

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITY OF BOLOGNA

School of Science
Department of Physics and Astronomy
Master Degree in Physics

**Introduzione ai problemi di minimo
attraverso il laboratorio delle bolle di
sapone**

Supervisor:
Prof. Silvia Benvenuti

Submitted by:
Simone Chiusoli

Academic Year 2021/2022

Abstract

La tesi riguarda la descrizione di un percorso didattico, dalla sua fase di progettazione, alla sua fase di realizzazione, fino alla descrizione degli effetti osservati nel gruppo classe in cui tale percorso didattico è stato svolto. In particolare, tale percorso ha come obiettivo generale quello di introdurre all'esistenza dei problemi di minimo attraverso un laboratorio matematico che sfrutti le bolle di sapone, e l'acqua saponata in generale, per mostrare esempi di fenomeni di minimo. L'obiettivo è quello di mostrare le dinamiche che sono avvenute durante la realizzazione del percorso didattico dato il contesto specifico in cui tale percorso è stato svolto.

La tesi è strutturata in sei capitoli.

Nei primi tre capitoli si introducono, rispettivamente, il concetto di laboratorio didattico, il concetto di interdisciplinarietà e si fa un breve riassunto dell'evoluzione storica del problema isoperimetrico, col fine di arrivare a giustificare la scelta di aver svolto questo percorso didattico nonostante gli studenti non avessero gli strumenti per affrontarlo in maniera completamente rigorosa, senza tuttavia perdere l'importanza del ruolo del rigore e della dimostrazione nell'insegnamento della matematica.

Negli ultimi tre capitoli si fanno, rispettivamente, una breve descrizione teorica dell'argomento affrontato, si mostrano i questionari proposti agli studenti assieme ad un'analisi delle loro risposte, si descrive nella maniera più completa possibile l'esperienza di progettazione e realizzazione del percorso didattico.

Si conclude affermando che questo percorso didattico sia riuscito nel suo intento di motivare e interessare gli studenti della classe all'argomento. Inoltre, gli studenti più interessati hanno avuto modo di approfondire molto l'argomento, mentre gli altri studenti, nonostante si siano fermati ad una comprensione molto più generale e approssimativa, hanno avuto modo di sviluppare e mettere in pratica quelle che sono le loro inclinazioni personali, pur non avendo queste a che fare con la matematica o la fisica.

Indice

<i>Introduzione</i>	6
<i>Capitolo 1</i>	10
<i>Didattica laboratoriale</i>	
<i>nell'insegnamento della matematica</i>	10
1.1. <i>Introduzione</i>	10
1.2 <i>Storia dell'uso del laboratorio</i>	12
1.3 <i>Punti di forza del laboratorio didattico</i>	15
<i>Capitolo 2</i>	21
<i>L'interdisciplinarietà</i>	
<i>e il suo ruolo nella didattica</i>	21
2.1 <i>Introduzione al concetto di interdisciplinarietà</i>	21
2.2 <i>Evoluzione storica del concetto di interdisciplinarietà</i>	23
<i>Capitolo 3</i>	27
<i>Storia del problema isoperimetrico</i>	
<i>e ruolo della dimostrazione nella didattica</i>	27
3.1. <i>Origine storica del problema isoperimetrico</i>	27
3.2. <i>Zenodoro</i>	29
3.3. <i>La simmetrizzazione di Steiner</i>	35
3.4. <i>La soluzione di Ennio de Giorgi</i>	37
3.5. <i>La dimensione sociale della dimostrazione matematica</i>	39
<i>Capitolo 4</i>	42
<i>Bolle di sapone e lamine saponate</i>	
<i>come problemi di minimo</i>	42
4.1. <i>Il problema isoperimetrico</i>	43
4.2. <i>Il problema di Steiner</i>	49
4.3. <i>Il problema di Plateau</i>	51
<i>Capitolo 5</i>	53
<i>Questionario introduttivo</i>	
<i>e scheda di laboratorio</i>	53

5.1. Questionario 1	53
5.2. Analisi delle risposte al Questionario 1.....	57
5.3. Questionario 2	68
5.4. Analisi delle risposte al Questionario 2.....	69
Capitolo 6	72
Racconto dell'esperienza didattica	72
6.1. Lezione del 14 Maggio 2022	74
6.2. Lezione del 3 Giugno 2022	77
6.3. Lezione del 14 Ottobre 2022	80
6.4. Il Festival	92
Conclusioni	107
Appendice A: Proposizione 5 e proposizione 7 di Zenodoro	109
Appendice B: Superfici minime	111
Appendice C: Piano orario del liceo matematico Temistocle Calzecchi Onesti	113
Appendice D: Questionario di ingresso per il Festival.....	114
Appendice E: Questionario 1	118
Appendice F: Questionario 2	120
Bibliografia	122

Introduzione

La società ha suddiviso il sapere umano in quelle che oggi chiamiamo discipline, e di conseguenza anche nell'istruzione abbiamo una frammentarietà del sapere da insegnare suddiviso in diverse discipline. Questo fa parte dell'abitudine umana di categorizzare i concetti che vengono costruiti col fine di studiarli meglio, poiché è fondamentale per utilizzare il linguaggio, nostro principale strumento di comunicazione e di costruzione di ragionamenti. Per poter utilizzare il linguaggio al meglio abbiamo bisogno di costruire definizioni, e per costruire definizioni abbiamo bisogno di suddividere i concetti e costruire loro dei confini il più possibile netti, col fine di rendere chiari la nostra comunicazione e il nostro ragionamento (che non è altro che comunicazione intrapersonale). Tuttavia non dobbiamo dimenticarci l'organicità del mondo che ci circonda, e del fatto che la suddivisione in concetti distinti fra loro è un'idealizzazione e modellizzazione del mondo, funzionale a semplificare il nostro ragionamento, ma non dobbiamo cadere nell'errore di far collassare il mondo con la sua modellizzazione. Perciò, al fianco dello studio delle singole discipline, è importante progettare attività didattiche che permettano agli studenti di costruire competenze interdisciplinari, ossia le capacità di affrontare problemi non inquadrabili in una singola disciplina, ma che necessitino di essere affrontati attraverso delle lenti che sintetizzino conoscenze e abilità di diverse discipline all'interno di un quadro teorico nuovo e coerente, che a volte è più della somma delle parti.

La scuola è il luogo istituzionale in cui si studia il mondo che ci circonda. Obiettivo della scuola è quello di formare cittadini consapevoli del mondo attorno a loro, e in grado di muoversi attraverso esso. Tuttavia ci sono molte contraddizioni fra il sapere insegnato a scuola e il sapere appreso nell'esperienza diretta con la realtà. Già nel modo in cui si apprende ci sono enormi differenze tra i due tipi di sapere, nello specifico il sapere insegnato a scuola viene trasmesso attraverso il linguaggio, mentre il sapere appreso tramite esperienza al di fuori dei contesti istituzionali passa

principalmente attraverso i sensi. Inoltre il sapere insegnato a scuola è categorizzato, sistematizzato, ordinato, astratto, mentre l'esperienza diretta ci trasmette un'idea della realtà come organica, caotica, concreta, quasi opposta a quanto viene insegnato a scuola. Chiaramente la ragione per cui avviene ciò è che il sapere insegnato a scuola rappresenta una modellizzazione e semplificazione della realtà. Tuttavia, se si usa il sapere insegnato per risolvere problemi inventati con poca attinenza alla realtà, si rischia di creare un muro concettuale tra la scuola e il mondo reale, i quali vengono quindi percepiti come realtà separate dagli studenti, con la conseguenza che questi perdano fiducia e motivazione nell'imparare cose di cui non ne vedono l'utilità. Per far fronte a ciò vengono in aiuto attività didattiche fra cui quella laboratoriale, la quale permette di creare una situazione intermedia di natura controllata, ossia una situazione in cui si osservano e producono fenomeni reali abbastanza semplici da poter essere studiati dagli studenti e da poter permettere loro di costruire una connessione tra il fenomeno reale e la sua modellizzazione teorica, ricollegando quei due mondi che inizialmente erano stati separati fra loro. È questa la ragione principale per cui il laboratorio può avere un forte ruolo di motivatore allo studio nei confronti degli studenti, i quali possono vedere coi loro occhi in che modo le loro conoscenze acquisite a scuola entrano in gioco in fenomeni naturali, oltre a comprendere meglio il valore epistemologico delle loro conoscenze.

In questa tesi si descrivono l'esperienza della progettazione di un percorso didattico e le dinamiche che si sono venute a creare in classe. In particolare si è voluto introdurre ai problemi di minimo partendo da un'esperienza laboratoriale che mostrasse comportamenti di minimo nelle bolle di sapone. Le ragioni per cui si è scelto di fare ciò riguardano il fatto che l'esperienza laboratoriale potesse permettere di dare concretezza ai problemi di minimo (coerentemente con la teoria dell'embodiment per cui ogni conoscenza è largamente metaforica, e le metafore utilizzate sono quelle che possono essere fatte risalire all'esperienza sensibile (Kiefer et al., 2012)), il fatto che lo studio delle bolle di sapone richieda un approccio interdisciplinare tra matematica, fisica e chimica, e il fatto che il laboratorio potesse motivare gli studenti della classe, sia per il discorso fatto sopra sul ruolo del laboratorio nel connettere i fenomeni reali alle conoscenze acquisite in classe, sia per il fatto che i fenomeni riguardanti le bolle di sapone risultino affascinanti a molti, secondo l'idea per

cui le emozioni influenzino fortemente i processi di apprendimento (Bower, 1992) (Tyng et al., 2017).

Nel primo capitolo si presenta il concetto di laboratorio didattico, in particolare legato alla didattica della matematica. Poiché non esiste una definizione univoca di laboratorio si è deciso anche di mostrare diverse idee legate al ruolo del laboratorio, oltre a una sintesi molto sommaria dell'evoluzione storica del concetto di laboratorio didattico e del ruolo del laboratorio nell'insegnamento della matematica, col fine di fornire al lettore una comprensione generale sull'argomento non troppo approfondita, ma sufficiente a comprendere l'idea dietro alla scelta dell'utilizzo del laboratorio nel percorso didattico descritto in questa tesi. Si sono voluti scrivere in particolare quegli elementi legati al laboratorio che emergono in questo caso specifico, piuttosto che esplorare l'idea di laboratorio nel suo complesso.

Nel secondo capitolo si presenta il concetto di interdisciplinarietà, in particolare all'interdisciplinarietà tra matematica e fisica. Anche in questo caso, analogamente al primo capitolo, si è voluto introdurre all'argomento in maniera molto generale, poiché studiare il ruolo dell'interdisciplinarietà all'interno del percorso didattico svolto non è l'obiettivo principale della tesi, ma è un elemento importante che entra in gioco. Si è inoltre fatta una sintesi dell'evoluzione storica del concetto di interdisciplinarietà e del ruolo dell'interdisciplinarietà nella didattica, poiché, non esistendo una definizione universale di interdisciplinarietà, si è ritenuto che, oltre a mostrarne alcune definizioni e alcune idee caratterizzanti, fosse utile capirne l'origine e l'evoluzione storica per comprenderne meglio la natura.

Nel terzo capitolo si fa un breve riassunto storico sul problema isoperimetrico, che va dalla sua nascita alla sua risoluzione completa. Il problema isoperimetrico è uno dei principali problemi affrontati nel percorso didattico svolto, tuttavia è un problema che necessita di una matematica troppo avanzata per essere risolto in maniera del tutto completa e rigorosa da una classe di liceo superiore. La storia del problema isoperimetrico permette di affrontare il problema del rigore in matematica, oltre al rapporto tra argomentazione e dimostrazione. In particolare si vuole affermare l'utilità dietro allo studio di un problema che permetta l'inizio di un processo di costruzione di una

dimostrazione, senza dover necessariamente arrivare al prodotto finale. Si discute inoltre il ruolo sociale dell'accettazione di una dimostrazione matematica.

Nel quarto capitolo si fa un'introduzione teorica all'argomento, presentando in particolare i fenomeni che si sono studiati in classe.

Nel quinto capitolo si mostrano i questionari presentati in classe, e si analizzano le risposte degli studenti a tali questionari. In particolare, il primo questionario funge da introduzione all'argomento e da fotografia delle conoscenze degli studenti precedenti al percorso didattico, mentre il secondo questionario è una scheda di laboratorio che funge da guida verso l'esperienza laboratoriale.

Infine, nel sesto capitolo si descrive nella maniera più completa e dettagliata possibile tutta l'esperienza didattica, focus di questa tesi, comprendendo le dinamiche avvenute fra gli studenti e le dinamiche avvenute durante le diverse fasi della progettazione didattica.

Capitolo 1

Didattica laboratoriale nell'insegnamento della matematica

In questo capitolo si presenta uno dei quadri di riferimento teorici entro cui si colloca l'analisi del percorso didattico descritto in questa tesi. Nella sezione 1.1 si introduce al concetto di laboratorio e al suo ruolo nell'insegnamento della matematica. Nella sezione 1.2 si ripercorrono i principali momenti storici che hanno portato a introdurre l'idea di utilizzare il laboratorio nell'insegnamento della matematica, in particolare per quel che riguarda l'Italia. Infine, nella sezione 1.3 si discutono diversi punti di vista sul ruolo del laboratorio nell'insegnamento della matematica, e in particolari sui benefici che può trarne una classe in cui dovesse venire utilizzato all'interno della progettazione didattica.

1.1. Introduzione

Prima di parlare di didattica laboratoriale vogliamo definire che cosa si intende con il termine "laboratorio".

Un laboratorio è un'attività didattica con le seguenti caratteristiche:

- 1) gli studenti hanno un ruolo attivo: non devono solo osservare o ascoltare, ma devono operare in maniera concreta, divisi in piccoli gruppi nei quali discutono fra loro e costruiscono le proprie conoscenze;

- 2) gli insegnanti hanno il ruolo della guida esperta che osserva e ascolta, che risponde ad eventuali domande col fine di indirizzare gli studenti su una via proficua e distoglier loro da una via poco significativa, e che aiuta gli studenti a tirare le fila dell'attività svolta (Dedò et al., 2012).

In genere, quando si pensa a un laboratorio, viene in mente l'uso di elementi quali la tecnologia o del materiale manipolabile. Tuttavia si è voluto definire il laboratorio nella sua sostanza piuttosto che attraverso i mezzi, che non sono necessari per un'attività laboratoriale, ma possono aiutare molto a facilitare una dinamica di tipo laboratoriale grazie allo spiazzamento rispetto alle lezioni frontali (Dedò et al., 2012).

Va inoltre sottolineato come l'importanza dell'uso del laboratorio nella didattica della matematica sia nota non solo negli ultimi anni, ma anche in tempi più lontani; basti pensare a nomi quali quello di Giovanni Vailati, matematico oltre che filosofo e storico italiano nato a Crema il 24 Aprile 1863 e morto a Roma il 14 Maggio 1909, il quale scriveva che bisogna evitare che gli studenti siano costretti a “imparare delle teorie prima di conoscere i fatti a cui esse si riferiscono” (Vailati, 1899), oppure a “sentir ripetere delle parole prima di essere in possesso degli elementi sensibili e concreti da cui per astrazione si può ottenere il loro significato” (Vailati, 1899).

Fra i vantaggi del laboratorio rispetto alla lezione frontale, si vogliono sottolineare il fatto che stimoli l'autonomia, la creatività personale, l'assunzione di responsabilità.

Inoltre il laboratorio ha il fine di rendere meno noioso l'argomento, di permettere il confronto tra pari (gli studenti) e di porsi un obiettivo che crei la necessità di studiare per raggiungere quell'obiettivo. Si vuole anche evitare di dare un'idea piatta (e falsa) della disciplina, cosa che avviene se si convince, implicitamente, che la matematica serva soltanto a risolvere problemi banali, quando il suo vero fine è quello di affrontare problemi complessi attraverso modellizzazioni e semplificazioni del reale (Dedò et al., 2012). Un altro ruolo del laboratorio matematico è quello di allontanare dal rigore formale e avvicinare al rigore sostanziale.

Secondo Elio Fabri:

“... il criterio del rigore non è quello delle esatte definizioni nel primo capitolo di un libro. Rigore significa chiarezza nel significato dei singoli passi, significa dire esplicitamente che i concetti si precisano man mano che si procede, che la validità di principi e teorie si rafforza quando se ne

vede tutta la portata, che non ci sono singole leggi dimostrate da singoli esperimenti, ma che tutta la costruzione si regge nel suo insieme e nel suo insieme trova conferma nei fatti. Ottenere che lo studente capisca e ricordi tutto questo è più importante delle singole nozioni, regole, dati sperimentali. Ciò porta del tempo, ma è tempo ben speso, anche se si deve sacrificare qualche parte delle trattazioni tradizionali. Per convincersene, basta avere l'onestà di chiedersi quanto di quello che si fa in un corso con pretese di completezza viene effettivamente ricordato, anche solo dopo un anno, dallo studente medio: si arriverà necessariamente alla conclusione che la completezza senza chiarezza di comprensione è fatica sprecata. Questo non vuol dire naturalmente che nozioni, regole, dati sperimentali non debbano essere conosciuti e impiegati: ma che debbono esserlo in vista di uno scopo ben preciso e non fine a se stessi. ...” (Fabri, 1995).

L'attività laboratoriale porta in maniera naturale a concentrare l'attenzione sulle difficoltà sostanziali, senza farsi distrarre da quelle formali, questo perché viene centrata l'attenzione sul problema da risolvere.

Altro elemento importante riguarda il lavoro in piccoli gruppi: il confronto tra pari, oltre ad avere un ruolo di consolidamento metacognitivo (capire di aver capito), permette di creare la necessità di passare da un linguaggio familiare a un linguaggio rigoroso, senza doverlo imporre “dall'alto”.

1.2 Storia dell'uso del laboratorio

L'idea dell'uso del laboratorio in didattica non è recente.

John Dewey, filosofo e pedagogista statunitense nato a Burlington il 20 Ottobre del 1859 e morto a New York l'1 Giugno del 1952, riteneva che la scuola dovesse essere attiva, che dovesse porre al centro l'attività degli studenti in una forma di lavoro di tipo sociale. Il sapere deve essere presentato sotto forma di problemi e deve scaturire dalla ricerca personale dello studente. Nel 1896 fondò a Chicago una scuola sperimentale basata su questi ideali educativi ed interagì con matematici quali George B. Halsted. Contrariamente a quest'ultimo riteneva che nella pratica dell'insegnamento, oltre a dover tener conto del rigore della disciplina, si dovesse tener conto anche dell'aspetto psicologico, e che dunque si dovesse partire dalla realtà concreta per poi presentare le applicazioni pratiche della matematica, per arrivare soltanto dopo al rigore logico (Dewey, 1903).

Dewey influenzò diversi pedagogisti europei fra cui Kerschensteiner, promotore della scuola del lavoro, l'Arbeitsschule.

Egli riteneva che fosse necessario trasformare la scuola in un laboratorio di esercitazioni, dove l'allievo potesse imparare a usare il sapere e acquisire il senso del dovere sociale. Fu particolarmente sensibile all'insegnamento scientifico, come si può leggere dal suo libretto "Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichts" (Kerschensteiner, 2019).

Fu inoltre influenzato il già citato Giovanni Vailati (Vailati et al., 1987), il quale si ispirò anche a Herbert George Wells (Giacardi, 2011). Quest'ultimo, oltre alla visione generale secondo cui le lezioni dovessero essere dedicate ad attività spontanee che incentivino l'immaginazione, citò anche l'utilizzo del laboratorio nella matematica, evidenziandone le difficoltà e la necessità di una grande preparazione dei docenti (Wells, 1914). Tuttavia, l'idea specifica dell'uso del laboratorio in matematica nacque con Perry, professore di Meccanica e Matematica del Royal College of Science di Londra (Giacardi, 2011). Egli elaborò un metodo didattico che chiamò il metodo "Practical Mathematics" che si può riassumere nelle seguenti parole:

"The most essential idea in the method of study called Practical Mathematics is that the student should become familiar with things before he is asked to reason about them" (Perry, 1913).

Prima di affrontare teoremi e dimostrazioni, gli studenti dovrebbero acquisire familiarità con i concetti attraverso esperimenti e collegamenti con la fisica e altre scienze. La proposta di Perry nacque dalla sua constatazione del fallimento dell'insegnamento tradizionale nei confronti dello studente medio:

"Academic methods of teaching Mathematics succeed with about five per cent of all students, the small minority who are fond of abstract reasoning: they fail altogether with the average student"
(Perry, 1913).

Perry riteneva che il motivo di ciò stesse, nel caso del sistema inglese di allora, negli esami separati che inducevano i docenti a insegnare le materie per compartimenti stagni, anticipando quindi anche l'importanza degli aspetti interdisciplinari nell'insegnamento, dando troppa importanza agli aspetti astratti della matematica, trascurando i principi fondamentali.

“So we now teach all boys what is called mathematical philosophy, that we may catch in our net the one demigod, the one pure mathematician, and we do our best to ruin all the others” (British Association for the Advancement of Science et al., 1902)

Scopo dell'insegnamento è quello di formare persone in grado di imparare ad imparare, obiettivo raggiungibile attraverso una didattica di tipo laboratoriale.

Le idee di Perry ebbero risonanza anche in America, dove ad esempio Moore, presidente della American Mathematical Society, invitò gli insegnanti di matematica a occuparsi di un'istruzione non troppo incentrata sugli aspetti teorici e astratti, ma più incentrata su un insegnamento integrato di matematica pura e applicata, citando il modello sperimentale di Perry (Moore, 1967).

Secondo Moore, il metodo di Perry permetteva agli studenti di comprendere che:

“mathematics is indeed itself a fundamental reality of the domain of thought, and not merely a matter of symbols and arbitrary rules and conventions” (Moore, 1967).

L'insegnamento laboratoriale ha i seguenti vantaggi: permette all'allievo di rendersi conto dell'importanza di un teorema e di far nascere in lui il desiderio di una dimostrazione formale; risveglia lo spirito della ricerca personale; consente il lavoro individuale e quello di gruppo, dove l'insegnante è allo stesso tempo uno del gruppo e il leader.

In Europa ci furono diversi sviluppi e tentativi di inserire il laboratorio matematico nell'insegnamento della disciplina, oltre che confronti tra cui il IV Congresso Internazionale dei Matematici che si tenne a Roma nel 1908 e che portò alla creazione della Commissione Internazionale per l'Insegnamento Matematico.

In Italia fu Giovanni Vailati a proporre l'idea di laboratorio. Fra i suoi contributi si vuole ricordare l'elaborazione dei programmi di matematica nell'ambito dei lavori della Commissione Reale per la riforma delle scuole secondarie. Secondo Vailati, fra le cause principali del cattivo funzionamento delle scuole secondarie della sua epoca, vi era l'abitudine di concepire l'insegnamento come una conferenza dove gli studenti non devono fare altro che ascoltare, per essere poi interrogati allo scopo di verificare se hanno inteso e memorizzato ciò che hanno udito, mentre il tipo di lezione più appropriato per ottenere lo scopo educativo fosse la lezione maieutica. Questa permette all'insegnante di guidare gli allievi alla scoperta delle verità matematiche, incoraggiare la riflessione e la ricerca

personale. Per stimolare l'attenzione può essere utile introdurre momenti di gioco che non diminuiscono la dignità della scienza matematica, ma ne accrescono l'attrazione (Vailati, 1906). Le proposte di Vailati non divennero una pratica diffusa a causa di diversi fattori, fra cui, probabilmente, il fatto che la riforma proposta dalla Commissione Reale non venne mai approvata, e che la Riforma Gentile rese le discipline umanistiche l'asse culturale della nazione e della scuola. Tuttavia, l'idea di scuola-laboratorio proposta di Vailati, risulta oggi molto attuale, come si può leggere nei curricula di matematica proposti dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM) dove si legge:

“Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni)” (Anichini et al., 2004).

1.3 Punti di forza del laboratorio didattico

In seguito si vuole riportare una sintesi di alcuni punti di vista positivi verso il ruolo del laboratorio didattico.

In diversi articoli di Paola Domingo si legge che il laboratorio dovrebbe essere un insieme strutturato di attività che hanno come fine la costruzione di significati degli oggetti matematici, e questo è reso possibile grazie all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività e alle interazioni sociali fra studenti e fra studente e insegnante che si sviluppano durante il processo (Paola, 2004). Il laboratorio viene paragonato alla bottega rinascimentale, dove l'apprendista lavora facendo e vedendo fare, costruendo conoscenza e apprendendo per imitazione dell'esperto e di altri compagni. I poli attorno ai quali ruota il laboratorio matematico sono gli strumenti, le interazioni sociali, il sapere di riferimento. Inoltre si afferma che la didattica di laboratorio è una didattica lunga (Paola, 2008), rispettosa dei diversi tempi di apprendimento degli studenti, attenta non solo agli aspetti di carattere cognitivo, ma anche a quelli legati all'interazione sociale e alla gestione delle emozioni. È importante prestare attenzione in particolare ai processi di pensiero attivati dagli studenti piuttosto che ai prodotti

delle attività, e questo viene più favorito dalla didattica laboratoriale rispetto che dalle lezioni frontali tradizionali. Infatti la costruzione di significati può essere inibita da un approccio troppo attento al rigore, agli aspetti formali, già dato in una forma ordinata e sistemata (Paola, 2004).

Paola Domingo parla anche del ruolo, in relazione al laboratorio didattico, della dimostrazione, che non dovrebbe essere quello di convincere che una congettura funziona, poiché non c'è nulla di più convincente di un'esperienza sperimentale, ma dovrebbe essere quella di spiegare il perché una congettura funziona. In questo modo si consente di far evolvere gradualmente i sensi degli studenti verso la dimostrazione come attività che consente di precisare la nozione di conseguenza logica che esiste tra i fatti osservati e le conoscenze che sono state assunte (Paola, 2003).

Altri, come Giampaolo Chiappini, giustificano l'importanza del laboratorio in didattica della matematica a partire dalla teoria della trasposizione didattica elaborata da Chevallard (Chevallard, 1985) in un quadro costruttivista.

Nella teoria di Chevallard ci sono tre elementi in gioco che interagiscono fra loro: l'insegnante, l'allievo e il sapere, i quali, in un approccio costruttivista, sono calati in un contesto sociale.

Il sapere, in questo caso matematico, viene trasformato in sapere da insegnare attraverso dei mediatori, in quella che viene chiamata trasposizione didattica (per essere più precisi si ha prima una trasposizione esterna che trasforma il sapere matematico in contenuti da insegnare, dopodiché si ha una trasposizione interna che trasforma i contenuti dei programmi scolastici in effettivi contenuti di insegnamento, per poi diventare sapere insegnato). Per favorire il passaggio da sapere da insegnare a sapere insegnato viene suggerito di usare più media e linguaggi possibili (anche in un'ottica di inclusione verso i diversi studenti che hanno diverse "preferenze" per quanto riguarda i media e i linguaggi usati nell'insegnamento), e questo vuol dire integrare i classici strumenti e mezzi di natura logico simbolica con altri (che possono essere grafici, icone, rappresentazioni dinamiche) con il fine di offrire agli studenti degli strumenti operativi e rappresentativi per esplorare la conoscenza matematica da apprendere e per poter costruire idee e significati relativi ad essa.

La pluralità di rappresentazioni è importante per non far collassare un oggetto in una sua rappresentazione. Infatti i concetti matematici sono astratti (si dice che gli oggetti matematici non sono ostensivi, cioè che la loro definizione non è accompagnata dalla presentazione degli oggetti stessi), e l'unico accesso che abbiamo alla loro conoscenza è attraverso le loro rappresentazioni, ma questo crea il rischio di confondere il concetto con la sua rappresentazione (questo problema è

conosciuto come il paradosso di Duval). Invece una pluralità di rappresentazioni che si riferiscono allo stesso concetto riduce questo rischio, soprattutto se si accompagna l'allievo alla manipolazione delle rappresentazioni simboliche e all'esplorazione dei concetti matematici.

In questo il laboratorio può essere d'aiuto in quanto permette di presentare la conoscenza matematica da insegnare attraverso un mezzo molto diverso rispetto a quello logico-simbolico presentato in un ambiente di didattica tradizionale, il quale permette anche una manipolazione molto concreta. Infatti il sapere da insegnare (in forma di contenuti disciplinari) viene staccato dall'ambiente in cui è stato sviluppato e lo si installa in un nuovo spazio fenomenologico (appunto il laboratorio didattico di matematica) per assoggettarlo alle condizioni di un nuovo ordine operativo, sociale, rappresentativo che presenta caratteristiche diverse da quello disciplinare in cui tale sapere trova giustificazione e legittimità. Questo col fine di riconfigurare la conoscenza da insegnare (Chiappini & Reggiani, 2003) in oggetto di investigazione, e permettere allo studente di costruire un proprio rapporto esperenziale con la conoscenza da insegnare, superando le resistenze che l'ordine disciplinare può offrire all'investigazione degli studenti e al loro apprendimento. Chiappini dà la seguente definizione di laboratorio di didattica della matematica:

“Esso è quello spazio fenomenologico dell'insegnamento apprendimento della matematica che si struttura attraverso l'uso di specifici strumenti tecnologici e di articolati processi di negoziazione e in cui la conoscenza matematica viene assoggettata ad un nuovo ordine rappresentativo, operativo e sociale per essere riconfigurata in oggetto di investigazione e poter essere quindi più efficacemente insegnata e appresa” (Chiappini, 2007).

Secondo questa definizione, la riconfigurazione in oggetto di investigazione è vista come condizione necessaria affinché si possa stabilire un legame diverso tra insegnante e alunni nel processo di insegnamento-apprendimento, che consiste da una parte dalla non contrapposizione tra idee e concetti dell'insegnante relative alla conoscenza da insegnare e il vissuto esperenziale degli studenti, dall'altra da dinamiche di comportamento degli studenti che evolvono non a partire da prescrizioni disciplinari, ma da pratiche più ricche permesse dal nuovo ordine del laboratorio.

La visione costruttivista di Chiappini emerge anche dalla definizione di conoscenza matematica come “il risultato di una costruzione sociale sviluppatasi sul piano storico attraverso una costante dialettica tra lo sviluppo di tecniche matematiche sul piano operativo/procedurale e la loro

concettualizzazione sul piano strutturale/relazionale”. Il carattere sociale della costruzione di conoscenza matematica emerge di più in un laboratorio, in cui il fine è scoprire insieme la natura, piuttosto che in una didattica frontale, in cui l’atteggiamento più passivo degli studenti fa perdere parzialmente l’aspetto sociale della matematica.

A questo punto si tratta di chiarire cosa si intende per “tecnica matematica”. La definizione viene ripresa da Chevallard (Chevallard, 1992) e Artigue (Artigue, 2002) in cui si parla di tecnica matematica come modo di risolvere un compito attraverso ragionamenti e operazioni di tipo meccanico e automatico.

Le tecniche hanno un valore epistemico e un valore pragmatico.

Il valore pragmatico riguarda l’efficacia e l’efficienza nel produrre un risultato socialmente accettabile in relazione al compito (oltre ai costi e ai limiti relativi al suo utilizzo), mentre il valore epistemico fa riferimento alla sua capacità di attivare sviluppi concettuali volti a giustificarla e inquadrarla sul piano teorico. Questi valori non hanno carattere assoluto, ma dipendono dal contesto in cui le tecniche vengono utilizzate e dal soggetto che ne fa uso. L’insegnante deve quindi aver chiaro il valore pragmatico e quello epistemico di una tecnica che si sta utilizzando rispetto agli studenti, che non sempre coincidono con quelli dell’insegnante stesso. Scopo dell’attività educativa deve essere permettere agli studenti di ottenere la padronanza di una tecnica e l’acquisizione di una buona conoscenza del suo dominio matematico di riferimento.

Affinchè una conoscenza matematica possa diventare oggetto di investigazione occorre che le tecniche di riferimento siano assoggettate ad un ordine operativo, rappresentativo e sociale.

Per ordine operativo si intendono i mezzi e i modi che permettono lo sviluppo sul piano procedurale della tecnica matematica, finalizzato alla soluzione di compiti, ossia tutto ciò che fa assumere valore pragmatico alla tecnica rispetto agli studenti che imparano ad utilizzarla. Per ordine rappresentativo si intendono le forme e i modi che permettono l’interpretazione degli aspetti strutturali/relazionali che caratterizzano la tecnica matematica, interpretazione che è finalizzata ad una giustificazione della tecnica sul piano razionale e a un suo inquadramento teorico,

ossia tutto ciò che fa assumere valore epistemico alla tecnica rispetto agli studenti che imparano ad utilizzarla.

Per ordine sociale relativo all'uso della tecnica si intendono i compiti che vengono affrontati attraverso essa e i modi con cui vengono condivisi, negoziati e comunicati i significati e le idee coinvolti nell'attività. Gli ordini rappresentativo e operativo e l'ordine sociale si condizionano reciprocamente (l'ordine sociale relativo all'uso della tecnica dipende fortemente dall'ordine rappresentativo e operativo a cui la tecnica è assoggettata, mentre l'ordine sociale stesso contribuisce a determinare i valori pragmatici ed epistemici che lo studente riconosce nella tecnica matematica). Definito ciò, l'idea del laboratorio didattico della matematica è quella di sfruttare le possibilità di visualizzazione, dinamicità e interattività per assoggettare le tecniche matematiche a un ordine rappresentativo, operativo e sociale che permettono di riconfigurare la conoscenza da insegnare in oggetto di investigazione per lo studente, cioè che consentono allo studente di utilizzare le tecniche matematiche per investigare la conoscenza da apprendere, attribuendo loro un valore pragmatico ed epistemico che sarebbe più difficile da attribuire in un contesto di didattica tradizionale.

Anche Gabriele Anzellotti, l'allora presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica, scrive nel 2007 una lettera destinata ad Enrico Giusti, sostenendo posizioni forti riguardo la necessità di dover dare maggiore importanza in Italia al ruolo del laboratorio di didattica della matematica.

Fra le varie ragioni sostenute, c'è quella di rompere il pregiudizio che vede la matematica come una scienza puramente deduttiva, il cui unico fine sia quello di definire degli assiomi, da cui poi dimostrare dei teoremi.

Tuttavia questi assiomi non sono stati definiti senza ragione alcuna (anche se la correttezza di un ragionamento matematico non si giudica dalla correttezza degli assiomi, che essendo assiomi non possono essere corretti o scorretti per definizione, ma dalla correttezza delle dimostrazioni, ossia delle connessioni logiche che legano gli assiomi e le definizioni tra loro, in quelli che vengono chiamati teoremi), ma sono stati "individuati e convenuti faticosamente, procedendo per tentativi, congetture e confutazioni e con atti di grande immaginazione" (48 lettere - sito dell'unione Matematica Italiana), perciò è scorretto affermare che la costruzione del sapere matematico sia un cammino unidirezionale dagli assiomi ai teoremi tramite le dimostrazioni, ma è anche un procedere dalle osservazioni della veridicità delle conclusioni a cui si è giunti, alla ridefinizione degli assiomi da cui si è partiti, in un

cammino inverso rispetto a quello che vede la matematica come “la scienza deduttiva per antonomasia”.

È inoltre importante che venga mostrato il valore epistemologico della matematica, ossia alle capacità di costruire modelli, trasformare pezzi di realtà in problemi scritti in linguaggio matematico, mettere a confronto diversi modelli e congetture quantitativamente anche attraverso l’uso dell’esperimento. Per questo è necessario che gli studenti abbiano un ruolo attivo e vivano un contesto in cui poter confrontare le proprie conoscenze e le proprie idee coi fatti e i fenomeni del mondo reale, e questo è possibile con l’uso del laboratorio didattico.

Enrico Giusti, ossia il destinatario della lettera scritta da Gabriele Anzellotti, risponde per mezzo di una lettera con un’opinione critica verso il laboratorio, riconoscendone l’utilità, ma ridimensionandolo in un pensiero che voglio citare poiché lo ritengo in parte coerente con il percorso didattico sull’introduzione dei problemi di minimo attraverso le bolle di sapone che è avvenuto nella classe che ho seguito:

“Il problema è [...] di misura. Così come i laboratori di fisica, anche quelli di matematica sono i benvenuti, purchè sia chiaro quale sia il loro scopo e la loro funzione: stimolare e interessare gli studenti. Non è cosa da poco, e forse è anche la parte più divertente [...] ma non è la parte essenziale dell’insegnamento. [...] la matematica è al cinque per cento fantasia e al novantacinque per cento disciplina. La fantasia non si insegna; al più si può favorire e stimolare. La disciplina invece si insegna, e questo è il compito primario della scuola. Facciamo attenzione a non buttare via il novantacinque per correre dietro a un inafferrabile cinque” (48 lettere - sito dell'unione

Matematica Italiana).

C’è quindi un pensiero che riconosce il valore dei laboratori, ma teme che una sopravvalutazione del loro valore didattico finisca per sostituire eccessivamente le lezioni tradizionali con quelle di laboratorio.

C’è inoltre l’idea che il laboratorio permetta uno studio più approfondito della disciplina, ma che possa dare i suoi frutti se indirizzato agli studenti più portati per la materia, mentre possa rischiare di risultare una perdita di tempo per gli studenti meno bravi che invece gioverebbero di più da un tipo di didattica tradizionale la quale, per sua natura tende a premiare di più la disciplina.

Capitolo 2

L'interdisciplinarietà e il suo ruolo nella didattica

In questo capitolo si vuole fornire una visione generale sul concetto di interdisciplinarietà e sul suo ruolo nella didattica, in maniera tale che il lettore capisca di cosa si parli quando emergono esempi di interdisciplinarietà nell'analisi dell'esperienza in classe descritta più avanti. In particolare, nella sezione 2.1 si discute la definizione di interdisciplinarietà, e si dà uno sguardo in particolare all'interdisciplinarietà tra matematica e fisica. Nella sezione 2.2 si descrivono in breve alcune tappe storiche che hanno portato alla nascita e allo sviluppo del concetto di interdisciplinarietà.

2.1 Introduzione al concetto di interdisciplinarietà

Un altro elemento che caratterizza il percorso didattico svolto nel liceo matematico Temistocle Calzecchi Onesti è l'interdisciplinarietà di questo percorso.

Quello che si vuole fare ora è provare a definire cosa si intenda per interdisciplinarietà, cercare di capire il ruolo dell'interdisciplinarietà nella didattica, e soffermarsi sull'interdisciplinarietà in particolare tra matematica e fisica, poiché è quella che più ha caratterizzato il percorso didattico che è stato svolto.

Analogamente al caso del laboratorio, non esiste una definizione universale di interdisciplinarietà, ma obiettivo della tesi non è quello di indagare a fondo sul concetto di interdisciplinarietà e sulla storia

del concetto col fine di arrivare a dare una definizione il più possibile completa e corretta. Quello che si vuole fare è fornire un quadro generale su cosa si intenda per interdisciplinarietà attraverso definizioni molto generali e attraverso una sintesi di idee che diversi autori hanno nei confronti del concetto di interdisciplinarietà, così che il lettore possa farsi un'idea generale sull'argomento. Una definizione di interdisciplinarietà è la seguente:

“Interazione coordinata di due o più discipline”,

mentre una definizione di interdisciplinarietà in riferimento alla didattica è questa:

“La metodologia dell'insegnamento che cerca di dare una visione globale anziché particolaristica di problemi o argomenti attinenti a varie discipline”.

Entrambe le definizioni sono state prese dal dizionario italiano di Google fornito da Oxford Languages.

Il vocabolario della Treccani dà invece una definizione più ampia e articolata:

“La rete dei rapporti di complementarità, di integrazione e di interazione per cui diverse discipline convergono in principi comuni sia nel metodo della ricerca sia nell'ambito della costruzione teorica; anche l'insieme delle somiglianze, delle analogie e dei parallelismi fra discipline scientifiche, programmi di ricerca, tecnologie, che tende ad avvicinare e unificare le parti isolate e i momenti frammentari dell'odierno sapere specialistico. Sul piano soggettivo, l'atteggiamento intellettuale e la ricerca concettuale orientati verso la promozione e la definizione di ciò che collega le scienze tradizionali e le più recenti specializzazioni in un sapere unitario, che d'altra parte accoglie e valorizza la molteplicità e varietà delle conoscenze acquisite nella storia delle culture e delle civiltà, e soprattutto nel progresso del sapere scientifico”.

In questa definizione ci si concentra molto sugli aspetti culturali, mentre non si parla di didattica. Inoltre si parla di interdisciplinarietà quando diverse discipline convergono in principi comuni, perciò interagiscono in maniera specifica.

Per questa tesi preferisco usare la definizione più generale fornita da Oxford Languages, poiché la definizione fornita dalla Treccani esclude delle situazioni che si sono venute a creare durante il percorso didattico in esame. In particolare, sebbene questa convergenza sia avvenuta in certi casi (il principio di minimizzazione dell'energia potenziale comune allo sguardo del fisico e del matematico), in altri si sono mostrati i diversi punti di vista del matematico e del fisico riguardo allo stesso oggetto

della conoscenza, col fine di dare una visione più ampia e completa dell'oggetto di studio, e col fine di ridurre il rischio che l'approccio scelto per studiare l'oggetto della conoscenza collassi nell'oggetto stesso, e si verifichi una concettualizzazione che mischia l'oggetto con la lente utilizzata per studiare l'oggetto stesso. Fornire invece approcci diversi per guardare allo stesso oggetto permette meglio di distinguere fra oggetto e strumenti di studio dell'oggetto, e permette una concettualizzazione più pulita. Ritengo che abbia senso definire questo approccio come interdisciplinare, e che possa risultare utile per comprendere in che senso una disciplina può essere definita come la lente che scegliamo di indossare quando ci troviamo a studiare un aspetto della realtà.

Questo è vero in particolare per il rapporto tra matematica e fisica.

In effetti, un pregiudizio comune è che la matematica sia un mero strumento nelle mani della fisica, e che la fisica sia solamente un contesto applicativo della matematica. Invece, storicamente le due discipline si sono influenzate vicendevolmente in maniera non strumentale, andandosi meglio a definire nel loro significato profondo (Tzanakis, 2016). Il formalismo matematico può modificare l'interpretazione fisica dei fenomeni e portare a rivoluzioni scientifiche (Brush, 2015).

Un esempio di analisi interdisciplinare fra matematica e fisica che mette in luce la mutua relazione fra le discipline è quella sviluppata da Branchetti, Cattabriga e Levrini nell'articolo "Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: the case of the blackbody" del 2019, in cui si analizza come la matematica fornisca strutture formali per ragionare sul fenomeno della radiazione del corpo nero (Branchetti et al., 2019).

2.2 Evoluzione storica del concetto di interdisciplinarietà

Quando si parla di interdisciplinarietà si parla di qualcosa di molto recente. Questo perché l'interdisciplinarietà è una risposta alla recente iperspecializzazione che ha allontanato fra loro discipline che prima non erano separate (iperspecializzazione necessaria in quanto le discipline hanno raggiunto un livello di avanzamento teorico tale per cui risulta difficile per un individuo approfondire diverse discipline).

Tuttavia, il forte legame tra matematica e fisica esiste almeno fin dai tempi di Galileo Galilei, che ne “Il Saggiatore” scrive:

“La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l’universo), ma non si può intendere se prima non s’impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne’ quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.” (Galilei, 2011)

Non si può comunque parlare di interdisciplinarietà, poiché non c’era un’idea di far interagire discipline diverse. C’era invece una disciplina, la filosofia della natura che faceva interagire quelle discipline che oggi riteniamo separate come la matematica, la filosofia e la fisica. L’idea di filosofia della natura come riflessione tout court sulla natura è scomparsa nel corso del Novecento, cioè in tempi molto recenti.

Si inizia a usare il termine “interdisciplinarietà” probabilmente negli anni ’20:

“Interdisciplinarity was probably born in New York City in the mid-1920s, most likely at the corner of 42nd and Madison. The word seems to have begun life in the corridors and meeting rooms of the Social Science Research Council as a kind of bureaucratic shorthand for what the Council saw as its chief function, the promotion of research that involved two or more of its seven constituent societies.”(Frank et al., 1988)

La nozione di interdisciplinarietà esisteva probabilmente prima della nascita del termine, come si può intuire da diversi libri pubblicati che già mettevano enfasi sulla natura “inter” di attività di ricerca del tempo:

“the “interrelation,” “mutual interdependence,” “interpenetration,” “intercommunication,” “cross-relationships,” “interfiliation,” and, of course, “interaction” of the various disciplines, along with the need to explore “twilight zones” and “border areas,” “to fill any unoccupied spaces,” and to encourage the “active cultivation of borderlands between the several disciplines.”
”(Frank et al., 1988)

Inoltre, secondo Roberta Frank, il termine ha subito un’evoluzione del suo significato:

“ “Interdisciplinary” started out with a reasonably bounded set of senses. Then, subjected to indecent abuse in the 50s and 60s, it acquired a precocious middle-ages spread. Now not only is the word everywhere but no one can pin down what people have in mind when they utter it”(Frank et al., 1988),

sottolineando ancora di più la difficoltà, di cui ho scritto sopra, nel riuscire a trovare una definizione che metta d'accordo tutti.

A proposito ne scrive anche Harvey Graff:

“Doing interdisciplinary work differs from “talking” interdisciplinarity. [...] There is no single organization, form, pattern of institutionalization, or set of rules that signifies interdisciplinarity. This history warns us of the dangers of exaggeration, excessive claims of novelty, and imitation, especially of a simplified model of scientific research. It emphasizes the centrality of humility, learning the basics, doing one’s homework, and recognizing and appreciating variety and variability.” (Graff, 2015)

Il concetto di interdisciplinarietà è quindi un concetto complesso, difficile da sintetizzare in una definizione, sia perché ogni definizione rischierebbe di escludere lavori di ricerca che riteniamo interdisciplinari, sia perché i concetti stessi di disciplina e interdisciplinare sono costrutti sociali, e in quanto tali mutano nel loro significato e nei confini del loro significato.

Molto simile è la storia della didattica interdisciplinare.

Il primo riferimento conosciuto alla “interdisciplinary education” apparve nel 1933 in un avviso dell’associazione Social Science Research Council (SSRC) in cui si scriveva che il training di ricerca sarebbe dovuto essere “of an interdisciplinary nature” (Wirth, 1937).

Da allora, la creazione di una didattica interdisciplinare è sempre stata una sfida per l’insegnamento. Questo anche perché, se è difficile riuscire a dare una definizione di interdisciplinarietà, risulta ancora più difficile definire cosa significhi avere skills interdisciplinari (da cui partire con programmi di insegnamento mirati a permettere agli allievi di acquisire queste skills, cosa per nulla banale e ancora più difficile).

Roberta Frank scrive ad esempio che per acquisire competenze interdisciplinari bisogna partire dall’acquisire un linguaggio interdisciplinare:

“if we are to have interdisciplinary achievement, we must have interdisciplinary language” (Frank et al., 1988),

mentre Rustum scrive:

“Interdisciplinary research (or activity) requires day-to-day interaction between persons from different disciplines [...] and the interchange in an interactive mode of samples, ideas and results.”
(Kockelmans, 1979),

argomentando l'importanza di un linguaggio interdisciplinare.

Capitolo 3

Storia del problema isoperimetrico e ruolo della dimostrazione nella didattica

In questo capitolo si riassume la storia del problema isoperimetrico, analizzandone i momenti principali, col fine di mostrare l'evoluzione dei tentativi nel produrre una dimostrazione completa e rigorosa al problema. Nella sezione 3.1 si introduce al problema e alla sua origine storica. Nella sezione 3.2 si mostra la risoluzione al problema isoperimetrico in 2 dimensioni affrontato da Zenodoro. Nella sezione 3.3 si mostra in sintesi il tentativo di risoluzione di Jacob Steiner al problema. Nella sezione 3.4 si mostra la risoluzione al problema di Ennio de Giorgi, evidenziando in particolare come questa debba molto alle intuizioni di Steiner. Infine, nella sezione 3.5 si mostrano le conclusioni dell'analisi storica riguardo l'approccio alle dimostrazioni matematiche e al ruolo dell'argomentazione nell'insegnamento della matematica.

3.1. Origine storica del problema isoperimetrico

Uno degli esperimenti fatti condurre alla classe riguarda il problema isoperimetrico: si fanno costruire dei telai di diversa forma e si osserva che la forma delle bolle di sapone generate dai telai sarà sempre sferica. Anche nel primo questionario presentato viene anticipato il problema isoperimetrico: si propone il famoso problema di Didone, la quale dovette definire il perimetro di Cartagine con la pelle

di un bue, e dovette quindi trovare la forma geometrica bidimensionale che, a parità di perimetro, racchiudesse più area possibile.

Proporre un problema del genere alla classe, la cui dimostrazione fa uso di una matematica estremamente avanzata che ha dovuto attendere il ventesimo secolo per poter vedere la luce (Cinti, 2019), oltre a servire al nostro scopo di introdurre ai problemi di minimo, permette anche di mostrare un aspetto della matematica che spesso si tende a ignorare. Infatti viene spesso insegnato che la matematica sia una disciplina estremamente rigida, e che l'unica forma di ragionamento accettata sia la logica deduttiva. La storia dimostra invece che la matematica progredisce soprattutto per intuizione, e che spesso le dimostrazioni rigorose sono figlie di rifiniture di risultati già noti. Affrontare quindi un problema simile senza dover ricorrere a una dimostrazione formale e rigorosa, permette di trasmettere indirettamente il messaggio che la matematica sia una disciplina anche creativa, e che non serva necessariamente saper riprodurre immediatamente una dimostrazione formale e rigorosa di un risultato intuito correttamente per poter dire di essere portati per la matematica (Malara, 2009).

Non si conoscono le origini del problema isoperimetrico, ma si sa che il problema fosse già noto ai tempi di Virgilio, il quale descrive la fondazione di Cartagine da parte di Didone (Marone, 2013), storia proposta nel primo questionario affrontato dalla classe. Nel primo Libro dell'Eneide si legge che il re Iarba concesse a Didone di stabilirsi in Libia, e di poter costruire una città tanto grande quanto ne poteva contenere la pelle di un bue. Allora Didone tagliò la pelle del bue in tante striscioline sottili e le unì in modo tale da formare una lunga corda con la quale poter circondare la porzione di terra più ampia possibile.

*“Giunsero in questi luoghi, ov'ora vedrai
sorgere la gran cittade e l'alta rocca
de la nuova Carthago, che dal fatto
Birsa nomassi, per l'astuta merce
che, per fondarla, fer di tanto sito
quanto cerciar di bue potesse un tergo”*

(Marone, 2013)

Il problema viene presentato come un problema di *massimizzazione* dell'area fissato un certo perimetro. Si può in maniera equivalente chiedersi, fissata una certa area, quale sia la figura geometrica che *minimizzi* il perimetro. Nel caso di Didone il problema vive in 2 dimensioni, ma il problema isoperimetrico si può generalizzare a una palla in n dimensioni. Nonostante fosse già noto ai tempi che la soluzione al problema isoperimetrico fosse il cerchio, ci sono voluti 2000 anni prima di avere una formulazione matematica completa della dimostrazione della soluzione.

Ora andremo a ripercorrere vari contributi che sono stati portati nel corso della Storia da parte di diversi studiosi su questo tema, in modo tale da apprezzare come la soluzione finale sia stata possibile a partire da congetture, indizi, intuizioni, dimostrazioni di casi particolari, che hanno avuto uno sviluppo tutt'altro che lineare come invece sembra essere la matematica insegnata nelle scuole (Ambrisi, 2017).

3.2. Zenodoro

Il primo tentativo di dimostrazione del problema isoperimetrico che conosciamo, è quello di Zenodoro, matematico e astronomo attivo probabilmente ad Atene nella prima metà del II secolo a.C., durante la prima fase del declino della civiltà ellenistica, motivo per il quale conosciamo il suo trattato sullo studio delle figure isoperimetriche attraverso diverse fonti indirette, tra cui in particolare l'opera *Mathematicae collectiones* di Pappo di Alessandria (Pappus et al., 1660), matematico greco fissato attorno al 300 d.C.. Difatti, a seguito della spedizione di Giulio Cesare in Egitto, la Biblioteca di Alessandria subì probabilmente un incendio che distrusse almeno parte del patrimonio librario.

Le fonti riguardo l'incendio si contraddicono, ma almeno 6 scrittori riportano dell'evento, fra cui:

-) Seneca afferma che furono bruciati 40000 libri: “Quadraginta milia librorum Alexandriae arserunt. Pulcherrimum regiae opulentiae monumentum alius laudauerit, sicut et Livius, qui elegantiae regum curaeque egregium id opus ait fuisse [...]” (Seneca et al., 1981);

-) Aulo Gellio parla di 700000 libri bruciati: “Ingens postea numerus librorum in Aegypto a Ptolemaeis regibus vel conquisitus vel confectus est ad milia septingenta voluminum: sed ea omnia, bello priore Alexandrino, dum diripitur ea civica, a militibus euxiliariis casu, non sponte neque opera consulta, incensa sunt” (Gelius et al., 1992);

-) Ammiano Marcellino scrive di 700000 libri bruciati;

-) Paolo Orosio conferma il dato di Seneca nell'*Adversus Paganus*: "In ipso proelio regia classis forte subducta iubetur incendi. Ea flamma cum partem quoque urbis inuasisset, quadringenta milia librorum proximis forte edibus condita exussit, singulare profecto monumentum studii curaeque maiorum, qui tot tantaque inlustrium ingeniorum opera congesserant" (Orosio et al., 1738).

Tornando a Zenodoro, il fatto che sia emerso il bisogno di trattare il problema isoperimetrico, potrebbe essere dovuto alla popolarità che aveva *La misura del cerchio* di Archimede, dove veniva dimostrata la relazione che fornisce la doppia area del cerchio attraverso il prodotto del perimetro per il raggio (Archimedes, 1854).

Le fonti che abbiamo sul trattato di Zenodoro sono:

-) la prima sezione del libro V delle già citate *Mathematicae collectiones* di Pappo di Alessandria, vissuto nel IV secolo d.C. (Pappus et al., 1660);

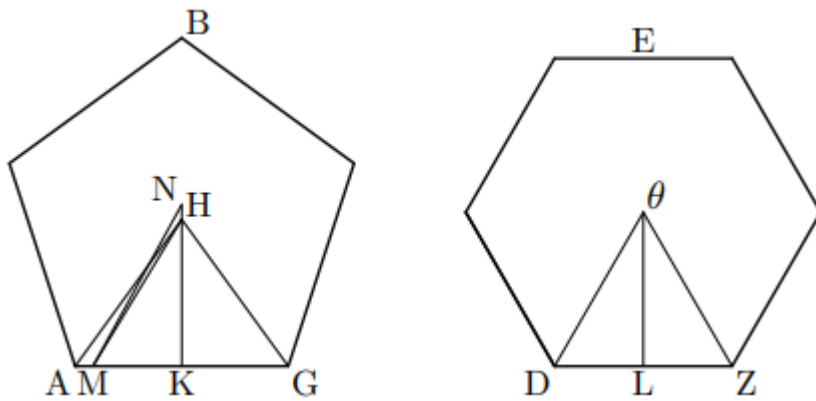
-) un trattato nel commentario al I libro dell'*Almagesto* di Tolomeo da parte di Teone di Alessandria, matematico vissuto nella seconda metà del IV secolo d.C. e padre di Ipazia, prima donna matematica storicamente conosciuta per il suo lavoro di divulgazione nella Biblioteca di Alessandria, e per la sua tragica fine dovuta a fanatici religiosi cristiani (Rome, 1931);

-) un trattato anonimo del V secolo d.C., contenente prolegomeni all'*Almagesto* (Hultsch, 1875).

Zenodoro dimostra l'affermazione che afferma: *fra i poligoni aventi ugual perimetro, quelli regolari hanno area massima e il cerchio ha area maggiore di ogni poligono di ugual perimetro* (Leonardi, 2015).

In seguito verranno riportate le proposizioni più importanti che compongono la dimostrazione del teorema:

Proposizione 1. *Se due poligoni regolari hanno egual perimetro, quello con più lati ha area maggiore.*



Dimostrazione. Siano ABG e DEZ due poligoni regolari isoperimetrici, rispettivamente di n e m lati, con $n < m$. Si ha che:

$$AHG^\circ = \frac{2\pi}{n} > \frac{2\pi}{m} = D\theta Z^\circ \text{ e } AG > DZ$$

dove H e θ sono i centri delle circonferenze inscritte rispettivamente nei poligoni ABG e DEG.

Inoltre, data l'eguaglianza fra i perimetri, si ha che:

$$\frac{AK}{MK} = \frac{AK}{DL} = \frac{AG}{DZ} = \frac{m}{n} = \frac{AHG^\circ}{D\theta Z^\circ}$$

Dove M è punto del segmento AK tale che $MK = DL$.

Inoltre, per il Lemma 1 seguente, si ha che:

$$\frac{AK}{MK} > \frac{AHK^\circ}{MHK^\circ}$$

da cui si ottiene

$$\frac{AHK^\circ}{MHK^\circ} < \frac{AHG^\circ}{D\theta Z^\circ} = \frac{AHK^\circ}{D\theta L^\circ}$$

e infine

$$MHK^\circ > D\theta L^\circ$$

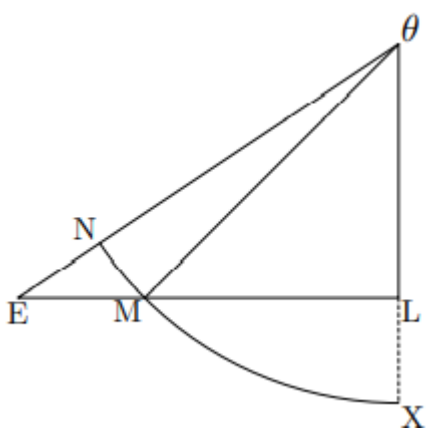
Sia N fissato sulla semiretta uscente da K verso H, così che NK sia congruente a $L\theta$. MHK e MNK sono triangoli rettangoli aventi un cateto in comune. Data la disuguaglianza sopra, si ha che

$$HK < NK = \theta L$$

Si deduce, quindi, che la doppia area del poligono ABG, essendo pari al prodotto del perimetro per l'apotema HK, è inferiore alla doppia area del poligono DEZ, di apotema θL , come volevasi dimostrare.

Lemma 1 (Lemma delle tangenti). *Sia $E\theta L$ un triangolo rettangolo in L , e sia M un punto interno al cateto EL . Si ha*

$$\frac{EL}{ML} > \frac{E\theta L^\circ}{M\theta L^\circ}$$



Dimostrazione. Siano dati una circonferenza di centro θ e di raggio θM , due semirette θE e θL , e siano N e X punti di intersezione delle due semirette con la circonferenza. Poichè $EL\theta$ e $ML\theta$ sono triangoli rettangoli aventi in comune il cateto θL , si ha che:

$$\frac{EL}{ML} = \frac{\text{area}(EL\theta)}{\text{area}(ML\theta)} > 1$$

Se aggiungo al numeratore e al denominatore di una frazione, il cui valore è maggiore di 1, la stessa quantità, il valore della frazione diminuisce.

$$\frac{\text{area}(EL\theta)}{\text{area}(ML\theta)} > \frac{\text{area}(EL\theta) + \text{area}(MXL)}{\text{area}(ML\theta) + \text{area}(MXL)} = \frac{\text{area}(EMX\theta)}{\text{area}(MX\theta)}$$

Sapendo che $\text{area}(EMX\theta) > \text{area}(NX\theta)$ e che $\frac{\text{area}(NX\theta)}{\text{area}(MX\theta)} = \frac{E\theta L^\circ}{M\theta L^\circ}$ (essendo $NX\theta$ e $MX\theta$ settori circolari), si ottiene:

$$\frac{EL}{ML} = \frac{\text{area}(EL\theta)}{\text{area}(ML\theta)} > \frac{\text{area}(EMX\theta)}{\text{area}(MX\theta)} > \frac{\text{area}(NX\theta)}{\text{area}(MX\theta)} = \frac{E\theta L^\circ}{M\theta L^\circ}$$

Si noti che lo stessa Lemma si può formulare e dimostrare in maniera molto più semplice utilizzando gli strumenti dell'analisi matematica (fra le altre cose, la matematica progredisce quando è in grado di semplificare, e mostrare la precedente dimostrazione, e successivamente quella seguente può dare un'idea di matematica come disciplina che evolve, contro il pregiudizio che vede la matematica come una disciplina statica, oltre che mostrare l'utilità della ricerca in matematica).

Lemma 1 (Lemma delle tangenti).

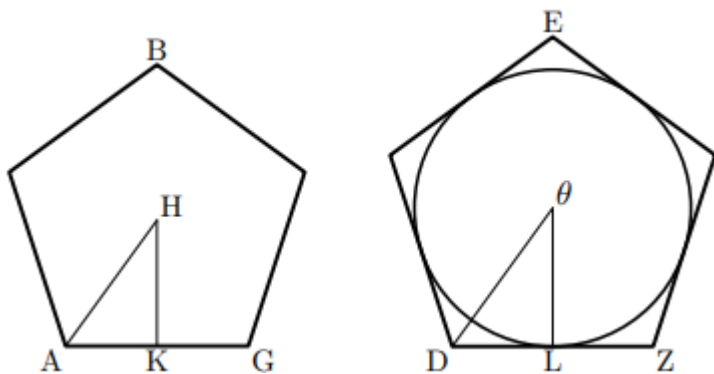
$$\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)} > \frac{\alpha}{\beta} \quad \forall \alpha, \beta : 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Dimostrazione. Per $0 < t < \frac{\pi}{2}$ vale

$$\frac{d}{dt} \frac{\tan(t)}{t} = \frac{1}{t \cos^2(t)} - \frac{\sin(t)}{t^2 \cos(t)} = \frac{2t - \sin(2t)}{2t^2 \cos^2(t)} > 0$$

ossia $\frac{\tan(t)}{t}$ è crescente sull'intervallo dato.

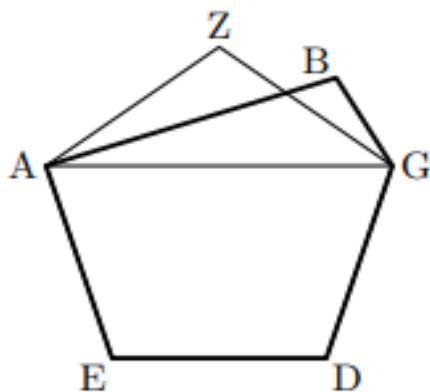
Proposizione 2. *Un cerchio ha area maggiore di qualunque poligono regolare ad esso isoperimetrico.*



Dimostrazione. Sia ABG un poligono regolare di n lati, e sia C un cerchio ad esso isoperimetrico. Sia p la misura del perimetro del cerchio. Costruiamo il poligono regolare DEZ di n lati e tale che il cerchio C sia inscritto a tale poligono. Il perimetro p è inferiore al perimetro del poligono DEZ, quindi l'apotema HK del poligono ABG isoperimetrico al cerchio C , sarà inferiore all'apotema θL del poligono DEZ. Ma θL è anche il raggio del cerchio C , perciò:

$$area(ABG) = \frac{1}{2}p \cdot HK < \frac{1}{2}p \cdot \theta L = area(C)$$

Proposizione 10. *Tra i poligoni di ugual perimetro e numero di lati, quelli regolari (equiangoli ed equilateri) hanno area massima.*



Dimostrazione. Dato un poligono non equilatero ABGD... tale che il triangolo formato dai vertici ABG non sia isoscele (cioè tale che $AB \neq BG$), sostituendo il vertice Z al vertice B, tale che AZG sia isoscele ed isoperimetrico ad ABG, ottengo un poligono equilatero AZGD... isoperimetrico a quello precedente ma di area maggiore, poiché, dati i triangoli isoperimetrici tra loro fissato un certo lato, il triangolo isoscele è quello con area maggiore. Per la dimostrazione si veda la Proposizione 5 in appendice.

Ora, dato un poligono equilatero non equiangolo, è possibile costruire un poligono equilatero ed equiangolo ad esso isoperimetrico, e che avrà area maggiore. Per la dimostrazione si veda la Proposizione 7 in appendice.

Bisogna tuttavia trattare i poligoni a 3 e 4 lati separatamente (cosa che Zenodoro non fa, probabilmente perché i risultati erano già noti), poiché è possibile applicare la Proposizione 7 solo nei poligoni equilateri con almeno 5 lati.

Per quanto riguarda i triangoli ce la si cava facilmente poiché tutti i triangoli equilateri sono anche equiangoli, quindi basta utilizzare la Proposizione 5 (il triangolo isoscele massimizza l'area fissato un lato, il triangolo equilatero è anche un triangolo isoscele, per cui basta applicare la Proposizione 5 due volte, la prima fissando un lato a piacere, la seconda fissando uno dei due lati uguali).

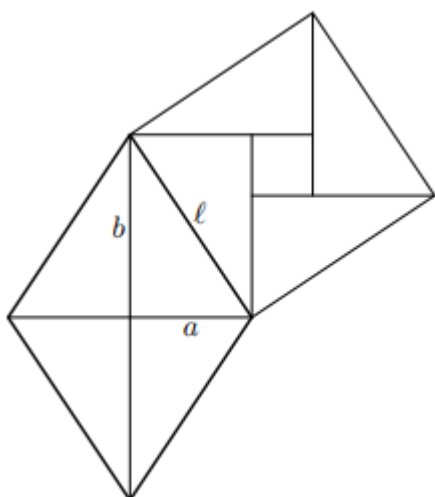
Per quanto riguarda i quadrilateri bisogna dimostrare che, a parità di perimetro, il quadrato è il rombo con area maggiore. Si prenda un quadrato costruito su un lato di lunghezza l di un rombo, e lo decomponga in 5 parti: 4 triangoli rettangoli congruenti, i cui cateti corrispondono alle semidiagonali del rombo di lunghezze a e b con $a < b$, più un quadrato centrale di lato $b-a$. Si ha che:

$$l^2 = a^2 + b^2 = 2ab + (b - a)^2$$

da cui segue che

$$2ab \leq l^2$$

perciò l'uguaglianza si ha solo se $a=b$, cioè se il rombo è un quadrato.



3.3. La simmetrizzazione di Steiner

Prima di passare a un nuovo contributo ci vollero circa 1500 anni, ossia ci volle il contributo di Steiner, matematico svizzero nato a Utzenstorf il 18 Marzo del 1796.

La sua idea riguardo il problema isoperimetrico sta nell'operare delle trasformazioni su un insieme in maniera tale da renderlo più simmetrico, con le seguenti proprietà: l'insieme risultante di ogni trasformazione ha stessa area dell'insieme di partenza ma un minor perimetro. Questo perché trovare la figura geometrica che minimizzi il perimetro a parità di area, è equivalente al trovare la figura geometrica che massimizzi l'area a parità di perimetro. Il procedimento di Steiner è, in sintesi, il seguente:

Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 e sia v un vettore di \mathbb{R}^2 ; denotiamo un punto x di \mathbb{R}^2 con le coordinate $x = (x_1, x_2)$. Voglio definire il *simmetrizzato di Steiner* di E rispetto a v . Consideriamo, ad esempio, $v = (0,1)$, in tal caso la retta ortogonale a v e passante per l'origine è la retta di equazione $x_2 = 0$. Per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$ poniamo:

$$E_{x_1} := \{x_2 \in \mathbb{R} : (x_1, x_2) \in E\}$$

Ovvero E_{x_1} è la sezione di E ottenuta fissando la prima coordinata x_1 , e chiamiamo $l(x_1)$ la sua lunghezza. Ora definiamo il simmetrizzato di Steiner E_v^* di E rispetto al vettore v , l'insieme ottenuto in questo modo: preso un qualsiasi x_1 , rimpiazziamo E_{x_1} con un segmento di ugual lunghezza $l(x_1)$ ortogonale alla retta di equazione $x_2 = 0$ e centrato su di essa, cioè:

$$E_v^* := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{l(x_1)}{2} \leq x_2 \leq \frac{l(x_1)}{2}\}$$

Nel caso n -dimensionale, la costruzione del simmetrizzato di Steiner è analoga. Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, sia v_{\perp} l'iperpiano passante per l'origine e perpendicolare a v , sia x' un generico punto di v_{\perp} . Il simmetrizzato di E rispetto a v si ottiene rimpiazzando per ogni $x' \in v_{\perp}$ la sezione 1-dimensionale $E_{x'}$ con un segmento di stessa lunghezza ortogonale all'iperpiano v_{\perp} e centrato su esso.

La cosa importante di questa simmetrizzazione è che valgono le seguenti proprietà:

- 1) $|E_v^*| = |E|$;
- 2) $P(E_v^*) \leq P(E)$;
- 3) se $P(E_v^*) = P(E)$, allora tutte le sezioni $E_{x'}$ sono segmenti, $\forall x' \in v_{\perp}$,

dove $|E|$ indica il volume di E mentre $P(E)$ ne indica il perimetro (per *volume* si intende e si intenderà la misura dell'insieme, per *perimetro* si intende e si intenderà la misura del bordo dell'insieme).

Si noti quindi che la simmetrizzazione di Steiner preserva il volume di un insieme e ne riduce il perimetro. Essendo la palla l'unico insieme simmetrico rispetto a tutte le possibili direzioni, se ne deduce la sua proprietà isoperimetrica.

Steiner elaborò altre dimostrazioni, ma tutte presupponevano l'esistenza di una soluzione, cosa non dimostrata (Cinti, 2019).

La prima dimostrazione rigorosa fu mostrata da Weirstrass, ma si poteva applicare a una classe di insiemi ridotta. Per risolvere il problema isoperimetrico nella classe di insiemi più generale possibile, ossia quella degli insiemi misurabili, si dovette aspettare la dimostrazione di Ennio de Giorgi che fu mostrata nel XX secolo (Cinti, 2019).

3.4. La soluzione di Ennio de Giorgi

Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^n misurabile. Diamo la seguente definizione di *perimetro*, in maniera tale che questa si riconduca alla definizione che conosciamo di *perimetro* nei casi più semplici:

$$P(E) := \sup \left\{ \int_E \operatorname{div}(\varphi(x)) dx : \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

con

$$\|\varphi\|_\infty = \sup |\varphi|$$

Dimostriamo che la definizione coincide con la misura del bordo di E se il bordo è liscio.

Sia $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$.

Si ha quindi che

$$\int_{\partial E} d\sigma(x) \geq \int_{\partial E} \varphi(x) v_E(x) d\sigma(x) = \int_E \operatorname{div}(\varphi(x)) dx$$

dove

v_E = versore normale uscente,

$d\sigma$ = elemento di superficie.

Se scegliamo $\varphi = v_E$ su ∂E , allora:

$$\int_{\partial E} d\sigma(x) = \int_E \operatorname{div}(\varphi(x)) dx$$

Quindi, per insiemi regolari, si ha che:

$$\int_{\partial E} d\sigma(x) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div}(\varphi(x)) dx, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

Ora che abbiamo una definizione di *perimetro* dobbiamo dimostrare che l'insieme che minimizza la misura a parità di perimetro è la palla.

Per farlo vanno seguiti 2 passaggi:

- 1) Va dimostrato che E_{min} è convesso.

Preso $v \in \mathbb{R}^n$, E_v^* è simmetrizzato di Steiner di E_{min} rispetto a v .

Si ha che:

$$|E_v^*| = |E_{min}| \quad P(E_v^*) = P(E_{min})$$

$E_{x'}$ sono segmenti per ogni $x' \in v_{\square}$ e il ragionamento è valido per ogni v , quindi E_{min} è convesso.

2) Va dimostrato che E_{min} è una palla.

Sia U proiezione di E_{min} su \mathbb{R}^{n-1} .

E_{min} è convesso, quindi $\exists g_1, g_2$ funzioni definite su U e a valori reali, tali che g_1 è convessa, g_2 è concava e

$$E_{min} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in U, g_1(x') < x_n < g_2(x')\}$$

quindi

$$E_v^* = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in U, -\frac{g_2(x') - g_1(x')}{2} < x_n < \frac{g_2(x') - g_1(x')}{2}\}$$

I rispettivi perimetri dei due insiemi sono:

$$P(E_{min}) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla g_1|^2} + \int_U \sqrt{1 + |\nabla g_2|^2}$$

$$P(E_v^*) = 2 \int_U \sqrt{1 + \frac{|\nabla(g_1 - g_2)|^2}{4}}$$

Dobbiamo imporre che $P(E_{min}) = P(E_v^*)$.

La funzione che a t associa $\sqrt{1 + t^2}$ è convessa, quindi $\nabla g_2 = -\nabla g_1$, ovvero $g_2 = -g_1 + c$, da cui $E_{min} = E_v^*$ a meno di traslazioni per ogni v scelto, quindi E_{min} è una palla.

Non si è voluto entrare troppo nei dettagli delle dimostrazioni, ma si è voluta mostrare la diversità di approcci.

Si noti come nella dimostrazione di De Giorgi ci si ponga da subito il problema dell'esistenza di una soluzione, dando una definizione di perimetro che soddisfi ogni condizione di esistenza. Non ha senso logico dimostrare una soluzione senza prima dimostrare che può esistere quella soluzione, eppure è

proprio quello che ha fatto Steiner, e che ha permesso di arrivare infine alla dimostrazione rigorosa di De Giorgi, che fa uso delle simmetrizzazioni di Steiner.

3.5. La dimensione sociale della dimostrazione matematica

L'evoluzione storica del problema isoperimetrico è anche un esempio dell'interesse che ha la matematica nel tentare di generalizzare il più possibile le soluzioni. Perciò non deve spaventare l'idea di introdurre nelle scuole di secondo grado argomenti che richiedono una matematica di livello avanzato per essere completamente risolti, è anzi educativo porre agli studenti problemi di questo tipo, per i quali è necessario fermarsi a casi particolari e dare per scontati elementi che non sono scontati e lavorare su quelli. Ha più valore educativo mettere gli studenti davanti a problemi di cui non si hanno gli strumenti per poterli risolvere in maniera rigorosa, ma di cui si hanno gli elementi per iniziare un processo di problem solving e ragionamento intuitivo, piuttosto che mettere gli studenti davanti a una dimostrazione completa e formale, che rappresenta la sintesi di un lungo lavoro di intuizioni e ragionamenti, ma che ne nasconde il processo (Malara, 2009).

L'obiettivo dello studio della matematica non dovrebbe soltanto essere quello di conoscere i risultati noti della matematica, ma anche imparare a ragionare come un matematico:

“Non si può dimostrare né definire tutto; e si dovrà sempre far ricorso all'intuizione. Che importanza ha invocarla un po' prima e un po' più tardi, oppure ricorrervi in misura un po' maggiore o un po' minore, a condizione che servendoci correttamente delle premesse che essa ci fornisce, impariamo a ragionare come si deve?” (Poincaré, 2012),

e per raggiungere ciò è importante il ruolo dell'argomentazione e dell'intreccio che spesso ha la matematica con i risultati empirici (Boero, 1999).

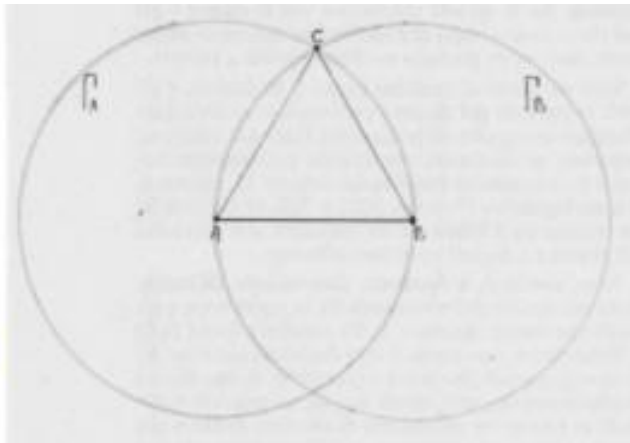
Va inoltre ricordato il ruolo sociale della dimostrazione. Una dimostrazione è accettata o meno in relazione al contesto sociale in cui si trova (Stylianides, 2007), perciò il rigore del ragionamento matematico e delle dimostrazioni ritorna in gioco nel momento in cui si definiscono delle regole del gioco semplificate e adatte al contesto classe, che possono essere diverse dai criteri di rigore accettati

dalla comunità scientifica, con lo scopo non di trasmettere un relativismo del rigore, ma di creare un contesto che permetta agli studenti di imparare ad approcciare i problemi in maniera rigorosa, in un contesto in cui a questi studenti sia possibile farlo, il che necessita spesso di semplificazioni. D'altronde, il ruolo sociale della dimostrazione non è solamente una finzione funzionale alla pratica didattica, ma è mostrata dalla storia della matematica, che mostra il fatto che la stessa dimostrazione venga considerata rigorosa e non rigorosa in contesti storici diversi (Hilbert, 2013).

Si veda ad esempio la seguente dimostrazione di Euclide:

Proposizione (I.1). *Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.*

Dimostrazione. Consideriamo una qualsiasi retta AB nel piano.

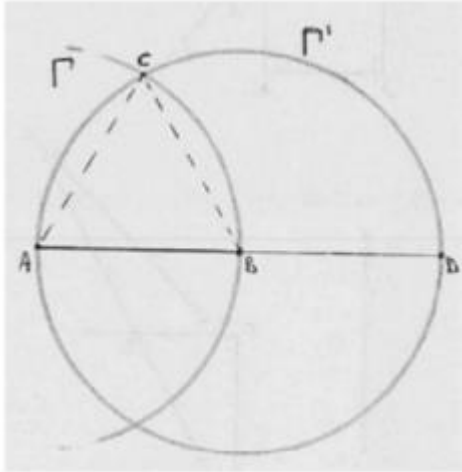


Descriviamo una circonferenza Γ_A con centro nel punto A e di raggio la retta AB. Tale costruzione è legittimata dal III postulato. Analogamente descriviamo la circonferenza Γ_B con centro in B e raggio AB. Sia C il punto di intersezione tra queste due circonferenze.

Congiungiamo C con A (costruzione resa lecita dal I postulato) e poi con B. Poiché A è il centro della circonferenza Γ_A , e C e B appartengono alla circonferenza stessa, allora AC ed AB sono uguali. Discorso analogo per BC e AB. Poiché, per la nozione comune (1), cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro, allora è valida l'uguaglianza tra AB, BC e AC. Il triangolo è dunque equilatero.

Si veda ora come Hilbert scrive la stessa dimostrazione:

Proposizione 2.49 (Proposizione I.1). *In un piano di Hilbert ove valga (E), è possibile costruire su un segmento dato AB un triangolo equilatero.*



Dimostrazione. Considerato il segmento AB , sia Γ la circonferenza di centro A e raggio AB ; mentre sia Γ' la circonferenza di centro B e raggio AB .

Il punto A appartiene alla circonferenza Γ' ed è interno a Γ (ne è il centro). Consideriamo sulla retta AB il punto, giacente dalla parte opposta rispetto di A rispetto a B e appartenente a Γ' ; sia esso D . Poiché $A * B * D$, allora $AB < BD$, e dunque D è esterno a Γ . Per l'assioma (E) possiamo affermare che le due circonferenze si intersecano: sia C uno dei punti di intersezione. (Ovviamente C non può essere allineato con A e B , altrimenti le circonferenze sarebbero tangenti). Poiché $C \in \Gamma$ allora $AC \equiv AB$; mentre visto che $C \in \Gamma'$ allora $BC \equiv AB$. Il triangolo ABC è dunque equilatero.

(E) Date due circonferenze Γ e Γ' , supponiamo che Γ' abbia almeno un punto interno a Γ , ed almeno un punto esterno a Γ ; allora le due circonferenze si intersecano.

Ad oggi la dimostrazione di Hilbert è accettata, mentre quella di Euclide non lo è (anche se lo era prima della rivoluzione di Hilbert) poiché in quest'ultima viene dato per scontato che le due circonferenze si intersechino.

Capitolo 4

Bolle di sapone e lamine saponate come problemi di minimo

In un liquido ogni molecola è attratta dalle molecole che la circondano. Ciò vuol dire che, per una molecola situata all'interno del liquido, la somma delle forze di attrazione risulta uguale a zero. Invece, per una molecola situata sulla superficie, questa viene attratta dalle molecole che stanno all'interno del liquido e dalle altre molecole situate sulla superficie accanto ad essa. Ciò vuol dire che la forza risultante è diretta verso l'interno del liquido. La forza di coesione tra le molecole in superficie fornisce invece una forza tangenziale alla superficie, da cui ha origine la tensione superficiale.

Data una superficie S , definisco la tensione superficiale come il lavoro necessario per aumentare la superficie di un certo intervallo dS .

$$F \cdot dl = \sigma \cdot dS \rightarrow \sigma = \frac{F \cdot dl}{dS}$$

dove σ rappresenta la tensione superficiale e dipende dalla temperatura e dalla composizione del liquido.

Le molecole tensioattive del sapone hanno una testa idrofila e una coda idrofoba. Nell'acqua tendono a raccogliersi in superficie con le code idrofobe rivolte verso l'esterno e le teste idrofile verso l'interno. La forza di coesione di queste molecole è minore rispetto alla forza di coesione tra le molecole d'acqua, e questo permette di indebolire la tensione superficiale (le molecole risultano meno sollecitate, e questo permette una maggiore resistenza delle bolle di sapone). Le forze di coesione tra

le molecole d'acqua sono talmente elevate da non permettere la formazione di lamine di liquido. Una bolla è formata da una sottile pellicola di acqua saponata intrappolata tra due strati di detergente.

L'energia interna totale di un liquido in equilibrio (trascurando la forza di gravità) risulta:

$$U = \int_0^S \sigma \cdot dS = \sigma S$$

Da ciò si può dedurre che la configurazione che minimizza l'energia potenziale è quella che minimizza la superficie della bolla di sapone.

4.1. Il problema isoperimetrico

Si tratta ora di trovare la figura geometrica che minimizza la superficie a parità di volume.

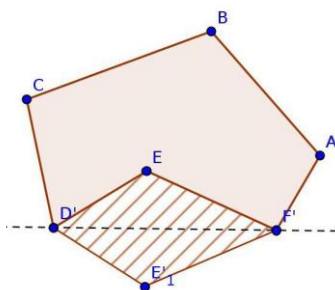
Il problema si può affrontare facilmente in 2 dimensioni.

Cerchiamo di trovare quale poligono massimizzi l'area a parità di perimetro (che è equivalente a chiedersi quale poligono minimizzi il perimetro a parità di area).

Il poligono in questione deve essere:

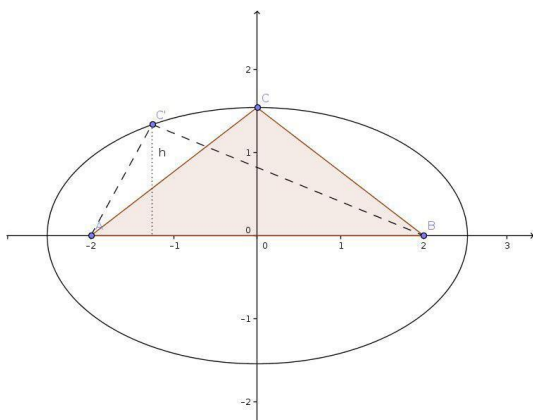
1) Convesso

Se il poligono è concavo è possibile trasformarlo in un poligono convesso che ha stesso perimetro ma maggiore area.



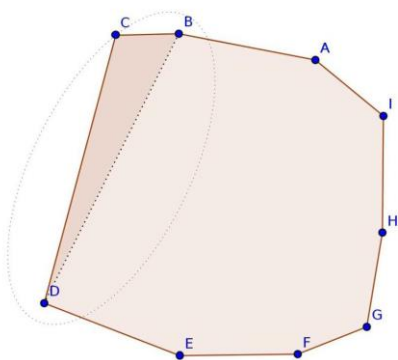
2) Equilatero

Lemma. Tra tutti i triangoli con base e perimetro fissati, quello di area massima è il triangolo isoscele.



Fissati due vertici A e B, ogni triangolo il cui terzo vertice C appartenga all'ellisse i cui fuochi sono A e B, avrà lo stesso perimetro (l'ellisse è per definizione il luogo dei punti geometrici del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi).

Si può facilmente dedurre che il triangolo con area massima sia quello isoscele.



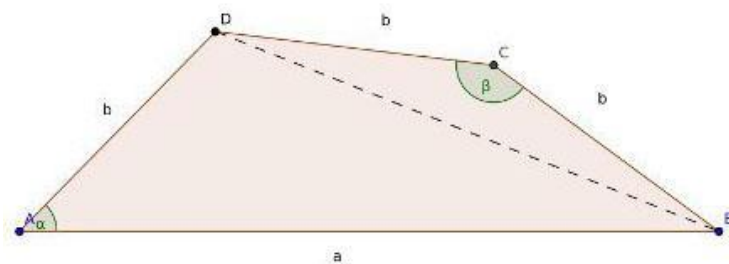
Teorema. Fra tutti i poligoni, con perimetro fissato, quello di area massima ha tutti i suoi lati congruenti.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un poligono di area massima che non ha tutti i lati congruenti.

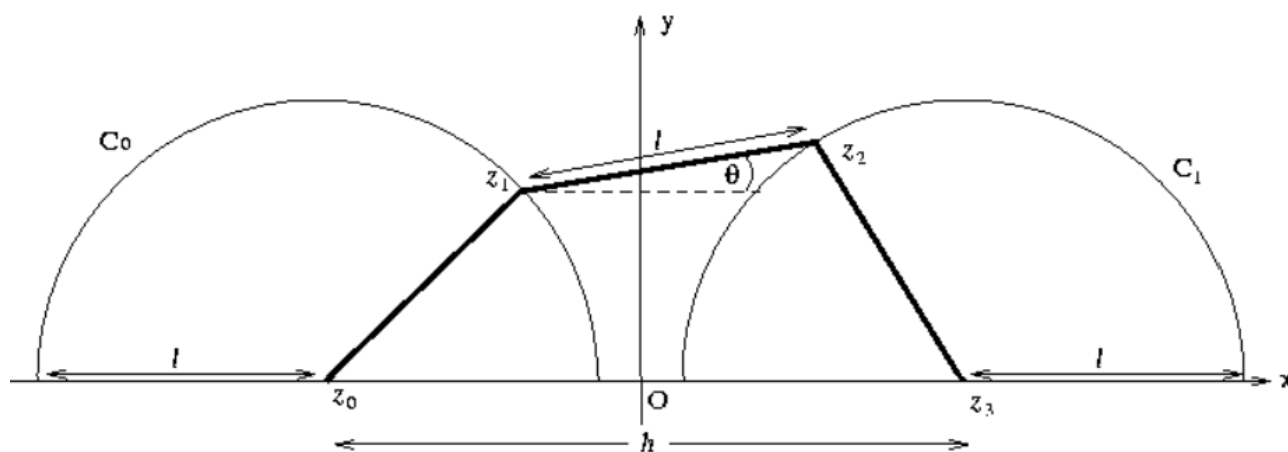
Consideriamo i lati DC e CB di diversa lunghezza. Possiamo immaginare che il vertice C si muova su di un'ellisse avente i fuochi nei punti D e B. Sfruttando il Lemma precedente si ottiene un poligono di area maggiore che è in contraddizione con l'ipotesi.

3) Equiangolo

Lemma. Tra tutti i quadrilateri ABCD aventi $AB = a$ e $BC = CD = DA = b$ con $a < 3b$, quello di area massima è il trapezio isoscele.



La dimostrazione è molto laboriosa, ma l'idea è quella di montare il quadrilatero su di un meccanismo di Watt, come in figura.



I vertici z_0 e z_3 sono fissati, mentre z_1 e z_2 sono liberi di muoversi lungo le guide circolari C_0 e C_1 a patto che z_1z_2 abbia lunghezza l pari al raggio delle guide circolari.

Si può esprimere l'area del quadrilatero in funzione unicamente dell'angolo θ :

$$A_{\text{quadrilatero}}(\theta) = \frac{1}{4} |h^2 - l^2| \sqrt{\frac{4l^2}{h^2 + l^2 - 2hl \cdot \cos(\theta)} - 1}$$

Poiché $\cos(\theta) \leq 1$, si ha che:

$$\frac{4l^2}{h^2 + l^2 - 2hl \cdot \cos(\theta)} \leq \frac{4l^2}{(h - l)^2}$$

e quindi

$$A \leq \frac{h + l}{4} \sqrt{4l^2 - (h - l)^2}$$

e si ha l'uguaglianza solo se $\theta = 0$, ovvero nel caso in cui il quadrilatero sia un trapezio isoscele.

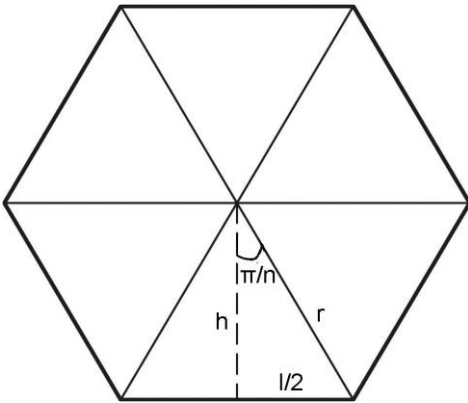
Teorema. Fra tutti i poligoni equilateri, con perimetro fissato, quello di area massima ha tutti gli angoli congruenti.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un poligono di area massima che non abbia tutti gli angoli congruenti.

Consideriamo il quadrilatero ABCD con angoli differenti e tracciamo le circonferenze centrate nei vertici A e D con raggio pari al lato del poligono. Possiamo immaginare che i vertici C e B si muovano su queste circonferenze fino a che il lato BC formi con i lati obliqui due angoli congruenti. In questo modo si ottiene un trapezio isoscele che per il Lemma precedente ha area maggiore del quadrilatero ABCD in contraddizione con l'ipotesi iniziale.

I poligoni convessi, equilateri ed equiangoli vengono chiamati poligoni regolari.

Un poligono regolare può essere suddiviso in un numero di triangoli isosceli equivalenti fra loro pari al numero di lati del poligono.



L'area del poligono si può quindi trovare moltiplicando l'area di uno di questi triangoli isosceli per il numero di lati n del poligono.

$$A_{poligono} = n \cdot A_{triangolo}$$

$$A_{triangolo} = \frac{l \cdot h}{2}$$

con l lunghezza del lato, e h lunghezza dell'apotema.

Si noti che è possibile esprimere h in funzione del numero di lati n in questo modo:

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{l}{2 \cdot h} \Rightarrow h = \frac{l}{2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

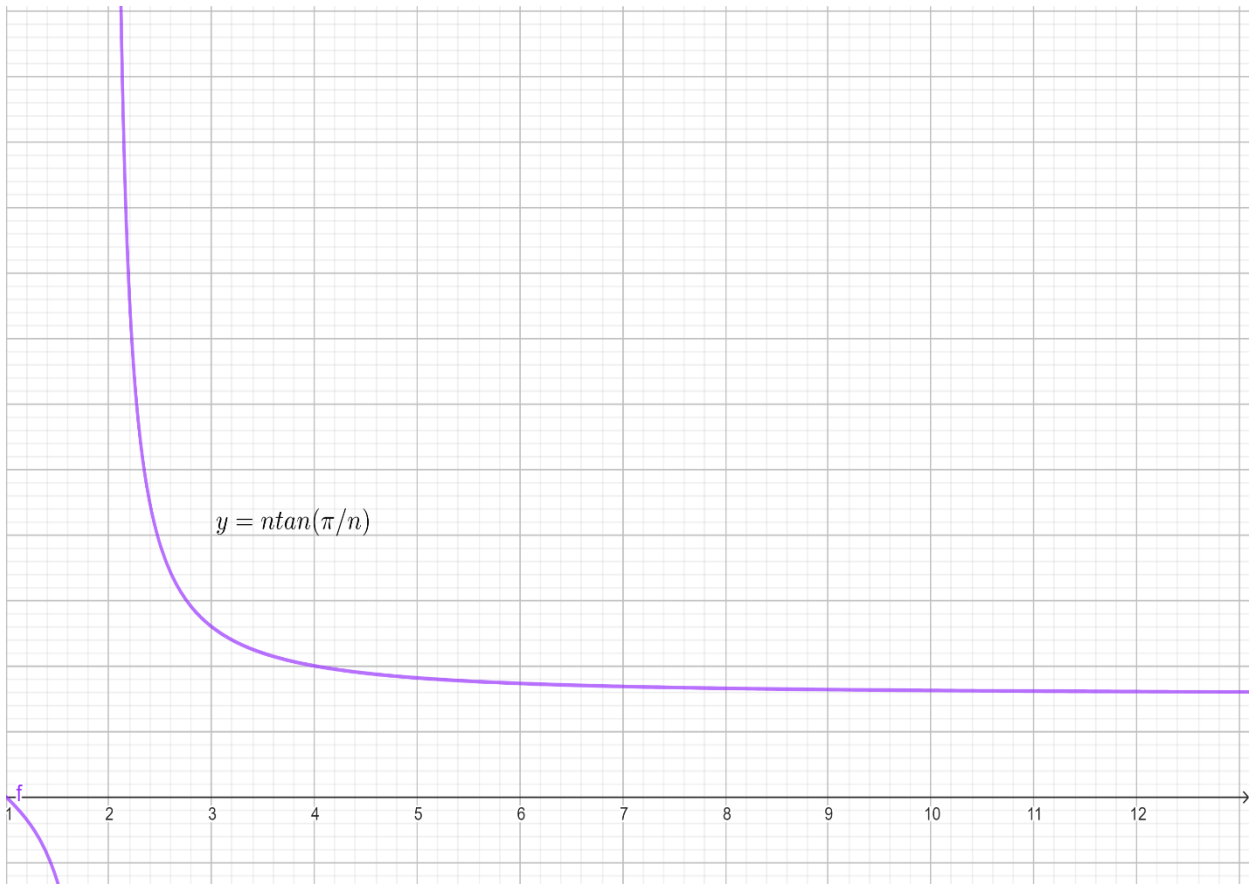
da cui ottengo:

$$A_{triangolo} = \frac{l^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Sapendo che il perimetro del poligono $P = n \cdot l$, ottengo infine:

$$A_{poligono} = n \cdot \frac{l^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{P^2}{4 \cdot n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

La funzione $y = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ è decrescente per $n \geq 3$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \pi$.



Infatti $n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ può essere scritta anche come $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$, la quale tende alla forma $\frac{0}{0}$ con $n \rightarrow \infty$.

Posso usare il teorema di de l'Hopital, e trovare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$, dove $f(n) = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$, e $g(n) = \frac{1}{n}$.

$$f'(n) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \left(-\frac{\pi}{n^2}\right)$$

$$g'(n) = -\frac{1}{n^2}$$

Quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \left(-\frac{\pi}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \pi$$

Si ha quindi che:

$$A_{max} = \frac{p^2}{4 \cdot \pi}$$

Ma questo ci dice che la figura che massimizza l'area a parità di perimetro è il cerchio.

Infatti, se prendiamo un generico poligono di perimetro $P = 2\pi$, l'area massima possibile sarà data dalla formula sopra:

$$A_{max}(P = 2\pi) = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi$$

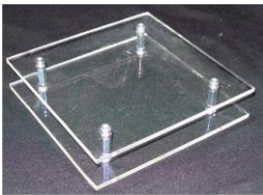
Ma $P = 2\pi$ è anche la misura di una circonferenza di un cerchio di raggio unitario ($C = 2\pi r = 2\pi$), la cui area è proprio $A_{cerchio} = \pi r^2 = \pi$

La circonferenza è quindi la soluzione al problema isoperimetrico.

Per analogia possiamo dire che la sfera sia la figura geometrica che minimizza la superficie a parità di volume.

4.2. Il problema di Steiner

Se immergiamo in acqua saponata un telaio come quello in figura, cosa succede?



Dovendo l'acqua saponata rispettare un principio di minimo, succederà che le lamine saponate formeranno dei segmenti che collegheranno le viti e le cui forme saranno tali da minimizzare la lunghezza di quei segmenti. Perciò il problema si riconduce a chiedersi: qual è il percorso avente lunghezza totale minima fra quelli che congiungono un certo numero di punti assegnati sul piano?

Sperimentalmente si verifica che viene rispettata la seconda legge di Plateau: le lamine si incontrano a gruppi di 3 formando a due a due angoli di 120° .

Si può dimostrare facilmente questo fatto cercando il percorso minimo che colleghi tre punti del piano:

Lemma 1. Per tutti i vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, si ha che:

se $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$ hanno tutti tra di loro un angolo di 120° , allora $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \mathbf{0}$

Dimostrazione. Definiti i versori \mathbf{e}_i ($i = 0,1,2$) in questo modo:

$$\mathbf{e}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$$

sia θ_{ij} l'angolo tra i due vettori unitari $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$.

Si ha quindi che i valori del prodotto interno quando $i \neq j$ saranno:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos\theta_{ij} = -\frac{1}{2}$$

mentre quando $i = j$ si ha:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos\theta_{ij} = 1$$

Si può quindi calcolare che:

$$|\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2|^2 = \sum_{i=j} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + 2 \sum_{i \neq j} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 3 \cdot 1 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Si ottiene pertanto che:

$$\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$$

Lemma 2. Per tutti i vettori $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}$, si ha che:

$$|\mathbf{a} - \mathbf{x}| \geq |\mathbf{a}| - \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{x}$$

Dimostrazione. Dati due generici vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} si ha che $|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \geq \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Se imposto che $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{x}$, ottengo la disuguaglianza di sopra.

Teorema. Dati tre punti sul piano euclideo A,B,C, si ha che $AB+BC+CA$ è minimo quando l'angolo fra AB e BC è uguale all'angolo fra BC e CA che è uguale all'angolo tra CA e AB che è uguale a 120°

Dimostrazione. Dato un triangolo ABC, sia F punto tale che gli angoli fra FA, FB, FC siano tutti di 120° . Sia X punto generico del piano euclideo.

Definiamo i vettori $\mathbf{a} = \mathbf{FA}, \mathbf{b} = \mathbf{FB}, \mathbf{c} = \mathbf{FC}, \mathbf{x} = \mathbf{FX}$.

Dal lemma 2 si può ottenere che:

$$|XA| \geq |FA| - \frac{a}{|a|} \cdot x$$

$$|XB| \geq |FB| - \frac{b}{|b|} \cdot x$$

$$|XC| \geq |FC| - \frac{c}{|c|} \cdot x$$

Da queste tre disuguaglianze e dal Lemma 1 si ricava che:

$$|XA| + |XB| + |XC| \geq |FA| + |FB| + |FC|$$

e quindi la somma è minima se $X = F$.

4.3. Il problema di Plateau

Il problema di Steiner è generalizzabile nel famoso problema di Plateau. Esso prende il nome dal fisico belga Joseph Antoine Ferdinand Plateau, nato a Bruxelles il 14 Ottobre del 1801 e morto a Gand il 15 Settembre del 1883.

Egli cercò di risolvere sperimentalmente il problema formulato da Lagrange nel 1760, ovvero quello di trovare la superficie (o il sistema di superfici) di area minima delimitata nello spazio da un contorno chiuso assegnato, e lo fece tramite esperimenti usando le bolle di sapone (Plateau, 1873). Formulò i risultati di quegli esperimenti nel libro pubblicato nel 1873 “Statiquè expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires”.

Tuttavia prima ancora di Plateau e Lagrange, il primo ad affrontare questo tipo di problema di minimo fu Eulero nel 1744.

Nel “Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes” (Euler, 1744) egli si pose il problema specifico di trovare la superficie di area minima che ha come bordo due circonferenze nello spazio poste su piani paralleli e tali che il segmento congiungente i centri delle circonferenze sia perpendicolare ai piani su cui giacciono le circonferenze. Eulero dimostrò che tale superficie è la catenoide, ottenuta ruotando la catenaria.

Nel 1776 Meusnier si accorse che le superfici minime sono quelle superfici che hanno curvatura nulla in ogni loro punto. Inoltre scoprì che l'elicoide è una superficie minima (Dierkes et al., 1992).

Tornando a Plateau, i risultati dei suoi esperimenti furono le seguenti tre leggi sperimentali dette leggi di Plateau:

- 1) un sistema di bolle o un sistema di lamine attaccate a un supporto in fil di ferro è costituito da superfici piane o curve che si intersecano tra loro secondo linee con curvatura molto regolare;
- 2) le lamine si incontrano a gruppi di 3 lungo una curva formando a due a due angoli di 120° . Le curve di intersezione delle lamine sono dette “spigoli liquidi”;
- 3) gli spigoli liquidi si incontrano a gruppi di 4 formando a due a due un angolo di $109^\circ 28' 16''$.

Il primo a dare una soluzione al problema di Plateau matematicamente fu Jesse Douglas nel 1931 (Douglas, 1931).

Capitolo 5

Questionario introduttivo e scheda di laboratorio

In questo capitolo vengono presentati i due questionari presentati alla classe. Nella sezione 5.1 viene introdotto il primo questionario, che ha la funzione di introdurre ai problemi di minimo e a capire le conoscenze acquisite dalla classe. Nella sezione 5.2 vengono analizzate le risposte date dagli studenti al primo questionario. Nella sezione 5.3 viene presentato il secondo questionario, il quale ha la funzione principale di guidare gli studenti all'esperienza laboratoriale. Nella sezione 5.4 vengono analizzate le risposte date dagli studenti al secondo questionario.

5.1. Questionario 1

Il primo questionario proposto è un questionario di ingresso, che ha il fine di introdurre l'argomento del laboratorio e di capire qual è la situazione per quanto riguarda le conoscenze possedute dagli studenti in quegli argomenti necessari ad affrontare il percorso didattico.

Si è scelto di lasciare la libertà agli studenti di scrivere il proprio nome o di lasciare il questionario anonimo, così che si sentissero liberi il più possibile nel rispondere alle domande. Un solo studente ha scelto di scrivere il proprio nome.

Le prime 3 domande poste sono 3 diversi problemi di minimo scelti dall'insegnante della classe.

- 1) *Giornate di fuoco nell'assessorato all'Urbanistica del comune di Paperopoli. Nella piana di Borgo Papero si progetta la costruzione di tre villaggi, Alfa, Beta e Gamma, disposti ai vertici di un triangolo equilatero. Ad Alfa avrà sede lo stadio, Beta ospiterà l'unico centro commerciale della zona e a Gamma verrà costruito il cinema locale. Per fare in modo che tutti gli abitanti della piana possano usufruire dei servizi, sarà necessario collegare i tre villaggi con un sistema di strade che, al fine di minimizzare i costi, dovrà essere progettato per avere la minor lunghezza possibile. Come dovranno essere collegati i villaggi tra loro? Traccia uno schizzo preciso e scrivi le motivazioni delle tue decisioni nelle righe qui sotto.*

Il problema è un problema di geometria, in cui ci si chiede come sia possibile unire 3 vertici equidistanti fra loro minimizzando la lunghezza dei segmenti (o più genericamente la lunghezza delle curve) passanti per quei vertici.

Si è scelto di presentare il problema attraverso le metafore delle strade e della città, ovvero un problema di realtà, per 2 motivi: la prima ragione consiste nel voler avvicinare il mondo astratto della matematica al mondo reale, per non creare una separazione fra il mondo reale e il mondo scolastico; la seconda ragione consiste nel mostrare come la matematica sia uno strumento di modellizzazione del reale, il cui fine è semplificare i problemi per poterli affrontare con più facilità (spesso gli studenti si lamentano del fatto che la matematica sia una disciplina troppo difficile, ma mostrare la matematica come uno strumento di semplificazione della realtà può rendere gli studenti consapevoli del fatto che ad essere difficile sia il mondo reale, con conseguenze positive sulla cittadinanza e la diminuzione di banalizzazioni e ipersemplicizzazioni delle questioni politiche, sociali, ma anche personali).

- 2) *La leggenda narra che la regina di Didone, arrivata in Africa, chiese al potente Larba, re dei Gentili, un tratto di terra per potervi costruire una città. Il re non volendogliela concedere, le disse in segno di scherno: <<Ti darò tanta terra quanta ne potrai circondare con la pelle di un bue>>. L'astuta Didone tagliò la pelle in strisce sottilissime e si vide assegnata tutta la terra, affacciata sul mare, che poté circondare con le striscioline attaccate una all'altra. Così costruì Cartagine. Didone fu astuta perché sapeva che, a parità di perimetro (la lunghezza della pelle del bue), alcune figure geometriche hanno un'area maggiore rispetto ad altre.*

Quale pensi sia la figura geometrica con la maggiore area a parità di perimetro? Come motiveresti la tua risposta?

In questa domanda viene affrontato il problema conosciuto come problema isoperimetrico, dando un contesto storico/mitologico.

- 3) *Sulla spiaggia di Porto San Giorgio un incauto nuotatore N che si trova ad $a=100$ metri dalla riva rischia di affogare e grida aiuto. Il bagnino B , nel momento in cui si accorge del pericolo, si trova sulla spiaggia a $b=30$ metri dalla riva. In linea d'aria il bagnino e il bagnante distano inizialmente D metri, ma la linea immaginaria che li unisce non è perpendicolare alla riva. Il bagnino può correre sulla spiaggia con una velocità media di 7 m/s, mentre in acqua può nuotare con una velocità media inferiore pari a 1 m/s. Quale percorso deve compiere il bagnino affinché, a partire dalla sua posizione iniziale, arrivi nel più breve tempo possibile in soccorso al bagnante, evitando così che questi affoghi? Traccia prima uno schizzo del percorso che ritieni migliore e poi, se credi, prova anche ad impostare qualche calcolo.*

Quest'ultimo problema, noto anche come “problema del bagnino”, oltre ad essere un problema di realtà, costituisce anche un esempio di problema interdisciplinare poiché affrontabile sia da un punto di vista fisico che da un punto di vista geometrico, in maniera tale da trasmettere il fatto che le discipline non vivano realtà parallele, ma che siano piuttosto delle diverse lenti che ci si mette quando si vuole studiare la realtà.

Un altro fine di questo problema è quello di mostrare la funzione sintetica della matematica, ossia quella di riuscire ad affrontare problemi apparentemente diversi attraverso gli stessi metodi risolutivi. Il problema del bagnino è infatti analogo a un problema di ottica, dove la luce prende il posto del bagnino, mentre la spiaggia e il mare sono analoghi a due materiali con diverso indice di rifrazione.

Le altre 3 domande, che ho scelto io, servono per capire le conoscenze pregresse degli studenti, col fine di impostare le lezioni e colmare le carenze su quegli argomenti necessari da aver compreso per poter affrontare il percorso didattico.

Nonostante non ci fossero altri fini a queste domande del questionario, sono emerse delle risposte che mettono in luce diversi pregiudizi ed errori comuni che vale la pena affrontare.

- 4) *Dai le definizioni dei seguenti termini: tensione superficiale, forze di coesione, forze di adesione, lavoro, energia potenziale.*

In un percorso che ha il fine di introdurre ai problemi di minimo per interpretare il comportamento della natura (secondo l'idea che la natura tenda spontaneamente a comportarsi col fine di fare meno "fatica" possibile, ossia il principio di minima azione di Lagrange) è fondamentale avere chiaro cosa si intenda per *energia potenziale* (e di conseguenza anche cosa si intenda per *lavoro*, dal momento che, nei libri di testo di fisica per le scuole superiori, l'*energia potenziale* viene definita a partire dalla definizione di *lavoro*).

Inoltre è importante sapere conoscere la definizione di *tensione superficiale*, per poter capire come il principio di minima azione entri in gioco nel caso specifico delle bolle di sapone.

Non sono invece rilevanti le definizioni di *forze di coesione* e di *forze di adesione*, ma si è voluto lo stesso chiederle nel questionario per capire meglio le conoscenze degli studenti sulla meccanica dei fluidi, e in particolare come questa sia legata alle dinamiche elettriche molecolari.

- 5) *Scrivi le differenze qualitative fondamentali fra solidi, liquidi e gas.*

Si è ritenuto di dover chiarire questo punto, in modo tale da poter giustificare la scelta di trasformare i problemi affrontati in laboratorio con l'acqua saponata in problemi di geometria.

Lo stato della materia fissa i vincoli entro i quali la natura può muoversi.

- 6) *Dati una carica positiva (ad esempio un protone) e una carica negativa (ad esempio un elettrone) descrivi qualitativamente come questi interagiscono (si attraggono, si respingono, si ignorano...).*

Si è scelto di legare i fenomeni della tensione superficiale a quelli più fondamentali delle interazioni elettriche (a livello qualitativo).

Questo per creare un ponte fra le diverse branche della fisica, che altrimenti vengono spesso compartimentalizzate dagli studenti poiché in apparente contraddizione fra loro (Besson, meccanica e termodinamica), mentre quel che si vuol fare è costruire un'immagine mentale coerente della realtà.

Inoltre sono le cariche a muoversi secondo un principio di minimizzazione dell'energia potenziale, perciò si è ritenuto più soddisfacente far capire, almeno a grandi linee, cosa succede a livello fondamentale, e che ciò che viene osservato è un fenomeno emergente di fenomeni più fondamentali. In questo modo si è voluto implicitamente far passare l'idea per cui le definizioni delle grandezze fisiche siano contestuali a certe modellizzazioni funzionali a semplificare lo studio di determinati sistemi (ovvero, la tensione superficiale non è una grandezza fondamentale, ma una grandezza definita all'interno di una modellizzazione su scala macroscopica di un sistema fisico, tuttavia non è nemmeno una grandezza priva di significato, poiché emersa da fenomeni a livello più fondamentale).

5.2. Analisi delle risposte al Questionario 1

Nel seguito si vogliono riassumere le risposte al primo questionario, sottolineando in particolare gli errori comuni frequenti o i modi diversi di approcciarsi ai problemi.

Ricordiamo la prima domanda:

Giornate di fuoco nell'assessorato all'Urbanistica del comune di Paperopoli. Nella piana di Borgo Papero si progetta la costruzione di tre villaggi, Alfa, Beta e Gamma, disposti ai vertici di un triangolo equilatero. Ad Alfa avrà sede lo stadio, Beta ospiterà l'unico centro commerciale della zona e a Gamma verrà costruito il cinema locale. Per fare in modo che tutti gli abitanti della piana possano usufruire dei servizi, sarà necessario collegare i tre villaggi con un sistema di strade che, al fine di minimizzare i costi, dovrà essere progettato per avere la minor lunghezza possibile. Come dovranno essere collegati i villaggi tra loro?

Traccia uno schizzo preciso e scrivi le motivazioni delle tue decisioni nelle righe qui sotto.

- 1) **Risposta corretta senza motivazione** - 10 studenti hanno risposto correttamente ma o non hanno motivato, o hanno scritto cose del tipo: “non saprei motivare”. Ciò vuol dire che ben 10 studenti ritengono la soluzione “ovvia” o facilmente intuibile.

Il motivo per cui la soluzione sarebbe ovvia, potrebbe trovarsi nel fatto che in quanto esseri umani siamo naturalmente (o culturalmente) predisposti alla ricerca delle simmetrie.

Lo si può vedere ad esempio nella pratica della scienza. Alcuni ritengono (Fano, 2005) che la scienza cerchi le simmetrie, ossia generalizzazioni individuate da un’invarianza rispetto a una trasformazione. Ma queste simmetrie sono fondate nelle strutture stesse delle teorie. Ad esempio, se affermiamo che “tutte le leggi fisiche sono invarianti per trasformazioni di Lorentz” non ci stiamo riferendo direttamente al mondo, ma ai modelli teorici mediante i quali rappresentiamo i fenomeni: queste simmetrie sono allora caratteristiche delle strutture teoriche, e non dei fatti. Questo implica che siano gli scienziati a “forzare” la natura a comportarsi rispettando un qualche tipo di simmetria, e quando non lo si riesce a fare (come nel caso del principio di indeterminazione di Heisenberg) ci si convince che “manchi qualcosa” (Einstein et al., 1935).

Inoltre diversi studi dimostrano che siamo attratti dalle simmetrie (Grammer et al., 1994) anche in altri contesti come quello sessuale, motivo per il quale tendiamo a cercare le simmetrie.

Tutto il discorso fatto qui sopra può anche giustificare il perché la stragrande maggioranza degli studenti in generale ha dato la risposta esatta pur non avendo gli strumenti matematici per risolvere il problema.

- 2) **Risposta corretta motivando attraverso le proprietà del triangolo equilatero** - 6 studenti hanno risposto correttamente specificando le particolarità del punto in cui si incontrano i lati. Uno studente in particolare ha specificato che quel punto è contemporaneamente ortocentro, incentro, baricentro, circocentro del triangolo equilatero, mostrando consapevolezza del fatto che la soluzione stia nella ricerca di una simmetria.

Altri studenti hanno motivato più in generale con risposte del tipo: “con una rotatoria si minimizza il percorso perché le strade da un punto all’altro sono uguali in ogni caso” oppure “il punto centrale è il punto più vicino ad α, β, γ quindi collegando al centro le strade il percorso complessivo sarà più corto”.

- 3) **Risposta corretta ottenuta tramite il confronto con altre possibili risposte** - 7 studenti hanno considerato diverse opzioni plausibili e le hanno confrontate fra loro (3 di questi hanno fatto dei calcoli che hanno scritto sul foglio) mostrando un approccio “per tentativi” o “sperimentale”.

Riporto la risposta che sintetizza meglio tutte le altre:

“Ho fatto più ipotesi sulle possibili strade:

- 1) collegare i 3 vertici come un triangolo,*
- 2) tracciare l'altezza da un vertice e il lato su cui cade l'altezza,*
- 3) tracciare le altezze dai 3 vertici che si incontrano nel punto D.*

La 1) è evidentemente la strada più lunga quindi la scelta era tra la 2) e la 3).

$$\text{La 3) } AD = BD = CD = \frac{1}{3}h \rightarrow AD + BD + CD = h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

$$\text{La 2) } AC = l, BH = \frac{\sqrt{3}}{2}l \rightarrow AC + BH = l + \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

La 3) è la soluzione migliore”

Dei rimanenti 6 studenti, 4 hanno solo fatto il paragone tra la 1) e la 3), mentre 2 hanno solo fatto il paragone tra la 2) e la 3).

L'ipotesi 1) era prevedibile in quanto rappresenta “l'altra” situazione simmetrica (rispetto a rotazioni di 60°), mentre l'ipotesi 2) è più particolare.

- 4) **Risposta sbagliata** – 3 studenti hanno risposto dando ragione alla ipotesi 2) del punto precedente, ossia: “collego direttamente 2 villaggi attraverso un lato del triangolo qualsiasi e collego il terzo villaggio al lato collegato attraverso una strada che percorra l'altezza”. Di questi 3 studenti solo 1 ha offerto una motivazione nello stile del punto 3), ossia facendo un paragone fra due situazioni diverse, quella dell'ipotesi 2) a cui si è data ragione, e quella dell'ipotesi 1).

Ora ricordiamo la seconda domanda:

La leggenda narra che la regina di Didone, arrivata in Africa, chiese al potente Larba, re dei Gentili, un tratto di terra per potervi costruire una città. Il re non volendogliela concedere, le disse in segno di scherno: «Ti darò tanta terra quanta ne potrà circondare con la pelle di un bue». L'astuta Didone tagliò la pelle in strisce sottilissime e si vide assegnata tutta la terra, affacciata sul mare, che poté circondare con le striscioline attaccate una all'altra. Così costruì Cartagine. Didone fu astuta perché sapeva che, a parità di perimetro (la lunghezza della pelle del bue), alcune figure geometriche hanno un'area maggiore rispetto ad altre. Quale pensi sia la figura geometrica con la maggiore area a parità di perimetro? Come motiveresti la tua risposta?

- 1) **Risposta corretta senza motivazione** – 9 studenti hanno scritto correttamente che la figura geometrica con la maggiore area a parità di perimetro è il cerchio, senza commentare ulteriormente. Di questi si vuole notare che 6 studenti sono gli stessi che hanno risposto correttamente alla prima domanda senza dare una motivazione.
- 2) **Risposta corretta ottenuta considerando il cerchio come un poligono di infiniti lati** – 5 studenti hanno scritto che si può considerare il cerchio come una figura geometrica con infiniti lati, e che all'aumentare del numero dei lati aumenta l'area fissato il perimetro. La risposta meglio scritta è la seguente:

“Man mano che aumento il numero di lati ad un poligono, l'area aumenta e il rapporto p/A diminuisce, quindi la circonferenza che ha infiniti lati è la risposta”.

Questa e altre risposte simili mostrano che in classe si è parlato di poligono regolari, di come esprimerne l'area in funzione del numero di lati, e del cerchio come “caso limite”. Tuttavia solo 5 studenti su 26 hanno risposto impostando il problema correttamente, mentre ben 21 studenti su 26 non sono stati in grado. Considerato il livello mediamente alto della classe (classe quarta di un liceo matematico) si ritiene che una buona parte di quei 21 studenti ricordasse il modo di calcolare l'area di un poligono regolare generico, ma che evidentemente non siano stati in grado di vedere che il problema richiedeva quella conoscenza.

- 3) **Risposta corretta ottenuta tramite il confronto con altre possibili risposte** – 6 studenti hanno risposto correttamente dopo aver fatto un confronto fra diverse ipotesi considerate plausibili.

In particolare 4 di questi hanno ritenuto di dover fare solo un confronto con il quadrato, 1 ha considerato anche un triangolo equilatero, 1 ha considerato il rettangolo, il quadrato, il cerchio e il triangolo rettangolo.

Inoltre, di questi 6 studenti, 4 hanno affrontato il primo problema allo stesso modo, cioè “per tentativi” e “facendo i calcoli”.

- 4) **Risposta sbagliata o non risposta** – 5 studenti non hanno risposto correttamente.

In particolare 3 studenti hanno lasciato in bianco, gli altri 2 studenti hanno risposto “il rettangolo”, dei quali uno non ha fornito una motivazione, l’altro ha risposto:

“il rettangolo perché l’area è uguale al prodotto di base per altezza la cui somma costituisce il semiperimetro (ad es. nel triangolo base per altezza vanno divisi per due)”. Sebbene questa risposta sembri voler assumere i caratteri di una generalizzazione, mi pare che la conclusione sia arrivata a seguito del confronto con il triangolo, per cui appartiene alla tipologia “per tentativi”,

dove le ipotesi plausibili sono state considerate essere il rettangolo e il triangolo (e forse implicitamente altri quadrilateri come il parallelogramma).

- 5) **Risposta corretta con argomentazione individuale** – 1 studente ha proposto un’argomentazione originale sul perché la risposta corretta al quesito sia il cerchio:

“il cerchio, non avendo angoli “minimizza” la parte di perimetro che in un’altra figura è spesa per l’angolo aumentando l’area pur avendo minor perimetro”. Io interpreto questa risposta come traducibile in questo modo: “Fissato il perimetro, l’area di un poligono aumenta all’aumentare dei suoi angoli interni”.

C'è quindi un'argomentazione teorica, nello stile delle risposte del punto 2), ma in questo caso si ritiene che non sia il numero di lati la variabile da considerare, ma l'ampiezza degli angoli.

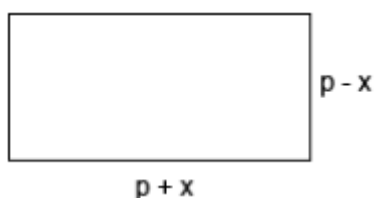
Propongo ora una controargomentazione e una dimostrazione per mostrare il perché questa argomentazione sia scorretta, nonostante possa apparire convincente (almeno per uno studente).

Il quadrato e il rettangolo sono figure geometriche che hanno entrambe 4 angoli di 90° , perciò spendono parti di perimetro per l'angolo allo stesso modo, da cui si deduce che, a parità di perimetro, abbiano stessa area.

Tuttavia si può dimostrare facilmente che in realtà è il quadrato ad avere maggiore area fissato il perimetro:

Dimostrazione.

Indichiamo con $p - x$ e con $p + x$ le misure dei lati dei rettangoli isoperimetrici di perimetro $4p$.



Si può esprimere l'area dei rettangoli nel seguente modo:

$$A(x) = (p - x)(p + x) = p^2 - x^2$$

dove $x: [0, p[$.

Si vede subito che l'area è massima quando $x = 0$, cioè quando il rettangolo è un quadrato.

Si possono riassumere le risposte alle domande dei primi 2 quesiti in 3 categorie: le argomentazioni teoriche, le argomentazioni sperimentali, l'assenza di argomentazioni.

Per quanto riguarda il primo quesito, le risposte sono distribuite in questo modo:

- 1) argomentazioni teoriche: 6 risposte (di cui 6 corrette)
- 2) argomentazioni sperimentali: 8 risposte (di cui 7 corrette)
- 3) non argomentazioni: 12 risposte (di cui 10 corrette)

Per quanto riguarda il secondo quesito, le risposte sono distribuite in questo modo (le non risposte non sono state considerate):

- 1) argomentazioni teoriche: 6 risposte (di cui 6 corrette)
- 2) argomentazioni sperimentali: 7 risposte (di cui 6 corrette)
- 3) non argomentazioni: 10 risposte (di cui 9 corrette)

Da questi dati pare esserci una correlazione fra il tipo di argomentazione e la percentuale di risposte corrette, in particolare nessuna argomentazione teorica (a prescindere dalla correttezza dell'argomentazione in sé) ha portato a una risposta sbagliata.

Alcuni studenti hanno cambiato tipologia di argomentazione, altri hanno utilizzato la stessa in entrambi i casi. Le riconferme sono distribuite in questo modo:

- 1) argomentazioni teoriche: 1 studente (che è anche l'unico studente ad aver risposto correttamente al terzo quesito)
- 2) argomentazioni sperimentali: 5 studenti
- 3) non argomentazioni: 6 studenti

I cambi di argomentazione sono invece distribuiti in questo modo:

- 1) argomentazione teorica + non argomentazione: 7 studenti
- 2) argomentazione teorica + argomentazione sperimentale: 2 studenti
- 3) argomentazione sperimentale + non argomentazione: 2 studente

Perciò, le riconferme in percentuale sono:

- 1) argomentazioni teorica: 1/10
- 2) argomentazioni sperimentale: 5/9
- 3) non argomentazioni: 6/13

Emergono quindi 2 strategie principali, quelle dei non argomentatori (che rappresentano gli studenti più "deboli") e quelle degli sperimentatori (che ci provano a prescindere delle loro conoscenze sull'argomento).

Un altro dato da considerare è il maggior numero di studenti che hanno proposto un'argomentazione teorica per un quesito e una non argomentazione per l'altro quesito, rispetto a quello di studenti che hanno proposto un'argomentazione teorica per un quesito e una sperimentale per l'altro quesito.

In genere, gli studenti che propongono argomentazioni teoriche sono quelli che hanno studiato di più, e che danno una risposta quando conoscono l'argomento di cui si sta parlando, ma non riescono ad affrontare un problema di cui non conoscono la teoria. Perciò ritengo si possa fare una distinzione fra l'insieme degli studenti che “rispondono se sanno” e quelli che “provano comunque a dare una risposta”.

Passiamo ora al terzo quesito del primo questionario:

Sulla spiaggia di Porto San Giorgio un incauto nuotatore N che si trova ad $a=100$ metri dalla riva rischia di affogare e grida aiuto. Il bagnino B , nel momento in cui si accorge del pericolo, si trova sulla spiaggia a $b=30$ metri dalla riva. In linea d'aria il bagnino e il bagnante distano inizialmente D metri, ma la linea immaginaria che li unisce non è perpendicolare alla riva. Il bagnino può correre sulla spiaggia con una velocità media di 7 m/s, mentre in acqua può nuotare con una velocità media inferiore pari a 1 m/s.

Quale percorso deve compiere il bagnino affinché, a partire dalla sua posizione iniziale, arrivi nel più breve tempo possibile in soccorso al bagnante, evitando così che questi affoghi? Traccia prima uno schizzo del percorso che ritieni migliore e poi, se credi, prova anche ad impostare qualche calcolo.

I dati presenti nel quesito non sono necessari, ma l'insegnante ha ritenuto importante fornire dei dati numerici per aiutare a produrre ragionamenti in quegli studenti che hanno minori capacità di astrazione. Questo ha fatto sì che tutti gli studenti venissero incentivati a percorrere la strada del calcolo numerico, per cui non è possibile distinguere gli studenti che avrebbero seguito un approccio teorico da quelli che avrebbero seguito un approccio “per tentativi” (quindi facendo ipotesi sui valori numerici delle grandezze in gioco e impostando dei calcoli).

Tuttavia è emerso un altro elemento rilevante, e cioè che, tolti i pochissimi che non hanno risposto, la totalità degli studenti (meno 1) ha risposto sbagliando allo stesso modo. Paradossalmente questo

quesito è l'unico dei 3 per il quale gli studenti hanno tutti gli strumenti teorici necessari per risolverlo completamente.

In effetti basta ricordare la legge di Snell (che gli studenti conoscevano) e riconoscere il fatto che la situazione sia analoga. Tuttavia bisogna aver la capacità di applicare le conoscenze che si hanno anche in contesti diversi rispetto a quelli proposti solitamente nei libri di testo, capacità che in questo caso è venuta completamente a mancare.

La quasi totalità delle risposte può essere riassunta nella seguente risposta data da uno studente:

“...la differenza di velocità in acqua ed in spiaggia è (dovrebbe essere) tale da rendere conveniente un tragitto più lungo in spiaggia e meno lungo possibile in acqua”, oppure “Secondo me il bagnino dovrebbe seguire il percorso che ho tracciato in arancione, perché essendo 7 volte più veloce sulla sabbia, dovrebbe percorrere quanta più strada possibile correndo, e il meno possibile nuotando. Sulla base di questa considerazione, il percorso più breve in acqua si ha percorrendo la perpendicolare di 100m, impiegando 100s”.

L'idea è quindi di dover minimizzare il percorso in cui si va più lenti, indipendentemente dal percorso in cui si va più veloci.

C'è quindi un'idea di minimo locale, ma manca completamente l'idea di un minimo totale calcolato su tutto il percorso. Un problema simile è affrontato in “Didattica della fisica” di Ugo Besson. nel capitolo dedicato alle medie, ed è il seguente:

“Un aereo vola da A verso B e poi ritorna da B verso A. C'è un forte vento che soffia da B verso A alla velocità di 60 km/h. L'aereo ha una velocità di crociera di 700 km/h rispetto all'aria. Trovate la velocità media dell'aereo nel totale del percorso di andata e ritorno A-B-A. Se non ci fosse il vento, l'aereo impiegherebbe un tempo maggiore, uguale o minore?” (Besson, 2015)

Gli studenti rispondono che la media è la media aritmetica tra 760 km e 640 km/h, quindi è sempre 700 km/h, arrivando alla conclusione che il tempo impiegato sia lo stesso perché *quello che si perde all'andata lo si guadagna al ritorno.*

Un suggerimento proposto per superare questo pregiudizio è quello di proporre un caso limite, cioè il caso in cui la velocità del vento sia vicina a 700 km/h. In questo caso è evidente che il tempo di

percorrenza del tragitto tenda all'infinito, e ci si convince che maggiore è la velocità del vento, maggiore sarà il tempo impiegato per il tragitto andata/ritorno.

Nel nostro caso la situazione è analogamente opposta: gli studenti scelgono di considerare il caso limite, nonostante la situazione non sia un caso limite (in questo caso, il caso limite scelto dagli studenti, è quello per cui il bagnino va ad una velocità tendente all'infinito quando si trova sulla spiaggia).

Un suggerimento che propongo, e che vuole prendere spunto dal caso presentato nel Besson ma in verso opposto, è quello di partire considerando il caso in cui le velocità di percorrenza sulla spiaggia e sul mare siano uguali. Risulta facile intuire che in questo caso il percorso conveniente sia il segmento che congiunge i due punti di partenza e arrivo (la brachistocrona coincide con la geodetica). A questo punto si propone di considerare il caso in cui la velocità di percorrenza sul mare sia solo leggermente inferiore a quella di percorrenza in spiaggia, per suggerire che convenga compiere un tragitto leggermente più lungo in spiaggia e leggermente più corto in mare, ma non da giustificare un percorso molto più lungo come quello del caso limite. In questo modo, proponendo di aumentare sempre di poco di volta in volta il rapporto tra la velocità di percorrenza in spiaggia e quella di percorrenza sul mare, si mostra la progressività della situazione proposta, e che le minimizzazioni dei due percorsi (quello in spiaggia e quello in mare) vadano distribuite in maniera pesata rispetto alle velocità.

C'è poi un caso particolare di uno studente che ha mostrato di aver intuito un'idea di progressività, ma che non è riuscita a declinarla nel modo corretto. Infatti la conclusione a cui è arrivato è la stessa a cui sono arrivati gli altri studenti:

“Questo percorso conviene finchè BO è minore di $700m$, quindi finchè OZ è minore di $\sqrt{700^2 - 30^2}$ perché sulla sabbia il bagnino corre 7 volte più veloce di quanto nuota in acqua”

, dove O è la proiezione di N sul confine sabbia/mare e Z è la proiezione di B sul confine sabbia/mare. Lo studente mostra quindi di aver intuito che il percorso dipende anche dalle lunghezze da percorrere, e che quindi non sia determinante solo la velocità di percorrenza, ma arriva alla conclusione che la scelta del percorso sia tra due casi limite, senza considerare casi intermedi.

Passiamo ora ai quesiti rimanenti.

Questi avevano la funzione di capire quali fossero le conoscenze degli studenti, col fine di preparare una spiegazione sul perché dei fenomeni osservati nel laboratorio che fosse comprensibile. In generale c'è una generale difficoltà a dare definizioni rigorose, e una tendenza a definire le cose in maniera approssimativa, ma questo può essere dovuto al fatto che gli studenti non ricordassero nel dettaglio certe definizioni, poiché affrontate tempo prima (le risposte più dettagliate sono state date rispetto all'ultima domanda: "Dati una carica positiva (ad esempio un protone) e una carica negativa (ad esempio un elettrone) descrivi qualitativamente come questi interagiscono (si attraggono, si respingono, si ignorano...)", con tanto di definizione della forza di Coulomb, argomento affrontato di recente dagli studenti rispetto alla presentazione del questionario).

Tuttavia è emerso un errore comune a molti studenti, ossia quello di confondere la definizione di energia potenziale con quella di energia potenziale gravitazionale (nella forma $U = mgh$). In particolare, le risposte sono state così distribuite:

- 1) Confusione tra energia potenziale e energia potenziale gravitazionale: 9 studenti
- 2) Definizione corretta (almeno approssimativamente): 11 studenti
- 3) Non risposta: 6 studenti

Circa la metà degli studenti che hanno provato a dare una definizione di energia potenziale, lo hanno fatto dando la definizione di energia potenziale gravitazionale (nella forma semplificata che si utilizza quando si studiano fenomeni prossimi alla superficie terrestre).

Ciò potrebbe essere dovuto al fatto che la prima forma di energia potenziale che viene affrontata nelle scuole superiori (incluso il caso in questione) è proprio l'energia potenziale gravitazionale per fenomeni prossimi alla superficie terrestre. Ritengo quindi che si dovrebbe insistere di più sul fatto che la definizione di energia potenziale racchiuda un insieme di sottodefinitzioni particolari fra cui è inclusa anche quella di energia potenziale gravitazionale. La cosa è anche più facile nel momento in cui si introduce un altro caso di energia potenziale, ossia quello di energia potenziale elastica (cosa che è stata fatta poco tempo dopo dalla classe). Suggestisco quindi, una volta introdotti almeno due esempi di energia potenziale, di mostrare alla classe come le definizioni, ad esempio di energia potenziale elastica e energia potenziale gravitazionale, siano coerenti con la definizione più generale di energia potenziale, in maniera tale da far comprendere la natura più generale di energia potenziale, e come questa sia logicamente connessa agli esempi di energia potenziale che possono venire fatti (si

potrebbe fare questo procedimento ogni volta che viene introdotta una nuova forma di energia potenziale, come quella elettrostatica definita a partire dalla forza di Coulomb).

5.3. Questionario 2

Il secondo questionario proposto è un questionario che anticipa il laboratorio.

In esso si descrivono gli esperimenti da eseguire, e si chiede di descrivere cosa ci si aspetta che succederà. Questo per attivare ragionamenti e riflessioni negli studenti riguardo quello che andranno a fare. Inoltre possono emergere pregiudizi legati al senso comune, argomento che interessa molto la didattica.

Altra ragione per cui si è chiesto di fare delle previsioni su quello che verrà osservato è quella di trasmettere un modo di ragionare scientifico per cui le proprie convinzioni vengono confermate o smentite in base alla correttezza o meno della previsione. In questo secondo caso emerge la consapevolezza di avere una lacuna nella comprensione dell'argomento, e può eventualmente emergere la volontà di colmarla spinti dalla curiosità e dal fatto che si sta avendo a che fare con un problema reale, e non un problema astratto privo di senso (come può essere la risoluzione di un'equazione la cui incognita è priva di significato).

Le attività e relative domande proposte sono le seguenti:

1) Attività 1: la forma delle bolle dipende dal telaio?

- Con il filo di ferro; forma un anello a forma di **circonferenza** e soffiaci dentro (oppure muovilo nell'aria). Osserva attentamente la forma della bolla che si genera e descrivila.
- Ripeti quanto appena fatto con dei telai in cui il filo di ferro ha la forma di triangolo o quadrato. Registra qui sotto le differenze.

2) Attività 2: la tensione superficiale

- Costruisci un telaio circolare con filo di cotone leggermente più lungo del diametro fissato a due punti diametralmente opposti. Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo.
- Ora immagina che cosa succederà rompendo una delle due parti della membrana saponata, ad esempio quella a destra del filo, e scrivilo qui sotto.
- Rompi veramente una delle due parti e osserva che cosa succede. Ripeti l'esperimento rompendo la lamina dall'altra parte.
- Costruisci un telaio circolare e in un suo punto fissa un filo di cotone che abbia un cappio in fondo. Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo. Ora immagina che cosa succederà la parte di membrana contenuta nel cappio e scrivilo qui sotto.
- Rompi veramente la parte di membrana contenuta nel cappio e osserva che succede.

5.4. Analisi delle risposte al Questionario 2

Il questionario 2 è, di fatto, una scheda di laboratorio, per cui ha principalmente la funzione di guidare i gruppi di studenti ad eseguire gli esperimenti e ad annotarsi quello che succede, per cui non c'è molto da analizzare nelle risposte che sono state date, ma qualcosa è emerso comunque.

Gli studenti si sono divisi spontaneamente in 7 gruppi.

Ricordiamo la prima attività e le relative domande:

Attività 1: la forma delle bolle dipende dal telaio?

- *Con il filo di ferro; forma un anello a forma di **circonferenza** e soffiaci dentro (oppure muovilo nell'aria). Osserva attentamente la forma della bolla che si genera e descrivila.*
- *Ripeti quanto appena fatto con dei telai in cui il filo di ferro ha la forma di triangolo o quadrato. Registra qui sotto le differenze.*

Per quanto riguarda la prima domanda, 5 gruppi su 7 hanno scritto semplicemente che si forma una sfera, 1 gruppo su 7 ha scritto che la bolla assume una forma sferica non perfetta (ritengo rilevante il fatto che ci abbiano tenuto a specificare che la sfera è “non perfetta”, come se esistessero sfere perfette in natura), mentre l’ultimo gruppo ha voluto dare una risposta più articolata che riporto: “Si genera una bolla che, al momento del soffio, ha una forma allungata e poi, appena si stacca dal telaio, assume una forma sferica”.

Per quanto riguarda la seconda domanda, 5 gruppi su 7 hanno scritto di non aver notato differenze, 1 gruppo ha scritto che la forma rimane “pressochè” uguale, mentre l’ultimo gruppo ha scritto: “Lievi cambiamenti ma la forma rimane la stessa”.

Passiamo alla seconda attività e alle relative domande:

Attività 2: la tensione superficiale

- *Costruisci un telaio circolare con filo di cotone leggermente più lungo del diametro fissato a due punti diametralmente opposti. Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo.*
- *Ora immagina che cosa succederà rompendo una delle due parti della membrana saponata, ad esempio quella a destra del filo, e scrivilo qui sotto.*
- *Rompi veramente una delle due parti e osserva che cosa succede. Ripeti l’esperimento rompendo la lamina dall’altra parte.*
- *Costruisci un telaio circolare e in un suo punto fissa un filo di cotone che abbia un cappio in fondo. Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo. Ora immagina che cosa succederà la parte di membrana contenuta nel cappio e scrivilo qui sotto.*
- *Rompi veramente la parte di membrana contenuta nel cappio e osserva che succede.*

Alla domanda “Ora immagina che cosa succederà rompendo una delle due parti della membrana saponata, ad esempio quella a destra del filo, e scrivilo qui sotto” tutti i gruppi hanno scritto che il filo rimane al centro e/o che l’altra parte della membrana rimane, in particolare 3 gruppi non hanno

fatto previsioni riguardo alla posizione del filo, 1 gruppo ha fatto previsioni solo riguardo alla posizione del filo, gli altri 3 gruppi sia sul filo che sulla patina saponata.

Dei 3 gruppi che hanno fatto previsioni solo sulla lamina saponata, solo 1 gruppo ha poi notato dopo l'esperimento il comportamento del filo. Ben 5 gruppi su 7 hanno quindi notato che il filo viene attratto dal sapone.

Tuttavia, nella domanda riguardante il cappio, ossia: "Costruisci un telaio circolare e in un suo punto fissa un filo di cotone che abbia un cappio in fondo. Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo. Ora immagina che cosa succederà la parte di membrana contenuta nel cappio e scrivilo qui sotto", 2 dei 5 gruppi che hanno notato il fatto che il filo venisse attratto dal sapone, hanno previsto che il cappio si chiudesse, mentre avviene il contrario. 3 gruppi hanno invece previsto correttamente che il cappio si allargasse, 2 dei quali avevano previsto nel caso precedente che il filo rimanesse al centro, mentre il terzo aveva notato il comportamento del filo dopo l'esperimento. In particolare quest'ultimo aveva scritto nelle osservazioni del primo esperimento:

"Rompendo una delle due parti osserviamo che l'altra metà non scoppia e che il filo tende a incurvarsi formando una sorta di "mezza luna" contenente la membrana. In altre parole la parte "scoppiata" tende a diventare una circonferenza",

mentre nella domanda riguardante la previsione su ciò che sarebbe avvenuto rompendo la parte interna al cappio, il gruppo ha scritto:

"Tenendo conto dell'esperimento precedente, immaginiamo che scoppiando la membrana nel cappio, esso diventerà una circonferenza",

mostrando di aver compreso come ragiona uno scienziato davanti a una situazione nuova, ovvero ragionando per analogia con situazioni conosciute e le cui differenze con la situazione nuova non sembrano influire sul risultato.

Capitolo 6

Racconto dell'esperienza didattica

Il percorso didattico seguente è stato fatto in una classe del liceo scientifico Temistocle Calzecchi Onesti, nella città di Fermo, in particolare in una classe di liceo matematico.

Sul sito della scuola si legge che:

“Nel Liceo Matematico sono previste ore aggiuntive rispetto a quelle curricolari (almeno un’ora in più alla settimana). Nelle ore aggiuntive sono approfonditi contenuti di matematica e, soprattutto, sono proposte attività interdisciplinari che coinvolgono la fisica, le scienze naturali, l’arte, la letteratura, ecc.

Le attività aggiuntive, sempre di carattere laboratoriale, sono finalizzate ad ampliare la formazione culturale degli studenti e a svilupparne le capacità critiche e l’attitudine alla ricerca.

Il Liceo Matematico, infine, si caratterizza per una forte collaborazione tra scuola e università.”

[Liceo Matematico | Liceo Scientifico "Temistocle Calzecchi Onesti" \(liceotco.edu.it\)](http://liceotco.edu.it)

Nel piano orario si legge che, oltre alle ore di lezione in comune con le altre classi, la classe di liceo matematico affronta 2 ore in più a settimana di “LABORATORIO DI MATEMATICA” nei primi 3 anni, e 1 ora in più a settimana sempre di “LABORATORIO DI MATEMATICA” nel quarto e nel quinto anno di liceo (il piano orario è in appendice).

È in queste ore aggiuntive che si è pensato di inserire il percorso didattico sulle bolle di sapone.

La classe che ho osservato era una classe del quarto anno quando il percorso è iniziato, ed era una classe del quinto anno quando il percorso è finito, perciò gli studenti avevano già avuto esperienze con i laboratori di matematica.

Le giornate in cui ho assistito e/o contribuito alle lezioni (o al festival) sono le seguenti:

- 1) 14 Maggio 2022
- 2) 3 Giugno 2022
- 3) 14 Ottobre 2022
- 4) 22 Ottobre 2022
- 5) 23 Ottobre 2022

Il percorso è andato avanti anche nelle giornate in mezzo a queste date, ma non ho personalmente assistito a tutto, perciò le mie fonti a riguardo sono nei racconti che mi ha fatto l'insegnante della classe.

Quello che andrò ora a scrivere sarà tutto ciò che riguarda la pianificazione delle lezioni e le dinamiche che si sono create in classe. Questo per mostrare come hanno interagito la pianificazione didattica e la pratica didattica con le dinamiche che sono avvenute.

L'approccio alla pianificazione didattica che è stato scelto è di stampo costruttivista, e si può riassumere nella frase: "ho chiaro dove si comincia, non ho chiaro dove si finisce".

Questo perché, in un approccio costruttivista che tenga conto del ruolo attivo degli studenti (nel nostro caso nel laboratorio matematico) e delle dinamiche relazionali che si vengono a creare, spesso accadono situazioni che non si possono prevedere con anticipo, e pertanto una progettazione didattica eccessivamente rigida rischia di rompere sul nascere determinate dinamiche che possono invece risultare costruttive.

Si è ritenuto che questo approccio si sposasse bene con il laboratorio didattico, poiché in questo per definizione gli studenti acquisiscono un ruolo attivo.

In un percorso didattico che voglia porsi dei traguardi specifici di apprendimento, è necessaria una maggior pianificazione didattica, che, partendo dagli obiettivi che ci si pone, ricostruisca tutto il percorso necessario per raggiungere quegli obiettivi.

Nel caso in questione, invece ci si è posti un obiettivo molto più generale, che era quello di creare negli studenti la consapevolezza dell'esistenza di una classe di problemi, chiamati problemi di minimo, molto diffusa anche in contesti non strettamente matematici.

È importante notare che questo percorso didattico sia stato svolto senza che la classe avesse ancora introdotto alcuno strumento del calcolo infinitesimale. Questo perché, secondo l'insegnante era importante introdurre l'esistenza dei problemi di minimo prima di quegli strumenti astratti che

permettono di affrontare in maniera più semplice quei problemi, col fine di giustificarne l'introduzione in un secondo momento, mostrandone subito l'utilità.

6.1. Lezione del 14 Maggio 2022

La lezione del 14 Maggio 2022 è stata ufficialmente la prima lezione riguardante il percorso didattico, perciò ha richiesto una discussione più approfondita per quanto riguarda la pianificazione didattica.

L'insegnante ha espresso quello che doveva essere il ruolo del laboratorio matematico in questo specifico contesto, ossia principalmente quello di motivare gli studenti allo studio dell'argomento. La scelta del laboratorio sulle bolle di sapone è stata determinata dal fatto che le bolle di sapone piacciono, e che quindi gli studenti sarebbero stati motivati a scoprire come farle e a farle loro in prima persona (e in seguito a studiare i fenomeni che le riguardano). Inoltre il laboratorio attivo avrebbe prodotto un maggior coinvolgimento rispetto alla sola osservazione del fenomeno (in questo emerge l'approccio costruttivista per cui nella trasposizione didattica entrino in gioco anche gli aspetti emotivi degli allievi). La scelta delle bolle di sapone come soggetto da studiare per introdurre ai problemi di minimo non è originale ([Capire il mondo attraverso una bolla \(unife.it\)](http://unife.it)) perciò, quello che è stato fatto, non è la sperimentazione di un percorso didattico nuovo, ma l'applicazione di un percorso didattico conosciuto (modificato secondo le specificità del contesto).

Abbiamo deciso che la lezione si sarebbe organizzata in questo modo:

- 1) Introduzione teorica sui problemi di minimo di 10 minuti svolta da me;
- 2) Presentazione del Questionario 1;
- 3) Attività di laboratorio.

Per quanto riguarda l'introduzione teorica mi è stata lasciata carta bianca. L'idea era quella di dare una presentazione il più possibile olistica sull'argomento e sulle motivazioni dietro allo studio dell'argomento.

Il Questionario 1 avrebbe avuto l'obiettivo di introdurre ai problemi di minimo attraverso 3 semplici esempi (in forma di problem solving/quiz per aumentare il coinvolgimento) e di capire quali fossero le conoscenze possedute dagli studenti e capire come organizzare le lezioni successive.

Per l'attività di laboratorio, non sapendo quali sarebbero state le tempistiche necessarie, abbiamo prima discusso su diverse attività che avremmo potuto fare, e ci siamo preparati su una serie di attività che sicuramente non saremmo riusciti a finire in tempo, e che sono riassunte nel questionario 2 (inizialmente c'era anche l'idea di proporre delle figure tridimensionali come l'elicoide o la catenoide, ma non si sono mai realizzate). Inoltre abbiamo pensato anche di mostrare il fenomeno che avviene quando vengono immerse in acqua saponata delle lastre di plexiglass come quelle in figura,



ognuna con una diversa configurazione delle viti.

Abbiamo inoltre deciso che, dati gli ingredienti necessari che sono stati forniti (acqua, glicerolo, sapone), sarebbero stati gli studenti a scoprire per tentativi la loro personale ricetta per fare dell'acqua saponata, per far loro ragionare sulle proporzioni e per introdurre elementi di chimica sperimentale.

Riporto in sintesi l'introduzione che ho fatto in classe:

“Mi è stato chiesto dalla vostra insegnante di fare un'introduzione all'argomento che andremo a studiare che avesse il fine di generare in voi dell'interesse. Tuttavia sono consapevole del fatto che siate tutti persone diverse, che abbiate diversi gusti e che ognuno di voi trovi interesse in cose diverse. Risulta quindi difficile fare un'introduzione uguale per tutti che possa incontrare i gusti di tutti. Ognuno di voi ha una sensibilità diversa, non solo per quello che riguarda il diverso interesse nelle varie discipline, ma anche per quello che ognuno di voi trova di interessante all'interno di una disciplina specifica. Ad esempio, per quanto riguarda la matematica c'è chi ne apprezza l'estremo rigore logico, e il fatto che ogni affermazione si possa dimostrare in maniera incontrovertibile. C'è chi invece trova affascinante il fatto che la matematica possa trovare diverse applicazioni in contesti apparentemente molto diversi. Ma soprattutto è affascinante il fatto che una disciplina così astratta funzioni così bene quando viene applicata in contesti concreti. Quello che io personalmente trovo particolarmente affascinante nella matematica, è la sua grande capacità di sintesi, ossia la capacità di descrivere attraverso le stesse equazioni fenomeni che a noi appaiono come diversi. Ad esempio il moto del pendolo e il moto della molla sono entrambi descritti dalle stesse equazioni, ossia le

equazioni del moto oscillatorio. Ritengo quindi che la matematica ci dia la possibilità di studiare la natura a un livello più profondo rispetto a quello che osserviamo coi nostri sensi. Se fenomeni che appaiono ai nostri occhi come fenomeni diversi, vengono descritti dalle stesse equazioni, vuol dire che, secondo me, abbiamo colto qualcosa di nuovo e di più profondo della natura rispetto a quando ci limitavamo ad osservare quei fenomeni coi nostri occhi. C'è un principio, conosciuto anche come principio di minima azione, particolarmente affascinante poiché descrive un insieme estremamente elevato di fenomeni della natura. Esiste una disciplina, chiamata meccanica razionale, che dimostra tutti i fenomeni meccanici della natura a partire da quel singolo principio. Il che vuol dire che la legge che muove i pianeti in orbita è la stessa legge che descrive che forma assume una bolla di sapone. Questo principio afferma, in poche parole, che la natura è pigra. Ovvero che, dati diversi percorsi possibili, la natura sceglie il percorso che le permette di fare meno fatica. Per questo motivo, questo principio è noto anche come principio di minimo sforzo. Gli studenti fra voi, che trovano affascinanti le bolle di sapone in quanto tali non avranno difficoltà ad apprezzare il laboratorio che ci apprestiamo a fare, mentre quelli che, come me, non sono particolarmente entusiasti quando guardano delle bolle di sapone, sappiano che osservare le bolle di sapone vuol dire osservare il funzionamento dell'Universo.”

Questa introduzione è stata fatta con lo scopo di fornire una visione estremamente generale (non ho mai parlato dei fenomeni specifici che riguardano le bolle di sapone) in maniera tale da poter creare un contesto in cui inserire le esperienze e le conoscenze specifiche che si sarebbero poi studiate.

In seguito sono stati distribuiti i fogli del Questionario 1 alla classe, le cui risposte sono analizzate nel capitolo dedicato.

Gli studenti si sono poi suddivisi in gruppi e sono stati portati fuori nel giardino con a disposizione una vaschetta a gruppo, del fil di ferro per provare a fare le bolle di sapone, del glicerolo, del sapone e dell'acqua per fare l'acqua saponata, dei misurini per tenere nota delle proporzioni fra i vari elementi.

È stato suggerito loro di cercare delle ricette per fare l'acqua saponata su internet e di testarle.

Sebbene inizialmente tutti i gruppi tenessero conto delle variazioni di concentrazioni dei vari elementi, presto, a causa degli insuccessi e per velocizzare il processo, hanno smesso di segnarsi le

proporzioni nonostante venisse loro ricordato di farlo, e il laboratorio si è trasformato in un gioco in cui la sfida era riuscire a fare bolle di sapone prima degli altri.

Verso la fine dell'ora si è mostrato velocemente quello che accade immergendo i telai in plexiglass nell'acqua saponata, e facendo notare che si formano sempre le stesse configurazioni geometriche.

6.2. Lezione del 3 Giugno 2022

Vista l'esperienza della lezione precedente, si è deciso questa volta di preparare una scheda di laboratorio (il Questionario 2) col fine di spingere i gruppi di studenti a svolgere compiti precisi e rispondere a delle domande che avrebbero avuto l'obiettivo, da un lato di attivare un processo di razionalizzazione da parte degli studenti sui compiti che avrebbero dovuto svolgere, dall'altro di ricevere un feedback per quel che riguarda il loro modo di ragionare e di osservare, ed eventualmente scoprire se ci sono pregiudizi comuni particolari.

In seguito avrei avuto il compito di fare una breve lezione di 5/10 minuti che giustificasse i fenomeni da loro osservati.

Per riassumere, la lezione si sarebbe organizzata in questo modo:

- 1) Laboratorio con Questionario 2;
- 2) Breve lezione svolta da me.

Per quanto riguarda il laboratorio, si è chiesto al loro insegnante di chimica di fornire un'acqua saponata sufficientemente buona da poter svolgere le attività che ci eravamo prefissati.

Per quanto riguarda la lezione ho tenuto conto delle risposte che erano state fornite nel Questionario 1 per capire quali argomenti fossero chiari alla classe e quali avrei dovuto spiegare, cercando di ridurre il più possibile il formalismo matematico, considerando anche il fatto che la lezione si sarebbe tenuta gli ultimi minuti dell'ultima ora del penultimo giorno di scuola prima delle vacanze estive.

L'attività di laboratorio si è svolta senza problemi, e tutti i gruppi sono riusciti a completare tutte le attività richieste e a rispondere a tutte le domande nel tempo che era stato dato loro. L'analisi delle risposte al Questionario 2 si trova nel capitolo dedicato.

La breve lezione che ho svolto negli ultimi minuti della lezione aveva lo scopo di giustificare i fenomeni osservati durante il laboratorio. Per farlo era necessario che gli studenti avessero chiara la definizione di energia potenziale, mentre dalle risposte al Questionario 1 risultava che molti non ce l'avessero. Perciò ho dato la seguente definizione:

“la differenza di energia potenziale di un corpo fra due punti nello spazio, è in valore assoluto uguale al lavoro, ossia alla forza impiegata moltiplicata per lo spostamento, necessario per spostare il corpo da un punto all'altro. Il segno è dato dal fatto che se il lavoro esterno compiuto nel processo è positivo, allora l'energia potenziale del corpo aumenta.”

Poiché la natura tende a minimizzare l'energia potenziale, se per spostare un corpo da un punto a a un punto b devo compiere un lavoro esterno positivo, allora un corpo posto nel punto b tende spontaneamente a spostarsi nel punto a .

È stato fatto un esempio con l'energia potenziale gravitazionale, poiché è quella che gli studenti conoscevano meglio: i corpi cadono verso il basso poiché l'energia potenziale gravitazionale di un corpo a terra è minore dell'energia potenziale gravitazionale dello stesso corpo ad una certa altezza h (si è usata la definizione $U = mgh$).

Dopodichè ho introdotto la definizione di tensione superficiale nel modo seguente:

“La tensione superficiale è il lavoro necessario ad aumentare una certa superficie di un certo intervallo ΔS ”

La definizione implica che se esiste una tensione superficiale, allora è necessario del lavoro esterno per aumentare il modulo della superficie, il che implica, per il principio di minimo sforzo, che la superficie tenda alla configurazione che minimizza il suo modulo.

Il motivo per cui le bolle di sapone assumono forma sferica anche cambiando la forma dei telai, è dovuto al fatto che la sfera è la figura geometrica che minimizza la superficie.

Dopodichè ho voluto creare un collegamento qualitativo tra la tensione superficiale e le forze intermolecolari, per giustificare questa nuova definizione: la tensione superficiale è il risultato macroscopico delle forze di interazione molecolari.

A livello molecolare esistono protoni ed elettroni, che si attraggono secondo la forza fondamentale di Coulomb. Le molecole sono per definizione configurazioni di protoni ed elettroni. L'esistenza di una

forza di attrazione, analoga alla forza di attrazione gravitazionale, implica che sia necessario un lavoro esterno per allontanare due molecole che si attraggono, perciò, in assenza di forze esterne, queste tendono a minimizzare l'energia potenziale, cioè tendono ad avvicinarsi (fino a una certa distanza in cui le molecole iniziano a respingersi, ma questo non è stato spiegato in classe poiché non era necessario). L'avvicinarsi delle molecole fra loro è ciò che produce la minimizzazione della superficie.

Per spiegare ciò che è stato osservato nell'Attività 2 ho usato un approccio riduzionista.

Modellizzando l'acqua saponata come un insieme di molecole che si attraggono fra loro, risulta chiaro il motivo per cui si forma la mezzaluna. Mentre nella parte interna della superficie ogni molecola è mediamente attratta da tutte le direzioni, sul bordo la molecola è attratta verso l'interno ma non verso l'esterno, producendo la mezzaluna. Nel momento in cui ho fatto questa spiegazione con disegno alla lavagna c'è stato un coro di comprensione da parte della classe.

L'insegnante ha poi voluto specificare che l'interpretazione molecolare è un'interpretazione fisica, mentre l'interpretazione matematica è che la mezzaluna minimizzi la superficie (non c'è bisogno di fare ipotesi su come è fatta la materia).

In questo modo gli studenti hanno avuto modo di ascoltare il punto di vista fisico e il punto di vista matematico riguardo allo stesso fenomeno.

Le due diverse interpretazioni possono anche essere viste come quelle che Einstein definiva come teorie costruttive e teorie dei principi.

Einstein definiva infatti le teorie costruttive nel modo seguente, compatibilmente all'approccio riduzionista che ho usato per giustificare i fenomeni osservati in laboratorio:

“Per mezzo di un sistema di formule relativamente semplici, situato alla base, esse [le teorie costruttive] cercano di costruire un'immagine di fenomeni relativamente complessi. È così che la teoria cinetica dei gas cerca di ricondurre i fenomeni meccanici, termici, e di diffusione a movimenti di molecole, vale a dire a costruirli partendo dall'ipotesi del movimento molecolare. Quando si dice che si è riusciti a comprendere un gruppo di fenomeni naturali, significa sempre

che si è trovata una teoria costruttiva che abbraccia i fenomeni in questione. I vantaggi di una teoria costruttiva sono la completezza, la adattabilità, e la chiarezza.” (Einstein, 2017)

Le teorie di principi venivano definite in una maniera molto simile all’approccio utilizzato dall’insegnante per giustificare gli stessi fenomeni:

*“Qui [nelle **teorie di principi**] il punto di partenza e la base non sono costituiti da elementi di costruzione ipotetica, ma da proprietà generali di fenomeni naturali, determinate empiricamente, dalle quali derivano in seguito criteri matematicamente formulati ai quali i fenomeni particolari o le loro immagini teoriche devono soddisfare. È così che la termodinamica partendo dal risultato generale della esperienza secondo il quale il moto perpetuo è impossibile, cerca di determinare, per via analitica, le relazioni alle quali i fenomeni particolari devono uniformarsi. I vantaggi di una teoria di principi sono la perfezione logica e la certezza degli stessi principi fondamentali.”*

(Einstein, 2017)

Mi è parso che l’insegnante volesse in generale trasmettere alla classe un’idea della matematica come una teoria di principi sulla natura.

6.3. Lezione del 14 Ottobre 2022

Nel periodo che va da Giovedì 20 Ottobre 2022 a Domenica 23 Ottobre 2022, si è tenuto il Festival della scienza Fermhamente, dal titolo “Conessioni”.

Il Festival ha come obiettivo quello di: “mettere a disposizione dei visitatori negli edifici del centro storico di Fermo, unica città italiana, insieme a Torino e recentemente Palermo, riconosciute dall’Unesco come Learning city (città dell’apprendimento), in maniera totalmente gratuita, proposte scientifiche di altissima qualità, presentate e spiegate da professionisti del settore in modo informale, puntuale e brillante. Il Festival è rivolto a scuole, utenti individuali, gruppi, studenti, famiglie, appassionati di scienza e, soprattutto, al profilo entry level, cioè quel segmento di derivazione televisiva generalista che si affaccia alla materia senza una preparazione specifica” (<https://www.fermhamente.it/about-us>). Si tratta quindi di un Festival che si propone di comunicare la scienza a un pubblico il più vasto e eterogeneo possibile, e che coinvolge direttamente le scuole.

L'insegnante della classe che ho seguito ha avuto l'idea di approfittare dell'evento e di proporre alla classe di partecipare al Festival, ma non come pubblico, bensì come organizzatori di uno dei tanti eventi che venivano proposti durante il Festival. L'idea era quella di proporre un laboratorio simile a quello affrontato in classe, ma più strutturato, e mettere gli studenti dalla parte degli "esperti" che spiegavano ad altre classi, o a chiunque si fosse interessato, le stesse cose che avevano imparato. Tuttavia, per realizzare il tutto, gli studenti avrebbero dovuto fare uno studio e un lavoro molto più intenso e vasto, poiché avrebbero dovuto fare un'acqua saponata che sicuramente avrebbe funzionato, avrebbero dovuto fabbricare tutti i materiali necessari per eseguire gli esperimenti, sarebbero dovuti entrare nei dettagli matematici per essere in grado di rispondere ai dubbi, ma allo stesso tempo avrebbero dovuto imparare a raccontare le stesse cose a livelli diversi, in base al pubblico che si sarebbero trovati davanti al momento. Per questo avrebbero dovuto lavorare al progetto anche nei pomeriggi e nei weekends, ossia nel loro tempo libero, poiché la proposta è stata fatta loro con poco preavviso. La classe ha reagito molto positivamente alla proposta, e gli studenti hanno deciso all'unanimità di partecipare.

Si sono spontaneamente divisi in 3 gruppi:

- 1) **Gruppo invito:** il primo gruppo si sarebbe occupato di tutto ciò che riguarda l'organizzazione e l'invitare le persone a partecipare al Festival e all'evento, il che include disegnare e stampare volantini, manifesti, fare volantinaggi per strada, chiedere permessi al Comune e organizzare la disposizione spaziale del lavoro.
- 2) **Gruppo materiali:** il secondo gruppo si sarebbe occupato di comprare e fabbricare tutti i materiali necessari per realizzare gli esperimenti, il che include la realizzazione dell'acqua saponata.
- 3) **Gruppo matematico:** il terzo gruppo si sarebbe occupato di approfondire la parte teorica, il che include studiare delle dimostrazioni in più rispetto ai compagni, e preparare delle spiegazioni per il pubblico, con l'ausilio di cartelloni su cui avrebbero scritto equazioni, disegnato schemi, disegni e tutto ciò che avrebbe aiutato a rendere la spiegazione il più possibile comprensibile per il pubblico.

Gli studenti si sono divisi spontaneamente nei 3 gruppi, in base alle predisposizioni e ai gusti personali di ognuno.

Io e l'insegnante abbiamo quindi discusso su come concludere la parte teorica e su quali dimostrazioni presentare. L'approccio è stato quello di cercare di portare delle dimostrazioni che cercassero di facilitare il più possibile una comprensione intuitiva, al costo di sacrificare un po' di rigore.

Per quanto riguarda la dimostrazione del fatto che la sfera sia la figura geometrica che minimizza la superficie a parità di volume, si è scelto di procedere in questo modo:

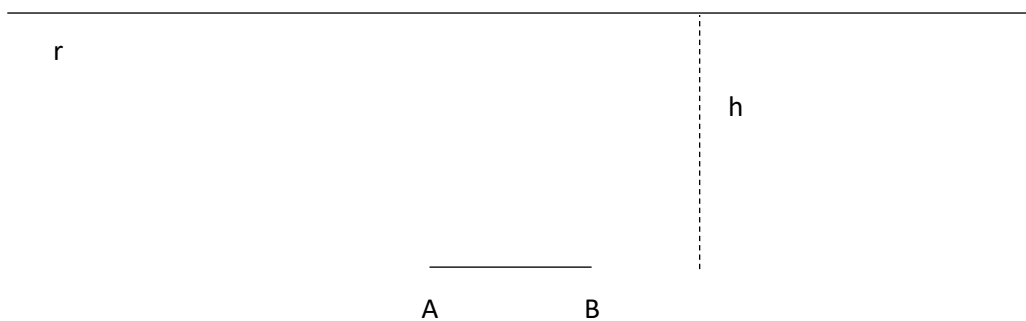
- 1) Si sarebbe prima dimostrato che il triangolo equilatero è isoperimetrico rispetto agli altri triangoli;
- 2) Si sarebbe poi argomentato che, per analogia, fissato un numero di lati, il poligono regolare è quello isoperimetrico;
- 3) Si sarebbe poi dimostrato che, fissata l'area, il perimetro di un poligono regolare si riduce all'aumentare del numero dei lati;
- 4) Si sarebbe poi argomentato che il cerchio può essere visto come una figura limite, ossia come quella figura corrispondente ad un poligono regolare con un numero infinito di lati;
- 5) Si sarebbe infine argomentato che, se il cerchio è la figura isoperimetrica in 2 dimensioni, per analogia possiamo dire che la sfera sia la figura che minimizza la superficie a parità di volume.

Le dimostrazioni da presentare sono quindi 2:

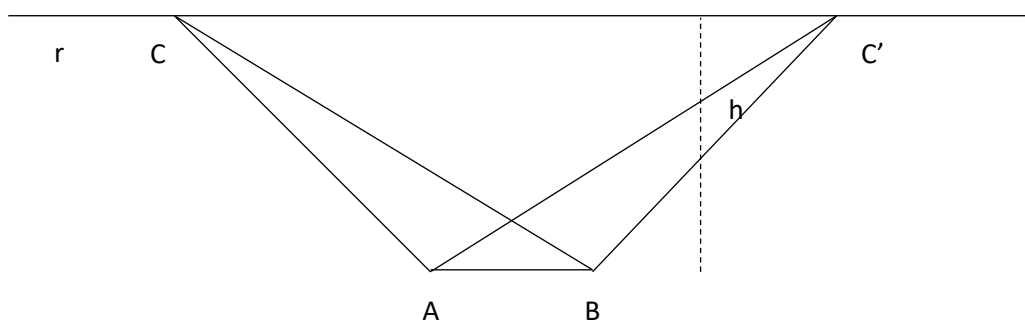
- 1) Il triangolo equilatero è isoperimetrico rispetto ai triangoli;
- 2) Il cerchio è isoperimetrico rispetto ai poligoni regolari.

Per quanto riguarda la prima dimostrazione, avevo inizialmente pensato di proporre un'argomentazione che facesse leva sull'intuizione visiva.

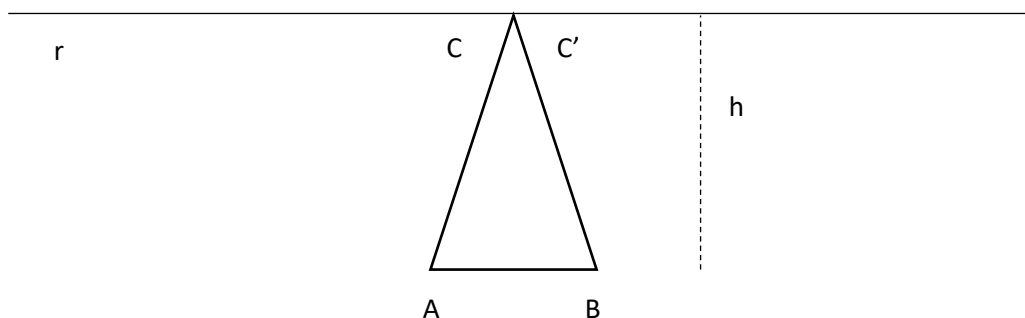
Fissata la base AB e l'altezza h : qualunque sia il terzo vertice, se preso sulla retta r , il triangolo avrà la stessa area.



Prendo i due casi nella figura seguente.



Si noti che, sia scegliendo come terzo vertice un punto molto a destra, sia scegliendo un punto molto a sinistra, il perimetro assumerà un valore alto dovuto alle lunghezze di AC (AC') e BC (BC'). Avvicinando C e C' tra loro riduco il perimetro, fino a farli coincidere.

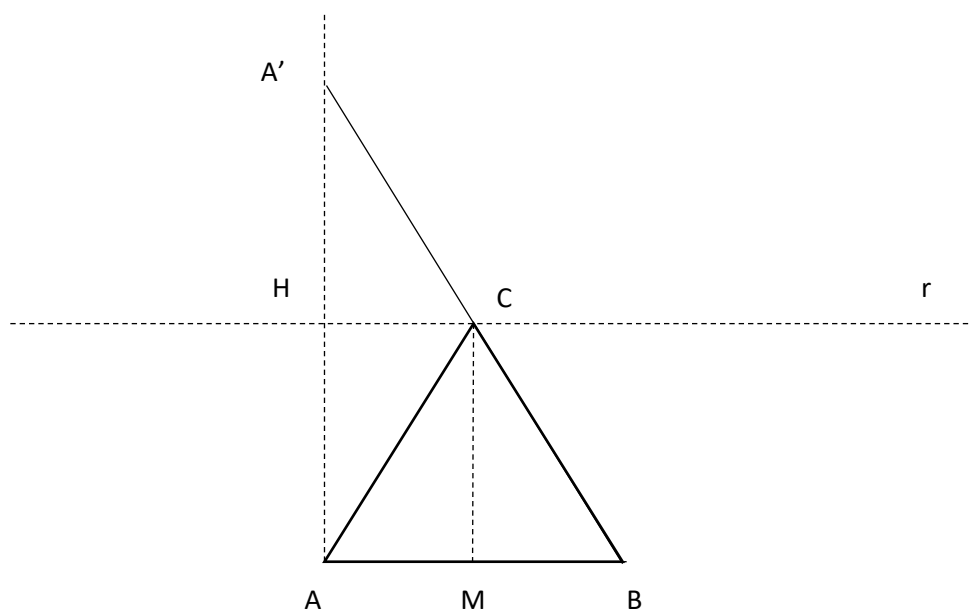


Il triangolo isoscele minimizza il perimetro.

Il triangolo equilatero può essere visto come un triangolo isoscele per tutti i lati (dato il triangolo ABC con $AC = BC$ come in figura, si può fissare BC come nuova base e ripetere il procedimento per trovare A tale che $AB = BC$, da cui $AB = BC = AC$).

Il problema di quest'argomentazione è che, se risulta ovvia quando il punto C (C') è tale che la sua proiezione sulla retta contenente il segmento AB cada in un punto esterno al segmento AB , non lo è quando la proiezione del punto C è un punto interno al segmento AB , poiché se prendiamo ad esempio un punto C'' tale che la sua proiezione coincida con il punto A , il suo perimetro sarà dato dalla somma $AB + AC'' + BC''$, mentre il perimetro di ABC sarà $AB + AC + BC$, e poiché $BC < BC''$ ma $AC > AC''$, non possiamo concludere che il perimetro di ABC sia minore del perimetro di ABC'' .

Non avendo trovato argomenti che potessero seguire l'argomentazione precedente e risolvessero il problema, ho proposto un'altra dimostrazione che sfrutta la dimostrazione al problema di Erone.



Dati A e B voglio trovare C tale che il perimetro di ABC sia minimo (ovvero tale che $AB + BC + AC$ sia minimo).

Costruisco A' simmetrico di A rispetto ad r .

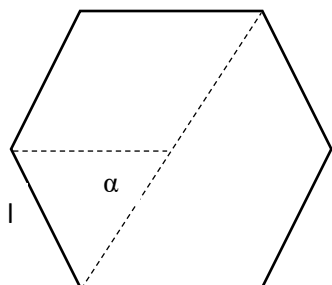
Ora trovo C tale che $A'C + BC + AB$ sia minimo (poiché $A'C = AC$ essendo A' e A simmetrici rispetto ad r).

Per minimizzare $A'C + BC$ mi basta unire A' e B con un segmento e fissare C come punto di intersezione tra il segmento $A'B$ e la retta r .

Fissato H come punto di intersezione tra il segmento AA' e la retta r , si ha che H è punto medio del segmento AA' , quindi C è punto medio di $A'B$.

Si può dedurre che $HC = \frac{1}{2}AB$, quindi la proiezione di C su AB è M punto medio tra A e B , il che implica che altezza e mediana coincidono, da cui si deduce che ABC è triangolo isoscele.

Per quanto riguarda la seconda dimostrazione si è scelto di procedere nel seguente modo:



Definisco l'angolo α in funzione del numero di lati n :

$$\alpha = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

Definisco l'area A come somma delle aree dei triangoli isosceli che formano il poligono regolare:

$$A = \frac{n}{2} l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Faccio l'inversa e trovo il quadrato della lunghezza del lato, così da poter definire il perimetro del poligono come $P = n \cdot \sqrt{l^2}$:

$$l^2 = \frac{4A}{n} \operatorname{tg}(\alpha)$$

Trovo infine l'equazione di P in funzione di una singola variabile (fissato il valore dell'area A):

$$P = 2n \sqrt{\frac{A}{n}} \sqrt{\operatorname{tg}(\pi/n)} = 2\sqrt{A\pi} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(t)}{t}}$$

dove $t = \pi/n \rightarrow n = \pi/t$

Si tratta ora di trovare il minimo di P al variare di t .

Trovare il minimo di P è equivalente a trovare il minimo di P^2 , perciò scrivo:

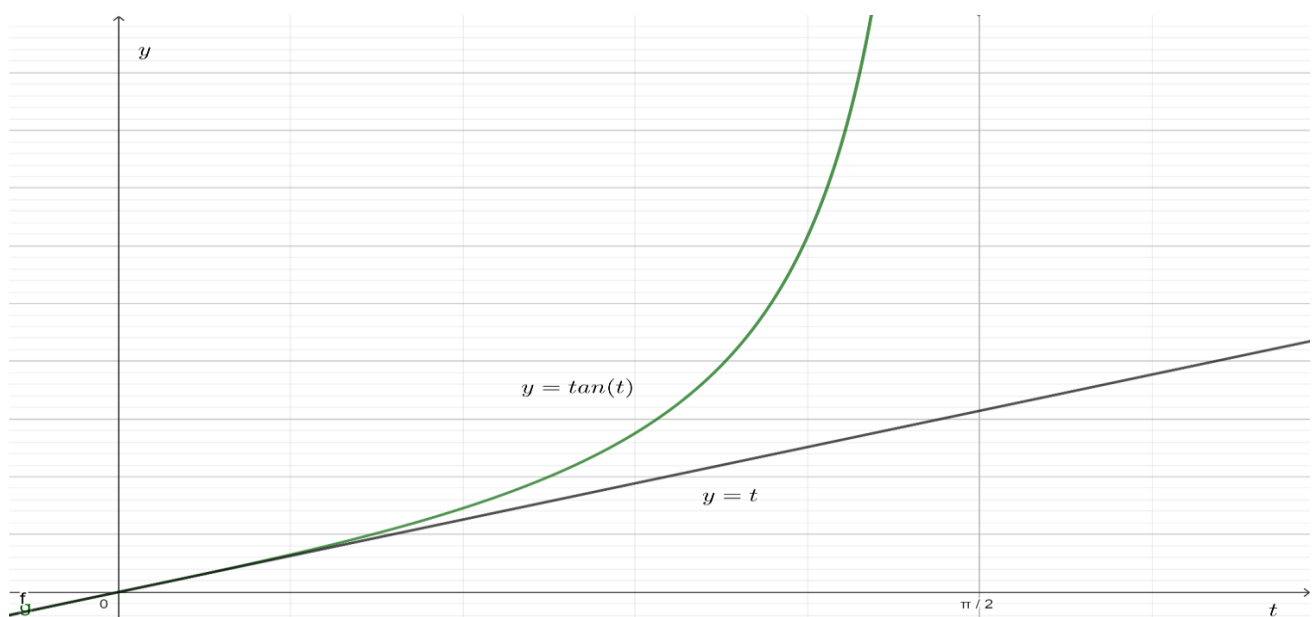
$$P^2 = 4A\pi \frac{tg(t)}{t} = K \frac{tg(t)}{t}, \text{ con } K = \text{costante}$$

Ora si graficano le funzioni $y = t$, $y = tg(t)$ per valutare se la funzione $f(t) = \frac{tg(t)}{t}$ è crescente o decrescente.

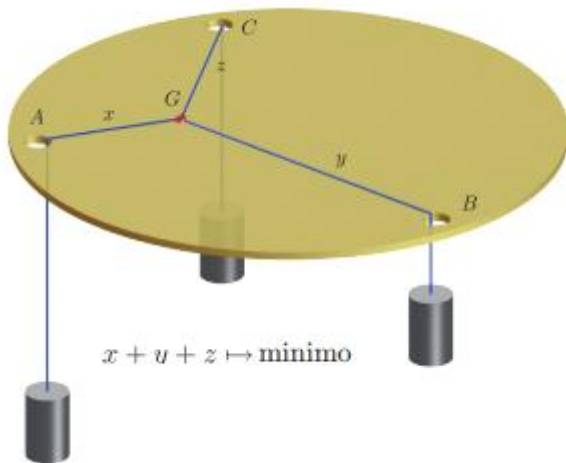
Ricordiamo che $t = \pi/n$ dove n rappresenta il numero di lati di un poligono, perciò il valore di t sarà compreso tra 0 e $\pi/3$.

Dal grafico in basso, dove $y = tg(t)$ è rappresentata dalla curva verde e $y = t$ dalla retta nera, si può dedurre che la funzione $f(t) = \frac{tg(t)}{t}$ sia crescente nel dominio che ci interessa, e che abbia il suo estremo inferiore per $t \rightarrow 0$, ossia per $n \rightarrow \infty$.

Poiché possiamo quindi dedurre che aumentando il numero dei lati di un poligono regolare, fissata l'area, il perimetro si riduca, e poiché possiamo considerare il cerchio come un ideale poligono regolare con infiniti lati, possiamo concludere che il cerchio sia la figura isoperimetrica.



Conclusa la preparazione della parte teorica necessaria a dimostrare il fatto che la sfera sia la figura geometrica che minimizza la superficie fissato un volume, abbiamo proceduto a preparare la parte riguardante il punto di Steiner (o Fermat) presentato rapidamente al termine del primo laboratorio didattico attraverso le lamine saponate. Per aumentare la generalità del problema si è scelto di presentarlo non solo nella forma delle lamine saponate, ma anche nella forma schematizzata nella figura sotto.

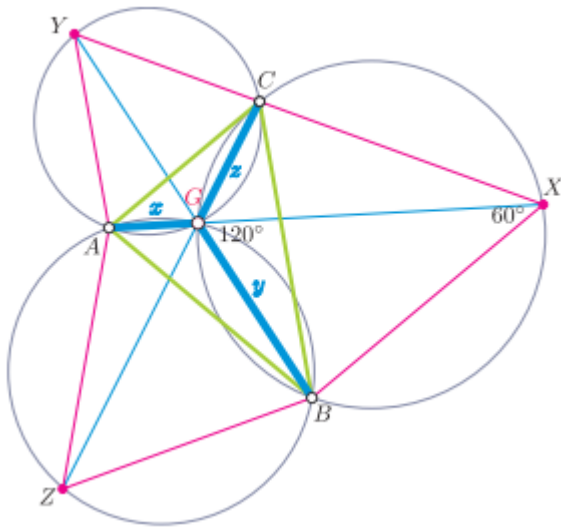


Attaccando tre pesetti a tre fili si giunge alla stessa configurazione dei telai di lamina saponata con tre viti, ossia ad una configurazione simmetrica in cui tutti gli angoli misurano 120° . Il problema è un problema di minimo analogo in cui si tratta di capire perché la configurazione con quegli angoli è la configurazione di minimo. Si è pensato di fabbricare questo strumento, per cui sarebbero serviti una lastra di legno da forare, dei pesetti tarati e dei fili sottili (si è optato per i fili da pesca). Si è anche pensato di produrre più di tre fori, in maniera tale da mostrare che la configurazione in cui tutti gli angoli misurano 120° si sarebbe creata indipendentemente dalla scelta dei 3 fori.

Per quanto riguarda la dimostrazione, anche in questo caso l'insegnante ha preferito una dimostrazione geometrica intuitiva, al costo di sacrificare parzialmente il rigore. Per la dimostrazione rigorosa vedi capitolo x.

La dimostrazione che si è scelto di presentare è divisa in due parti:

- 1) Costruzione geometrica del punto isogonale (o di Fermat, o di Steiner);
- 2) Dimostrazione geometrica della proprietà del punto isogonale di essere un punto di minimo.



Dato un triangolo ABC vogliamo costruire il punto isogonale G.

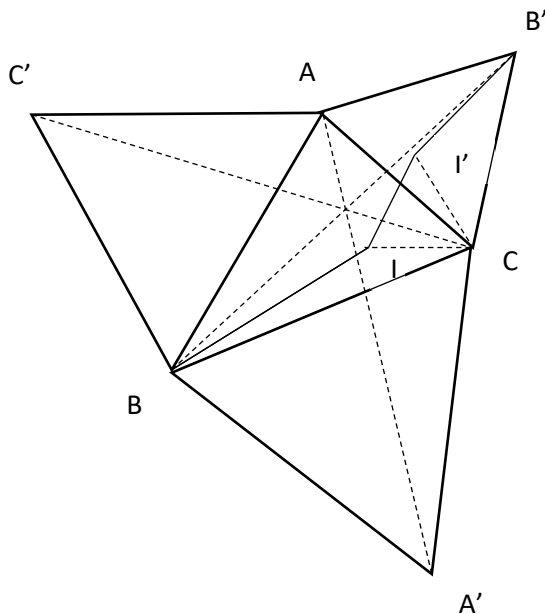
Per farlo costruiamo un triangolo equilatero su ognuno dei tre lati del triangolo e congiungiamo i vertici ottenuti X,Y,Z ai vertici opposti (rispettivamente A,B,C). Il punto isogonale G è il punto di intersezione dei segmenti XA, YB, ZC.

Considero i triangoli AXC e BYC. Sono congruenti per il primo criterio di congruenza poiché:

- 1) $XC \cong BC$
- 2) $YC \cong AC$
- 3) $BCY^\circ \cong XCA^\circ \cong BCA^\circ + 60^\circ$

Ne consegue che sono congruenti gli angoli GAC° e GYC° . Quindi i punti A e Y appartengono allo stesso arco di circonferenza con GC come corda, perciò esiste una e una sola circonferenza passante per i punti A,C,G,Y, dove AGCY è quadrilatero inscritto. Essendo l'angolo AYC° uguale a 60° , se ne deduce che l'angolo AGC° sia di 120° . Si può fare lo stesso ragionamento analogo per trovare che anche CGB° e AGB° sono entrambi di 120° .

Va ora dimostrato che se $AGC^\circ \cong CGB^\circ \cong AGB^\circ \cong 120^\circ$, allora $AG + BG + CG$ assume valore minimo.



Dato il triangolo ABC costruiamo un triangolo equilatero su ognuno dei suoi lati.

Scegliamo un punto I interno al triangolo. Facciamo una rotazione in senso orario di 60° intorno al punto C. Avremo che il punto A finirà in B' , mentre il punto I finirà in I' , quindi si avrà $AI \cong B'I'$.

Trovare il minimo di $AI + BI + CI$ è allora equivalente a trovare il minimo di $B'I' + I'I + BI$, ma questo è possibile solo quando il punto I appartiene alla retta BB' . Ripetendo il ragionamento rispetto ai punti A e B si trova che il punto I è il punto di intersezione dei segmenti AA' , BB' , CC' .

Ricominciata la scuola dopo le vacanze estive, l'insegnante ha ripreso l'argomento facendo un ripasso di quanto affrontato nei laboratori, integrando con l'esperimento dei pesetti per il punto di Steiner. Ha presentato a tutta la classe la dimostrazione del fatto che il cerchio sia la figura bidimensionale che minimizza il perimetro a parità di area, mentre le altre dimostrazioni le ha spiegate al solo gruppo di matematici. Questo per 2 motivi principali: il primo riguarda il fatto che il festival fosse alle porte e la classe avesse programmato una gita nel periodo che va tra l'inizio della scuola e le date del festival, perciò ci sarebbe stato poco tempo per preparare il tutto. Gli studenti si sono quindi divisi i ruoli, e mentre il gruppo matematico seguiva le lezioni sulle dimostrazioni geometriche, il gruppo di chi avesse dovuto preparare i materiali seguiva una lezione con il loro professore di chimica per approfondire il discorso dell'acqua saponata in particolare. Il secondo

motivo riguarda il fatto che l'insegnante sarebbe ritornata su quelle dimostrazioni una volta introdotti gli strumenti dell'analisi necessari, il che avrebbe risparmiato fatica mentale agli studenti non particolarmente interessati alla matematica, ma avrebbe permesso agli studenti più interessati un approfondimento maggiore che avrebbe permesso loro di comprendere meglio anche da un punto di vista epistemologico la natura degli strumenti matematici introdotti (oltre ad essere un piccolo esempio del cosiddetto insegnamento "a spirale" introdotto da Bruner (Bruner, 2002)). In effetti anche Vailati invita gli insegnanti a coltivare negli studenti la fiducia nel metodo deduttivo, non limitandosi a dare una sola dimostrazione delle proposizioni più significative, ma facendo vedere loro come si possa pervenire a una stessa conclusione per vie diverse o anche con strumenti matematici differenti, cosa che ad esempio egli fa negli appunti relativi alle lezioni tenute nel 1901-1904 presso l'Istituto Tecnico di Como (Giacardi, 2011), dove affronta il problema di trovare la somma dei primi numeri naturali dispari, dei quadrati dei primi numeri naturali e, infine, dei cubi dei primi numeri naturali, presentando dimostrazioni di vario tipo, fra cui alcune per induzione, altre con l'aiuto di visualizzazioni grafiche (Vailati, G. Appunti per Lezioni, Istituto Tecnico, Como 1901-1904, Fondo Vailati, cit., Cartella 38, fasc. 340.).

Ho notato quindi un approccio di insegnamento eterogeneo, per cui si è insistito particolarmente sugli studenti più interessati alla materia (che spesso coincidono con i più portati), mentre si è dato modo agli altri studenti di partecipare al progetto in base alle loro qualità, e ritengo che questo abbia generato negli studenti un grande senso di appartenenza alla classe e al progetto, dimostrato dal loro coinvolgimento e dal loro impegno.

Nella lezione del 14 Ottobre, gli studenti si sono divisi in gruppi. Io ero responsabile del gruppo matematico, il cui compito era quello di pensare e realizzare dei cartelloni da esporre durante il festival, oltre a preparare delle piccole lezioni sul tema. Il gruppo era composto da 4 ragazze e 3 ragazzi, che l'insegnante mi ha descritto come fra i più portati della classe in matematica. Abbiamo ragionato sul come presentare gli argomenti pensando in particolare al target di riferimento, ossia un target eterogeneo, che comprendeva studenti che non conoscono i criteri di congruenza dei triangoli, il concetto di funzione, e altre cose che nella lezione fatta loro dall'insegnante erano implicite date le conoscenze pregresse della classe. Si è deciso di progettare alcuni cartelloni con immagini stampate, accompagnate da spiegazioni su un piano di divulgazione/comunicazione della scienza, che fungessero da spiegazione completa per un pubblico più casual, e da introduzione per le classi delle

scuole presenti. Inoltre si è deciso di progettare altri cartelloni in cui si entrasse più nel dettaglio delle dimostrazioni, in maniera tale da stratificare il livello della spiegazione e adattarla più facilmente al pubblico presente. Si è inoltre deciso di utilizzare degli strumenti e delle dimostrazioni pratiche che accompagnassero la spiegazione, vista l'astrazione richiesta. È inoltre emersa l'idea di utilizzare delle metafore per aiutarsi a spiegare in particolare l'idea del principio di minimo. Ritengo che gli studenti abbiano trovato non banale il fatto di dover semplificare e rendere comprensibile a tutti l'argomento da divulgare, senza snaturarlo. Ho notato la tentazione di riproporre il percorso logico della lezione che gli studenti avevano ricevuto, e una tendenza a non voler sacrificare nulla di quanto loro avessero imparato.

Questo processo di progettazione e pianificazione di una spiegazione ha permesso loro di entrare in una maggiore profondità sia sul piano conoscitivo degli argomenti in questione, sia sul piano epistemologico. Questo perché emergeva spesso la necessità di rispondere a domande del tipo: "perché stiamo facendo questa dimostrazione?" con l'idea che la risposta fosse chiara a chi stesse ascoltando e non conoscesse l'argomento. Spesso le dimostrazioni in matematica seguono un percorso logico lineare, per cui diventa chiaro il perché si parta con certi assunti solo una volta terminata la dimostrazione, ma questo carica l'ascoltatore di una fatica mentale che rischia di farlo perdere nella complessità e lunghezza delle dimostrazioni. È emerso quindi che debba essere da chiara fin da subito la necessità di quella dimostrazione per andare avanti e raggiungere l'obiettivo prefissato.

Questa problematica è emersa, ad esempio, quando si discuteva di presentare la dimostrazione del fatto che il triangolo isoscele fosse il triangolo isoperimetrico (fissata la base), ma non era chiaro il perché venisse fatta quella dimostrazione senza sapere che l'obiettivo era quello di restringere la ricerca della figura geometrica isoperimetrica ai soli poligoni regolari.

Inoltre, la volontà di spiegare ad altre persone delle conoscenze da loro possedute nel contesto di un festival, oltre allo sforzo nel riuscire a rendere comprensibile l'argomento ad un pubblico il più vasto possibile, ha fatto emergere il ruolo che questo percorso didattico può avere nei confronti dell'educazione alla cittadinanza e appartenenza ad una comunità.

Il compito è stato più difficile del previsto e, nonostante la partecipazione molto attiva (in realtà solo 4 studenti su 7 hanno partecipato attivamente proponendo e discutendo, ma per ragioni di minor timidezza rispetto agli altri) e l'assenza di momenti di distrazione, si è riusciti a concludere soltanto

una bozza di quel che si sarebbe presentato al festival, dimostrando la non banalità di questo tipo di attività didattica e il fatto che sia necessario molto tempo da dedicarle.

Gli studenti hanno dimostrato grande motivazione e senso di appartenenza per quest'attività, poiché hanno dedicato più tempo nelle ore extra scolastiche alla preparazione dell'evento, nonostante non ci fosse nulla di obbligatorio e ci fosse la possibilità di rinunciare in qualsiasi momento.

6.4. Il Festival

Il 22 Ottobre 2022 e il 23 Ottobre 2022 ho avuto modo di assistere al festival e al lavoro della classe. Nei giorni precedenti un gruppo di studenti si era occupato di distribuire in piazza dei volantini come quello in figura.



La mattina era dedicata a classi scolastiche che variavano da classi di scuole medie a classi di coetanei. Per le classi era stato pensato un percorso articolato nei seguenti passaggi:

- 1) Inizialmente, venivano forniti agli studenti delle classi partecipanti dei fogli con delle domande, molto simili (quando non identiche) a quelle del Questionario 1 e del Questionario 2, a cui rispondere, ovvero le seguenti (le foto dei fogli sono in Appendice):

A) ATTIVITA' 1: LA FORMA DELLE BOLLE DIPENDE DAL TELAIO?

- **Con il filo di ferro, forma un anello a forma di circonferenza, triangolo e quadrato. Di che forma verranno fuori le bolle? Quali differenze ti aspetti? Rispondi prima di provare.**

B) ATTIVITA' 2: LA TENSIONE SUPERFICIALE

- Costruisci un telaio circolare con filo di cotone leggermente più lungo del diametro fissato a due punti diametralmente opposti. Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo.
- **Ora immagina che cosa succederà rompendo una delle due parti della membrana saponata, ad esempio quella a destra del filo) e scrivilo qui sotto**
- Costruisci un telaio circolare e in un suo punto fissa un filo di cotone che abbia un cappio in fondo (cf. figura). Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo. Ora immagina che cosa succederà la parte membrana contenuta nel cappio e scrivilo qui sotto.
- Rompi veramente la parte di membrana contenuta nel cappio e osserva che cosa succede.

C) ATTIVITA' 3

- Giornata di fuoco nell'assessorato all'Urbanistica del comune di Paperopoli. Nella piana di Borgo Papero si progetta la costruzione di tre villaggi, Alfa, Beta e Gamma, disposti ai vertici di un triangolo equilatero. Ad Alfa avrà sede lo stadio, Beta ospiterà l'unico centro commerciale della zona e a Gamma verrà costruito il cinema locale. Per fare in modo che tutti gli abitanti della piana possano usufruire dei servizi, sarà necessario collegare i tre villaggi con un sistema di strade che, al fine di minimizzare i costi, dovrà essere progettato per avere la minor lunghezza possibile. Come dovranno essere collegati i villaggi tra loro?
Traccia uno schizzo preciso e scrivi le motivazioni delle tue decisioni nelle righe qui sotto

D) ATTIVITA' 4

- **Prendi in mano il telaio in plexiglass che ha tre pioli e forma una lamina saponata. Osserva che succede: per quale motivo la forma della membrana è collegata al problema che hai risolto qui sopra?**

E) ATTIVITA' 5

- **Un corpo pesante tende a collocarsi più in basso possibile.
Per quale motivo i tre pesi (uguali tra loro) si dispongono in modo tale che la lunghezza complessiva del filo che giace sul tavolo sia minima?**
- **Che cosa c'entra questo con i problemi analizzati precedentemente e con le lamine di sapone?**
- *Effettua l'esperimento e misura gli angoli tra le corde*

Di queste domande ho notato principalmente la forte dipendenza degli studenti dall'insegnante. Alcune domande sono rimaste identiche a quelle proposte nei questionari, compresi gli errori di battitura (come la dimenticanza di una parentesi tonda). Inoltre solo le prime due attività hanno un nome, ovvero lo stesso delle attività proposte nel Questionario 2, mentre per le altre attività gli studenti non hanno pensato ad un titolo. Questo mostra come, anche in quinta superiore, ci sia una bassa indipendenza che l'insegnante sia un riferimento molto forte (cosa che si confermerà anche nella parte relativa al gruppo matematico).

- 2) Una volta che gli studenti rispondevano alle domande a cui potevano rispondere, venivano diretti verso dei banchi su cui si facevano esperimenti fra cui quelli descritti nei fogli. In questo frangente venivano date delle spiegazioni qualitative e introduttive al perché avvenisse quanto osservato. Il livello di spiegazione fornito dagli studenti ai banchetti era pari a quello fornito loro dall'insegnante, perciò si introduceva già alle classi coinvolte il principio di minimo e le ragioni qualitative per cui venissero osservato quei fenomeni, tralasciano i dettagli

matematici. Inoltre veniva utilizzato spesso lo stesso approccio che era stato usato verso di loro durante le lezioni, ossia quello di chiedere cosa gli studenti delle classi ospitate si aspettassero di osservare prima di mostrare il fenomeno.

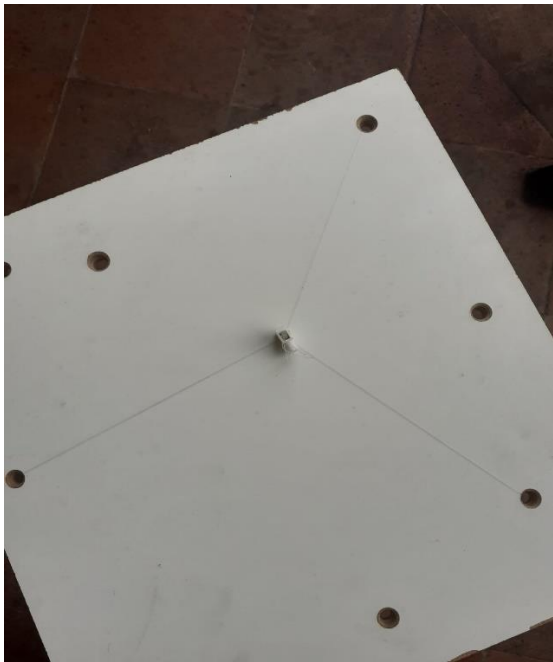
Nei banchetti si dava modo alle classi di eseguire gli esperimenti e sperimentare quanto volessero.

Alcuni esperimenti riguardavano le situazioni descritte nei fogli distribuiti all'inizio (ad alcune domande si poteva rispondere solo dopo aver osservato quanto avveniva, nello stesso modo di quando gli studenti avevano affrontato il secondo laboratorio).

Uno degli esperimenti riguardava l'immersione di telai in plexiglass in acqua saponata, come quelli in figura sotto, e la conseguente formazione del punto di Steiner.



Nelle figure seguenti viene mostrato un sistema che permette la formazione del punto di Steiner sfruttando l'energia potenziale gravitazionale.



Si noti il fatto che si è scelto di fare diversi buchi sul tavolo, in maniera tale da poter riposizionare i pesetti e mostrare che l'angolo che si viene a formare tra i fili è sempre di 120° .

C'erano inoltre diverse bacinelle piene di acqua saponata e fili di ferro con diverse forme (da forme semplici come la circonferenza, il triangolo e il quadrato, a forme come l'elica). Di fianco alle bacinelle c'erano anche bastoncini colorati che si potevano attaccare fra loro e formare forme geometriche tridimensionali da immergere nelle bacinelle per mostrare quello che accade in 3 dimensioni.



3) Infine gli studenti delle classi ospitate sarebbero stati portati ad ascoltare la teoria che sta dietro a quanto osservato negli esperimenti. Di questa parte si sarebbe occupato il gruppo matematico con cui ho lavorato in classe.

Il gruppo ha preparato i cartelloni seguenti:

Perché le bolle sono sferiche?



Perché
la natura è pigra !!



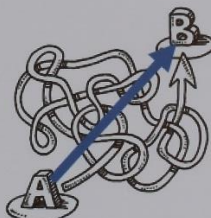
Infatti:

Le molle si "rilassano"

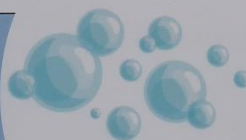
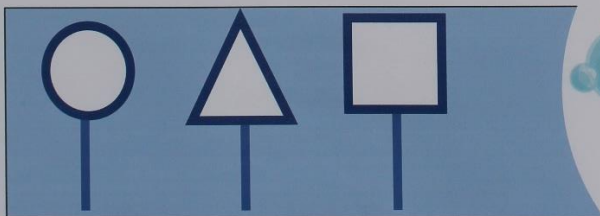


Le foglie cadono in basso

La luce cerca la strada più breve



La forma delle gocce risparmia...



In una bolla soffiama una certa quantità d'aria.

La membrana di sapone cerca di formare la superficie di area minore possibile.

IL PERCHÉ STA NELLA MATEMATICA!

SFERA A VOLUME FISSO $\xrightarrow{\text{corrisponde a}}$ CERCHIO AD AREA FISSA

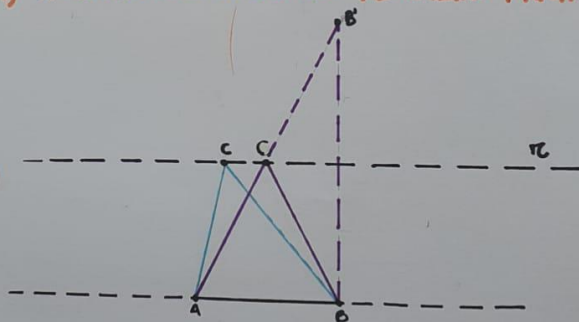
Tra i vari poligoni regolari a parità di area, il cerchio ha il perimetro minore



1. TRA I TRIANGOLI AD AREA FISSATA, QUELLO EQUILATERO HA PERIMETRO MINIMO

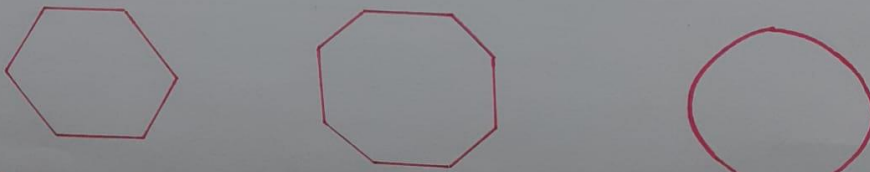
Triangolo di area data con base \overline{AB} fissata
 B' simmetrico di B rispetto a π
 $B'C = BC$

Minimizzare $AC + BC =$ minimizzare $AC + B'C$
 $\Rightarrow ABB'$ triangolo isoscele
 Perimetro minimo \rightarrow triangolo equilatero
 Se fisso $\overline{AB} \rightarrow AC = CB$
 Analogamente, se fisso $\overline{AC} \rightarrow AB = BC$



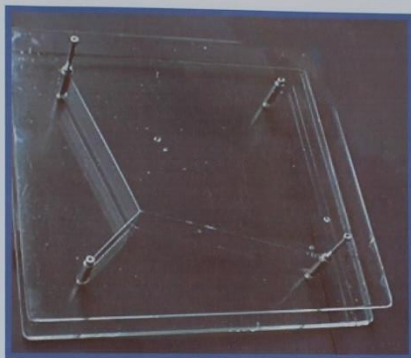
\rightarrow regolare perché a parità di area il perimetro è minimo

2. POLIGONO DI n LATI AD AREA FISSATA
 AL CRESCERE DEL NUMERO DI LATI \rightarrow IL PERIMETRO DECRESCIE



$$A = n \cdot \frac{l^2}{4} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{4A \tan \frac{\pi}{n}}{n}} \Rightarrow p = n l = n \cdot \sqrt{\frac{4A \tan \frac{\pi}{n}}{n}} \Rightarrow p(n) = 2\sqrt{A} \sqrt{n \tan \frac{\pi}{n}}$$

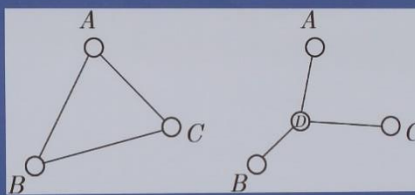
Perché le membrane assumono certe forme?



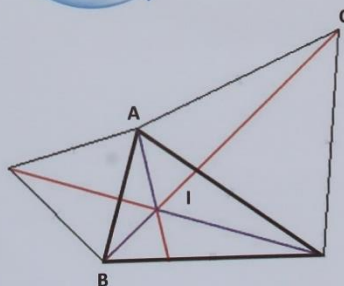
*Perché
la natura è pigra!!*

Ad esempio

Considera un triangolo A, B, C : qual è il modo più breve per connettere i vertici?



*Tutti esempi di
minimalità*



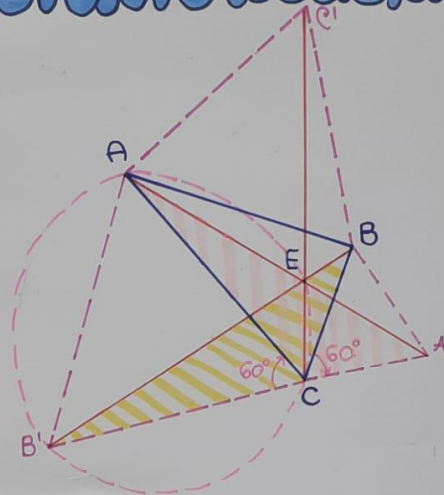
Questo punto è detto isogonale perché gli angoli che formano i segmenti che lo congiungono ai vertici sono tutti di 120°

Il punto isogonale J è quello per il quale $AJ+BJ+CJ$ è il minimo possibile

COSTRUZIONE DEL PUNTO ISOGONALE

1. CONSIDERO IL TRIANGOLO ABC

2. COSTRUISEO SUI LATI I TRIANGOLI EQUILATERI COME IN FIGURA



3. CONSIDERO $\triangle A'AC$ e $\triangle B'BA$: SONO CONGRUENTI PERCHÉ
 $A'C \cong BC$, $B'A \cong AC$
 $\angle B'BA = \angle B'BA + 60^\circ$, $\angle A'AC = \angle B'BA + 60^\circ$

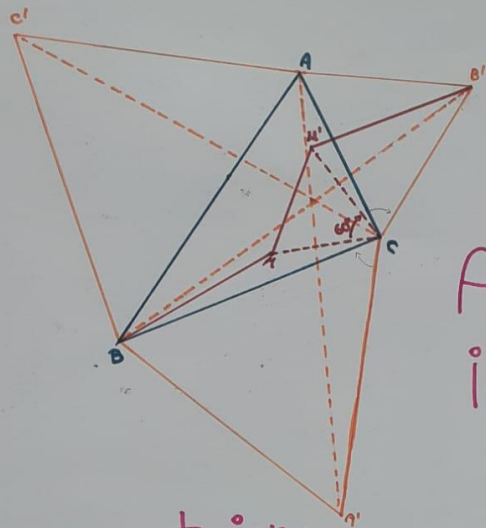
4. NE CONSEGUE CHE $\angle AEC \cong \angle BEC$

QUINDI A e B' appartengono allo stesso ARCO di CIRCONFERENZA in cui EC è una CORDA

5. L'ANGOLO $\angle AEC = 180^\circ$ perché è opposto ad $\angle ABC$ nel quadrilatero iscritto $AB'CE$

6. IL RAGIONAMENTO SI PUÒ RIPETERE

- E è il punto comune alle tre circonferenze circoscritte ai triangoli ACB' , ABC' , BCA'
- gli angoli $\angle AEC = \angle AEB = \angle BEC = 120^\circ$



• Sia M il punto tale che $AM+BM+CM$ sia il minimo

• Effettuiamo una rotazione

ρ intorno a C di 60°

• Poiché $A \xrightarrow{\rho} B'$

$M \xrightarrow{\rho} M'$ si ha $AM \cong B'M'$

• Il minimo di $AM+BM+CM$ è quindi il minimo di $BM+MM'+M'B'$

→ Ma il minimo si ha quando M e M' sono nel segmento BB'

Ripetendo il ragionamento: M è il PUNTO DI INTERSEZIONE DI AA' , BB' e CC' .

Il **primo cartellone** è stato interamente utilizzato per introdurre all'esistenza del principio di minimo sforzo attraverso esempi diversi tra loro, in maniera tale da inquadrare da un punto di vista teorico il problema in questione. Funge quindi da introduzione per gli studenti delle classi partecipanti, mentre funge da divulgazione verso il pubblico generico che dovesse interessarsi ma senza entrare nei dettagli matematici.

Il **secondo cartellone** è stato utilizzato per dimostrare il fatto che il cerchio minimizzi il perimetro tra tutte le figure geometriche con area fissata, dimostrando così la ragione per cui le bolle assumono sempre forma sferica (se non vincolate). È stato scelto di affermare da subito, senza dimostrarlo immediatamente, che il cerchio sia la soluzione al problema isoperimetrico se confrontato con tutti i possibili poligoni regolari, e che i poligoni regolari minimizzino il perimetro fissata l'area rispetto agli altri poligoni con stesso numero di lati. In questa maniera si sarebbe creata la necessità della prima dimostrazione mostrata nel cartellone, ossia la dimostrazione del fatto che il triangolo equilatero sia il triangolo con perimetro minore a parità di area. È stato quindi scelto di costruire una "scaletta" che partisse da quel che si vuole dimostrare alla fine (in questo caso il fatto che le sfere minimizzino la superficie a parità di volume), mostrando da subito i passaggi intermedi necessari da attraversare, e infine dimostrando il necessario nell'ordine inverso, secondo lo schema seguente:

Affermo di dover dimostrare A_1



Affermo che per dimostrare A_1 devo dimostrare A_2



...



Affermo che per dimostrare A_{n-1} devo dimostrare A_n



Dimostro A_n



...



Dimostro A_1

Nel caso in questione alcune dimostrazioni sono state sostituite con argomentazioni, ma si è comunque voluta costruire una catena logica completa e coerente. In particolare si può decostruire il ragionamento nel seguente modo:

A_1 : la sfera è la figura geometrica tridimensionale con superficie minore a parità di volume;

A_2 : la circonferenza è la figura geometrica bidimensionale con perimetro minore a parità di area;

A_3 : la circonferenza ha minore perimetro, fissata l'area, rispetto a tutti i possibili poligoni regolari;

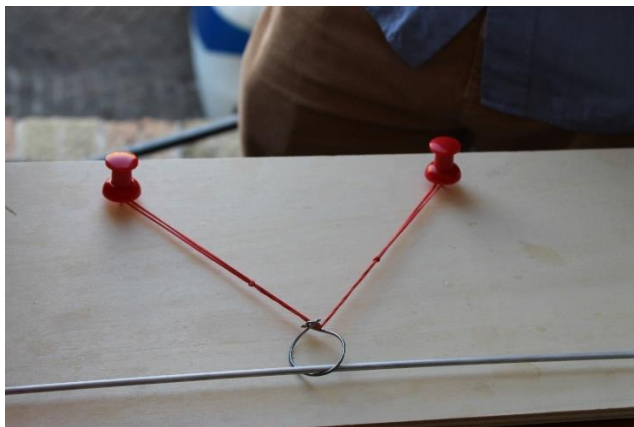
A_4 : i poligoni regolari hanno minore perimetro rispetto a tutti gli altri poligoni con stessa area e stesso numero di lati;

A_5 : il triangolo equilatero è il triangolo con il minor perimetro fissata l'area.

L'affermazione A_5 viene dimostrata nella prima dimostrazione del cartellone. Il fatto che da questa affermazione si possa dedurre l'affermazione A_4 viene dato per buono, argomentando il fatto che tutte le figure geometriche bidimensionali possono essere viste come somme di triangoli. A questo punto viene dimostrata l'affermazione A_3 nella seconda dimostrazione del cartellone, che assieme all'affermazione A_4 , portano a dimostrare l'affermazione A_2 . Il fatto che da quest'ultima ne consegua l'affermazione A_1 viene argomentato attraverso l'analogia (la sfera è la figura geometrica tridimensionale analoga al cerchio).

Si può quindi concludere che questo processo a ritroso proposto da me durante la lezione del 14 Ottobre 2022 sia stato ben accolto dagli studenti del gruppo matematico.

Gli studenti hanno inoltre deciso di accompagnare la spiegazione con l'utilizzo di strumenti, come nel caso della figura seguente in cui è rappresentato un meccanismo che funge da prova empirica del fatto che, fissate una base e un'altezza, il triangolo isoperimetrico è il triangolo isoscele.



Nel **terzo cartellone** si fa una sintesi del problema di Steiner, mostrando come questo sia collegato al problema isoperimetrico. Anche questo, così come il primo cartellone, è stato pensato per essere fruibile anche al pubblico più generale, non solo a studenti o in generale a persone in possesso degli strumenti matematici necessari ad affrontare il problema da un punto di vista più profondo.

Il **quarto cartellone** è stato interamente utilizzato per la costruzione del punto isogonale, per preparare alla dimostrazione del fatto che il punto isogonale sia il punto che minimizza la somma delle distanze del punto stesso dai vertici del triangolo.

Il **quinto cartellone** è stato utilizzato, per l'appunto, per la dimostrazione preparata dal quarto cartellone.

In generale ho notato una tendenza nei ragazzi a voler spiegare ogni singola cosa avessero imparato, oltre a una tendenza ad emulare le lezioni ricevute. Ma, essendo stato fatto il tutto all'aperto, non vi era a disposizione una lavagna per fare calcoli e disegni, e ritengo che questo abbia appesantito molto le dimostrazioni per gli ascoltatori, in particolare per quanto riguarda la dimostrazione del fatto che per i poligoni regolari di stessa area, all'aumentare del numero di lati viene ridotta la lunghezza del perimetro. Ritengo non fosse necessario entrare nei dettagli di ogni singolo passaggio matematico, anche perché risultava difficile seguire senza l'utilizzo di una lavagna anche per me.

La giornata seguente è stata dedicata principalmente alle famiglie, quindi si facevano fare bolle di sapone ai bambini e si spiegava in maniera più colloquiale agli adulti che fossero interessati. Si è deciso di lasciare i cartelloni in vista in maniera tale che chiunque potesse leggerli, ed eventualmente chiedere delucidazioni a chi fosse presente al banchetto. È emerso da parte degli studenti una grande voglia di comunicare quanto avessero appreso, e mi sono accorto, parlando con alcuni degli studenti del gruppo matematico, che questi avessero già intenzione di proseguire gli studi nel campo delle scienze dure. Ritengo quindi che sia stata un'esperienza formativa in particolare per loro.

Conclusioni

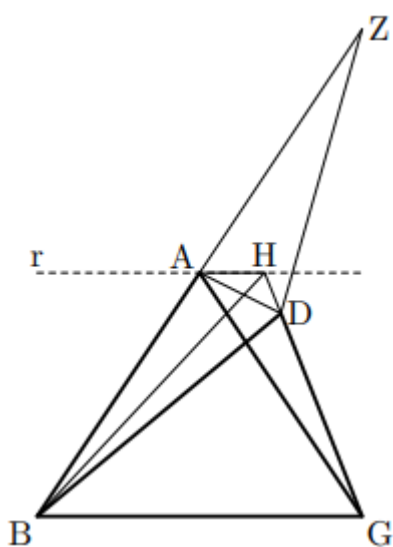
Obiettivo della tesi era quello di osservare le dinamiche che si sarebbero create fra gli studenti dati un contesto di riferimento e un percorso didattico.

Ritengo che il laboratorio sia riuscito nell'intento di motivare e interessare la classe all'argomento, cosa che ritengo evidente soprattutto nella risposta unanimemente positiva alla partecipazione al festival. Inoltre, l'approccio laboratoriale usato è stato facilmente traslato in un contesto di comunicazione della scienza, e questo ha permesso di incentivare un senso di appartenenza a una comunità e un senso di cittadinanza, mostrato dalla volontà degli studenti di comunicare agli altri quanto avessero appreso. Il tentativo di utilizzare un approccio troppo costruttivista ha trovato difficoltà nella prima lezione, mentre ha funzionato meglio un approccio più tradizionale di laboratorio accompagnato da una scheda di riferimento. La divisione in ruoli avvenuta nella preparazione al festival ha permesso agli studenti di approfondire quanto preferissero, e ha dato la possibilità anche agli studenti meno interessati alla matematica di poter dare il loro personale contributo, rafforzando il senso di appartenenza alla classe. La presenza del festival della scienza ha aiutato molto da questo punto di vista, ma ritengo che risultati simili potrebbero verificarsi anche se al posto di un festival cittadino si organizzasse qualcosa di analogo internamente alla scuola. L'argomento presentato ha dato la possibilità di mostrare dei punti di vista diversi sullo stesso tema, oltre a una collaborazione fra insegnanti di diverse discipline, il che favorisce un modo di ragionare interdisciplinare, mentre è molto comune che gli studenti ragionino vincolati dalla disciplina di riferimento (ad esempio, durante le ore di matematica si azionano ragionamenti e si ricordano conoscenze imparati durante le lezioni di matematica, durante le ore di chimica si azionano ragionamento e si ricordano conoscenze imparati durante le lezioni di chimica, etc...). I tempi del percorso didattico si sono allungati più del previsto, a causa anche del fatto che questo è stato spezzato dalle vacanze estive, per cui non c'è stato tempo di preparare un test di valutazione. Tuttavia si può valutare sommariamente il percorso che è stato fatto secondo i criteri di partecipazione, autonomia,

responsabilità, flessibilità e relazione ([a37f48be-1bb9-a472-f0fd-b6fcb9466905 \(miur.gov.it\)](https://a37f48be-1bb9-a472-f0fd-b6fcb9466905.miur.gov.it)). In particolare gli studenti hanno dimostrato molta responsabilità rispettando tutti i tempi previsti, nonostante questi fossero molto stretti. Inoltre hanno dimostrato grande partecipazione e collaborazione fra loro, organizzandosi in maniera autonoma per quel che riguarda i banchetti e i turni di lavoro. Questi risultati positivi dimostrano l'interesse e la motivazione che questo percorso didattico è stato in grado di fornire alla classe.

Appendice A: Proposizione 5 e proposizione 7 di Zenodoro

Proposizione 5. Sia DBG un triangolo dato di base BG , non isoscele. Allora il triangolo isoscele isoperimetrico ABG ha area maggiore.



Dimostrazione. Si supponga $BD > GD$ e si tracci la retta r parallela a BG e passante per il punto A e si indichi con H il punto di intersezione tra la retta r e il prolungamento di DG . Sia Z il simmetrico di G rispetto ad r e si noti che Z appartiene al prolungamento di AB . Ora basta dimostrare che $area(DBG) < area(HBG)$ (il triangolo HBG ha stessa area di ABG avendo BG in comune ed essendo i vertici A ed H equidistanti da BG), ovvero che $GAD^\circ < GAH^\circ$ (D giace sotto alla retta r). Applicando la disuguaglianza triangolare stretta al triangolo ZDB si ottiene:

$$ZD + DB > ZB = AB + AG = DB + DG$$

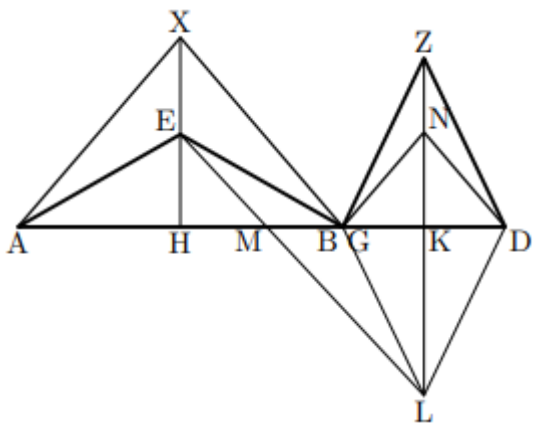
il che implica che $ZD > DG$. Quest'ultima disequazione, combinata con l'uguaglianza $AZ = AG$, implica che:

$$ZAD^\circ > GAD^\circ$$

Osservando che $ZAD^\circ + GAD^\circ = 2 \cdot GAH^\circ$ si ha infine che $GAD^\circ < GAH^\circ$.

Proposizione 7. Siano AEB e GZD due triangoli isosceli di basi disuguali AB , GD e lati obliqui congruenti ($AE = GZ$). Siano AXB e GND due triangoli isosceli simili tali che $AX + GN = AE + GZ$. Allora si ha

$$\text{area}(AXB) + \text{area}(GND) > \text{area}(AEB) + \text{area}(GZD)$$



Dimostrazione. Supponiamo che le basi AB e GD siano allineate e verifichino la disuguaglianza $AB > GD$. Sia L il punto simmetrico di Z rispetto ad AD , con M punto di intersezione di EL con AD , e siano H e K i piedi delle proiezioni di E e Z sopra le basi AB e GD . Si ha che:

$$(XB + BN)^2 = (XH + NK)^2 + HK^2$$

Inoltre

$$EL^2 = (EM + ML)^2 = (EH + LK)^2 + HK^2 = (EH + ZK)^2 + HK^2$$

Per la disuguaglianza triangolare stretta e la condizione isoperimetrica si ha che:

$$EL^2 < (EB + BL)^2 = (XB + BN)^2$$

da cui si deduce che

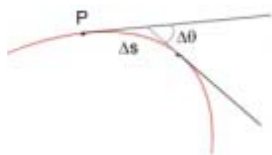
$$EH + ZK < XH + NK$$

Da quest'ultima disuguaglianza e dal fatto che $XH > EH$ si deduce che $NZ < EX$, da cui, ricordando che $GK < HB$, si ricava:

$$NZ \cdot GK < EX \cdot HB$$

il che prova che la variazione totale dell'area, nel passaggio dai due triangoli iniziali AEB , GZD ai due triangoli simili AXB , GND , è positiva.

Appendice B: Superfici minime



Data una curva come quella in figura, si definisce curvatura di una curva rispetto a un fissato punto P il $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s}$.

Per determinare il valore di questo limite si possono prendere due punti A e B a cavallo tra il punto P che individuano un tratto di lunghezza Δs . Costruiamo la circonferenza passante per i punti A, B e P, con $\Delta s \rightarrow 0$. Questa definisce un cerchio chiamato “cerchio osculatore”. La curvatura della curva nel punto P è definita come il reciproco del raggio del cerchio osculatore, il quale si ricava nel seguente modo:

$$r = \frac{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}{f''(x)}$$

Di conseguenza, la curvatura K di una curva definita dalla funzione $f(x)$ sarà:

$$K = \frac{f''(x)}{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}$$

Questa definizione funziona in 2 dimensioni, ma vogliamo definire la curvatura di una superficie nello spazio.

Dato un punto P di una superficie S, sia \mathbf{n} il versore perpendicolare al piano tangente ad S in P. Consideriamo i piani passanti per P che contengono \mathbf{n} . L'intersezione di uno di questi con la superficie S è una curva piana detta “sezione normale” e possiamo calcolarne la curvatura nel punto P. Ad ogni piano corrisponde una curva piana con una diversa curvatura nel punto P, e chiamiamo K_1 e K_2 le curvature rispettivamente maggiore e minore rispetto alle curvature calcolate rispetto a tutti i possibili piani contenenti \mathbf{n} .

Ora definisco la curvatura media H della superficie S nel punto P come:

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

Le superfici con $H = 0$ sono dette superfici minime.

*Appendice C: Piano orario del liceo matematico
Temistocle Calzecchi Onesti*

LICEO MATEMATICO					
Orario annuale	1° BIENNIO		2° BIENNIO		5° ANNO
	1° ANNO	2° ANNO	3° ANNO	4° ANNO	
Lingua e letteratura italiana	4	4	4	4	4
Lingua e letteratura latina	3	3	3	3	3
Lingua e cultura inglese	3	3	3	3	3
Storia e Geografia	3	3			
Storia			2	2	2
Filosofia			3	3	3
Matematica *	5	5	4	4	4
Laboratorio di Matematica	2	2	2	1	1
Fisica	2	2	3	3	3
Scienze Naturali **	2	2	3	3	3
Disegno e Storia dell'Arte	2	2	2	2	2
Scienze motorie e sportive	2	2	2	2	2
Religione cattolica o Attività alternative	1	1	1	1	1
TOTALE ORE SETTIMANALI	29	29	32	31	31

* con Informatica al primo biennio

** Biologia, Chimica, Scienze della Terra


Appendice D: Questionario di ingresso per il Festival

Liceo Scientifico Matematico
Comune di Terno
bubblelab
IN Bolle come non le avete mai viste
Classe VDSM

ATTIVITÀ 1: LA FORMA DELLE BOLLE DIPENDE DAL TELAIO?


Con il filo di ferro, forma un anello a forma di circonferenza, triangolo e quadrato. Di che forma verranno fuori le bolle? Quali differenze ti aspetti? Rispondi prima di provare.

Le bolle saranno a forma di
cerchio



ATTIVITÀ 2: LA TENSIONE SUPERFICIALE

- Costruisci un telaio circolare con filo di cotone leggermente più lungo del diametro fissato a due punti diametralmente opposti. Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo.
- Ora immagina che cosa succederà rompendo una delle due parti della membrana saponata, ad esempio quella a destra del filo) e scrivilo qui sotto



-
-
-
- Rompi veramente una delle due parti e osserva che cosa succede. Ripeti l'esperimento rompendo la lamina dall'altra parte.
-
-
-
-
-

- Costruisci un telaio circolare e in un suo punto fissa un filo di cotone che abbia un cappio in fondo (cf. figura). Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo. Ora immagina che cosa succederà la parte di membrana contenuta nel cappio e scrivilo qui sotto

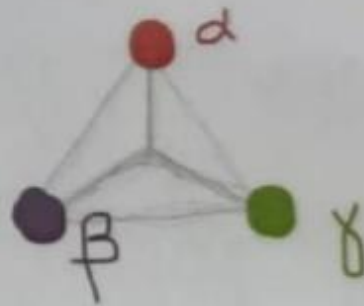
non esplode



- Rompi veramente la parte di membrana contenuta nel cappio e osserva che cosa succede.

ATTIVITA' 3

Giornate di fuoco nell'assessorato all'Urbanistica del comune di Paperopoli. Nella piana di Borgo Papero si progetta la costruzione di tre villaggi, Alfa, Beta e Gamma, disposti ai vertici di un triangolo equilatero. Ad Alfa avrà sede lo stadio, Beta ospiterà l'unico centro commerciale della zona e a Gamma verrà costruito il cinema locale. Per fare in modo che tutti gli abitanti della piana possano usufruire dei servizi, sarà necessario collegare i tre villaggi con un sistema di strade che, al fine di minimizzare i costi, dovrà essere progettato per avere la minor lunghezza possibile. Come dovranno essere collegati i villaggi tra loro?



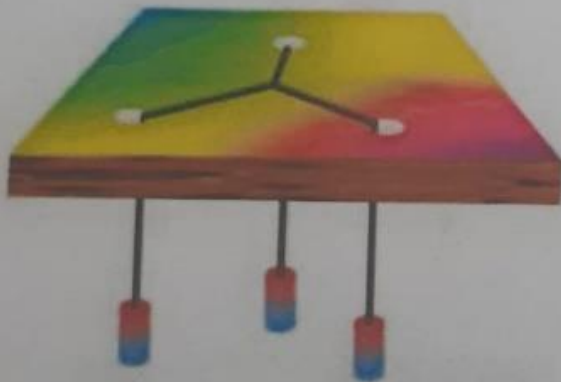
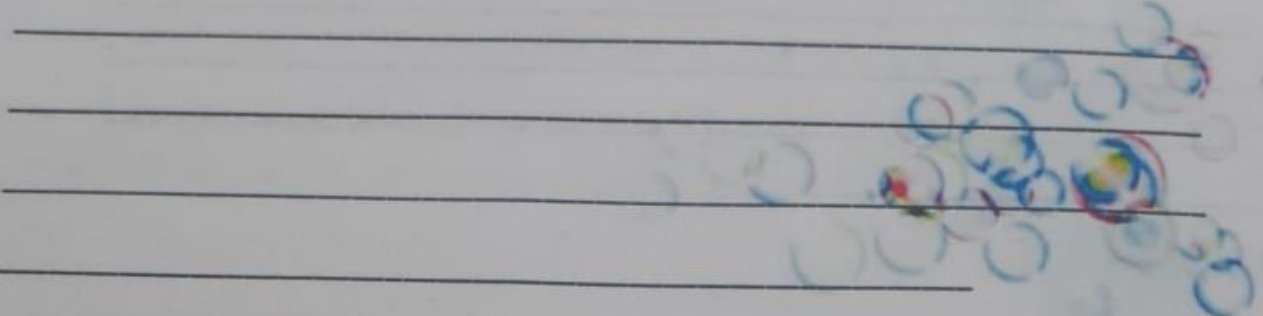
Traccia uno schizzo preciso e scrivi le motivazioni delle tue decisioni nelle righe qui sotto

La via bianca sono più coste rispetto al triangolo

ATTIVITA' 4

Prendi in mano il telaio in plexiglass che ha tre pioli e forma una lamina saponata.

Osserva che succede: per quale motivo la forma della membrana è collegata al problema che hai risolto qui sopra?



ATTIVITA' 5

Un corpo pesante tende a collocarsi più in basso possibile.

Per quale motivo i tre pesi (uguali tra loro) si dispongono in modo tale che la lunghezza complessiva del filo che giace sul tavolo sia minima?

A OCCHIO E CROCE PERCHÈ LA FISICA VUOL

Che cosa c'entra questo con i problemi analizzati precedentemente e con le lamine di sapone?

NIENTE

Effettua l'esperimento e misura gli angoli tra le tre corde.

Appendice E: Questionario 1

Classe IVDSM – 14 maggio 2022 - Cominciamo il laboratorio...

- 1) Giornate di fuoco nell'assessorato all'Urbanistica del comune di Paperopoli. Nella piana di Borgo Papero si progetta la costruzione di tre villaggi, Alfa, Beta e Gamma, disposti ai vertici di un triangolo equilatero. Ad Alfa avrà sede lo stadio, Beta ospiterà l'unico centro commerciale della zona e a Gamma verrà costruito il cinema locale. Per fare in modo che tutti gli abitanti della piana possano usufruire dei servizi, sarà necessario collegare i tre villaggi con un sistema di strade che, al fine di minimizzare i costi, dovrà essere progettato per avere la minor lunghezza possibile. Come dovranno essere collegati i villaggi tra loro?

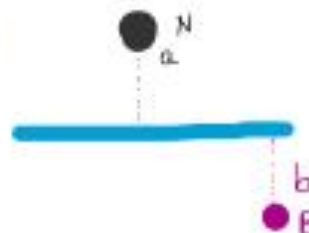
Traccia uno schizzo preciso e scrivi le motivazioni delle tue decisioni nelle righe qui sotto



- 2) La leggenda narra che la regina Didone, arrivata in Africa, chiese al potente Larba, re dei Gentili, un tratto di terra per potervi costruire una città. Il re non volendogliela concedere, le disse in segno di scherno: «Ti darò tanta terra quanta ne potrai circondare con la pelle di un bue». L'astuta Didone tagliò la pelle in strisce sottilissime e si vide assegnata tutta la terra, affacciata sul mare, che poté circondare con le strisciole attaccate una all'altra. Così costruì Cartagine. Didone fu astuta perché sapeva che, a parità di perimetro (la lunghezza della pelle di bue), alcune figure geometriche hanno un'area maggiore rispetto ad altre.

Quale pensi che sia la figura geometrica con la maggiore area a parità di perimetro? Come motiveresti la tua risposta?

- 3) Sulla spiaggia di Porto San Giorgio un incauto nuotatore N che si trova ad $a=100$ metri dalla riva rischia di affogare e grida aiuto. Il bagnino B; nel momento in cui si accorge del pericolo, si trova sulla spiaggia ad $b=30$ metri dalla riva. In linea d'aria il bagnino e il bagnante distano inizialmente D metri, ma la linea immaginaria che li unisce non è perpendicolare alla riva. Il bagnino può correre sulla spiaggia con una velocità media di 7 m/s,



mentre in acqua può nuotare con una velocità media inferiore pari a 1 m/s.

Quale percorso deve compiere il bagnino affinché, a partire dalla sua posizione iniziale, arrivi nel più breve tempo possibile in soccorso del bagnante, evitando così che questi affoghi?

Traccia prima uno schizzo del percorso che ritieni migliore e poi, se credi, prova anche ad impostare qualche calcolo.

- 4) Dai le definizioni dei seguenti termini: tensione superficiale, forze di coesione, forze di adesione, lavoro, energia potenziale.

- 5) Scrivi le differenze qualitative fondamentali fra solidi, liquidi e gas.

- 6) Dati una carica positiva (ad esempio un protone) e una carica negativa (ad esempio un elettrone) descrivi qualitativamente come questi interagiscono (si attraggono, si respingono, si ignorano...).

Appendice F: Questionario 2

Classe IVDSM – 3 giugno 2022- laboratorio di Matematica

Componenti del gruppo

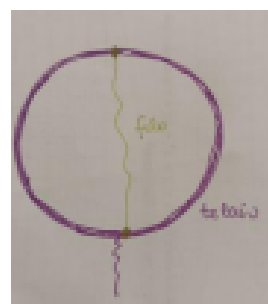
ATTIVITÀ 1: LA FORMA DELLE BOLLE DIPENDE DAL TELAIO?

- Con il filo di ferro, forma un anello a forma di **circonferenza** e soffiaci dentro (oppure muovilo nell'aria) Osserva attentamente la forma della bolla che si genera e descrivila.

- Ripeti quanto appena fatto con dei telai in cui il filo di ferro ha la forma di triangolo o quadrato. Registra qui sotto le differenze.

ATTIVITÀ 2: LA TENSIONE SUPERFICIALE

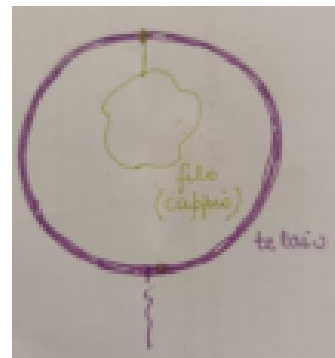
- Costruisci un telaio circolare con filo di cotone leggermente più lungo del diametro fissato a due punti diametralmente opposti. Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo.



- Ora immagina che cosa succederà rompendo una delle due parti della membrana saponata, ad esempio quella a destra del filo) e scrivilo qui sotto

- Rompi veramente una delle due parti e osserva che cosa succede. Ripeti l'esperimento rompendo la lamina dall'altra parte.

- Costruisci un telaio circolare e in un suo punto fissa un filo di cotone che abbia un cappio in fondo (cf. figura). Crea una lamina saponata (non una bolla) e osserva che cosa succede al filo. Ora immagina che cosa succederà la parte di membrana contenuta nel cappio e scrivilo qui sotto



- Rompi veramente la parte di membrana contenuta nel cappio e osserva che cosa succede.

Bibliografia

48 lettere - sito dell'unione Matematica Italiana. (n.d.). Retrieved November 30, 2022, from <https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/10/Anzellotti.pdf>

Ambrisi, E. (2017). Matematica e storia per l'insegnamento. *Periodico di Matematiche*, 1, 3-14.

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., Robutti, O., & Statale, L. S. (2004). Matematica 2003. *La matematica per il cittadino*.

Archimedes. (1854). *Il primo libro di archimede sulla sfera e Sul cilindro nuovamente Esposto.-La Misura del Cerchio*.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International journal of computers for mathematical learning*, 7(3), 245-274.

Besson, U. (2015). *Didattica della fisica*. Carocci Editore.

Boero, P. (1999). Argomentazione e dimostrazione: una relazione complessa, produttiva e inevitabile nella matematica e nella didattica della matematica. *La lettre de la preuve-International Newsletter on the Teaching and*.

Bower, G. H. (1992). How might emotions affect learning. *The handbook of emotion and memory: Research and theory*, 3, 31.

Branchetti, L., Cattabriga, A., & Levrini, O. (2019). Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: The case of the blackbody. *Physical Review Physics Education Research*, 15(2), 020130.

British Association for the Advancement of Science, & Perry, J. (1902). *Discussion on the Teaching of Mathematics*. Macmillan.

Bruner, J. S. (2002). *La cultura dell'educazione. Nuovi orizzonti per la scuola*. Feltrinelli editore.

Brush, S. G. (2015). Mathematics as an instigator of scientific revolutions. *Science & Education*, 24(5), 495-513.

Chevallard, Y. (1992). Concept fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*.

Chevallard, Y., & Johsua, M. A. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage,.

- Chiappini, G. (2007). Il laboratorio didattico di matematica: riferimenti teorici per la costruzione. *Innovazione educativa*, 8, 9-12.
- Chiappini, G., & Reggiani, M. (2003). Toward a didactical practice based on mathematics laboratory activities. In *Proceedings of Cerme 3 (Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education)*.
- Cinti, E. (2019). Il problema isoperimetrico: una storia lunga 2000 anni. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 4(2), 95-106.
- Dedò, M., & Di Sieno, S. (2012). Laboratorio di matematica: una sintesi di contenuti e metodologie. *arXiv preprint arXiv:1211.2159*.
- Dewey, J. (1903). The psychological and the logical in teaching geometry. *Educational Review*, 25, 387-399.
- Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster, A., & Wohlrab, O. (1992). Minimal surfaces. In *Minimal Surfaces I* (pp. 53-88). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Douglas, J. (1931). Solution of the problem of Plateau. *Transactions of the American Mathematical Society*, 33(1), 263-321.
- Einstein, A. (2017). *Come io vedo il mondo*. Youcanprint.
- Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. *Physical review*, 47(10), 777.
- Euler, L. (1952). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.
- Fabri, E. (1995). Che cos' è il rigore logico in fisica. *AAVV, Guida al laboratorio di fisica, Zanichelli, Bologna*.
- Fano, V. (2005). *Comprendere la scienza. Un'introduzione all'epistemologia delle scienze naturali* (Vol. 2). Liguori Editore Srl.
- Fermhamente, festival della Scienza di Fermo*. Fermhamente, Festival della Scienza di Fermo. (n.d.). Retrieved December 6, 2022, from <https://www.fermhamente.it/about-us>
- Frank, R., Bailis, S., Klein, J. T., & Miller, R. (1988). Interdisciplinary': The First Half Century. *Issues in interdisciplinary Studies*.
- Galilei, G. (2011). Il saggiaiore. *Il Saggiatore*, 1-221.
- Gellius, Calcante and Rusca (1992) "VII, 17," in *Notti Attiche*. Milano: Biblioteca universale Rizzoli.
- Giacardi, L. (2011). L'emergere dell'idea di laboratorio di matematica agli inizi del Novecento. *Atti del Convegno Di. Fi. Ma*, 55-66.
- Graff, H. J. (2015). *Undisciplining knowledge: Interdisciplinarity in the twentieth century*. JHU Press.
- Grammer, K., & Thornhill, R. (1994). Human (Homo sapiens) facial attractiveness and sexual selection: the role of symmetry and averageness. *Journal of comparative psychology*, 108(3), 233.
- Hilbert, D. (2013). *Grundlagen der geometrie*. Springer-Verlag.
- Hultsch, F. (Ed.). (1875). *Collectionis quae supersunt* (Vol. 1). Weidmann.
- Kerschensteiner, G. (2019). Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichtes. In *Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichtes*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag.

- Kiefer, M., & Trumpp, N. M. (2012). Embodiment theory and education: The foundations of cognition in perception and action. *Trends in Neuroscience and Education*, 1(1), 15-20.
- Kockelmans, J. J. (1979). *Interdisciplinarity and higher education*. Penn State Press.
- Leonardi, G. P. (2015). Il mistero isoperimetrico di Zenodoro.
- Malara, N. A. (2009). Dimostrazione e insegnamento dell'algebra. *Insegnamento della Matematica e Delle Scienze Integrate*, 32, 795-818.
- Marone, V. P. (2013). *Eneide*. Bur.
- Moore, E. H. (1967). Classics in Mathematics Education: On the Foundations of Mathematics. *The Mathematics Teacher*, 60(4), 360-374.
- Orosio, P. and Potuliet, G. (1738) *Pauli Orosi ... aduersus paganes historiarum Libri Septem*. Lugduni Batanorum: apud Gerardum Potuliet.
- Paola, D. (2003). Il laboratorio di matematica, Atti XXIII Convegno UMI – CIIM, L'insegnante di matematica nella scuola d'oggi: formazione e pratica professionali, Loano 3 – 5 Ottobre 2002, pag. 150 -152.
- Paola, D. (2004). Software di geometria dinamica per un sensato approccio alla dimostrazione in geometria: un esempio di Laboratorio di Matematica. *Progetto Alice*, 5(13), 103-121.
- Paola, D. (2008). Il laboratorio per l'insegnamento-apprendimento della matematica: le proposte rivisitate della commissione UMI. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 31, 517-552.
- Pappus *et al.* (1660) *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones*. Bononiae: Ex Typographia HH.de Ducciis.
- Perry, J. (1913). *Elementary practical mathematics*. Рипол Классик.
- Plateau, J. A. F. (1873). *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* (Vol. 2). Gauthier-Villars.
- Poincaré, J. H. (2012). *La scienza e l'ipotesi* (Vol. 156). Edizioni Dedalo.
- Rome, A. (1931). Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste: tome I: Pappus d'Alexandrie: commentaire sur les livres 5 et 6 de l'Almageste. *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, 1-384.
- Seneca, L. *et al.* (1981) "IX,5," in *De tranquillitate animi*. Bologna: Zanichelli.
- Stylianides, A. L. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- Tyng, C. M., Amin, H. U., Saad, M. N., & Malik, A. S. (2017). The influences of emotion on learning and memory. *Frontiers in psychology*, 8, 1454.
- Tzanakis, C. (2016, July). Mathematics & physics: an innermost relationship. Didactical implications for their teaching & learning. In *History and Pedagogy of Mathematics*.
- Vailati, G. (1899). Recensione di C. Laisant. *La Mathématique: philosophie, enseignement*, 260-261.
- Vailati, G. (1906). Idee pedagogiche di HG Wells. *S*, 3, 291-295.
- Vailati, G., & Quaranta, M. (1987). Scritti.
- Wirth, L. (1937). *Report on the History, Activities and Policies of the Social Science Research Council*.

Wells, H. G. (1914). *The world set free. A story of mankind* (p. 194). London.