opera. Euclide però risulta molto più chiaro e "facile" nella lettura e nella comprensione; la difficoltà in Hamilton risente della sua "stravaganza" filosofica (almeno per quegli anni) di parlare del Tempo per voler fondare e costruire i numeri, diversamente dalle idee intuitive da cui partiva Euclide per la geometria.

[9]Sono state riportate traduzioni letterarie di come Hamilton si esprime nella trattazione dei risultati presentati nel saggio.

la presenza di alcune difficoltà o di alcune idee non ancora mature.
La scarsa popolarità e insuccesso di queste stesse idee, che non convincono i contemporanei e che senza grande importanza si raccontano, possono ricondursi alle difficoltà dell'approccio algebrico di Hamilton.

3.1.2 L'introduzione dei numeri

L'interpretazione kantiana di numero, ricordata nel primo capitolo, è fortemente legata all'intuizione del Tempo e al concetto di successione di unità ed il numero stesso è unità , prodotto di una sintesi; quindi un numero si intende come "modo convenzionale per segnare una determinata posizione del molteplice del senso interiore"[10]. Nella Scienza del Tempo Puro Hamilton fissa l'attenzione sulle relazioni dell'algebra in quanto relazioni di pensieri successivi, che legano strettamente il Tempo alle nozioni matematiche di variazione, progressione o *transizione*, *passaggio*, poichè è l'intuizione del Tempo che permette di cogliere le variazioni. Così il bisogno di Hamilton è quello di mettere insieme l'intepretazione di Kant e il fondamento del Tempo costruendo il numero, come una traduzione matematica dell'idea di segno di una relazione o variazione nella progressione del Tempo.

La struttura dell'algebra e del numero

Nel saggio si trovano due circostanze in cui appare chiaro cosa si intende per numero: la prima è la definizione di sistema di multipli di uno step, dove il numero (*numero intero*) deriva dall'ordinale (ordinale di determinazione) che "segna" o "determina" gli atti di passaggio temporale tra momenti; la seconda è la definizione di rapporto tra steps, dove più in generale viene chiamato Numero (o *numero algebrico*) il rapporto stesso tra steps, che può ricondursi al rapporto di numeri interi (*numero razionale*) o rimanere rapporto tra steps, non esprimibile come frazione (*numero irrazionale*).[11]

[10] Winterbourne spiega così l'interpretazione di numero secondo Kant. ([16], p. 197).

[11] Nei capitoli del saggio si incontrano le introduzioni dei numeri interi, razionali e irrazionali, con le relative proprietà e operazioni tra essi possibili; ogni classe di numeri e

In entrambe le circostanze segnalate si ritrova la nozione fondamentale di *passaggio* o *relazione*. Inizialmente Hamilton parte dalla relazione di analogia[12] tra momenti di tempo, cioè la distanza temporale individuata da coppie di momenti assegnati[13]; tale relazione è chiamata step e corrisponde alla nozione odierna di *coppia ordinata* di momenti[14]. In secondo luogo, dopo aver introdotto i numeri interi e le frazioni[15], viene estesa la nozione di rapporto, che indica una particolare relazione (relazione in *ratio*), al concetto di rapporto tra steps, che rappresenta un passaggio di "secondo ordine"[16] che avviene tra steps; questa relazione è determinata dalla misura e dalla direzione relativa in cui si trovano tra loro due steps. Il passaggio tra steps nella relazione di rapporto corrisponde al concetto di numero[17]; come ad ogni coppia di momenti analoghi corrisponde la relazione di analagia, uno step, così ad ogni coppia di steps corrisponde una relazione di rapporto, che Hamilton chiama numero.[18]

Il diagramma[19] seguente riassume il percorso che conduce Hamilton dalle intuizioni (che nel secondo capitolo vengono chiamati concetti pensati) ai numeri, attraverso le relazioni necessarie, rappresentando dunque la struttura

---

operazioni relative estende la classe precedente. Nel caso dei rapporti tra steps Hamilton usa le lettere maiuscole per parlare di numero algebrico e le quattro operazioni; con esso parla per a prima volta di numero in generale e questo concetto estende tutti i precedenti.

[12]Øhrstrøm in [12], p. 47, considera tale nozione una anticipazione della moderna definizione di relazione di equivalenza. In fondo il significato della relazione di analogia richede le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

[13]Questa relazione tiene conto dell'intervallo temporale, nel pensiero, e la direzione nella quale si effettua il passaggio tra i due momenti.

[14][1], p. 127.

[15]Dopo le nozioni di ordinale, cardinale, rapporto frazionario.

[16][12], p. 48.

[17]"*[...] number is the ratio of one transition to another, or the complex relation between them, determinated partly their relative largeness and partly their relative direction [...]*". (Hamilton citato da Øhrstrøm in [12], p. 48).

[18]Qui è evidente che rapporto non coincide con la nozione matematica; Hamilton chiama rapporto una relazione, dunque il modo cui stanno tra loro due steps, distinguendo poi se tale rapporto o numero algebrico può esprimersi come rapporto di interi oppure no.

[19]Il diagramma è una rielaborazione di quello proposto da Øhrstrøm in [12], p. 49.

risultante dell'algebra come Scienza del Tempo Puro:

NUMERO
(passaggio di coppie di steps)
$\uparrow$
relazione di rapporto
|
COPPIE DI STEPS
(passaggio di coppie di momenti)
$\uparrow$
relazione di analogia
|
COPPIE DI MOMENTI

Nel proseguo dell'opera sulle funzioni coniugate Hamilton generalizza questo diagramma ed estende le nozioni di coppie di momenti e di steps a quelle di terne o quaterne (o n-uple, chiamate *polyplets*) di momenti e di steps in relazione tra loro, rispettivamente di analogia o di rapporto; così è possibile generalizzare anche la nozione di numero a coppie, o n-uple, di numeri, avanzando nella ricerca di nuovi numeri nella Scienza del Tempo Puro.[20]

Gli argomenti moderni

Gli studi odierni di Matematica presentano nei corsi di algebra (o anche di geometria o analisi) le teorie in cui si introducono o definiscono i numeri, dall'insieme dei Naturali, agli Interi e ai Razionali, fino ai numeri Reali, e così le successive strutture algebriche. Un percorso tradizionale tra le diverse teorie può partire dall'Artimetica di Peano, definire gli Interi e i Razionali attraverso particolari relazioni di equivalenza tra coppie di numeri Naturali e infine arrivare all'introduzione del numero Reale come sezione del campo dei Razionali o come coppia di classi contigue; dunque il primo approccio ai Naturali è di tipo assiomatico, senza una particolare riflessione sul concetto

[20]In questo modo riduce i complessi a coppie di numeri, ovvero di numeri reali, superando il problema dei numeri immaginari. Su questa via si arriva similmente ai quaternioni.

di numero in generale, continuando con le costruzioni algebriche per introdurre le altre classi di numeri e le relative operazioni, prestando attenzione nel descrivere la struttura algebrica che di volta in volta viene determinata.
L'opera di Hamilton è precedente ai lavori di Dedekind, G. Cantor (1845-1918) e G. Peano (1858-1932), alla base dei quali poggiano le principali attuali teorie dei numeri; quindi sono evidenti e giustificate le differenze tra l'approccio nella Scienza del Tempo Puro e quello dei successivi matematici, seppure si intravede qualche argomento moderno in comune.
La distanza riguarda proprio le due introduzioni del concetto di numero che si trovano in Hamilton. Mentre l'impostazione assiomatica di Peano presenta i Naturali come oggetti matematici descritti da un insieme di assiomi, che ne danno così una definizione implicita, la prima introduzione di Hamilton dà per acquisita la concezione di Naturale senza dedicare alcuno spazio nella sua opera, ma prosegue con i numeri interi (e poi le frazioni) a partire dal concetto di ordinale nella progressione del Tempo[21]. Dietro il concetto di ordinale e quindi di numero intero, così come di numero frazionario, non c'è una introduzione o costruzione matematica particolarmente esigente, ma queste sono ancora legate al loro valore intuitivo e alla "familiarità " dell'artimetica che Hamilton invoca come premessa.
Il concetto di numero in senso proprio viene presentato parlando della relazione in rapporto tra steps; in questo modo Hamilton estende i concetti precedenti, ma si vede una distinzione, anche nell'uso dei simboli che indicano gli interi, gli steps o il rapporto tra interi e il rapporto tra steps, tra numero intero, numero frazionario e *numero algebrico* (è come chiamato il rapporto tra steps).
La conclusione del teorema 2.3.6 avvicina, infine, Hamilton agli argomenti moderni[22] con cui si introduce il concetto di numero reale; il risultato del teorema parla infatti dei rapporti tra steps in termini di numeri, distinguendo i

[21] Si tratta della nozione di numero ordinale tradizionale, ma estesa a due direzioni temporali, che permette di pensare agli ordinali positivi e contra-positivi.

[22] Bottazzini, in [1], p. 127, e Pellicer, in [13], p. 19, riconoscono la "modernità " di Hamilton, seppure in alcuni aspetti non matura.

casi di rapporti esprimibili come numeri frazionari o come limite (approssimazione) di numeri frazionari.
La base filosofica del Tempo ritorna ancora ad avere un ruolo cruciale, nell'introduzione dei numeri, perchè , se gli argomenti matematici usati da Hamilton risultano alla fine "vicini" ad alcune teorie moderne, la sua originalità e la sue stesse difficoltà rimangono legate alle convinzioni filosofiche.

3.1.3 Le questioni centrali: *ordinamento, continuità e incommensurabilità*

Il fondamento della Scienza del Tempo Puro giustifica e permette di indagare anche alcune questioni centrali, che Hamilton ritiene necessarie ed usa per introdurre e dedurre i numeri e le loro proprietà . Queste questioni vengono introdotte, nel paragrafo 2.2, come verità intuitve, cioè conseguenze dell'intuizione del Tempo, riguardanti l'*ordine* e la *continuità* . Ordinamento, o relazioni d'ordine, e continuità , con relativi assiomi, sono concetti famosi e discussi, altrettanto centrali, in Matematica, trasversalmente alle diverse discipline dell'algebra, della geometria e dell'analisi. Nello svilpuppo del pensiero matematico si trovano costantemente presenti nei tentativi di definizione, nell'uso e nell'affermazione di principi con cui voler garatire la possibilità di ordinare oggetti o pensarli in continuum.
Nella riflessione sui contributi di Hamilton, a partire dal suo saggio, la questione relativa all'incommensurabilità merita ancora attenzione; già fin dalla scuola pitagorica, infatti, la scoperta di grandezze incommensurabili pone domande sulla natura e sulla definizione di alcune grandezze aritmetiche e geometriche classificate come irrazionali. Queste domande arrivano fino ad Hamilton, che affronta il problema dei rapporti tra steps che sono tra loro non commensurabili e che dunque non si esprimono attraverso un numero frazionario.

Ordinamento

Le possibilità di pensare un momento, ripensarlo identico a sé o pensarne un altro differnte sono giustificate dall'intuizione del Tempo, che è un'intuizione interiore; inoltre l'Ordine nel Tempo, dato a priori, permette di definire tra i momenti una relazione ordinale, che Hamilton dinstingue in relazione di identità e relazione di diversità tra momenti, suddividendo ulteriormente la diversità nelle due relazioni di precedenza e conseguenza. Nel Tempo, sono quindi dati i momenti e le distanze temporali tra essi, ma su queste è posssibile eseguire un controllo o un ordinamento, nella direzione del tempo, individuando momenti che accadano o sono dati prima, dopo o simultaneamente. Quest'ordinamento diventa subito una relazione d'ordine in senso matematico[23]; in essa si ritrovano infatti le proprietà che definiscono e riguardano la nozione di ordinamento nota. L'originalità di Hamilton sta nell'aver scelto il Tempo, invece che lo Spazio, come riferimento per poter garantire un ordinamento tra oggetti; quindi la corrispondenza classica tra l'ordinamento dei numeri e l'ordinamento sulla retta non compare in nessun modo. Inoltre, anche quando viene introdotta la continuità ed Hamilton parla di ordine continuo o di ordine in progressione continua, i momenti, gli steps ed i rapporti algebrici vengono pensati in riferimento al loro determinarsi nel tempo, lungo la direzione temporale.
Quest'atteggiamento risponde in primo luogo all'esigenza di Hamilton di risolvere la questione dei numeri negativi; infatti, l'ordinamento temporale permette di non associare i numeri alla misura di grandezze e parlare in termini del numero "più grande" o "più piccolo", oppure del numero "maggiore" e "minore", che necessariamente si confrontano con il problema di dire cosa significa che una grandezza, o meglio la misura di una grandezza, è più piccola o minore del nulla (o di zero). L'ordine nel Tempo stabilisce, invece, cosa viene prima o dopo o simultaneamente, per poter confrontare grandezze. Hamilton, in realtà, supera anche la questione e l'uso del termine

[23]Hamilton definisce in fondo le odierne relazioni di $<$ e $>$, con i medesimi simboli e regole di segno, tra momenti, steps, rapporti tra steps.

grandezza, che compare solamente poche volte per indicare l'entità di una distanza temporale, cioè il quanto essere prima o dopo. L'ordine a cui ci si riferisce è sempre tra momenti o relazioni tra essi e si parla di numero come segno del passaggio tra coppie di momenti o steps ordinati nel tempo; quindi l'ordinamento è strettamento legato con l'idea di progressione, concetto quasi identificato da Hamilton con quello di ordinamento, in quanto una progressione è sempre determinata nell'ordine temporale e quindi rappresenta in sé un ordinamento.[24]
Da questa concezione di ordinamento Hamilton costruisce le serie o sistemi di momenti multipli di uno step.[25] In questa costruzione occorre aggiungere al concetto di ordinamento quello di momento standard o zero, con cui fissare una sorta di riferimento nel tempo, rispetto al quale confrontare i multipli di uno step, che sono determinati prima o dopo lo step stesso. Con la scelta del riferimento ha senso parlare di direzioni nell'ordine temporale: "direzione del dopo" e "direzione del prima"[26]. Quindi nelle due direzioni opposte le coppie di momenti, ovvero gli steps, possono essere meglio confrontate e risultano perciò co-direzionali o contra-direzionali[27]; il corrispondente significato matematico sta nel fatto che il numero segna un passaggio o una relazione

[24]Progressione, successione, serie vengono usati da Hamilton come sinonimi, caratterizzati dal loro determinarsi nell'ordine del Tempo. Strettamente legato a questi concetti è anche il temine successivo, o immediatamente successivo, che Hamilton usa senza problematizzare come occore fare distinguendo la cardinalità degli oggetti di cui si parla. Il significato dato da Hamilton rimana legato alla determinazione o al pensiero nel tempo dei momenti, o al loro costruirsi applicando uno step ad un momento dato: successivo è il momento di tempo conseguente uno dato, da cui si passa mediante uno step fissato.

[25]Vedere 2.40.

[26]Questi due termini aiutano a comprendere e distinguere le parole con cui si esprime Hamilton; egli non li usa ma parla di direzione nell'ordine del tempo e quella contraria. Seguendo Hamilton sarebbe allora più corretto dire che l'ordine temporale ha in sè una Direzione ed esistono due versi, opposti tra loro.

[27]Hamilton fornisce una chiara definizione di inverso o opposto, vicina alla moderna concezione. In generale usa i termini come sinonimi ad indicare un atto nel pensiero contrario, cioè inverso o opposto nel tempo; nelle definizioni delle operazioni, opposto si riferisce alla addizione, inverso alla moltiplicazione.

tra steps, non solamente rispetto alla misura della distanza temporale, che tali steps rappresentano, ma rispetto alla loro direzione.
Nella costruzione dei multipli di uno step, i numeri ordinali hanno un ruolo centrale, perchè essi determinano un multiplo[28], cioè dicono il numero di volte cui si applica lo step base al momento standard[29] e così ordinano i multipli - come primo, secondo, terzo ed etc. - nelle due direzioni. Infine, Hamilton supera il significato di ordinale da una breve riflessione sulla possibilità di considerare i simboli ordinali come cardinali, introducendo così i numeri interi.[30]

Continuità

Un aspetto cruciale, comune a molte discipline e teorie matematiche, rimane la continuità . In molte definizioni specifiche della geometria e dell'analisi il termine *continuo* è riferito a precisi oggetti ed è circoscritto in particolari ambiti di studio. La ricerca di una definzione o di un principio di continuità sembra essere un aspetto delicato e profondo quando si parla di grandezze geometriche o algebriche; così questioni sull'incommensurabilità, sulle cardinalità non numerabili, sulla corrispondenza tra la retta e il campo dei numeri razionali, conducono a parlare di contintuità in senso matematico. Lo sviluppo del pensiero scientifico ha sempre cercato per la continuità una strada nel senso dell'idea di Spazio e dunque di continuità spaziale, su insiemi di punti, segmenti o rette. Hamilton affronta tale questione, senza un approccio problematico, e in modo convinto si sforza di tradurre in termini matematici la continuità della progressione di momenti nel tempo[31], scegliendo e indagando la continuità del Tempo, o meglio della progressione nel Tempo, invece di quella dello Spazio. Mentre lo Spazio permette di studiare la relazione esterna di oggetti tra loro e di determinare "un'estensione continua",

[28]Un multilplo di uno step è determinato dalla base e da un ordinale di deteminazione (vedere 2.3 nel secondo capitolo).
[29]Si riconosce l'intepretazione del numero come segno di un passaggio nella progressione.
[30]Vedere in 2.3.1 e in [1], p. 127.
[31][1], p. 127.

rappresentabile e schematizzabile con gli oggetti della geometria, il punto di vista hamiltoniano considera una continuità diversa, perchè riguarda il senso interiore e dunque - si potrebbe dire - "non visibile" o rappresentabile esternamente[32]. La continuità del Tempo è legata all'idea di Progressione o di successione di momenti, determinati nel pensiero; questa forma "dinamica"[33] di continuità è il punto di partenza. Le relazioni tra momenti, cioè gli steps temporali, rispondono alla continuità del tempo ed allo stesso modo i rapporti tra steps. Il concetto di continuità viene, ancora, sovrapposto a quello di progressione o almeno usato in modo congiunto; quindi Hamilton parte dai momenti per arrivare al numero reale attraverso le seguenti tre nozioni di continuità : continuità di una progressione di momenti, continuità di una progressione di steps, continuità di una progressione di rapporti (o numeri) algebrici.

Senza parlare della continuità della retta, il significato della continuità intuito da Hamilton è sostanzialmente quello moderno, formalizzato dai matematici della seconda metà dell'Ottocento a lui successori, seppure rimane evidente qualche punto debole, o apparentemente forzato in alcune dimostrazioni e assunzioni. Ciò che manca è una dichiarata impostazione assiomatica, pur rimanendo implicita nell'atteggiamento di un matematico dell'epoca di Hamilton, con le sue forti convinzioni filosofihe.

Un confronto con l'assioma di continuità di Dedekind mostra senza molta sorpresa che l'idea di Hamilton gli è vicinissima nella sostanza anche se espressa in modo completamente distante, per la particolare e finora impopolare scelta di fondare tutta l'algebra sul Tempo. Il lavoro di Dedekind affronta il problema della continuità e dell'irrazionalità [34] a partire dalla continuità della

[32]Il tempo, una successione nel Tempo non è direttamente rappresentabile come il concetto di estensione, anche continua, nello Spazio; come intuizioni Tempo e Spazio permettono schemi mentali, ma diversamente visibili.

[33]L'attributo *dinamica* va inteso nel senso letterale, in riferimento al valore dato da Hamilton ai concetti di variazione, flussuazione, progressione.

[34]Nei suoi studi sul calcolo differenziale, Dedekind iniza a fare alcune considerazioni sulla continuità e nel 1872 scrive il testo *Steitigkeit und irrationale Zablen* (Continuità e numeri irrazionali). (Per approfondire il contesto e i passaggi del lavoro di Dedekind

retta, da cui ne deriva una caratterizzazione artimetica; la chiave per costruire il numero reale e poter parlare di retta reale si trova nell'enunciato di un principio o assioma, noto anche come postulato della continuità secondo Dedekind.[35] Con questo assioma viene presupposta la continuità della retta, e risulta possibile stabilire una corriposndenza tra la retta e l'insieme dei numeri reali, per cui la stessa costruzione dei reali rimane profondamente legata all'assunzione della continuità .
L'approccio e il fondamento dei numeri reali dipendono da un principio, "evidente" e anche "semplice", secondo Dedekind. Il matematico tedesco, analogamente ad Hamilton, ma con consapevolezza e linguaggio diversi, ritiene necessario un fondamento e una definizione di questo genere della continuità , affermando che "*la continuità della retta, così come dello spazio, era il risultato di un'operazione del pensiero*"[36].
Gli elementi in comune tra Hamilton e Dedekind possono essere studiati a partire dal capitolo del saggio dell'algebra come Scienza del Tempo Puro, dove dalla continuità dei momenti si definisce il concetto di analogia continua, attraverso il quale si afferma che dati due momenti c'è sempre un terzo momento intermendio in analogia continua[37]; inoltre quando viene deriva-

vedere [1], pp. 233, 234, 235, 236, 237.)

[35]Postulato della continuità di Dedekind:

Sia $\overline{AB}$ un segmento (pensato ordinato come insieme di punti) diviso in due parti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tali che:

1. *ciascun punto di $\overline{AB}$ appartiene ad una sola parte;*
2. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$*;*
3. $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$*;*
4. *ciascun punto di $\mathcal{A}$ precede un qualsiasi punto di $\mathcal{B}$.*

Segue l'esistenza di un punto C tale che:

1. $C \in \mathcal{A}$ *o* $C \in \mathcal{B}$*;*
2. *ogni punto di $\overline{AB}$ che precede C appartiene a $\mathcal{A}$, ogni punto di $\overline{AB}$ che segue C appartiene a $\mathcal{B}$.*

[36][1], p. 235.

[37]L'analogia continua è definita tra momenti o tra steps, concepita come proporzione; si tratta di un concetto con cui i momenti e steps nella progressione del tempo vengono

ta la continuità della progressione di rapporti di steps, questa continuità - secondo Hamilton - "costringe" a concepire l'esistenza di un rapporto medio proporzionale tra due rapporti fissati.
Questa assunzione anticipa o suggerisce un'idea vicina al concetto di elemento separatore, che svolge un ruolo chiave nel lavoro di Dedekind sulla continuità e la sua costruzione del numero reale.[38]

Rapporti incommensurabili

La questione relativa alla continuità è legata a quella di individuare e introdurre le grandezze incommensurabili; inoltre, nell'ambito di una riflessione sull'introduzione dei numeri, questa stessa questione coinvolge la costruzione dei numeri reali, come insieme di razionali e irrazionali, cioè di numeri esprimibili come rapporto di interi (tra loro commensurabili) o non esprimibili come rapporto di interi (incommensurabili). Hamilton parla sempre di *rapporti* (tra steps), con cui estende la nozione di numero frazionario, inglobandola nel concetto più ampio di numero algebrico; quindi le sue idee un po' deboli di razionale e irrazionale - e così di numero reale - riguardano in realtà *ratio* commensurabili e incommensurabili.
Le domande che si pongono in merito a tale questione, conseguenti alla lettura di Hamilton, possono sintetizzarsi nei seguenti punti:

i. confrontare la definizione di *ratio* con la definizone eucliedea o quella moderna di "rapporto"; capire il senso e l'uso del termine *rapporto o numero algebrico*;

ii. osservare l'approccio con cui si presenta l'*incommensurabilità*;

iii. individuare l'idea di numero reale di Hamilton e i passaggi della costruzione, in confronto con Dedekind, viste le "simili" basi sulla continuità .

come concatenati l'uno l'altro.

[38] In questa strada ciò che avvicina Hamilton a Dedekind è una forma di sezione del campo dei razionali con cui introduce i reali negli ultimi lemmi, di cui sono riportati gli enunciati nel capitolo 2, pp. 61, 62, 63. (Vedere il paragrafo successivo sui rapporti incommensurabili).

La prima ricorrenza del termine *ratio* è conseguente alla definizione dell'atto o relazione[39] di sottomoltiplcazione di uno step, introdotta come operazione inversa a quella di moltiplicazione, insieme alla nozione di sottomultiplo, inversa di quella di multiplo di uno step. I concetti e i simboli usati fanno riferimento ad atti e oggetti del pensiero, relativi a intuizioni di Tempo. Lo svolgimento delle operazioni di sottomoltiplicazione $(\frac{1}{\mu} \times \ldots)$ e moltiplicazione $(\nu \times \ldots)$ di uno step viene "segnato" o rappresentato dal rapporto di interi $(\nu \times (\frac{1}{\mu} \times \ldots) = \frac{\nu}{\mu} \times \ldots)$, che così riceve la sua definizione; perciò la frazione (o rapporto di interi) è definita come segno della frazione (nel pensiero) tra steps.[40]
La prima ricorrenza di ratio presenta anche l'attributo di *algebrico*; infatti, con tale aggettivo vengono da subito caratterizzate tutte le classi di numeri e operazioni definite, dagli interi ai numeri frazionari. Questa scelta sembra creare confusione, ma in essa si capisce il tentativo di estendere ogni volta una classe alla classe successiva (o superiore, perchè comprendente la precedente); quindi l'atteggiamento sembra quello di voler trattare interi e frazioni come oggetti di strutture algebriche. Questo atteggiamento si intuisce ogni volta che Hamilton chiama *algebrico* qualcosa che è già noto come aritmetico, ma vale più in generale nella Scienza del Tempo Puro[41]. Il contributo di Hamilton allo sviluppo dell'algebra astratta[42] è testimoniato da questo

[39]Nel significato di atto o passaggio nel pensiero.

[40]La costruzione di Hamilton è sempre inizialmente quella kantiana, relativa all'intuizione e interpretazione del numero come schema. Inoltre anche le operazioni tra numeri sono sempre derivate da operazioni nel pensiero; dunque cosa si intende per somma, ad esempio, di numeri interi deriva dalla legge di composizione tra steps.

[41]Dopo aver introdotto gli interi, così come dopo la definizione di frazione, le operazioni che introduce e chiama algebriche sono tutte e quattro le operazioni artimetiche, tutte possibili, come fossero introdotti gli assionmi che descrivono e definiscono l'*anello* degli interi e il *campo* dei razionali.

[42]Non solo i quaternioni rappresentando un esempio di nuova struttura algebrica, non-standard, possono considerarsi il contributo di Hamilton per lo sviluppo dell'algebra astratta, ma tutto il fondamento dell'algebra come Scienza del Tempo Puro presenta le idee dell'algebra simbolica astratta a partire dagli insiemi dei numeri interi e razionali.

approccio.
La nozione hamiltoniana di rapporto, in riferimento alle frazioni e alle relative operazioni algebriche e proprietà , è nella sostanza la definizione di "classe di equivalenza" tra coppie di interi. Questa ipotesi non può fondarsi sulla presenza di definizioni esplicite di relazione e classe di equivalenza da parte di Hamilton, in quanto esse completamente assenti, ma si può provare a leggere mettendo insieme definizioni e criteri enunciati per il confronto tra frazioni. In primo luogo, la definizione di relazione di analogia tra momenti - e così il rapporto pensato come relazione - rappresenta già un'intenzione e una anticipazione del concetto di relazione di equivalenza[43]; dunque la nozione hamiltoniana di *relazione*, che è un legame temporale tra momenti o coppie di momenti, distinguendosi in analogia o rapporto, ha in sé il significato e la portata matematica di *passaggio a quoziente* in un insieme di oggetti (che in Hamilton sono prima oggetti del pensiero e poi numeri matematici) su cui si definisce una relazione.
Maggior interesse, inoltre, è vedere nascosta nell'introduzione delle frazioni la nozione di frazioni equivalenti. Le espressioni 2.65 e 2.66, del precedente capitolo, non solo definiscono un criterio di confronto e di ordinamento tra frazioni, ma stabiliscono il principio per cui due frazioni sono considerate equivalenti, che, in termini moderni, significa rappresentare lo stesso numero razionale.
In ultimo, il rapporto tra steps chiarisce l'idea hamiltoniana di rapporto e di numero algebrico. Quando viene estesa la nozione di rapporto e si definisce il rapporto $\tilde{a} = \frac{b}{a}$, dati due steps a e b, il passaggio compiuto da Hamilton non sembra facile ed accettabile, ma occorre comprendere, intepretare modernamente, alcune scelte: l'aggiunta di un ulteriore e nuovo simbolo per indicare coppie di steps in rapporto tra loro; il parlare di prodotto e moltiplicazione tra steps senza una definizione "operativa"; la comparsa di lettere maiuscole ad indicare le operazioni algebriche; l'introduzione della proporzione tra steps e l'estensione delle operazioni e delle proprietà tra rapporti tra steps

[43] Vedere nota 12, a p. 70

in proporzione, usando i nuovi simboli. Il nuovo concetto di rapporto tra steps, e altre relative nozioni, sembrano di nuovo creare confusione in merito al termine "algebrico" e al significato dei simboli e delle espressioni come $\tilde{a}$ o anche $a \times b$, poichè le ulteriore estensioni delle operazioni e il prodotto di steps non appaiono ben definiti e collocati con rigore da Hamilton nella sua trattazione; per esempio, il percorso con cui si arriva a parlare di rapporto e di prodotto tra steps rimane oscuro, trovandosi non giustificate le espressioni 2.71 e 2.72. L'ipotesi che può sussistere è che Hamilton manifesti un approccio assiomatico fin dalla definizione di numero algebrico: tale definizione da un lato è una costruzione kantiana, perchè definisce un tipo di relazione cui stanno tra loro due steps temporali, dall'altro può essere pensata come introduzione di una struttura algebrica astratta, i cui elementi sono gli steps e in cui avviene un passaggio a quoziente e la costruzione di un *campo* di rapporti tra steps. Questa struttura è , però , una estensione di quanto detto e definito prima, perchè si vede che il rapporto tra numeri è un rapporto tra steps; inoltre in questo modo Hamilton sembra non parlare solo di frazioni ma propriamente di Razionali.[44]

La domanda successiva indaga, a questo punto, in cui oltre alla nozione di rapporto algebrico è definita la sua radice quadrata, l'impatto con l'incommensurabilità e con che cosa viene riconosciuto e chiamato incommensurabile. Hamilton, rispettando la definizione di steps commensurabili (data nella trattazione dei multipli di uno step base), riconosce incommensurabili coppie di steps il cui rapporto non si esprime come rapporto di numeri frazionari. L'esempio è il caso di rapporti che rappresentano la radice quadrata di uno step positivo; in particolare il primo esempio descritto è la radice quadrata di due. I rapporti o numeri chiamati da Hamilton incommensurabili[45] entrano nello studio dei rapporti o numeri algebrici; quindi insieme al campo dei razionali appare chiara l'esistenza di numeri irrazionali, che occore far

[44]Bottazzini in [1], p. 127, parla di

[45]Tali nuemeri sono i numeri irrazionali.

vedere, costruire o dimostrare. Hamilton prova a dimostrarne l'esistenza a partire dalla continuità del Tempo e dallo stesso tentativo di costruire tali rapporti incommensurabili come limite di rapporti algebrici.

L'ulteriore domanda successiva arriva a chiedere quale sia la concezione hamiltoniana di *numero reale*, comprendente razionali e irrazionali, o rapporti di steps commensurabili e incommensurabili (come si legge nel saggio del matematico inglese). L'intenzione dichiarata da Hamilton è quella di affermare e dimostrare che esiste sempre un rapporto tra steps, in particolare, dati due steps, si può sempre costruire il medio proporzionale. In questa intenzione si ritrova ciò che Hamilton anticipa riguardo all'introduzione della continuità dei reali e la loro costruzione a partire dal campo dei razionali; infatti nelle due dimostrazioni, proposte per l'esistenza della radice quadrata di uno step positivo, si incontrano due strade percorse da Hamilton per parlare, in sostanza, di numero reale. Il primo approccio, a partire dalla continuità della progressione di momenti nel Tempo, mostra che dato un rapporto $\tilde{b}$ esistono sempre due successioni di rapporti opposte nelle direzione del tempo[46] ed entrambe comprese tra estremi uguali[47]; così tali successioni devono incontrarsi, cioè uguagliarsi, in un rapporto che è la radice di $\tilde{b}$. In questa dimostrazione Hamilton lascia qualche punto debole e dubbioso. Il secondo approccio mostra invece una costruzione interessante, in cui l'idea di numero irrazionale viene suggerita come sezione dei razionali.[48] Hamilton, attraverso una serie di enunciati, con i quali mostra che un rapporto tra steps e il

[46] Quindi crescenti e decrescenti.

[47] Ciscuna successione inizia dal valore dove terimana l'altra.

[48] Pellicer in [13], p. 19, presentado Hamilton tra i precursori dei matematici che hanno introdotto i reali, descrive l'approccio di Hamilton come costruzione dei reali secondo la sezione dei razionali. Hamilton seziona i razionali in due classi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tale che tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ siano minori di tutti gli elementi di $\mathcal{B}$, affermando che può capitare che non esiste nessun numero razionale tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Dalla continuità del tempo Hamilton usa questi due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ per determinare un numero irrazionale, enunciando che se $\frac{m}{n} < a$ e $a < \frac{p}{q}$, quando $\frac{m^2}{n^2} < b$ e $b < \frac{p^2}{q^2}$, si ha $a = \sqrt{b}$.

suo quadrato crescono con continuità e costanza, determina la radice di un quadrato, sfruttando la possibilità di ordinare, nella continuità del Tempo, i rapporti algebrici precedenti e conseguenti alla radice e che risultano avere il quadrato rispettivamente precedente e conseguente il quadrato della radice.[49] L'idea anticipata da Hamilton riguardo alla natura e la costruzione del numero reale è soprendentemente quella di Dedekind. Il lavoro dei due matematici, come osservato per la continità , è totalmente distante negli approcci e nel rigore con cui si esprimono le teorie, ma vicino nel significato matematico. In generale le convizioni e gli argomenti di Hamilton appaiono poco maturi e così poco completi, ma le idee precise sulla esistenza e sulla costruzione della radice di un numero contengono aspetti "moderni"; infine la caratterizzazione dei rapporti incommensurabili come approssimazione o limite di frazioni mostra un elemento nuovo che avvicina Hamilton anche alle interpretazioni dei reali come successioni convergenti di razionali.[50]

3.2 Le conseguenze matematiche

L'Algebra come Scienza del Tempo Puro riserva spunti ed elementi precisi che segnalano uno sviluppo o un'anticipazione di uno sviluppo di alcuni concetti e, più in generale, una svolta dell'algebra. La lettura critica dell'opera

[49] Questo ordinamento (nel senso hamiltoniano del termine) nella continuità del Tempo - che si ritrova nei lemmi 2.3.2 e corollario, 2.3.4 e infine nel teorema 2.3.6 del paragrafo 2.3.2 - ***contiene l'idea di sezione del campo razionale (o anche quella di coppia di classi contigue - quindi il numero reale è individuato da due insiemi di rapporti di interi)***, comprendendo così la tesi di Pellicer in [13] (Vedere nota 48, che traduce in termini di sezioni del campo razionale il teorema 2.3.6).

[50] L'approssimazione di un numero irrazionale con successioni convergenti di razionali è un argomento della "convergenza" di insiemi di razionali, da cui deriva il numero reale; quindi nei passi di Hamilton c'è un legame con le coppia contigue. Inoltre, il contributo di Hamilton in questo senso, seppure minimo, si potrebbe approfondire confrontandolo con il lavoro di Cauchy (anche riguardo il concetto di limite, usato da Hamilton) oppure con il programma intuizionista di L.E.J. Brouwer (1881-1966), con cui la Scienza Pura di Hamilton sembra avere legami forti.

di Hamilton - seppure a posteriori - suggerisce un immediato confronto con gli argomenti della Matematica moderna, indicando alcuni possibili legami significativi, mentre la storia del pensiero scientifico e matematico consegna con qualche riserva le effettive conseguenze matematiche del lavoro e del punto di vista hamiltoniano, lasciando i contribui di Hamilton quasi "scollegati" da altri sviluppi.[51]
Due osservazioni conclusive possono aiutare a comprendere o a superare questo atteggiamento; queste riguardano i rapporti e le evoluzioni nella Matematica di metà del XIX secolo (contemporanea alla Scienza del Tempo Puro) e di quella dalla fine dell'Ottocento fino ad oggi, cogliendo le risposte, i cambiamenti e le analogie con altri programmi per l'algebra e per i fondamenti della Matematica.

3.2.1 Un'instanza di "dogmatismo" del Tempo Puro

I colleghi contemporanei e i successori di Hamilton sembrano non essere influenzati dai suoi studi.[52] Nelle discussioni tra i matematici inglesi di metà Ottocento si incontrano le posizioni dichiaratamente critiche o scettiche, proprie della scuola dell'algebra simbolica o filologica, oppure della nascente algebra logica; Peacock e De Morgan sono due tra i nomi in prima linea nel confronto e nello scambio epistolare con Hamilton, riguardo alla validità dei rispettivi punti di vista sul fondamento e sul ruolo e sviluppo dell'algebra.
La rilevanza matematica della Scienza del Tempo Puro, che si intravede nel confronto con i contemporanei, si concentra su aspetti ed eventuali contributi diversi dalle questioni in merito all'introduzione dei numeri (Interi, Razionali e Reali)[53]; questa rilevanza ed importanza viene, infatti, riservata alle sole

[51] Gli studi algebrici di Hamilton, con l'eccezione del calcolo dei quaterioni, sembrano rimanere oggi una pagina della storia della Matematica a sé stante.

[52] Solamente la scoperta dei quaternioni, soprattutto dallo scorso secolo in poi, rappresenta un esempio e una reale spinta per la svolta dell'algebra astratta. Nelle teorie sui reali, invece, non si vedono tracce esplicite delle intuizioni di Hamilton.

[53] Tali questioni sono quelle messe in evidenza dai paragrafi precedenti, in cui idee sull'ordinamento e sulla continuità - a partire dal tempo - appaiono chiare e implicitamente

definizioni o proprietà delle operazioni algebriche (in particolare l'associatività e la divisione[54]), circoscrivendo la riflessione al problema della validità, della libertà e delle restrizioni delle regole algebriche dei nuovi numeri di Hamilton o dei simboli degli altri algebristi.[55]

La costruzione del numero, le questioni sulla continuità e sull'introduzione dei numeri irrazionali non trovano largo spazio nel dibattito e restano nascosti dalla "novità " della teoria delle funzioni coniugate e dal calcolo dei quaternioni, fondati sull'intuizione del Tempo. L'osservazione su quali siano le conseguenze a cui prestare attenzione, fin dalle opinioni dei colleghi, potrebbe aiutare ancora a sostenere la duplice tesi: sui meriti di Hamilton nell'aver aperto la strada verso nuove strutture algebriche e, dunque un nuovo approccio algebrico astratto; sulla scarsa attenzione o sensibilità e anche poca maturità riguardo alle questioni centrali della continuità e dell'introduzione formale dei reali.

Il mancato proseguo o approfondimento del lavoro di Hamilton, nella costruzione e nell'introduzione dei numeri, risente del contesto nel quale l'opera di Hamilton viene scritta e letta; dunque lo stesso atteggiamento del matematico irlandese, concentrato nella difesa dei suoi fondamenti, toglie interesse ad altre sue idee "moderne". Nelle lettere, scritte negli anni quaranta del XIX secolo ai colleghi Graves e De Morgan, si leggono i nodi della critica principale ad Hamilton e la sua reazione con alcuni segni di una "conversione" del suo punto di vista. L'algebra come linguaggio o come sistema di segni e

presenti o ad un livello acerbo.

[54]Le n-uple di numeri, che derivano da n-uple di steps, rispondono non sempre alla proprietà commutativa, ma rendono sempre possibile l'associatività e la divisione (Øhrstrøm parla di richiesta dell'assocciatività e della determinazione della divisione seguente dalla visione dell'Algebra di Hamilton). Queste proprietà caratterizzano nuove strutture algebriche non-standard e rappresentano delle limitazioni al numero di strutture algebriche accettabili. ([12], pp. 49, 50, 51, 52).

[55]Hankins, in [9], e Øhrstrøm, in [12], riportano i tratti essenziali di questa riflessione, dalle conseguenze matematiche dei "numeri" definiti da Hamilton alle risposte dei colleghi rispettosi di un approccio algebrico meno metafisico, più tradizionale e vicino ad uno sviluppo dell'algebra come generalizzazione dell'artimetica.

loro combinazioni si impone con più facilità , rispetto alla scuola dell'algebra teoretica hamiltoniana, che conduce verso risultati nuovi[56] ma anche verso requisiti algebrici restrittivi, per il fondamento e lo sviluppo della stessa disciplina.[57] La restrizione dell'approccio di Hamilton viene riconosciuta da De Morgan come un'instanza di *dogmatismo*[58], in contrasto con la libertà che la scoperta dei quaternioni (così come tutta l'impostazione hamiltoniana dell'algebra) rappresenta per la futura algebra astratta, come viene riscoperto dalla critica moderna. Le corrispondenze epistolari con De Morgan e Peacock sono significative per conoscere la reazione e il cambiamento di opinione dello stesso Hamilton, che insieme ai due colleghi approfondisce una riflessione in merito ai limiti del Tempo Puro e al modo insoddisfacente, o non definito, a cui egli stesso giunge sul concetto generale di insiemi di numeri[59]. Il futuro della Scienza del Tempo Puro, quindi, è rivisto e ridimensionato già dallo stesso suo autore, che riconosce in evoluzione il suo pensiero e la sua opinione riguardo all'algebra, avvicinandosi alla scuola filologica (caratterizzante l'algebra simbolica, o algebra come linguaggio), seppure non rinunciando completamente a migliorare gli studi metafisici o a trovare applicazioni future delle nuove strutture algebriche da questi scoperte.[60]

[56] La comprensione teorica, il significato e l'applicazione di questi risultati, possibili nella Scienza del Tempo Puro, non trovano consenso e uso immediato.

[57] Le restrizioni si riferiscono alla validità della proprietà associativa e alla determinazione della divisione in certi insiemi di numeri, come chiesto nella costruzione ed esposizione della Scienza del Tempo Puro, in cui il fondamento del Tempo Puro fa derivare e giustifica queste stesse proprietà , che necessariamente sono richieste e quindi valgono.

[58] "*[...] if some of his phrases are to be interpreted as of his asserting algebra to be* the *scienze of pure time, I should then cite him as an instance of the* dogmatism *already alluded to.*" (lettera di De Morgan del 1839, citata da Øhrstrøm in [12], p. 53).

[59] "*[...] the mathematical notion of Time leads (in my mind at least) to a general conception of Numerical Sets, which has by me, as yet, been only exemplified, in anything like a satisfactory and definite way, for the two cases of Couplets and Quaternions.*" (Hamilton citato da Øhrstrøm in [12], p. 52).

[60] "*My view respecting the nature, extent, and importance of symbolic science may have approximated to yours; and that approximation may be due chiefly to the influence of your writing and conversation.*" (Lettera di Hamilton a Peacock, citata da Øhrstrøm in

3.2.2 Il legame con l'Intuizionismo del XX secolo

La matematica del XX secolo, sulla scia di grandi discussioni e teorie del secolo precedente, conosce una profonda riflessione sui fondamenti di tutta la scienza, nelle diverse sue discipline. Diverse scuole di pensiero, nate anche nel campo della filosofia e della logica, presentano i propri programmi di riformulazione delle basi della logica, dell'aritmetica e della geometria, piuttosto che dell'analisi e dell'algebra; quindi iniziano a succedersi differenti proposte ed impostazioni inspirate alle pricinpali correnti della filosofia della Matematica del Novecento.[61]
Nella valutazione dei contributi di Hamilton, uno di questi programmi riformanti i fondamenti della Matematica si sviluppa intorno al 1907 grazie alle idee suggerite dal matematico olandese Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), che rimette alla base e al centro della costruzione e della dimostrazione matematica l'intuizione.[62] La pagina della storia, relativamente recente, dell'*Intuizionismo* e del suo sviluppo in Matematica[63] rivaluta e rilegge le convizioni e le ricerche metafisiche di Hamilton. Il confronto a posteriori con altri argomenti dei matematici moderni, alla luce del saggio sull'algebra come Scienza del Tempo Puro, permette ancora una volta di pensare a delle ipotesi di anticipazioni, sorprendentemente moderne, di alcuni concetti e metodi di indagine centrali, soprattutto nella fondazione e costruzione del numero e del numero reale.
Le anticipazioni si riconoscono nello stretto ed evidente legame con il pro-

[12], p. 53). Hamilton inizia a ritenere valido e possibile anche l'intepretazione dell'algebra come linguaggio; le seguenti parole del matematico (citate da Øhrstrøm in [12], p. 53) riconoscono la necessità di tradurre in conseguenze matematiche le iniziali discussioni metafisiche della Scienza del Tempo Puro: "*Thus, I like better to work out my notion of Time into its mathematical consequences, than to enter into any* a priori *discussion whether it be metaphysically correct, though I have speculated on that point too.*"

[61] [3].

[62] [1], pp. 401, 402, 404, 405, 406. [3], da p. 63 a p. 81.

[63] *Matematica intuizionista*: la matematica costruita intuitivamente, contrapposta a quella classica, cioè quella risultante dalla fondazione di Weirstrass, Dedekind e Cantor. (Vedere [3], p.63)

gramma di Brouwer, nel voler introdurre ed usare in matematica oggetti e metodi che possono essere dati e giustificati in quanto se ne può dare "*una costruzione basata sull'intuizione, perchè l'unico fondamento della matematica va ricercato in questa costruzione*"[64]; quindi non solamente gli oggetti e i metodi ma anche i principi ai quali si fa riferimento, per costruire o condurre una dimostrazione, derivano dall'intuizione. Questi elementi teorici, riguardo ai problemi dei fondamenti, richiamano l'esempio e l'approccio di Euclide[65], anche nella forte intepretazione kantiana, inspiratirce dell'opinione di Hamilton sulla natura dell'algebra. L'ipotesi di vedere nell'opera di Hamilton un tentativo di approccio *assiomatico* può confermarsi anche conoscendo come, secondo Brouwer, l'intuizione rende ragione di una costruzione degli oggetti matematici e dunque della loro esistenza e del loro significato in sé.[66]

I contributi ricercati dai precedenti paragrafi hanno sottolineato il problema di costruire da un punto di vista matematico (non solo metafisico) il concetto di numero e poter trattare e definire le questioni riguardanti l'introduzione dei numeri, in particolare della continuità e dei numeri reali, sulla base dell'intuizione e delle verità intuitive connese col Tempo Puro. Anche in questo passaggio, dalla metafisica alla matematica, il programma di Brouwer ripercorre i passi di Hamilton, in due *atti* dell'intuizionismo. Questi due atti esprimono un aspetto proprio della natura della costruzione matematica, che non solo è di tipo intuizionista, ma deriva dall'intuizione del tempo; quindi in analogia con l'opinione hamiltoniana (sulla scia dello schematismo di Kant) il primo e il secondo atto dell'intuizionismo si esprimono in termini di Tempo e di ciò che da esso segue, come i soliti concetti di *passaggio* e *successione*.

[64] Brouwer citato in [3], p. 63.

[65] L'opera di Euclide per prima fa ricorso al valore logico e strutturale delle verità intuitive per organizzare e derivare la geometria; i principi e le dimostrazioni sono posti e guidati a partire dall'intuizione.

[66] "*[...] la matematica intuizionista è una matematica che deduce teoremi da assiomi basati sull'intuizione, mediante deduzioni basate sull'intuizione. [...] Un oggetto matematico viene considerato esistente solo dopo la sua costruzione.*" ([3], p. 66).

Gli atti dell'intuizionismo sono due assunzioni riguardanti la possibilità di costruzione e l'approccio matematico:

i. il primo atto "*riconosce che la matematica intuizionista è un'attività essenzialmente alinguistica della mente che ha la sua origine nella percezione di un passaggio di tempo, cioè nello scindersi di un momento di vita in due cose distinte, una delle quali cede il passo all'altra, ma è conservata dalla memoria.*"[67];

ii. il secondo atto "*riconosce la possibilità di generare nuovi enti matematici: in primo luogo sotto forma di successioni [...], che proseguono all'infinito i cui elementi sono scelti più o meno liberamente tra enti matematici precedentemente acquisiti; e, in secondo luogo, sotto forma di specie matematiche, cioè proprietà ipotizzabili per enti matematici precedentemente acquisiti, che si dicono elementi di una specie.*"[68]

I termini e la sostanza delle due assunzioni rispecchiano "ingredienti" della Scienza de Tempo Puro: percezione di momenti e loro relazioni temporali, relazioni o atti di passaggio, successione o progressione nel tempo. Inoltre gli effetti dei due atti dell'intuizionismo conducono alle stesse "conseguenze algebriche" del Tempo Puro: dal primo atto si generano i numeri naturali e gli ordinali, così come la nozione di Ordine del Tempo di Hamilton ha permesso di poter introdurre interi e frazioni; dal secondo atto si crea "*la possibilità di introdurre il continuo intuizionista come la specie della successioni infinite convergenti di numeri razionali*"[69], come il tentativo hamiltoniano di derivare la continuità dei reali da quella della progressione nel tempo[70]. Infine è l'approccio algebrico a ritrovarsi giustificato e descritto nei due atti

[67][3], p. 68

[68][3], p. 69

[69][3], p. 69.

[70]"Una delle questioni più delicate nella matematica classica così come in quella intuizionista riguardava il continuo e la struttura del campo dei numeri reali."([1], p. 406)Questa osservazione conferma la possibilità di confrontare e avvicinare le idee hamiltoniane alla fondazione di Dedekind e Cantor e al programma intuizionista, relativamete all'introduzione dei reali.

dell'intuizionismo, con cui si rende possibile definire nuove strutture algebriche, o nuove classi di insiemi e operazioni, che estendono le precedenti, procedendo nella possibilità di uleriori costruzioni matematiche.

Il legame dell'Algebra come Scienza del Tempo Puro e gli atti dell'intuizionismo può rappresentare un punto di inizio per approfondire il ruolo e l'effettivo contributo di Hamilton, che la storia della Matematica non restituisce con chiarezza seppure esistono aspetti piuttosto evidenti, o almeno possibili, di una rilevanza matematica di tutto il suo pensiero, profondamente unitario in tutti i suoi studi.[71] Il percorso intricato di scoperte nell'algebra come nella fisica o nell'analisi risente della spinta costante a trovare nuovi fondamenti e a valorizzare un'approccio teorico; quindi l'atteggiamento di Hamilton diventa esempio di uno spirito moderno di ricerca scientifica, che, nonostante alcuni risultati poco maturi, ha introdotto con anticipo o in modo orginale concetti, direzioni teoriche e argomenti centrali per lo sviluppo successivo della Matematica.

[71] La vita e gli studi di Hamilton sono scanditi dalle sue convizioni filosofiche e fisiche, attorno al Tempo, tanto da guidarne quasi alla stessa maniera i lavori nei diversi ambiti; le scoperte in fisica come in algebra sembrano legate tra loro, negli obiettivi e nella ricerca di nuove applicazioni.

Bibliografia

[1] Bottazzini U., *Il flauto di Hilbert: storia della Matematica*, UTET, Torino 2003.

[2] Boyer C.B., *Storia della Matematica*, A.Mondadori, Milano 1976 .

[3] Cellucci C., *La filosofia della matematica del Novecento*, Editori Laterza, Bari 2007.

[4] Coen S., *Appunti del corso di Elementi di Geometria da un punto di vista superiore*, Laurea Magistrale in Matematica - curriculum didattico, Bologna A. A. 2009-2010.

[5] Dedekind R., *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali*, traduzione dal tedesco e note storico - critiche di Oscar Zariski, Casa Editrice Alberto Stock, Roma 1926.

[6] Ewald W.B., *From Kant to Hilbert: A Soruce Book in the Foundations of Mathematics I*, Oxford Clarendon Press, Oxoford 1996.

[7] Firrao F.P., *Dizionario dei termini e delle correnti filosofiche*, Le Monnier, Firenze 2001.

[8] Hamilton W.R., *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, vol. III, Algebra, Edited for the Royal Irsh Academy by H.Halberstam and R.E.Ingram*, Cambridge University Press, Cambridge 1967, .

[9] Hankins T.L., *Sir William Rowan Hamilton*, The Johns Hopikins University Press, Baltimore and London 1980.

[10] Kant I., *Critica della ragion pura*, a cura di Giorgio Colli, Gli Adelphi, Milano 1995.

[11] MacDuffee C.C., *Algebra's debt to Hamilton*, Scripta Mathematica 10, 25-35, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York 1944.

[12] Øhrstrøm P., *W R Hamilton's view of algebra as the science of pure time and his revision of this view*, Historia Mathematica: International journal of history of mathematics 12 (1), 45-55, Academic Press, Toronto 1985.

[13] Pellicer M.L., *Las construcciones de los numeros reals*, Historia de la Matemática en el siglo XIX (II parte), Real Academia de Ciencias, 1993.

[14] Pycior H.M., *The role of Sir William Rowan Hamilton in the developent of british modern algebra*, Cornel University, Ph.D., History of Science, 1976.

[15] Whittaker E., *William Rowan Hamilton*, Mathematics in the modern world: readings from scientific american, 49-52, San Francisco and London 1968.

[16] Winterbourne A.T., *Algebra and pure time: Hamilton's affinity with Kant*, Historia Mathematica: International journal of history of mathematics 9 (2), 195-200, Academic Press, Toronto 1982.

Indice analitico

La Gratitudine
per la conclusione di un'intensa esperienza di studio e di formazione
sale a Chi ha reso possibile questo percorso accademico.

Grazie ai docenti incontrati,
in particolre al Professore Salvatore Coen per il lavoro svolto insieme
e i preziosi colloqui sulla Storia della Matematica.