

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

L'atomo di idrogeno: righe, serie e sua importanza in astrofisica

Tesi di laurea

Presentata da:

DINU IUSTIN ADRIAN

Relatore:

Chiar.ma Prof.ssa MARCELLA BRUSA

Anno accademico 2021-2022

Indice

1	Atomo di Bohr	3
1.1	Modello atomico di Bohr	3
1.2	Numeri quantici	5
2	Coefficienti di Einstein	6
2.1	Transizioni permesse, semi-proibite, proibite	6
2.2	Proprietà righe spettrali	7
3	Struttura iperfine	10
3.1	Riga a 21cm	10
3.1.1	Determinazione della curva di rotazione della galassia	11
3.2	Effetto Zeeman e misura del campo magnetico galattico	13

Sommario

La tesi si concentra sull'importanza dell'idrogeno, l'elemento più abbondante nell'universo, e di alcune sue applicazioni astrofisiche. È stata fatta una veloce trattazione dell'atomo di Bohr, per poter spiegare le osservazioni sperimentali di Balmer e Rydberg sugli spettri di emissione dell'idrogeno. Questo modello è stato, agli inizi degli anni 20, superato, grazie alla trattazione quantistica, che per brevità non è stata trattata in modo approfondito. Si sono poi analizzate le proprietà delle righe spettrali, attraverso i coefficienti di Einstein, che si basano sulla teoria quantistica degli atomi.

Le righe sono importantissime per poter misurare le velocità degli oggetti che le emettono, attraverso l'effetto doppler. Infine si è analizzato la struttura iperfine dell'idrogeno neutro HI, con il particolare caso della riga a 21cm. Questa riga, nonostante dovrebbe essere una riga proibita, cioè molto improbabile da osservare in condizioni normali, diventa importantissima per poter tracciare la presenza di HI all'interno della nostra galassia e in quelle "vicine".

1 Atomo di Bohr

Rutherford nel 1912 dimostrò con un suo famoso esperimento che il modello atomico "a panettone" di Thomson era errato. L'esperimento consisteva nel bombardare un sottile foglio di oro con particelle α , cioè nuclei di elio ionizzato He^{++} . Si notò come le particelle non andavano diritte ma anzi venivano deflesse in tutte le direzioni, tornando addirittura indietro.

La spiegazione che diede Rutherford fu che in realtà l'atomo andava considerato come un piccolo sistema planetario governato dalle forze coulombiane, dove si aveva il nucleo al centro e l'elettrone che orbitava attorno. Questo modello fu accettato nonostante presentasse un grosso problema. Infatti, le equazioni di Maxwell predicono che una carica accelerata, come l'elettrone in orbita attorno al nucleo, debba emettere radiazione a scapito della sua energia cinetica, facendolo inevitabilmente cadere sul nucleo. Considerando le dimensioni e le energie in gioco, si calcolò che questo dovesse avvenire in meno di 10^{-8} secondi.

Per fortuna la natura non si comporta in questo modo, altrimenti non potremmo avere nessun atomo stabile e neppure la materia come noi la conosciamo. Bisognava capire cosa c'era di errato nell'interpretazione di Rutherford.

1.1 Modello atomico di Bohr



Figura 1: Le righe osservate da Balmer che corrispondono al fotone emesso durante il passaggio di un elettrone da uno stato con $n > 2$ allo stato con $n = 2$

Bohr partì dagli esperimenti sulle righe spettrali dell'idrogeno, eseguite a fine 800' da Balmer e Rydberg. Essi trovarono che nella banda del visibile, cioè fra circa 400 nm e 700 nm, le frequenze delle principali righe in emissione e assorbimento dell'idrogeno potevano essere riassunte dalla formula

$$\nu_n = cR \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5 \quad (1)$$

dove ν_n è la frequenza della riga, R è detta costante di Rydberg e vale, per l'idrogeno, $109677.576 \text{ cm}^{-1}$. In seguito si capì che queste corrispondevano all'elettrone che passa dal secondo livello energetico al terzo, quarto o quinto.

Successivamente Rydberg, nel 1888, generalizzo la formula.

$${}^1\nu_{m,n} = cR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad m = 1, 2, 3 \quad n = m + 1, m + 2 \quad (2)$$

Tuttavia al tempo non si conosceva la natura quantizzata delle orbite atomiche dell'idrogeno, quindi i numeri m e n erano valori puramente empirici, che riuscivano a spiegare con grande precisione le misure osservative.

A dare una spiegazione a questi fatti osservativi fu Bohr nel 1913. Egli assunse alcune ipotesi.

- L'atomo ha un insieme discreto di stati stazioni di energia quantizzata E_1, E_2, \dots, E_n
- L'elettrone emette solamente quando passa da un livello energetico E_m ad uno E_n .
- Il fotone emesso (assorbito) ha energia $h\nu = |E_m - E_n|$, dove h è la costante di Planck
- Le orbite stazionarie devono avere il modulo del momento angolare orbitale dell'elettrone quantizzato, cioè

$$|\mathbf{l}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = n\hbar$$

La quantizzazione del momento angolare si può giustificare considerando l'elettrone come un'onda, che percorre l'orbita circolare di raggio r . La circonferenza sarà quindi $2\pi r$ e si impone che l'onda abbia un numero intero di lunghezze d'onda in questo percorso. Questo per evitare che l'onda si autodistrugga per interferenza con se stessa.

$$2\pi r = n\lambda \quad (3)$$

Ora, essendo $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$, ed essendo il momento angolare $l = pr$, si ha

$$2\pi r = n\lambda \implies 2\pi r = \frac{2\pi\hbar n}{p} \implies pr = n\hbar = l \quad (4)$$

Che è proprio la condizione di quantizzazione del momento angolare

Considerando che l'energia di un elettrone in orbita è data dalla somma dell'energia cinetica e potenziale dovuta alle due cariche

$$E_n = K_n + V_n = \frac{1}{2}m_e v_n^2 - \frac{e^2}{r_n}$$

¹Più avanti verrà chiarito il significato degli indici m, n in $\nu_{m,n}$

e che per orbite circolari si ha $m_e v_n^2 = \frac{e^2}{r_n}$, allora si può riscrivere

$$E_n = -\frac{e^2}{2r_n}$$

Sapendo che il momento angolare deve essere quantizzato, si ha che

$$l = r \times p = m_e v_n r_n = n\hbar \implies v_n = \frac{n\hbar}{r_n m_e} \quad (5)$$

di conseguenza

$$r_n = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2 \implies r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.53 \text{Å} \text{ raggio di Bohr} \quad (6)$$

Tornando all'energia n-essima E_n si ha

$$E_n = -\frac{e^2}{2r_n} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (7)$$

Con queste ipotesi di Bohr si riesce quindi a spiegare la formula empirica di Rydberg - Ritz generale

$$\nu_{m,n} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{m_e e^4}{\hbar^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (8)$$

dove la costante $\frac{m_e e^4}{\hbar^3} = R$ è la costante di Rydberg. Si è implicitamente posta a 0 l'energia di un elettrone non legato, questo porta ad avere per gli stati legati energie negative, mentre per gli stati non legati, cioè quelli in cui l'elettrone passa vicino al nucleo senza essere catturato, avremo un'energia positiva.

L'energia per ionizzare un atomo di idrogeno è quindi l'energia necessaria a portare un elettrone dall'orbita con $n = 1$ a quella con $n = \infty$. Si ha

$$E_\infty - E_0 = 13.59 \text{eV} = \text{energia di ionizzazione}$$

1.2 Numeri quantici

Si definiscono i numeri quantici che descrivono i livelli energetici.

- **n** Numero quantico principale, definisce l'energia e la grandezza media dell'orbita. Va da 1 a ∞ .
- **l** Numero quantico azimutale, quantizza il momento angolare dell'elettrone. Può assumere valori interi da 0 a $n - 1$
- **m** Numero quantico magnetico, descrive la forma dell'orbita e la sua orientazione, può assumere valori da $-l$ a $+l$

- **s** Numero quantico di spin, definisce un momento intrinseco dell'elettrone e può assumere valori $\pm \frac{1}{2}$

Ogni combinazione (n, l, m, s) definisce un certo stato per ogni elettrone.

2 Coefficienti di Einstein

Le transizioni di tipo legato-legato o legato-libero sono trattabili attraverso i *coefficienti di Einstein* che si fondano sulla meccanica quantistica.

Prendendo un modello semplificato, abbiamo due livelli energetici in un atomo. Il livello **U**pper e il livello **L**ower. Si definiscono quindi 3 coefficienti

- **Emissione spontanea** A_{UL} probabilità, per unità di tempo, di transizione da **U** a **L** con emissione di fotone;
L'inverso del coefficiente di emissione spontanea,

$$A_{UL}^{-1} = \text{tempo di vita medio nello stato eccitato}$$

- **Assorbimento** $B_{LU}\bar{J}$ probabilità, per unità di tempo, di andare da **L** a **U** con un assorbimento di un fotone
- **Emissione stimolata** $B_{UL}\bar{J}$ probabilità, per unità di tempo, di emissione stimolata indotta da radiazione incidente

Dove \bar{J} rappresenta la densità di radiazione con frequenza ν_{UL} tale che $h\nu_{UL} = E_2 - E_1$ sia la differenza di energia fra i due livelli.

2.1 Transizioni permesse, semi-proibite, proibite

Una trattazione completa di A_{UL} non è argomento di questo elaborato. Tuttavia possiamo definire tre tipi di transizioni, in base alla loro probabilità

- **Transizioni di dipolo elettrico.** Una trattazione classica considera la transizione come un'oscillazione dell'elettrone di una certa $\omega = \frac{\nu}{2\pi}$. Si ha che la potenza media è data dalla classica formula di Larmor.

$$\langle P(t) \rangle = \frac{2e^2}{3c^3} a^2(t) \quad (9)$$

considerando un'oscillazione classica 1D $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ allora l'accelerazione sarà $\ddot{x}(t) = a(t) = -x_0\omega^2 \cos(\omega t)$ che implica

$$\langle P \rangle = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\omega^4 x_0^2}{2} = \frac{32\pi^4}{3c^3} \nu^4 \left(\frac{e^2 x_0^2}{2} \right) = \frac{32\pi^4}{3c^3} \nu^4 \langle a(t)^2 \rangle = A_{UL} h \nu_{UL} \quad (10)$$

che in 3D porta ad un valore di A_{UL}

$$A_{UL} = \frac{64\pi^4\nu^3}{3hc^3} |P_{UL}| \quad (11)$$

dove P_{UL} è la matrice di transizione. La meccanica quantistica riesce a fornire i valori di A_{UL} una volta definite le funzioni d'onda del sistema in esame.

- **Transizione di quadripolo elettrico.** La trattazione matematica è simile a quella per il dipolo elettrico ma considerando il secondo ordine perturbativo. Questo porta a valori di A_{UL} molto più piccoli. Si parla quindi di **righe semi-proibite**. Questo perchè il rapporto fra la probabilità di avere una transizione di quadripolo e la probabilità di avere una transizione di dipolo è molto piccola.

$$\frac{A_Q}{A_D} \approx 10^{-5} \quad (12)$$

Probabilità piccola ma diversa da 0.

- **Transizione di dipolo magnetico** Dipende dalla struttura iperfine dei livelli energetici. Responsabile, ad esempio, della riga a 21cm nell'idrogeno. Si ha che

$$\frac{A_M}{A_D} \approx 10^{-8} \quad (13)$$

Quindi ancora più improbabile delle transizioni di quadripolo elettrico. Queste vengono chiamate **righe proibite**, perchè altamente improbabili in condizioni normali.

2.2 Proprietà righe spettrali

Per descrivere matematicamente una riga spettrale si definisce una *Line Profile Function* (LPF) $\Theta(\nu)$. Questo perché l'emissione non è perfettamente monocromatica, ma sarà una funzione molto piccata attorno alla frequenza di picco ν_{max} , che rappresenta quanto efficacemente un fotone di una data frequenza può essere emesso o assorbito.

La potenza assorbita o emessa è data dall'integrale

$$\bar{J} = \int_0^\infty J(\nu)\Theta(\nu)d\nu \quad \text{con} \quad \int_0^\infty \Theta(\nu)d\nu = 1 \quad (14)$$

Se $J(\nu)$ approssimativamente costante allora $\Theta(\nu)$ agisce come una funzione a δ .

Qualsiasi riga spettrale non potrà essere infinitamente stretta. Si avranno due principali contributi che allargano il profilo della riga.

Si avrà un allargamento intrinseco, di Lorentz, dovuto alla meccanica quantistica. Considerando che il coefficiente A_{UL} definisce un tempo di vita medio $\Delta t = \frac{1}{A_{UL}}$. La differenza di energia è finita ed è uguale a $\Delta E = h\Delta\nu$. Ora visto che il principio di indeterminazione di Heisenberg impone

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \implies \Delta E \Delta t \geq \frac{h\Delta\nu}{A_{UL}} \implies \Delta\nu \geq \frac{A_{UL}}{2\pi} \quad (15)$$

Questo significa che righe meno probabili, cioè con A_{UL} piccolo saranno più strette, e viceversa.

Si ha poi un allargamento dovuto all'agitazione termica degli atomi che emettono o assorbono la radiazione.

Se si prende una nube di gas che emette in maniera discreta, la distribuzione delle velocità degli atomi, in regime quasi-collisionale, sarà più o meno isotropa. Mediamente, tanti atomi andranno verso l'osservatore quanti saranno in allontanamento.

L'effetto combinato di questi moti termici faranno allargare il profilo della riga attorno al valore centrale ν_0 , aumentando la sua *Full Width at Half Maximum* (FWHM).

Questo fenomeno può essere usato per avere una misura della dispersione di velocità media delle particelle, che in condizioni di equilibrio termico può essere anche una stima della temperatura della regione in cui si trova il gas.

Se la nube in questione è "ferma" rispetto all'osservatore, lungo la linea di vista, il centroide della riga, cioè la frequenza naturale a cui avverrebbe l'emissione in laboratorio, rimane invariato. [Fig.2]

Nel caso in cui invece la nube ha una certa velocità relativa rispetto all'osservatore si avrà sia allargamento che spostamento doppler. La frequenza naturale del picco ν_0 sarà spostata di una quantità

$$\Delta\nu = \nu_{obs} - \nu_0 = \nu_0 \frac{v_r}{c} \quad (16)$$

dove v_r è la velocità relativa lungo la linea di vista fra osservatore e nube.

Se la regione che emette è all'equilibrio termico abbiamo una distribuzione delle velocità

$$N(v_r)dv_r = N_0 v_r^2 e^{-\frac{m_a v_r^2}{2kT}} dv_r \quad (17)$$

che si può riscrivere in funzione delle frequenze come

$$N(\nu)d\nu = N_0 e^{-\frac{m_a c^2 (\nu_{obs} - \nu_0)^2}{2kT}} d\nu \quad (18)$$

Si dimostra che

$$\Delta\nu = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m_a}} \quad (19)$$

Figura 2: Allargamento doppler dovuto al moto termico random degli atomi che emettono nel caso di nube ferma rispetto all'osservatore

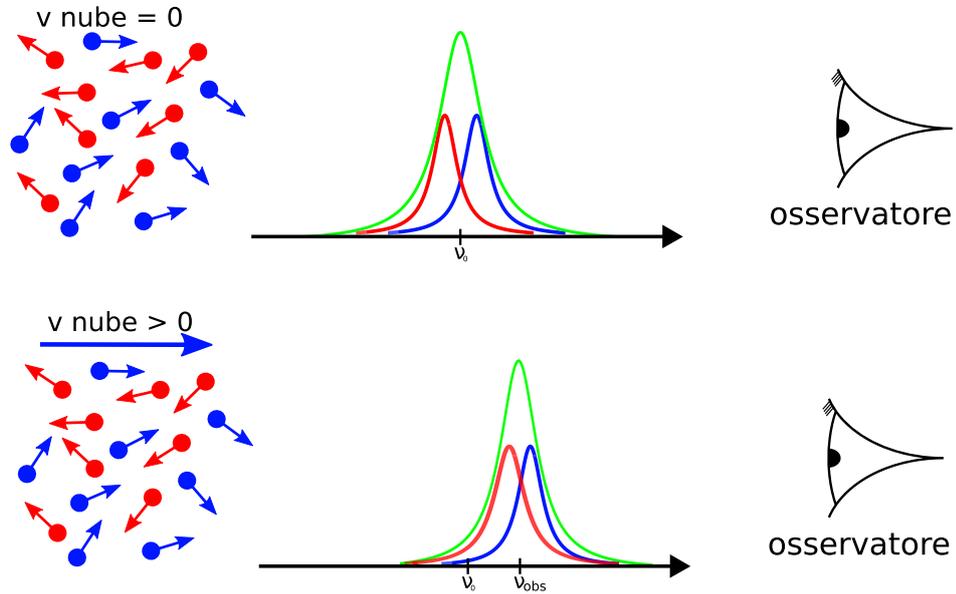


Figura 3: Spostamento doppler dovuto al moto relativo complessivo degli atomi nella nube rispetto alla linea di vista con l'osservatore. Si noti come la forma della riga non sia più simmetrica ma spostata verso il blu

e il profilo della riga diventa

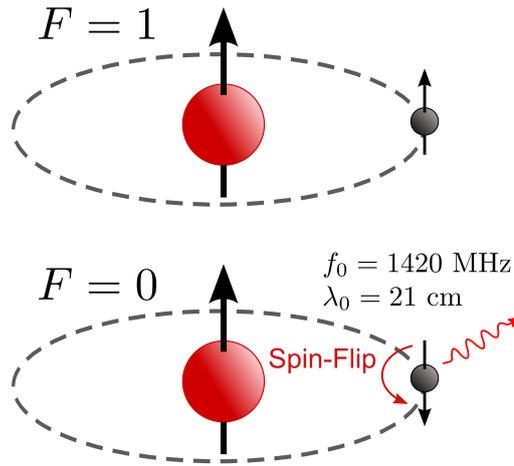
$$\Theta(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\nu_{obs}-\nu_0)^2}{\Delta\nu^2}} \quad (20)$$

Misurando quindi l'allargamento della riga, rispetto all'allargamento naturale di Lorentz, si può stimare la temperatura della regione.

3 Struttura iperfine

3.1 Riga a 21cm

Il livello fondamentale dell'atomo d'idrogeno è in realtà suddiviso in due sottolivelli energetici dovuti alla differente orientazione relativa dello spin del protone e del elettrone. La configurazione con spin parallelo ha un'energia leggermente superiore a quella con spin antiparallelo.



Il momento angolare dell'elettrone $J = L + S$ può combinarsi con il momento angolare del protone I per formare il momento angolare totale

$$F = J + I \quad (21)$$

Che può assumere valori 0,1 a seconda se l'orientazione è parallela o antiparallela. Il livello energeticamente maggiore ha degenerazione 3, quindi il rapporto

$$\frac{g_1}{g_0} = 3$$

che si traduce nel fatto che si ha che il 75% dell'idrogeno neutro si trova nella configurazione ad energia maggiore.

La differenza energetica fra questi due stati è

$$h\nu = 5.9 \times 10^{-6} \text{ eV con } \nu = 1420 \text{ MHz} \implies \lambda = 21 \text{ cm} \quad (22)$$

Si ha che $A_{21} = 2.9 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ che porta ad un tempo di decadimento medio di $\tau = 10^7$ anni. Questa transizione risulta essere molto improbabile in condizioni di laboratorio.

Tuttavia le collisioni fra atomi possono ridurre questo tempo caratteristico

a valori attorno a $\tau = 10^{-10} s \approx 300$ anni. Considerando i grandi volumi di idrogeno neutro presenti, e temperature tipiche di queste regioni attorno ai 100 K, e densità medie $N_H = 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ poi il rapporto x fra il tempo collisionale e quello radiativo a 21cm

$$x = 4 \times 10^{-4} \frac{T}{N_H} \approx 10^{-3} \quad (23)$$

La riga rimane comunque troppo stretta rispetto alla risoluzione dei strumenti spettroscopici.

Tuttavia la riga ha un certo allargamento dovuto alla distribuzione di velocità degli atomi, che la rende misurabile. Considerando che il rapporto fra i due livelli iperfini dipende dalla differenza di energia si ha che

$$\frac{n_1}{n_0} = 3e^{-(\epsilon_1 - \epsilon_0)/kT_s} \approx 3 \quad (24)$$

dove T_s è la chiamata temperatura di spin

La brillantezza della riga è descritta da una temperatura di brillantezza T_B che può essere espressa in funzione della frequenza ν o della velocità v corrispondente a ν . Se ci si trova in regime otticamente sottile ($\tau_H(\nu) \ll 1$), come nel caso delle regioni HI, si ricava tramite l'equazione del trasporto radiativo

$$T_B(\nu) = T_s(1 - e^{-\tau_H(\nu)}) = T_s\tau_H(\nu) \quad (25)$$

Risulta che

$$\tau_H(\nu) = 2.58 \times 10^{-15} \frac{n_H \phi(\nu) l}{T_s} = 2.58 \times 10^{-15} \frac{N_H \phi(\nu)}{T_s} \quad [\text{c.g.s}] \quad (26)$$

dove $N_H = n_H l$ è la densità di colonna, cioè il numero di atomi in una colonna di base unitaria e lunghezza l . Integrando si ha che

$$T_B = \int T_B(\nu) d\nu \approx \int T_s \tau_H(\nu) d\nu = 2.58 \times 10^{-15} N_H \quad (27)$$

Che esprimendo la temperatura di brillantezza in funzione delle velocità porta ad una densità di colonna

$$N_H = 3.88 \times 10^{14} T_B \quad (28)$$

Questo permette di poter stimare la densità di colonna lungo la linea di vista di una nube di HI misurando la temperatura di brillantezza della riga a 21cm.

3.1.1 Determinazione della curva di rotazione della galassia

All'interno della nostra galassia è presente una grande quantità di idrogeno neutro. Essendo la materia interstellare e la polvere trasparenti alla radiazione a 21 cm si può, sfruttando l'effetto doppler della riga, misurare le velocità

lungo la linea di vista delle regioni HI.

Un modello matematico semplificato della galassia porta a considerare 3 regimi di velocità

- $v(r) \propto r$ per la regione centrale del bulge, che si può semplificare come una sfera di densità uniforme
- $v(r) \propto r^0$ costante per la regione del disco
- $v(r) \propto r^{-\frac{1}{2}}$ per la regione oltre il disco, chiamata anche alone

Le osservazioni della riga a 21 cm portano però ad una contraddizione con la teoria. Si osserva che le velocità delle nubi di HI, nella zona in cui si dovrebbe avere un andamento di tipo kepleriano $\propto r^{-\frac{1}{2}}$, hanno invece un andamento quasi costante.

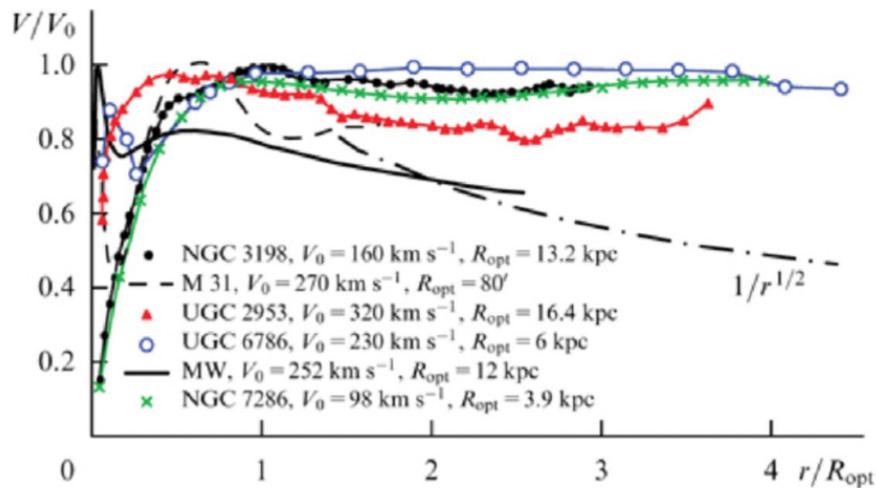


Figura 4: Curva di rotazione normalizzata di alcune galassie. Asse x in unità di raggi ottici della galassia

Questo si può spiegare solo assumendo che c'è altra materia, che non emette radiazione visibile, all'interno e nel alone della nostra galassia. A questa materia viene dato il nome di *materia oscura*.

Si può misurare la curva di rotazione anche di altre galassie producendo mappe 2d delle velocità. In figura 4 si può calcolare la curva di rotazione in funzione del raggio misurandola sull'asse maggiore dell'ellisse. Si noti come si abbia idrogeno neutro in regioni in cui non c'è emissione ottica.

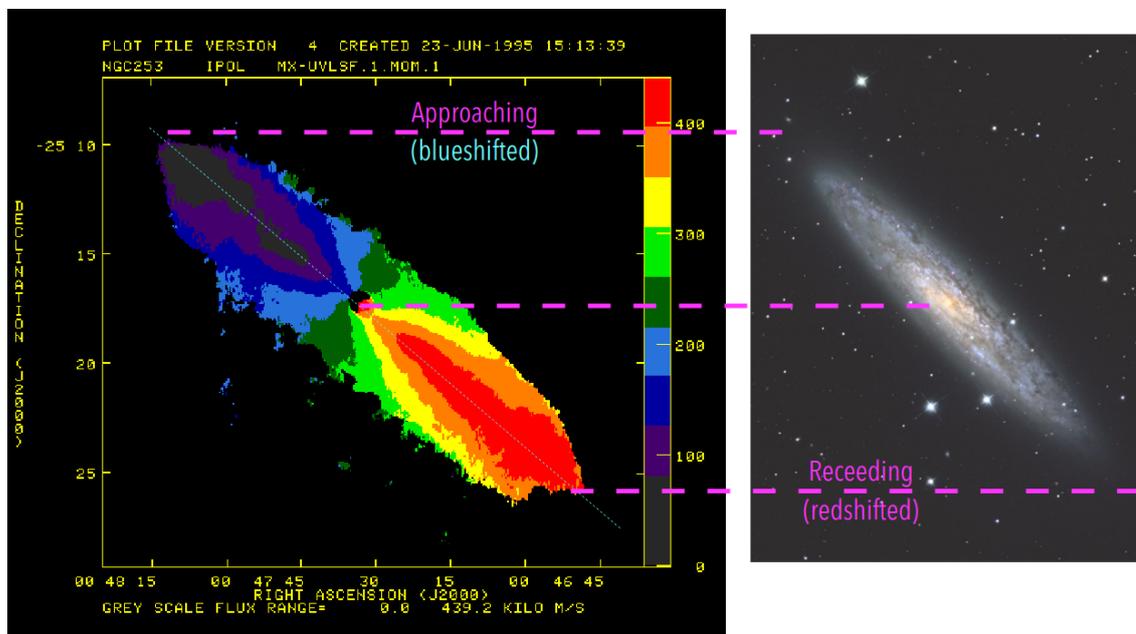


Figura 5: Curva di rotazione 2D di NGC253

3.2 Effetto Zeeman e misura del campo magnetico galattico

Un atomo immerso in un campo magnetico vedrà modificati i propri livelli energetici in base all'intensità del campo. Questo fenomeno si riflette sulla struttura delle righe spettrali che vengono divise in due o più componenti. Questo fenomeno può essere sfruttato per effettuare misure indirette sul campo magnetico della galassia. Per la riga a 21 cm si ha un doppietto con polarizzazioni circolari opposte, quando la linea di vista coincide con la direzione del campo magnetico nella regione dove avviene l'emissione; e un tripletto con polarizzazioni lineari quando il campo magnetico è perpendicolare alla linea di vista.

La separazione delle componenti è data dalla formula

$$\frac{\Delta\nu}{\text{Hz}} = \frac{1}{2\pi} \frac{eH}{m_e c} \approx 2.8 \times \frac{H}{\mu\text{G}} \quad (29)$$

Per valori tipici di $1\mu\text{G}$ si ha $\Delta\nu \approx 2.8\text{Hz}$, valore troppo piccolo rispetto alla larghezza della riga a 21cm allargata dagli moti termici o turbolenti tipici delle

regioni in cui viene a formarsi. Tuttavia si può misurare indirettamente $\Delta\nu$ sapendo che la riga si sposta leggermente se viene misurata in polarizzazione destrorsa o sinistrorsa. Questa differenza si nota soprattutto ai bordi della riga, dove le componenti di diversa polarizzazione sono più separate.

Essendo però l'intensità minore ai bordi della riga, si devono osservare sorgenti o molto potenti o zone in assorbimento.

Le misure effettuate con questo metodo sono dell'ordine di $30/50\mu\text{G}$, quindi di un fattore 10 più grandi rispetto all'altro metodo di misura del campo magnetico, che sfrutta la rotazione di Faraday e la misura di dispersione nelle pulsar.

Questo apparente disaccordo potrebbe essere dovuto al fatto che le regioni in cui si è misurato il campo magnetico attraverso l'effetto Zeeman, quindi si è dovuto selezionare sorgenti in cui la riga a 21cm è molto intensa, sono in realtà zone in cui la densità di idrogeno neutro è molto maggiore rispetto a quelle tipiche delle regioni HI.

Si assume quindi che queste regioni siano in realtà il risultato del collasso di gas inizialmente a densità medie e con un campo magnetico dei valori tipici attorno ai $3\mu\text{G}$.

Se la nube si è contratta di un fattore r si ha che la densità $n_H \propto r^{-3}$. Mentre, per la conservazione del flusso, il campo magnetico medio $\bar{H} \propto r^{-2}$, quindi

$$H_{nube} \approx 100^{2/3} \bar{H} \approx 20\bar{H} \quad (30)$$

che è un valore in accordo con le osservazioni.

Riferimenti bibliografici

- [1] F. Ravanini *Dispense del corso di Istituzioni di Fisica Teorica*, 2019
- [2] C. Fanti, R. Fanti *Lezioni di Radioastronomia*, Appunti 2012
- [3] D. Dallacasa *Appunti del corso di Processi di radiazione e MHD*, 2019
- [4] G. B. Rybicki, A. P. Lightman, *Radiative processes in Astrophysics*, WILEY-VCH, 2004