

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Dinamica dei due e/o pochi corpi:
sistemi binari, sistema solare**

Relatore:
Prof.ssa Marcella Brusa

Presentata da:
Giordano Chiani

Anno Accademico 2021/2022

Indice

1	Problema dei due corpi	5
1.1	Introduzione	5
1.2	Conservazione del Momento Angolare	7
1.3	Conservazione dell'Energia	9
1.4	Osservazioni su $\mathbf{r}(\mathbf{t})$	10
1.5	Problema di Keplero	12
1.6	Potenziale di Yukawa	15
2	Problema dei tre corpi ristretto	16
2.1	Introduzione	16
2.2	Punti Lagrangiani	18

Capitolo 1

Problema dei due corpi

1.1 Introduzione

Il problema a due corpi è un problema fondamentale della fisica che consiste nello studio dell'interazione tra due corpi in movimento. Questo problema è di grande importanza per la comprensione del movimento planetario e degli effetti gravitazionali tra corpi celesti, come ad esempio la Luna e la Terra, un satellite artificiale attorno a un pianeta o un sistema binario di stelle.

In questo caso di due soli corpi, l'equazione del moto è:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1 \quad ; \quad m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2. \quad (1.1)$$

Un famoso esempio di un sistema del genere è dato dalla **Legge di Gravitazione Universale** di Newton, dove le due particelle interagiscono tramite un'energia potenziale del tipo

$$U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (1.2)$$

dove G è la costante di gravitazione universale,

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2. \quad (1.3)$$

Come possiamo trovare una soluzione generale a questo set di equazioni?

Come per molti problemi fisici, la prima cosa è massimizzare l'uso di simmetrie o leggi di conservazione. Il momento totale del sistema si conserva, quindi per convenienza andiamo a considerare il centro di massa,

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}. \quad (1.4)$$

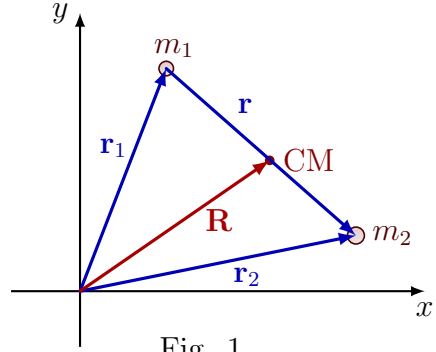


Fig. 1

Vettori posizione e centro di massa.

Derivando rispetto al tempo otteniamo la velocità del centro di massa,

$$\mathbf{V}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{M}. \quad (1.5)$$

L'accelerazione dipende dalle forze totali esterne,

$$\mathbf{F}_{ext} = M \mathbf{a}_{CM}. \quad (1.6)$$

Dato che il nostro sistema è isolato, l'accelerazione del centro di massa deve essere zero, e quindi la velocità del centro di massa costante,

$$\mathbf{V}_{CM}^{(0)} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1^{(0)} + m_2 \mathbf{v}_2^{(0)}}{M} \quad (1.7)$$

e quindi il moto del centro di massa è dato da

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{V}_{CM}^{(0)} t. \quad (1.8)$$

Dato che sappiamo già il moto del centro di massa, possiamo usare questa informazione per semplificare il problema. Definiamo il vettore distanza relativa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (1.9)$$

e riformuliamo la definizione di centro di massa (1.4)

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad ; \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (1.10)$$

Da queste espressioni, e dal fatto che \$\mathbf{R}\$ è noto, il problema si riduce a trovare \$\mathbf{r}\$. Per ricavare l'equazione del moto prendiamo la (1.1) e moltiplichiamo la prima equazione per \$m_2\$ e la seconda per \$m_1\$

$$m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1 = m_2 \mathbf{F}_1 \quad ; \quad m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = m_1 \mathbf{F}_2. \quad (1.11)$$

Se adesso sottraiamo la prima equazione alla seconda otteniamo:

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = m_2 \mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{F}_2 \rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_1 \quad (1.12)$$

dove abbiamo usato la terza legge della dinamica di Newton nella seconda equazione. Poiché le forze derivano da un potenziale centrale che dipende solamente dalla distanza relativa tra le due particelle, abbiamo

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (1.13)$$

Adesso noto (1.10) e sapendo che il potenziale **non** dipende dal centro di massa \mathbf{R} , possiamo scrivere per la derivata lungo la componente x

$$\frac{\partial}{\partial r_{1x}} U(|\mathbf{r}|) = \frac{\partial}{\partial r_x} U(|\mathbf{r}|) \quad (1.14)$$

e così anche per le restanti coordinate. Possiamo quindi scrivere

$$m_* \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(|\mathbf{r}|) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (1.15)$$

dove

$$m_* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.16)$$

è la **massa ridotta** del sistema. Abbiamo così ridotto il nostro problema a un sistema a una particella: matematicamente non è differente da un particella singola con vettore posizione \mathbf{r} e massa m_* , soggetta a una forza esterna \mathbf{F} .

1.2 Conservazione del Momento Angolare

Poiché le nostre due particelle interagiscono tra loro attraverso un potenziale centrale, sappiamo che il momento angolare totale del sistema si conserva. Tuttavia, poiché abbiamo ridotto il nostro problema a un sistema a una particella, ha più senso riformulare questa affermazione in termini di momento angolare di questa particella fittizia,

$$\mathbf{L} = m_* \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (1.17)$$

dove

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.18)$$

Data l'identità

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(|\mathbf{r}|) = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dU(r)}{dr} \quad ; \quad r = |\mathbf{r}| \quad (1.19)$$

il momento torcente sulla particella causato da \mathbf{F} è

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \propto \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0 \quad (1.20)$$

cioè il momento torcente si annulla dato che la forza è parallela al vettore spostamento. Quindi il momento angolare della particella deve essere costante,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{L} = 0}. \quad (1.21)$$

Questo è un risultato generale per il moto di una particella in un potenziale centrale. Per il nostro sistema a una particella, la conservazione del momento angolare porta a un'ulteriore semplificazione. Per tre vettori qualsiasi, possiamo scrivere il prodotto scalare triplo,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (1.22)$$

Se usiamo questa identità otteniamo

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = m_* \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m_* \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0 \quad (1.23)$$

dato che il prodotto scalare è zero, il vettore \mathbf{r} è sempre perpendicolare al momento angolare \mathbf{L}

$$\boxed{\mathbf{r} \perp \mathbf{L}}. \quad (1.24)$$

Visto che il momento angolare è costante possiamo affermare che \mathbf{r} giace sempre in un piano.

Adesso il nostro problema, oltre ad essere ridotto a una particella, è anche ridotto a un problema bi-dimensionale. Poichè siamo in presenza di una forza radiale in due dimensioni, è conveniente cambiare le coordinate in coordinate polari (vedi *Fig. 2*),

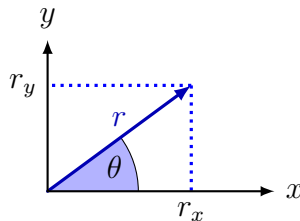


Fig. 2

sistema 2D a coordinate polari

dove abbiamo scelto la convenzione per la quale la particella si muove nel piano $x - y$, e il momento angolare è orientato lungo l'asse z . In questo set di coordinate possiamo scrivere

$$\frac{d\theta}{dt} = l/(m_* r^2) \quad ; \quad l \equiv |\mathbf{L}|. \quad (1.25)$$

Questa espressione rende chiara un'altra osservazione: il segno di $d\theta/dt$ è sempre positivo, quindi la particella ruota attorno al centro del sistema di riferimento sempre nella stessa direzione.

1.3 Conservazione dell'Energia

L'ultima conservazione da tenere conto è quella dell'energia. Dato che il moto della particella è descritto in termini della funzione energia potenziale, ci è utile considerare che la quantità

$$E = \frac{1}{2} m_* v^2 + U(r) \quad (1.26)$$

si deve conservare. In coordinate polari possiamo scrivere

$$v^2 = \dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (1.27)$$

quindi il nostro vincolo di conservazione dell'energia in coordinate polari diventa

$$E = \frac{1}{2} m_* \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_* r^2 \dot{\theta}^2 + U(r) \quad (1.28)$$

e possiamo sostituire $d\theta/dt$ con il risultato (1.25)

$$E = \frac{1}{2} m_* \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_* r^2 \left(\frac{l}{m_* r^2} \right)^2 + U(r). \quad (1.29)$$

Definendo come **potenziale efficace** la quantità

$$\boxed{U_{eff}(r) = \frac{1}{2} \frac{l^2}{m_* r^2} + U(r)} \quad (1.30)$$

possiamo riscrivere la (1.29) come

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m_* \dot{r}^2 + U_{eff}(r)} \quad (1.31)$$

Ora è da notare il fatto che il potenziale effettivo, oltre a dipendere dal valore (costante) l , è funzione solamente di r ; non è più presente alcuna dipendenza da θ nell'equazione della

conservazione dell' energia. L'espressione (1.31) è matematicamente identica a quella di una particella in uno spazio uni-dimensionale. L'evoluzione temporale del sistema è ora determinata dalle due equazioni

$$E = \frac{1}{2}m_*\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = l/m_*r^2. \quad (1.32)$$

La coordinata angolare può essere esplicitata semplicemente integrando

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{l}{m} \int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')}. \quad (1.33)$$

Adesso non resta che trovare una forma funzionale di $r(t)$.

1.4 Osservazioni su $r(t)$

1. La condizione di realtà dei moti centrali è esprimibile come

$$E - U_{eff}(r) \geq 0 \quad (1.34)$$

dato che $\frac{1}{2}m_*\dot{r}^2$ è definito positivo. Le posizioni \hat{r} tali che

$$E - U_{eff}(\hat{r}) = 0 \quad (1.35)$$

sono dette **posizioni di arresto radiale** del moto centrale, nel caso in cui

$$\frac{\partial}{\partial r} U_{eff}(r)|_{\hat{r}} \neq 0, \quad (1.36)$$

ovvero quando non sono posizioni di stazionarietà per $U_{eff}(r; l)$.

Se invece \hat{r} è tale che

$$\frac{\partial}{\partial r} U_{eff}(r)|_{\hat{r}} = 0 \quad \text{ma} \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{eff}(r)|_{\hat{r}} \neq 0 \quad (1.37)$$

indichiamo con $r_c = \hat{r}$ e la definiamo **posizione di equilibrio/stazionarietà**. Essa rappresenta una soluzione stazionaria e corrisponde a **un'orbita circolare**. In particolare se

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{eff}(r)|_{\hat{r}} > 0 \quad (1.38)$$

avremo un'orbita circolare **stabile**, mentre se

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{eff}(r)|_{\hat{r}} < 0 \quad (1.39)$$

avremo un'orbita circolare **instabile**.

In entrambi i casi da (1.33) ricaviamo

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{l}{m r_c^2} t \quad (1.40)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{l}{m r_c^2} = \omega_c \quad (1.41)$$

e si hanno **moti circolari uniformi**. Un'altra forma della condizione di stabilità (1.38) è esprimibile come

$$\frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{3}{r} > 0 \quad \text{per } r = r_c \quad (1.42)$$

2. Il **problema della caduta nel centro del moto** si può analizzare nel seguente modo: se $U_{eff}(r)$ è tale che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U_{eff}(r) > 0 \quad (1.43)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (2mr^2U(r) + l^2) > 0 \quad (1.44)$$

non avremo mai caduta nel centro; questo sottolinea il ruolo delle condizioni iniziali presenti in $l \equiv |\mathbf{L}|$.

3. Se esistono due posizioni di inversione radiale del moto, indicate con $0 < r_{min} < r_{max}$, con r compreso fra r_{min} (pericentro) e r_{max} (apocentro), il moto centrale è **radialmente periodico** con periodo minimo, detto periodo radiale, dato dalle equazioni (1.32):

$$T(E, l) = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r; l))}} \quad (1.45)$$

mentre l' **angolo apsidale** (angolo fra un pericentro e un apocentro successivi)

$$\theta_{p \rightarrow a} = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{l}{r^2 \sqrt{2m(E - U_{eff}(r; l))}} dr \quad (1.46)$$

1.5 Problema di Keplero

Teorema di Bertrand. *In un modello centrale tutte le orbite limitate sono **chiuse** (l'angolo apsidale è **commensurabile** con π) \iff l'energia propria del modello $U(r)$ ha una delle seguenti forme:*

1. $U(r) = -\frac{k}{r}$, $k > 0$ **Problema di Keplero**
2. $U(r) = kr^2$, $k > 0$ **Problema dell' oscillatore spaziale.**

Nel primo caso avremo

$$\boxed{\theta_{p \rightarrow a} = \pi} \quad (1.47)$$

mentre nel secondo

$$\boxed{\theta_{p \rightarrow a} = \frac{\pi}{2}}. \quad (1.48)$$

Questo risultato riguardante le orbite chiuse è particolarmente importante, perché molti sistemi fisici (inclusi i sistemi gravitazionali) sono descritti dal potenziale $-\frac{k}{r}$. Il problema dei due corpi nel contesto di un tale potenziale è spesso noto come il **problema di Keplero**, dal nome di Johannes Kepler, il cui lavoro in materia ha contribuito a gettare le basi per la meccanica newtoniana.

Adesso andiamo a operare un cambio di variabili per evidenziare alcune caratteristiche delle orbite in un potenziale gravitazionale. Avendo definito da (1.30) il potenziale effettivo

$$U_{eff} = \frac{l^2}{2m_* r^2} - \frac{k}{r} \quad (1.49)$$

questa funzione ha un minimo al valore radiale

$$r_* = l^2 / (km_*) \quad \rightarrow \quad U_{eff}(r_*) = -m_* k^2 / (2l^2). \quad (1.50)$$

Fissati l e m_* , le quantità (1.50) rappresentano una lunghezza e un'energia caratteristica del problema; definiamo quindi le due variabili adimensionali

$$\rho = r/r_* \quad ; \quad \epsilon = E / |U_{eff}(r_*)|. \quad (1.51)$$

Se facciamo adesso un cambio di variabile nell' integrale che descrive la coordinata angolare abbiamo

$$\theta(\rho) = \theta_0 \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho' / (\rho')^2}{\sqrt{\epsilon - 1/(\rho')^2 + 2/\rho'}}. \quad (1.52)$$

La soluzione di questo integrale è

$$\theta(\rho) = \arccos \left[\frac{(1/\rho) - 1}{\sqrt{1 + \epsilon}} \right] - \arccos \left[\frac{(1/\rho_0) - 1}{\sqrt{1 + \epsilon}} \right] + \theta_0. \quad (1.53)$$

La scelta di θ_0 è arbitraria, possiamo quindi sceglierlo in maniera tale da cancellare il secondo termine di (1.25), ottenendo

$$\theta(\rho) = \arccos \left[\frac{(1/\rho) - 1}{\sqrt{1 + \epsilon}} \right] \implies \rho(\theta) = \frac{1}{1 + e \cos \theta} \quad (1.54)$$

dove abbiamo definito **eccentricità** la quantità

$$e = \sqrt{1 + \epsilon}. \quad (1.55)$$

Abbiamo ora un'espressione che determina il raggio (in scala) in funzione dell'angolo, che determina la forma della nostra orbita. Keplero scoprì che l'equazione di cui sopra è in realtà l'equazione che definisce le *sezioni coniche* - la famiglia di forme geometriche che includono l'ellisse, la parabola e l'iperbole. Quale forma assuma in particolare l'orbita dipenderà dal valore dell'eccentricità. Consideriamo ciascuno dei vari casi.

Si può notare che se $r \rightarrow \infty$, il potenziale effettivo va a zero. Quindi possiamo dire che se una particella ha energia $E < 0$, la sua energia è meno del potenziale all'infinito, ed è quindi impossibilitata a slegarsi. In questo caso l'orbita si dice **limitata** - la sua coordinata radiale oscillerà sempre fra il suo pericentro e apocentro, e la sua orbita sarà descritta da un' **ellissi** (vedi *Fig. 3*)

$$E < 0 \implies \epsilon < 0 \implies e = \sqrt{1 + \epsilon} < 1. \quad (1.56)$$

Un caso importante è quello per cui la particella è ferma nel minimo del potenziale effettivo

$$\epsilon = U_{eff}(r_*) / |U_{eff}(r_*)| = -1 \implies e = 0 \quad (1.57)$$

In questo caso l'orbita è una circonferenza definita da

$$\rho = 1 \implies r = r_*. \quad (1.58)$$

Se invece la particella ha energia positiva potrà allora andare all'infinito - in questo caso l'orbita della particella è **illimitata**

$$E > 0 \implies \epsilon > 0 \implies e = \sqrt{1 + \epsilon} > 1. \quad (1.59)$$

Le sezioni coniche con un'eccentricità maggiore di uno sono note come **iperboli**. In questo caso si può ricavare un angolo massimo, definito da

$$\rho(\theta) = \frac{1}{1 + e \cos \theta} = \infty \implies \theta_{max} = \arccos \left[-\frac{1}{e} \right]. \quad (1.60)$$

Nel caso limite per cui l'energia è zero, abbiamo

$$E = 0 \implies \epsilon = 0 \implies e = \sqrt{1 + \epsilon} = 1 \quad (1.61)$$

che definisce una **parabola** che può essere interpretata come il caso marginale fra l'ellissi e l'iperbole.

Le orbite iperboliche in generale sono incredibilmente importanti in astronomia, poiché descrivono le **fionde gravitazionali**. Quando si pianificano missioni che invieranno veicoli spaziali in missioni interplanetarie, gli astronomi utilizzano la gravità di altri pianeti per influenzare la direzione del veicolo.

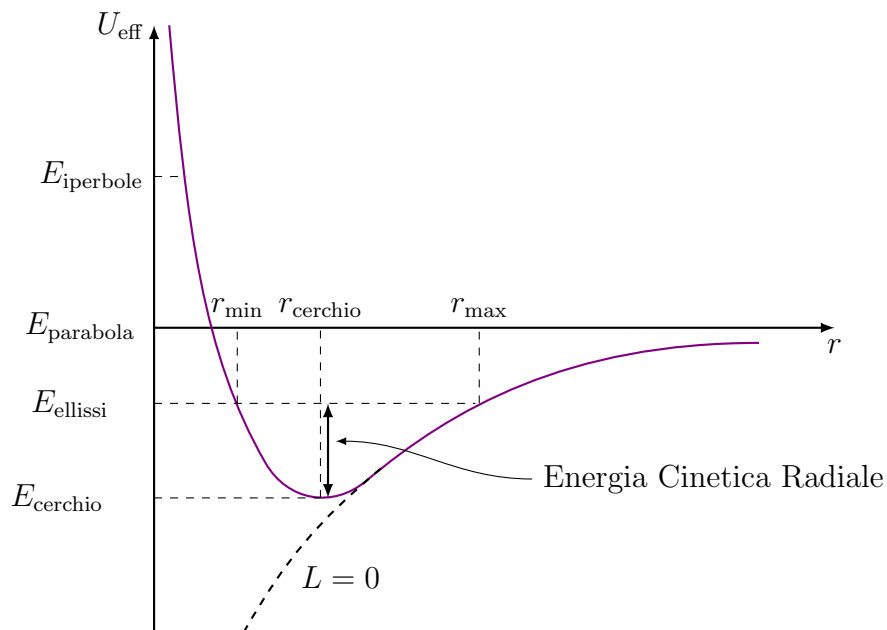


Fig. 3 *Potenziale efficace con livelli di energia corrispondenti a orbite circolari, ellittiche, paraboliche e iperboliche.*

1.6 Potenziale di Yukawa

Il **potenziale di Yukawa** o potenziale di Coulomb schermato può descrivere vari sistemi fisici. La sua applicazione spazia dall'astronomia, alla fisica delle alte energie, alla fisica nucleare, allo studio della materia condensata e molti altri rami della fisica. Ha una forma del tipo:

$$U(r) = -\alpha \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \quad (1.62)$$

dove λ è detta **range di interazione** e α **costante di accoppiamento**. Il potenziale effettivo relativo a (1.62) presenta minimi relativi (e quindi la possibilità di orbite chiuse) solo se

$$r < \frac{\lambda(1 + \sqrt{5})}{2}. \quad (1.63)$$

In generale (in caso di orbita chiusa) si può dimostrare che l'angolo apsidale può essere un numero arbitrario, che dipende dai parametri del problema e potrebbe quindi essere un multiplo irrazionale di π (vedi Fig. 4). In questo caso, mentre la particella viaggia dal perigeo all'apogeo e viceversa, la sua coordinata angolare avanzerà di un multiplo irrazionale di π , quindi ripeterà il processo di nuovo. Ogni iterazione di questo processo si tradurrà in un nuovo perigeo (punto radiale di massimo avvicinamento) con un angolo diverso dall'angolo di partenza, e poiché la differenza angolare non è un multiplo razionale di π , non ci sarà mai un altro perigeo alla stessa posizione di quello iniziale.

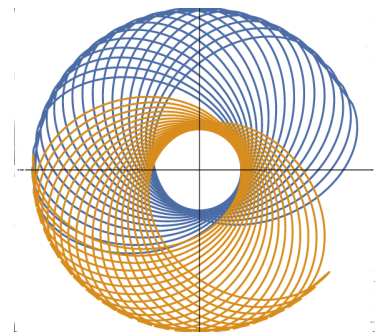


Fig. 4
Precessione nel potenziale di Yukawa.

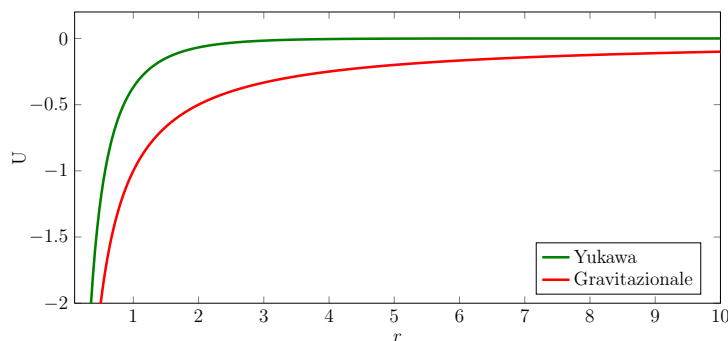


Fig. 5 *Confronto fra potenziale gravitazionale e di Yukawa, con $m = \lambda = \alpha = 1$.*

Capitolo 2

Problema dei tre corpi ristretto

2.1 Introduzione

Il **problema dei tre corpi** è la descrizione del moto di tre particelle massive influenzate dalle loro reciproche interazioni gravitazionali. Questo è un problema classico che copre una vasta gamma di situazioni in astrofisica. Un esempio di tali situazioni è il moto della Luna attorno alla Terra sotto l'influenza del Sole o un sistema ternario di stelle. Tuttavia, questo problema non ha una soluzione generale e quindi di solito si considerano formulazioni semplificate giustificate dal ragionamento fisico.

Il **problema dei tre corpi ristretto** è un caso particolare del problema a tre corpi in cui uno dei corpi ha **massa trascurabile** e i restanti due hanno un **moto circolare** attorno al loro centro di massa. Esempi del genere si possono incontrare in sistemi come una cometa che entra nel sistema Sole-Terra o un satellite nel sistema Terra-Luna.

Siano $m_{1,2}$ le masse dei due corpi massivi, con coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , e siano (x, y) le coordinate del terzo corpo. Per semplicità scegliamo unità di misura tali che la distanza \mathbf{r} tra i due corpi massivi sia **uguale a 1** e poniamo il sistema di riferimento sul centro di massa. Le posizioni dei due corpi massivi si possono allora scrivere

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad ; \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (2.1)$$

Definiamo ora $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ e riscriviamo le distanze come

$$r_1 = \mu \quad ; \quad r_2 = 1 - \mu. \quad (2.2)$$

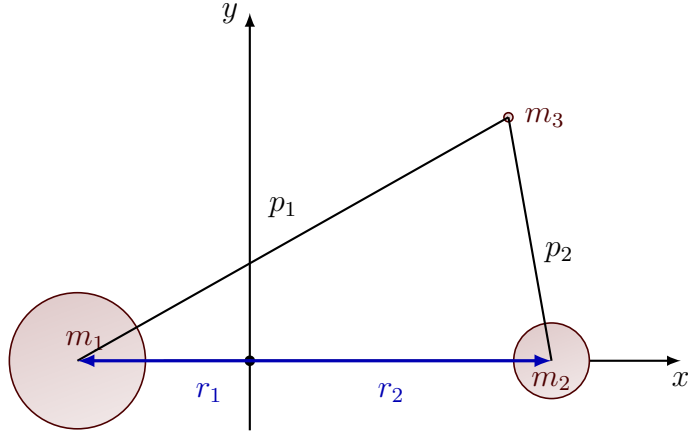


Fig. 6 Vettori posizione nel sistema di riferimento centro di massa

L'energia cinetica e potenziale del terzo corpo si possono scrivere come

$$T = \frac{1}{2}m_3(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2.3)$$

$$U = -\frac{Gm_3m_1}{|\mathbf{p}_1|} - \frac{Gm_3m_2}{|\mathbf{p}_2|} \quad (2.4)$$

dove p_1 e p_2 rappresentano le distanze del terzo corpo dagli altri due. Ora è conveniente cambiare il sistema di riferimento attuale con delle coordinate rotazionali in modo che i due corpi massivi siano stazionari

$$x'(t) = x \cos \omega t - y \sin \omega t \quad (2.5)$$

$$y'(t) = y \cos \omega t - x \sin \omega t \quad (2.6)$$

dove ω è la velocità angolare dei due corpi estesi. Poniamo le coordinate y in modo che i corpi massivi giacciono sull'asse x (come mostrato in Fig. 6). De-dimensionalizzando e semplificando le equazioni del moto diventano

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{p_1^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{p_2^3} \quad (2.7)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{(1-\mu)y}{p_1^3} - \frac{\mu y}{p_2^3} \quad (2.8)$$

2.2 Punti Lagrangiani

I matematici Leonhard Euler e Giuseppe-Luigi Lagrangia provarono l'esistenza di 5 punti di equilibrio per il terzo corpo dato dall'equilibrio fra la forza centrifuga e l'attrazione gravitazionale dei corpi estesi. Questi punti sono noti come **punti Lagrangiani** e avranno velocità e accelerazione nulla, quindi le equazioni (2.7) e (2.8) si possono riscrivere come

$$\ddot{x} = x + \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{p_1^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{p_2^3} = 0 \quad (2.9)$$

$$\ddot{y} = y + \frac{(1-\mu)y}{p_1^3} + \frac{\mu y}{p_2^3} = 0. \quad (2.10)$$

Eulero scoprì nel 1765 tre soluzioni instabili collineari lungo $y = 0$ chiamate L_1, L_2 e L_3 , nel 1772 Lagrange scoprì altri due punti stabili L_4 e L_5 formanti un triangolo equilatero con le due masse (vedi *Fig. 7*).

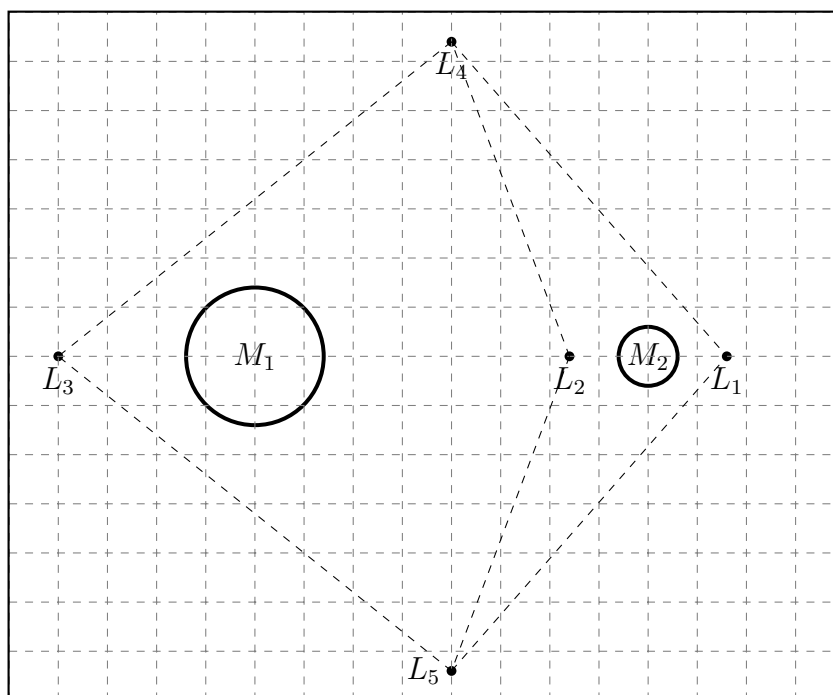


Fig. 7 Posizione dei punti Lagrangiani rispetto alle due masse.

Sistema	μ	L_1	L_2	L_3
Sole-Terra	3.0039E-7	0.995363	1.004637	-1.00001
Terra-Luna	1.2151E-2	0.836915	1.15568	-1.00506
Sole-Giove	7.1904E-4	0.938466	1.06267	-1.00030
Sole-Saturno	2.8571E-4	0.95475	1.04525	-1.0001
Saturno-Titano	2.366E-4	0.9575	1.0425	-1.0001

Fig. 8 Parametro μ e posizione dei punti Lagrangiani collineari per alcuni sistemi del sistema solare. Si è assunta la distanza tra i due corpi massivi unitaria.

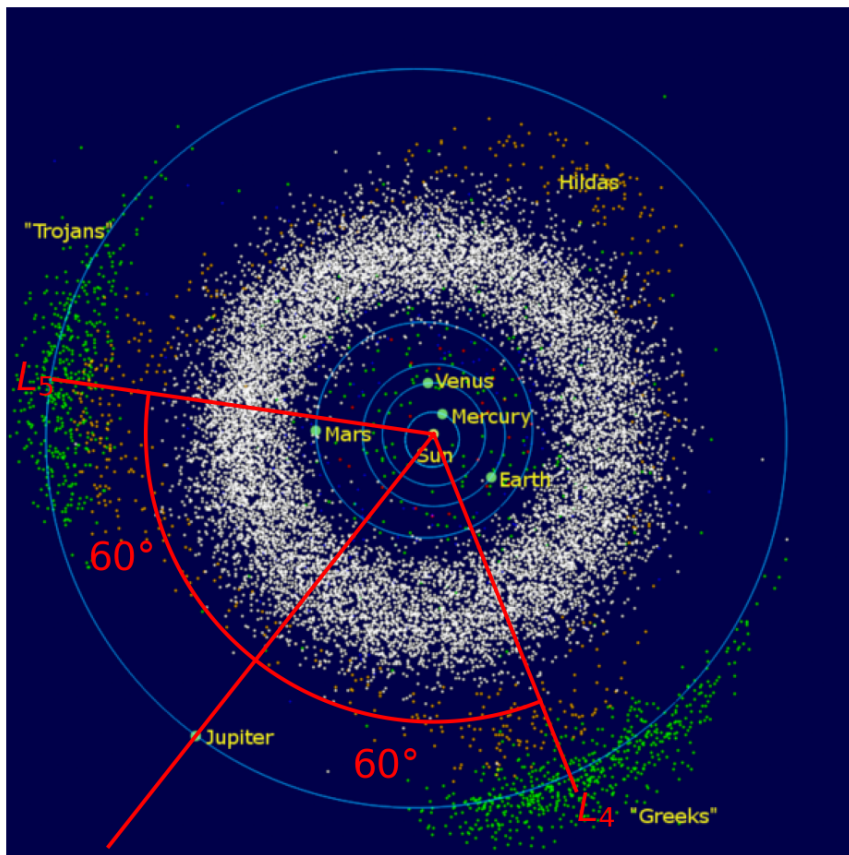


Fig. 9 Rappresentazione degli asteroidi troiani e greci che si sono ammassati nei punti Lagrangiani stabili L_4 e L_5 nel sistema Sole-Giove.

Appendice

Il punto L1 del sistema Terra-Sole offre una vista ininterrotta del sole ed è attualmente sede del satellite dell'Osservatorio solare ed eliosferico SOHO. Il punto L2 del sistema Terra-Sole era la sede della navicella spaziale WMAP, attuale sede di Planck e del James Webb Space Telescope. L2 è ideale per l'astronomia perché un veicolo spaziale è abbastanza vicino da comunicare prontamente con la Terra, può mantenere Sole, Terra e Luna dietro il veicolo spaziale per l'energia solare e (con un'adeguata schermatura) fornisce una visione chiara dello spazio profondo per i nostri telescopi. I punti L1 e L2 sono instabili su una scala temporale di circa 23 giorni, il che richiede che i satelliti in orbita attorno a queste posizioni subiscano regolari correzioni di rotta e assetto.

È improbabile che la NASA trovi alcun utilizzo per il punto L3 poiché rimane sempre nascosto dietro il Sole. L'idea di un "Pianeta-X" nascosto nel punto L3 è stata un argomento popolare nella scrittura di fantascienza. L'instabilità dell'orbita del pianeta X (su una scala temporale di 150 anni) non ha impedito a Hollywood di produrre classici come *The Man from Planet X*.

I punti L4 e L5 ospitano orbite stabili fintanto che il rapporto di massa tra le due grandi masse supera 24,96. Questa condizione è soddisfatta sia per il sistema Terra-Sole che per quello Terra-Luna, e per molte altre coppie di corpi del sistema solare. Gli oggetti trovati in orbita nei punti L4 e L5 sono spesso chiamati Troiani da i tre grandi asteroidi Agamennone, Achille ed Ettore che orbitano nei punti L4 e L5 del sistema Giove-Sole.

Bibliografia

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Fisica Teorica - Meccanica*, Editori Riuniti Univ. Press, 2010.
- [2] L. Ciotti, *Dispense di Astrofisica Extragalattica*, Università di Bologna, Dipartimento di Astronomia, 2020.
- [3] F. Franchi, *Dispense di Istituzioni di Fisica Matematica*, Università di Bologna, Dipartimento di Astronomia, 2021.
- [4] *The Two-Body Problem*. <https://web.physics.ucsb.edu/~fratus/phys103/LN/TBP.pdf>.
- [5] Hideki Yukawa (1935) *On the Interaction of Elementary Particles I*, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, Vol. 17, pp. 48-57.
- [6] Natalie M. Frnka (2010) *Orbital dynamics in the circular restricted three-body problem*, Senior Thesis, Northern Arizona University.
- [7] NASA What are Lagrange Points? <https://solarsystem.nasa.gov/faq/88/what-are-lagrange-points/>
- [8] David Morin (2005) *Introduction to Classical Mechanics*, Cambridge University Press.
- [9] Orbital Mechanics (2021) *Circular Restricted Three-Body Problem*, Retrieved from: <https://orbital-mechanics.space/the-n-body-problem/circular-restricted-three-body-problem.html>.