

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Materia degenerare:
fisica e applicazioni astrofisiche**

Tesi di Laurea

**Presentata da:
Federico Maria Rossi**

**Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Indice

1	Fisica della materia degenere	1
1.1	Particelle identiche: Fermioni e Bosoni	1
1.1.1	Meccanica Statistica: il comportamento delle particelle	2
1.2	La materia degenere	2
1.2.1	Condizione di degenerazione	3
1.2.2	Degenerazione dei Fermioni: gas di elettroni liberi	3
1.2.3	Parametro di degenerazione Ψ	6
1.2.4	Degenerazione dei Bosoni: la condensazione di Bose	7
2	Applicazioni astrofisiche della materia degenere	9
2.1	Introduzione: l'evoluzione stellare	9
2.2	Pressione negli interni stellari	10
2.2.1	Il diagramma $\text{Log}\rho - \text{Log}T$	12
2.3	Nane Bianche	13
2.3.1	Rapporto massa-raggio	14
2.3.2	Massa di Chandrasekhar	14
2.4	Stelle di Neutroni	15
A	Supernovae di tipo Ia	16
A.1	Double-Degenerate Scenario	16
A.2	Single-Degenerate Scenario	17

Introduzione

La Degenerazione è un determinato stato della materia causato da particolari condizioni di temperatura e densità. E' un fenomeno che è necessario valutare quando la fisica che descrive un sistema non può fare a meno di considerare la trattazione quantistica per caratterizzare le sue proprietà. Proprio per questo motivo è necessario abbandonare l'approccio deterministico della Meccanica Classica e abbracciare quello probabilistico della Meccanica Quantistica, che vede le particelle dividersi in due categorie: Fermioni e Bosoni. Per entrambe le specie, la materia, mediante specifiche condizioni, può dunque ritrovarsi ad essere in uno stato degenere, presentando diversi fenomeni a seconda della tipologia di particelle che compongono un gas in analisi.

Tale fisica della materia degenere, in particolare dei Fermioni degeneri, ha importanti applicazioni nel campo dell'astrofisica: il regime che domina il comportamento del gas interno ad una struttura stellare determina completamente lo sviluppo della sua evoluzione, per via dei differenti contributi di pressione che ogni stato apporta al sostenimento di questi corpi celesti. La degenerazione della materia riveste un ruolo fondamentale anche negli stadi evolutivi finali delle stelle: é il caso delle Nane Bianche e delle Stelle di Neutroni, nelle quali la sola pressione di degenerazione fermionica, *entro certi limiti*, contrasta la pressione gravitazionale che guida la loro contrazione, mantenendo così l'Equilibrio Idrostatico di queste strutture stellari.

Capitolo 1

Fisica della materia degenere

1.1 Particelle identiche: Fermioni e Bosoni

In Meccanica Classica, la distinzione tra due particelle identiche è possibile seguendo la loro traiettoria, identificata in ogni istante di tempo. In Meccanica Quantistica, invece, il determinismo che caratterizzava completamente il precedente approccio cede il posto al processo probabilistico: il concetto di traiettoria perde ora completamente di significato e la particella, dopo un certo intervallo di tempo, può trovarsi in un'infinità di posizioni, ognuna con un proprio peso probabilistico. È per questo motivo che, a livello quantistico, due particelle identiche descritte da stati in cui i numeri quantici coincidono sono perfettamente indistinguibili.

Si consideri dunque un sistema di due particelle: la funzione d'onda $\psi(r, t)$ in funzione delle coordinate spaziali r e del tempo t descrive la singola particella, mentre il sistema è rappresentato dalla funzione $\Psi(r_1, r_2, t)$. Si definisca ora l'operatore unitario di scambio P , il quale scambia le due particelle e per il quale l'Hamiltoniana del sistema risulta invariante per scambio: $[P, H] = 0$

$$P\psi(r_1, r_2) = \psi(r_2, r_1) \quad (1.1)$$

La doppia applicazione di tale trasformazione porterà al punto di partenza, ovvero $P^2 = 1$, che risulta necessariamente nell'esistenza di due unici autovalori possibili per questo operatore: $\lambda_{1,2} = \pm 1$. In un sistema composto da particelle indistinguibili, dunque, se uno stato fisico è autovalore di P , esso sarà per forza totalmente simmetrico ($\lambda = +1$) o totalmente antisimmetrico ($\lambda = -1$):

$$\psi(r_1, r_2) = \pm\psi(r_2, r_1) \quad (1.2)$$

Le particelle descritte da funzioni d'onda simmetriche sono i cosiddetti *Bosoni* (1.2, segno +), mentre quelle descritte da funzioni d'onda antisimmetriche prendono il nome di *Fermioni* (1.2, segno -) e godono di tale proprietà: sotto operazione di scambio, la funzione d'onda simmetrica rimane sé stessa, mentre quella antisimmetrica cambia di segno. Da ciò ne consegue che, in un sistema descritto da funzione antisimmetrica, scambiando due particelle identiche si ottiene uno stato uguale a meno sé stesso, ovvero necessariamente nullo. È questo il motivo per il quale si può affermare che, in un sistema di Fermioni non è possibile che due particelle aventi medesimi numeri quantici occupino lo stesso stato. Questo enunciato prende il nome di Principio di esclusione di Pauli.

1.1.1 Meccanica Statistica: il comportamento delle particelle

Alla condizione di zero assoluto, un sistema fisico occupa la configurazione di energia più bassa. Aumentando la temperatura, l'attività termica causerà un aumento della popolazione negli stati eccitati. Sorge dunque spontanea una domanda: dato un elevato numero N di particelle in equilibrio termico T , qual è la probabilità di un singolo corpuscolo di trovarsi ad uno specifico livello di energia? Nel paragrafo precedente si è discusso della possibilità di distinzione delle particelle in approccio classico e quantistico; è necessario ora interrogarsi, dunque, su quale sia il comportamento, nello scenario appena descritto, delle tre differenti casistiche: particelle distinguibili, Fermioni identici e Bosoni identici.

La branca della fisica che si impegna a rispondere, in maniera *probabilistica*, a tali quesiti prende il nome di *Meccanica Statistica*. Si entri dunque nel merito: supponendo di trovarsi nel caso di N particelle, è di interesse conoscere la modalità secondo cui queste si dispongono nei diversi stati, o meglio, conoscere *il numero più probabile di particelle in un particolare stato con energia ϵ* . Tali comportamenti, a seconda dei tre casi in analisi per particelle distinguibili e indistinguibili, sono descritti dalle seguenti distribuzioni statistiche:

$$n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-(\epsilon-\mu)/k_B T} & , \text{ MAXWELL-BOLTZMANN} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} & , \text{ FERMI-DIRAC} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} - 1} & , \text{ BOSE-EINSTEIN} \end{cases} \quad (1.3)$$

La distribuzione di Maxwell-Boltzmann è il risultato classico per particelle distinguibili; la distribuzione di Fermi-Dirac viene utilizzata nel caso dei Fermioni identici, mentre la distribuzione di Bose-Einstein è relativa ai Bosoni identici.

Si vedrà nel seguito di questa tesi l'effettiva applicazione di queste distribuzioni statistiche nella teoria della *materia degenera*.

1.2 La materia degenera

La Degenerazione è uno stato della materia che si presenta in determinate condizioni di pressione e temperatura. Quando viene considerato un sistema di N particelle libere di muoversi in un determinato volume, è possibile distinguere due diversi casi:

- *Gas perfetto*, o *gas non degenera*: rappresenta il caso classico di particelle distinguibili, descrivibili tramite la sopracitata distribuzione di Maxwell-Boltzmann in quanto gli effetti quantistici, in tale scenario, sono trascurabili;
- *Gas degenera*: gli effetti quantistici non possono più essere esclusi dalla trattazione ed è necessario adottare l'approccio quantistico di indistinguibilità delle particelle identiche. Nell'analisi di questa casistica, la distribuzione di Maxwell-Boltzmann non è sufficiente a descrivere il comportamento di Fermioni e Bosoni identici e, dunque, come riportato nel precedente paragrafo, ad entrambi è necessario applicare le distribuzioni statistiche di *Fermi-Dirac* e *Bose-Einstein*, rispettivamente.

Il paragrafo successivo sarà dedicato alla trattazione della condizione che media il passaggio tra i due casi appena descritti.

1.2.1 Condizione di degenerazione

In Meccanica Quantistica (MQ), i Fermioni ubbidiscono a due suoi importantissimi principi, alla base della formulazione di tale formalismo: il già introdotto principio di esclusione di Pauli e il principio di indeterminazione di Heisenberg. Quest'ultimo introduce una divisione dello spazio delle fasi in "cellette" di volume caratterizzato dal prodotto tra le coordinate incertezze sulle posizioni e incertezze sui momenti

$$\Delta x \Delta y \Delta z \cdot \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \sim h^3 \quad (1.4)$$

Questi sono gli effetti quantistici che, a seconda di una qualche condizione, non possono essere più esclusi dalla trattazione fisica del gas, passando dal perfetto al degenerare. Per ricavare tale *limite di degenerazione*, il primo passo è quello di considerare il dualismo particella-onda, caratteristico della Meccanica Quantistica.

La lunghezza d'onda associata a ciascuna particella è

$$\lambda = \frac{h}{(2mk_B T)^{1/2}}. \quad (1.5)$$

Se tale λ è trascurabile rispetto alla distanza tra le particelle, allora la natura ondulatoria può essere ignorata.

Il principio di Pauli, in questo caso, può essere visto come una richiesta che la *distanza media tra due particelle* (r) sia maggiore della lunghezza d'onda a loro associata:

$$r > \frac{h}{(2mk_B T)^{1/2}} \quad (1.6)$$

Tale condizione può essere riscritta in funzione di temperatura, densità e massa delle particelle, dando così forma alla ricercata *condizione di non degenerazione*:

$$T > 2.4 \cdot 10^{-22} \frac{\rho^{2/3}}{m} \quad (1.7)$$

Come è possibile osservare dalla (1.7), il valore soglia dipende dalla massa della particella in analisi: per corpuscoli meno massivi (come gli elettroni) è molto più probabile che si vada incontro a degenerazione rispetto a corpuscoli più massicci (come i protoni).

1.2.2 Degenerazione dei Fermioni: gas di elettroni liberi

Si supponga di essere in presenza di un gas di elettroni liberi in una scatola di potenziale di lunghezza L . Tale sistema presenta una Hamiltoniana del tipo

$$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (1.8)$$

e gli autostati delle particelle singole possono essere scritti come

$$\psi = \left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.9)$$

La buca di potenziale "a scatola" ha dimensioni L^3 ed è soggetta a condizioni periodiche al contorno che risultano in una quantizzazione del vettore d'onda \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad (1.10)$$

Lo stato del singolo elettrone risulta dunque definito da quattro numeri quantici: n_x, n_y, n_z e m_s .

Considerando ora lo *spazio dei vettori d'onda*, gli autostati (1.9) formano una griglia regolare, nella quale ogni valore di \mathbf{k} occupa un volume $(\frac{2\pi}{L})^3 = \frac{8\pi^3}{V}$. Ognuno di questi volumi è soggetto al Principio di esclusione di Pauli, il quale vieta la loro occupazione da parte di due elettroni identici; in altre parole, ad ogni elemento tridimensionale della griglia possono essere associati al massimo due stati elettronici con medesimo \mathbf{k} , ma $m_s = \pm\frac{1}{2}$. L'autovalore Energia associato ad uno stato con vettore d'onda \mathbf{k} è

$$E = \langle \psi | H | \psi \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (1.11)$$

E' possibile quindi osservare che le superfici di energia costante, nello spazio dei \mathbf{k} tridimensionale, sono sferiche.

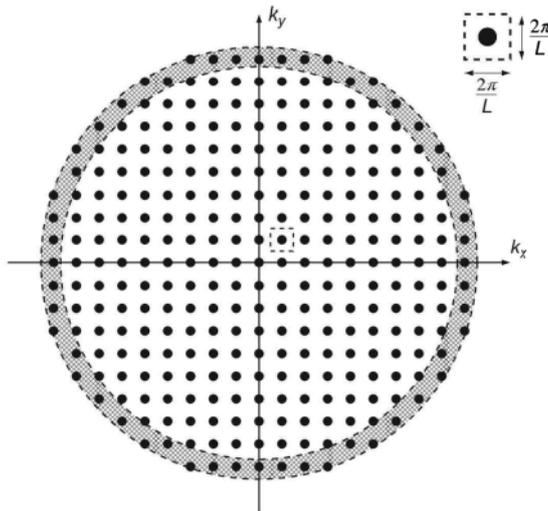


Figura 1.1: Stati nello spazio dei vettori d'onda in due dimensioni; le superfici di energia costante sono tratteggiate. L'anello più scuro di spessore dk è usato per il calcolo della densità degli stati. Ad ogni stato è associata un'area (volume, nello spazio- \mathbf{k} 3D) di $2\pi/L \times 2\pi/L$. [8]

Il numero totale di stati nella sfera si può calcolare sommando i numeri di stati contenuti in gusci concentrici; la *densità degli stati* $g(k)$, ovvero il numero di stati in un guscio sottile di spessore dk e volume $4\pi k^2 dk$ (dove $g_s = 2$ è la degenerazione di spin) è

$$g(k)dk = \frac{g_s 4\pi k^2 dk}{8\pi^3/V} \rightarrow g(k) = \frac{k^2 V}{\pi^2} \quad (1.12)$$

Ora, indicando con $g(\epsilon)d\epsilon$ il numero di stati con energia compresa tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$, partendo dalla relazione

$$g(k)dk = g(\epsilon)d\epsilon \Rightarrow g(\epsilon) = g(k) \frac{dk}{d\epsilon} \quad (1.13)$$

e definendo il vettore d'onda $k = \sqrt{2m\epsilon/\hbar^2}$, è possibile infine ricavare l'equazione relativa alla densità di stati tridimensionale data una certa energia ϵ , $g(\epsilon)$:

$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad (1.14)$$

Riprendendo il principio di esclusione che vige nei volumetti, è possibile spiegare la modalità di occupazione degli stati disponibili da parte degli elettroni: al contrario dei Bosoni, i Fermioni non possono popolare tutti lo stesso stato di energia minima; essi si disporranno quindi a due a due in ogni stato disponibile con k via via crescente nei gusci sferici, seguendo la **distribuzione statistica di Fermi-Dirac**. Il raggio della sfera totale occupata è il cosiddetto *Vettore d'onda di Fermi* k_F , il quale rappresenta il più alto valore dei k occupabile ed è identificato dalla condizione

$$\int_0^{k_F} g(k)dk = N, \quad (1.15)$$

con $g(k)dk$ la già citata densità di stati con vettore d'onda compreso tra k e $k + dk$ (1.12) e $N =$ numero totale di elettroni. Sostituendo la (1.12) nell'integrale, si ricava

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} = (3\pi^2 n_e)^{1/3} \quad (1.16)$$

con $n_e = \frac{N}{V}$ densità elettronica

Il confine che separa gli stati occupati da quelli non occupati, che contorna il volume riempito nello spazio dei k , è chiamato **superficie di Fermi**. Il livello energetico più alto occupato, corrispondente a k_F (1.16), prende il nome di **energia di Fermi** ϵ_F e rappresenta, perciò, anche il lavoro necessario per aggiungere un elettrone al sistema:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (1.17)$$

Distribuzione di Fermi-Dirac

La probabilità di occupazione di uno stato con energia ϵ in funzione della temperatura è data dalla distribuzione di Fermi-Dirac:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1}, \quad (1.18)$$

la quale presenta le seguenti proprietà:

- $f(\epsilon) \leq 1$: rappresenta il principio di esclusione di Pauli, ovvero che uno stato non può essere doppiamente occupato da elettroni identici;
- μ è il **potenziale chimico**: $f(\mu) = \frac{1}{2}$.

Quando si entra in condizioni di *Zero Temperature*, ovvero per $T \rightarrow 0$, allora **tutti i livelli con $\epsilon \leq \mu$ sono occupati e gli altri vuoti**. Ciò significa che

$$T \rightarrow 0 \Rightarrow \mu \rightarrow \epsilon_F \quad (1.19)$$

Il potenziale chimico, dunque, allo zero assoluto rappresenta il più alto valore di energia occupato nello stato fondamentale, l'**Energia di Fermi**.

A quest'ultima è a sua volta possibile associare una scala di temperatura, detta *Temperatura di Fermi* $T_F = \epsilon_F/k_B$. La condizione di **degenerazione** si ripresenta nel gas di Fermioni proprio riscrivendo la condizione (1.7) in funzione di T_F :

$$T \ll T_F \quad (1.20)$$

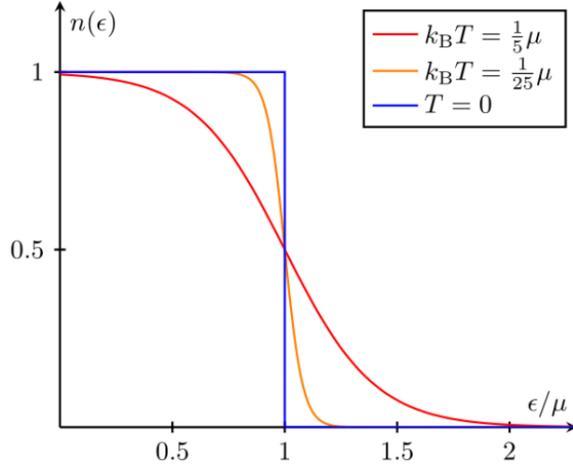


Figura 1.2: Andamento della distribuzione di Fermi-Dirac. E' evidente che, per temperature molto vicine allo zero assoluto, gli stati di energia minore a quella di Fermi sono occupati da una sola particella (principio di Pauli).

La (1.20), derivata dal limite di zero assoluto e dalla condizione in cui tutti gli stati con energie minori dell'Energia di Fermi sono occupati e quelli con energie maggiori vuoti, è conosciuta come *Limite Degenero*.

Come si osserva dalla **Fig. 1.2**, a temperature $T \ll T_F$ la curva della distribuzione di Fermi-Dirac assume la sua celebre forma a scalino; aumentando la temperatura ($T > 0$), la curva "ammorbidisce" il *cutoff*, fino ad arrivare al caso limite $T \gtrsim T_F$, in cui la distribuzione di Fermi-Dirac tende verso la distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

1.2.3 Parametro di degenerazione Ψ

Il *parametro di degenerazione* Ψ rappresenta un'ulteriore maniera di trattare la transizione di un gas da un regime non degenero ad uno degenero e viceversa. Il parametro

$$\Psi \propto \frac{1}{k_B T} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (1.21)$$

è un numero reale che dipende da temperatura e densità del gas in analisi e viene utilizzato per esprimere l'*indice di occupazione* $\Pi(\epsilon) = n(\epsilon)/g(\epsilon)$, dove $n(\epsilon)$ è il numero di particelle con energia ϵ e $g(\epsilon)$ la molteplicità dello stato energetico di energia ϵ .

$$\Pi(\epsilon) \underset{\text{MAXWELL-BOLTZMANN}}{\propto} \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon}{k_B T} - \Psi\right)}, \quad \Pi(\epsilon) \underset{\text{FERMI-DIRAC}}{\propto} \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon}{k_B T} - \Psi\right) + 1} \quad (1.22)$$

MAXWELL-BOLTZMANN

FERMI-DIRAC

Quando Ψ è un numero piccolo negativo, allora il gas si trova in un regime di bassa degenerazione e la distribuzione di Maxwell-Boltzmann è sufficiente per descriverlo; quando, invece, Ψ è un numero grande positivo, allora il gas è fortemente degenero e necessita della distribuzione di Fermi-Dirac per giustificare il suo comportamento fisico. Nel caso Fermionico, è possibile usare il parametro di degenerazione per ottenere una distribuzione statistica generalizzata delle particelle in funzione dell'impulso:

$$N_p dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p^2}{\exp\left(\frac{p^2}{2mk_B T} - \Psi\right) + 1} dp \quad (1.23)$$

Quando la degenerazione è totale, ovvero per $\Psi \rightarrow \infty$, allora la distribuzione (1.23) diventa proprio quella di Fermi-Dirac:

$$N_e(p)dp = \frac{8\pi}{h^3}p^2dp \quad (1.24)$$

e, integrandola fino a p_0 , si ottiene il **Momento di Fermi**

$$p_0 = \sqrt[3]{\frac{3h^3}{8\pi\mu_e H}\rho^{1/3}} \quad (1.25)$$

ovvero il massimo momento raggiungibile da un sistema di particelle in funzione della densità ρ del gas, del peso molecolare medio di un gas di elettroni μ_e e della massa dell'atomo di Idrogeno H .

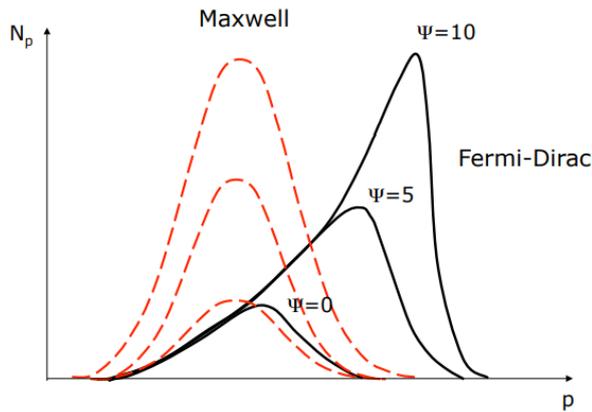


Figura 1.3: Andamento in funzione di Ψ della distribuzione statistica generalizzata: si osserva come la distribuzione di Maxwell sia un caso particolare della generalizzata per $\Psi \lesssim 0$, mentre per $\Psi \gtrsim 10$ essa tende già alla Fermi-Dirac. [4]

Analizzando la **Fig. 1.3**, si può osservare che, mentre le curve rosse indicano un momento costante all'aumentare del numero di particelle nel gas perfetto, nel gas degenerare il principio di esclusione di Pauli forza le particelle in aumento ad occupare stati con momento sempre più elevato. Il picco della curva nera si sposta perciò a valori maggiori di p e di parametro Ψ .

1.2.4 Degenerazione dei Bosoni: la condensazione di Bose

Come si è visto nel paragrafo riguardante la Meccanica Statistica, il comportamento di un gas ideale di Bosoni (ovvero Bosoni identici in una buca di potenziale a scatola tridimensionale infinita) è descritto dalla distribuzione statistica di Bose-Einstein (1.3)

$$n(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} - 1}. \quad (1.26)$$

Analizzandola, si deduce necessariamente la condizione $\mu \leq \epsilon_0$, dove ϵ_0 rappresenta l'energia dello stato fondamentale, posta uguale a 0 così da avere un valore finito per (1.26): se così non fosse, si presenterebbe l'assurdo di avere la popolazione del livello fondamentale negativa. Si ricordi, inoltre, che al contrario dei Fermioni, per queste particelle non vige il principio di esclusione di Pauli; è dunque permessa la presenza di più corpuscoli di tale natura nello stesso livello energetico.

Per sistemi di Bosoni massivi *non interagenti* tra loro, ad una temperatura abbastanza bassa T_0 , il potenziale chimico tende a 0 dal basso, $\mu \rightarrow 0$: è in tali condizioni

che si manifesta il fenomeno della **Condensazione di Bose-Einstein**, nella quale l'orbitale di energia minore presenta un'occupazione macroscopica sotto tale temperatura limite. Più la temperatura viene abbassata al di sotto di T_0 , più cresce la frazione di Bosoni nello stato fondamentale, fino a raggiungere il popolamento completo di tutte le particelle del sistema in tale orbitale per $T = 0$, ovvero allo zero assoluto. La temperatura critica per la Condensazione di Bose, in funzione della densità di particelle n e della massa dei Bosoni m , ha un valore di

$$T_0 = 3.31 \frac{\hbar^2}{mk_B} n^{2/3}. \quad (1.27)$$

E' molto importante specificare che la Condensazione di Bose-Einstein rappresenta un vero e proprio *cambiamento di fase*: da un gas di bosoni si passa, oltrepassando il limite T_0 , ad uno stato di **condensato di Bose** della materia.

Quanto trattato finora è il caso che descrive unicamente Bosoni non interagenti. Se è invece presente interazione reciproca tra le particelle, un condensato di Bose si può ancora formare, dando luogo ad una forma di *superfluidità*. La superfluidità è uno stato più vicino a quello liquido rispetto al gassoso, è caratterizzato dall'assenza di viscosità ed è necessaria una temperatura $T \simeq 0K$: se non ci si trovasse in prossimità dello zero assoluto, ci sarebbe sempre una frazione del sistema, la cosiddetta "fase normale", non condensata, che fornirebbe viscosità ad ogni temperatura. Questo fenomeno venne osservato nel 1972 da Osheroff, Richardson e Lee con l'isotopo di 3He a temperature dell'ordine dei milli-Kelvin, molto più basse rispetto ai $T \simeq 2K$ necessari per ottenere la fase di superfluidità nel 4He . La scoperta valse ai tre il premio Nobel per la fisica nel 1996.

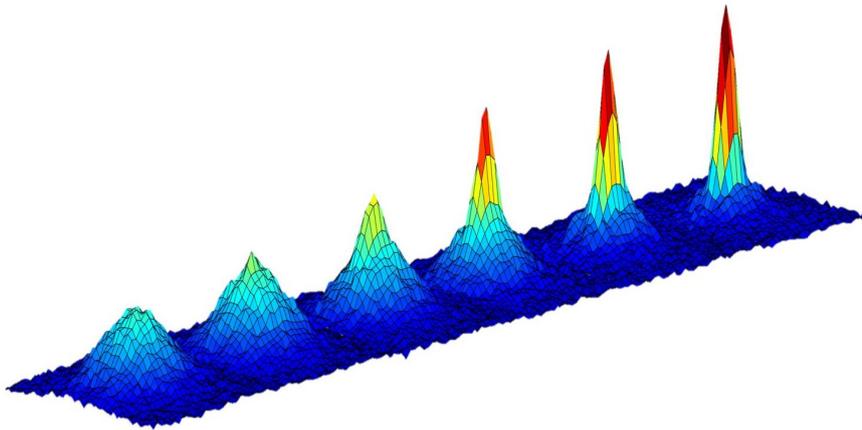


Figura 1.4: Profilo di densità di atomi man mano che la temperatura viene abbassata. A temperature $T > T_0$, quando tutti gli atomi sono nella "fase normale", si ha un profilo di densità Gaussiano. A temperature $T < T_0$, quando si forma il condensato di Bose-Einstein, si presenta un ripido picco associato alla frazione di particelle condensate rispetto ad un background normale sempre più piccolo. [9]

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche della materia degenere

2.1 Introduzione: l'evoluzione stellare

Il secondo capitolo di questa tesi si concentrerà sull'applicazione delle proprietà della materia degenere riportate fino ad ora nel campo dell'astrofisica, in particolare alle stelle e ai passaggi che caratterizzano la loro evoluzione. Le stelle, le fornaci cosmiche che sintetizzano ogni elemento conosciuto, sono corpi celesti considerati come sistemi auto-gravitanti in cui sussiste un continuo conflitto tra la forza gravitazionale, che guida la tendenza della struttura a contrarsi, e la forza di pressione della materia interna che, essendo esercitata in senso opposto alla prima, le oppone resistenza. Perché raggiungano un equilibrio, è necessario che si verifichi l'**Equazione di equilibrio idrostatico**:

$$F_{press} + F_{grav} = 0 \quad (2.1)$$

L'evoluzione stellare è un processo guidato dalla tendenza del nucleo delle strutture stellari a contrarsi in una ciclica alternanza tra più regimi, ognuno caratterizzato da una diversa relazione tra le due forze appena descritte. In principio, un collasso iniziale di nubi di massa dell'ordine di M_{Jeans}^1 (sistemi non statici in cui $F_{grav} \gg F_{press}$) avviene in *tempi scala dinamici* rapidissimi e porta ad un aumento della temperatura e ad un conseguente innalzamento della pressione interna. Da questo punto in avanti, l'evoluzione della struttura stellare consisterà in un alternarsi di:

- **Contrazione termoregolata:** l'aumento di pressione causato dal collasso fa sì che $F_{grav} \simeq F_{press}$. La struttura diventa quasi-statica e viene controllata dal *Teorema del Viriale*: metà energia gravitazionale viene persa in irraggiamento (la struttura stellare emette energia), mentre l'altra metà aumenta l'energia interna del gas, innalzando così ulteriormente la temperatura del nucleo. Si passa qui a *tempi scala termodinamici*;
- **Inizio combustione:** tramite i due precedenti processi si è raggiunta la temperatura necessaria per l'inizio delle **reazioni termonucleari**, durante le quali la contrazione si arresta e il sistema è completamente statico. Questa fase avviene in *tempi scala termonucleari*, enormemente più lunghi dei precedenti.

¹Massa di Jeans: massa critica oltre la quale si verifica il collasso gravitazionale di una nube di gas freddo, che entra così in fase di Protostella.

Con l'esaurimento dell'elemento oggetto delle reazioni, la contrazione riprenderà per raggiungere la temperatura necessaria ad innescare la combustione dell'elemento chimico successivo. Si riavvierà così il ciclo in un susseguirsi di tempi scala termodinamici e termonucleari. Un "rallentamento" di questi ultimi può essere causato dal fenomeno oggetto di questa tesi: se non trattato come gas perfetto, la **degenerazione** del gas interno alla struttura stellare impedisce la sua contrazione a causa dell'enorme forza di pressione scaturita da questo stato della materia. Viene in questo modo ritardato (o persino impedito) il raggiungimento della temperatura di innesco delle reazioni termonucleari, dilatando così i tempi che intercorrono tra la combustione di un elemento e il successivo.

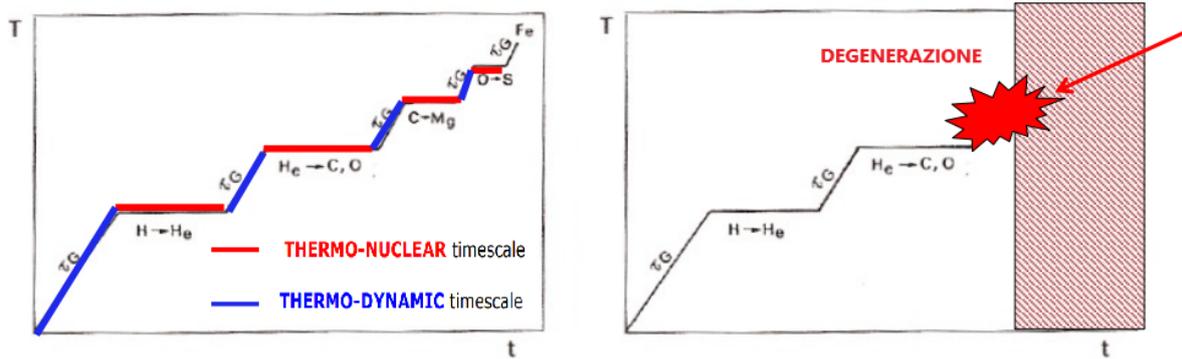


Figura 2.1: Grafici schematici sull'evoluzione della temperatura del core in funzione del tempo: a sinistra sono illustrati i cicli di reazioni termonucleari nei due diversi tempi scala dell'evoluzione stellare; a destra si mostra l'interruzione della contrazione del nucleo nelle stelle con $M < 8M_{\odot}$ causata dalla degenerazione elettronica subito dopo il bruciamento dell'Elio \rightarrow Il core cessa del tutto la sua evoluzione termonucleare, rimanendo così un struttura degenera di Carbonio e Ossigeno (Nana Bianca). [5]

2.2 Pressione negli interni stellari

Per ricavare l'equazione di stato del gas degli interni stellari, c'è da considerare le due componenti che caratterizzano la pressione totale interna: la pressione del gas e la pressione di radiazione

$$P(\rho, T) = P_{rad} + P_{gas}. \quad (2.2)$$

La P_{rad} rappresenta la pressione di radiazione esercitata dai fotoni e vale

$$P_{rad} = \frac{aT^4}{3}, \quad (2.3)$$

con $a = 4\sigma/c$ dove σ è la costante di Stefan² e c la velocità della luce nel vuoto³.

Per quanto riguarda il secondo addendo, invece, le condizioni fisiche all'interno delle stelle presentano una temperatura abbastanza alta da far sì che le specie chimiche all'interno siano ionizzate, facendo sì che il gas delle strutture si presenti come *plasma di ioni ed elettroni liberi*. La componente P_{gas} è dunque a sua volta risultato della somma

² $\sigma = 5.6 \cdot 10^{-5} [erg \cdot sec^{-1} \cdot cm^{-2} \cdot ^{\circ} K]$
³ $c = 2.998 \cdot 10^{10} [cm/s]$

delle pressioni relative ai due fattori appena riportati, portando ad una riscrittura della (2.7):

$$P(\rho, T) = P_{rad} + (P_{ioni} + P_{elettroni}) \quad (2.4)$$

Si assuma che il plasma di ioni, responsabile della P_{ioni} , si comporti come un **gas perfetto**; la sua equazione di stato sarà dunque la classica equazione di stato dei gas perfetti $PV = nRT$, ovvero Pressione in funzione del volume V , del numero di moli n , della costante dei gas perfetti⁴ R e della temperatura. E' possibile riscrivere questa relazione in funzione della densità ρ , del *peso molecolare medio* μ (quantità che tiene conto delle abbondanze chimiche percentuali degli elementi interni alla stella), della massa del nucleo di Idrogeno (protoni) H e della costante di Boltzmann⁵ k_B :

$$P_{ioni} = \rho \frac{k_B T}{\mu H} \quad (2.5)$$

Per quanto riguarda la componente di Pressione elettronica, è necessario chiamare in causa quanto riportato nel primo capitolo: com'è stato visto nella trattazione della *condizione di non degenerazione* (1.7), gli elettroni, particelle fermioniche poco massive, hanno una più elevata probabilità di trovarsi in regime degenerare rispetto agli ioni. Per calcolare dunque l'apporto di pressione portato da questo stato della materia all'interno della struttura stellare, si parte dalla relazione che lega la pressione di un gas alla sua distribuzione di particelle:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty N(p) p v dp; \quad (2.6)$$

Sostituendo ora al suo interno la distribuzione che descrive questo **gas degenerare** di elettroni, la distribuzione statistica di Fermi-Dirac (1.24), si ottiene ora la seguente espressione per la pressione, integrata fino al *momento massimo di Fermi* p_0 (1.25):

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_0} \frac{8\pi}{h^3} p^3 v dp; \quad (2.7)$$

La velocità v viene lasciata esplicita di proposito, poiché è ora necessario distinguere due casi:

- **caso non relativistico** $\rightarrow p_0 \ll m_e c$: l'impulso può essere tranquillamente assunto come prodotto tra massa e velocità v , $p = mv$.

La *pressione dovuta al gas degenerare di elettroni non relativistici* è

$$P = k_1 \rho^{5/3} = 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (2.8)$$

- **caso relativistico** $\rightarrow p_0 \sim m_e c$: l'impulso qui è relativistico ed è da scrivere in funzione del fattore di Lorentz, $p = \gamma m_e c$.

La *pressione dovuta al gas degenerare di elettroni relativistici* è

$$P = k_2 \rho^{4/3} = 1.2 \cdot 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad (2.9)$$

⁴ $R = N_A K_B = 8.314 \cdot [J/(mol \cdot K)]$: prodotto tra *Numero di Avogadro* e *costante di Boltzmann*
⁵ $K_B = 1.38 \cdot 10^{-16} [erg^\circ K]$

Si ricavino, dunque, le equazioni delle rette mostrate in **Fig. 2.2** che separano le regioni del piano in cui domina un differente contributo di pressione ciascuno. La prima regione in alto a sinistra rappresenta la parte di piano in cui domina la *pressione di radiazione* (2.3) ed è confinante con il corridoio centrale in cui domina la *pressione da gas perfetto* (2.5) (plasma di ioni). La retta nera che le divide si ottiene eguagliando le due espressioni (2.3) e (2.5), arrivando all'equazione

$$\text{Log}T = \frac{1}{3}\text{Log}\rho + 7.57 \quad (2.11)$$

Con ragionamenti analoghi, è possibile ricavare le rimanenti rette:

- **Retta rossa** (confine tra gas perfetto e gas degenerare non relativistico, con $P_{\text{elettroni}} = \frac{k\rho T}{\mu_e H}$, mentre $P_{\text{deg non rel}}$ è la (2.8)):

$$P_{\text{elettroni}} = P_{\text{deg non rel}} \rightarrow \text{Log}T = \frac{2}{3}\text{Log}\rho + 4.88 \quad (2.12)$$

- **Retta arancione** (confine tra gas perfetto e gas degenerare relativistico, dove $P_{\text{deg rel}}$ è la (2.9)):

$$P_{\text{elettroni}} = P_{\text{deg rel}} \rightarrow \text{Log}T = \frac{1}{3}\text{Log}\rho + 7.07 \quad (2.13)$$

- **Retta verde** (confine tra gas degenerare relativistico e gas degenerare non relativistico):

$$P_{\text{deg rel}} = P_{\text{deg non rel}} \rightarrow \text{Log}\rho = 6.6 \quad (2.14)$$

2.3 Nane Bianche

Le Nane Bianche (White Dwarfs, WDs) sono gli stadi evolutivi finali delle stelle con massa nell'intervallo $0.08M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$. Si presentano come corpi celesti di massa dell'ordine della massa del sole⁶, ma di raggio confrontabile con quello terrestre⁷; la loro luminosità è molto inferiore rispetto a quella solare e la maggior parte delle WDs osservate presenta una temperatura superficiale che va tra gli $8000^{\circ}K$ e i $40000^{\circ}K$, anche se la più fredda mai registrata, WD 0346+246, si abbassa fino ai $\sim 3800^{\circ}K$. Con densità che vanno dai 10^6 ai 10^8 g/cm^3 , gli elettroni non sono più legati singolarmente ai nuclei e formano un gas in stato degenerare: è per questo motivo che le Nane Bianche, solitamente composte da Carbonio e Ossigeno ($0.5M_{\odot} < M_{\text{iniziale}} < 8M_{\odot}$), sono considerate strutture quasi completamente degeneri (c'è solo un sottile strato di materia non degenerare). In queste stelle, la sola *pressione di degenerazione elettronica* è sufficiente per essere in equilibrio con la *pressione gravitazionale*, sostenendo così la loro struttura:

$$P_{\text{grav}} + P_{\text{deg}} = 0 \quad (2.15)$$

Poiché, come già affrontato nel secondo paragrafo di questo capitolo, la pressione in gas degeneri dipende unicamente dalla densità e non dalla temperatura, la WDs sono

⁶ $M_{\odot} \simeq 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$

⁷ $R_{\oplus} \simeq 6 \cdot 10^8 \text{ cm}$

classificate come *Sistemi Politropici* e, di conseguenza, sono descrivibili attraverso il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = \frac{GM_r}{r^2} \rho \\ \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ P = K\rho^{1-(1/n)} \quad \text{con } n = \text{indice politropico} \end{cases} \quad (2.16)$$

Dalla terza relazione e dalle equazioni (2.8) e (2.9), è possibile ora ricavare gli indici politropici per i gas degeneri non relativistici e relativistici:

- Gas degeneri non relativistici: $P = k_1\rho^{5/3} \rightarrow n = 1.5$
- Gas degeneri relativistici: $P = k_2\rho^{4/3} \rightarrow n = 3$

2.3.1 Rapporto massa-raggio

Riprendendo la relazione (2.15) e considerando il caso di degenerazione elettronica *non relativistica* ($2.8 \rightarrow P = k_1\rho^{5/3}$), se si eguagliano i due contributi di pressione (gravitazionale e degenera), è possibile ottenere la relazione esatta [2] tra il *raggio* e la *massa* di una Nana Bianca nel **caso limite** di densità $\rho \ll 10^6 g cm^{-3}$:

$$\text{Per } n = 1.5 : \quad R = \frac{k_1}{0.4242 GM^{1/3}} \rightarrow R \propto M^{-1/3} \quad (2.17)$$

Il raggio di una struttura completamente degenera, perciò, dipende solo dalla massa totale e dalla composizione chimica (μ_e implicita nella costante k_1), completamente in contrasto con le stelle ordinarie in quanto il raggio, in quel caso, viene ricavato dalla condizione di bilancio energetico e dal meccanismo di trasporto dell'energia.

L'andamento del rapporto massa-raggio (2.17), che può essere riscritto come il *prodotto tra massa e volume costante* $MV \sim \text{cost}$, implica il sorprendente risultato secondo cui *il volume di una Nana Bianca è inversamente proporzionale alla sua massa* e che quindi le WDs più massive sono anche quelle di raggio minore. Questo non è altro che il tentativo della stella di autosostenersi tramite la pressione di degenerazione elettronica: per sorreggere la struttura di una stella più massiva, gli elettroni devono essere più vicini per generare una pressione di degenerazione più alta.

Se, invece, si considera il **caso limite opposto** a quello utilizzato per ricavare la (2.17), ovvero per un densità $\rho \gg 10^6 g cm^{-3}$, è ora *impossibile ignorare gli effetti relativistici*: la velocità degli elettroni in strutture così tanto compatte arriva ad essere prossima a quella limite della luce. E' per questo motivo che, in tali condizioni, la *relazione massa-raggio* si traduce in una **relazione di massa limite**. Esiste dunque un quantitativo **massimo** di materia che la pressione scaturita dagli elettroni degeneri è in grado di sostenere.

2.3.2 Massa di Chandrasekhar

Seguendo quanto detto alla fine del paragrafo precedente, si riproponga l'uguaglianza tra la pressione gravitazionale e la pressione da elettroni degeneri, ma questa volta **relativistici** ($2.9 \rightarrow P = k_2\rho^{4/3}$) [2]:

$$\text{Per } n = 3 : \quad M = \left(\frac{k_2}{0.3639 G} \right)^{1.5} = 1.142 \cdot 10^{34} \mu_e^{-2} = 5.82 M_\odot \mu_e^{-2} \quad (2.18)$$

La sola incognita, in questo caso, si osserva essere unicamente la massa della stella. Poiché in questo stadio evolutivo di Nana Bianca l'Idrogeno si considera completamente bruciato (abbondanza percentuale Idrogeno $X = 0$), ne consegue che $\mu_e = 2/(X + 1) = 2$ qualunque siano gli elementi che compongono la stella. Alla luce di ciò, la relazione (2.18) si trasforma in quella che è la **Massa Limite di Chandrasekhar**:

$$M_{Ch} \simeq 1.45 M_{\odot} \quad (2.19)$$

Questo limite rappresenta la massa massima di una struttura stellare che può essere mantenuta in equilibrio idrostatico dalla pressione offerta da un gas degenerare di elettroni. Si vedrà nell'appendice A a cosa porta la sua violazione.

2.4 Stelle di Neutroni

Differentemente dalle Nane Bianche, le Stelle di Neutroni (Neutron Stars, NSs) sono le strutture stellari residui del collasso del nucleo che ha originato una Supernova SNII. Rappresentano dunque lo stadio finale dell'evoluzione delle stelle molto massive ($11M_{\odot} < M < 25M_{\odot}$). Presentano una massa tipica dell'ordine delle $1.2 - 2.5 M_{\odot}$ ed un raggio di circa $10 - 15 km$, con una densità centrale ancora più elevata delle Nane Bianche: $10^{14} - 10^{15} g cm^{-3}$. Nella crosta più esterna, si assiste ad uno stato di elettroni relativistici e degeneri, protagonisti di catture elettroniche che favoriscono la formazione di elementi ricchi di neutroni ($p^+ + e^- \rightarrow n + \nu$). Scendendo verso densità maggiori, anche i nuclei di Ferro catturano elettroni liberi, sintetizzando isotopi ricchi di neutroni instabili che, in condizioni normali, decadrebbero tramite processo β^- : ($n \rightarrow p^+ + e^- + \nu$). Poiché ci si trova, però, in condizioni di completa degenerazione elettronica, nessuno stato energetico vacante è disponibile e quindi i neutroni non possono decadere in protoni ed elettroni. E' per questo motivo che più si scende verso regioni centrali di maggior densità, più si trovano neutroni al di fuori di strutture nucleari, dunque liberi e **degeneri**: sarà la loro pressione a dominare la struttura. Così come per le WDs, è possibile determinare una relazione di Massa-Raggio e una massa limite anche per le Stelle di Neutroni [5]:

$$R = 14.6 \cdot \left(\frac{10^{15} g cm^{-3}}{\rho_C} \right) km \rightarrow \text{Rapporto Massa-Raggio} \quad (2.20)$$

$$M_{NS}^{LIMIT} \sim 2.5 - 3 M_{\odot} \rightarrow \text{Massa limite} \quad (2.21)$$

La (2.21) rappresenta la *massa limite di Oppenheimer-Volkov* e la sua violazione porterebbe ad un collasso della NS che genererebbe, così, un Buco Nero. Dalle stelle di neutroni, inoltre, ci si aspetta una rotazione rapidissima causata dalla conservazione del momento angolare con la perdita di raggio derivante dal collasso del nucleo delle stelle che le formano. Questo è lo stesso fenomeno che giustifica anche il loro campo magnetico molto intenso: il flusso magnetico, il prodotto tra l'intensità del campo e la superficie stellare, rimane costante e, con la drastica diminuzione della superficie dopo il collasso, il campo aumenta fino a valori di $10^{13} - 10^{14} Gauss$. Le emissioni delle NSs osservate nella linea di vista della Terra fa acquisire alle stelle il nome di **Pulsar**, per via del sincrotrone (segnale radio emesso da particelle relativistiche) registrato in periodi brevi e regolari (in base alla rotazione della stella).

Appendice A

Supernovae di tipo Ia

Nel paragrafo 2.3.2 è stata riportata la Massa Limite di Chandrasekhar, ovvero la quantità massima di materia in una Nana Bianca che la pressione elettronica degenera può mantenere in equilibrio idrostatico. In questa appendice si intende approfondire il caso in cui si violi tale limite, con una massa tale per cui $M_{WD} > M_{Ch} \simeq 1.45 M_{\odot}$. Esistono due tipologie di scenari che descrivono tale fenomeno a seconda dei corpi che compongono il sistema binario, necessario al raggiungimento di una struttura di massa $M > M_{Ch}$: il ”**Double-degenerate scenario**” e il ”**Single-degenerate scenario**”.

A.1 Double-Degenerate Scenario

Questa situazione consiste in un sistema primordiale formato da due stelle dalla massa intermedia, che evolvono attraverso una serie di trasformazioni dei rispettivi *envelope*¹. Lo stadio finale di queste evoluzioni è un sistema di due Nane Bianche degeneri di Carbonio e Ossigeno (C-O WDs), la cui massa combinata (massa totale del sistema) è maggiore della massa di Chandrasekhar. Se quindi questi due corpi si dovessero fondere (fenomeno di *merging*), grazie ad una sufficiente perdita di momento angolare attraverso l'emissione di *onde gravitazionali*, si formerebbe una struttura stellare che violerebbe il limite massimo (2.19). La degenerazione elettronica non è quindi in grado di generare abbastanza pressione per sostenere tale massa risultante e la pressione gravitazionale, vincendo la competizione con quella degenera, provoca un collasso. Questo violento fenomeno, dai *tempi scala dinamici*, causa l'**accensione del carbonio** in un ambiente degenera con densità dell'ordine dei 10^9 g cm^{-3} , una reazione di tipo esplosivo che provoca un'**esplosione termonucleare** talmente forte da spazzare via l'intera struttura stellare, senza lasciare alcun residuo² dietro di sé.

Tale drastico evento rappresenta la descrizione delle **Supernovae di tipo Ia**, dette anche SNeIa Th (Thermonuclear).

¹Strati che circondano il nucleo della stella.

²a differenza dalla Supernova di tipo II detta Core-Collapse, il quale residuo, a seconda della massa della stella che l'ha provocata, sarà una Stella di Neutroni ($11M_{\odot} < M < 25M_{\odot}$) o un Buco Nero ($M > 25M_{\odot}$).

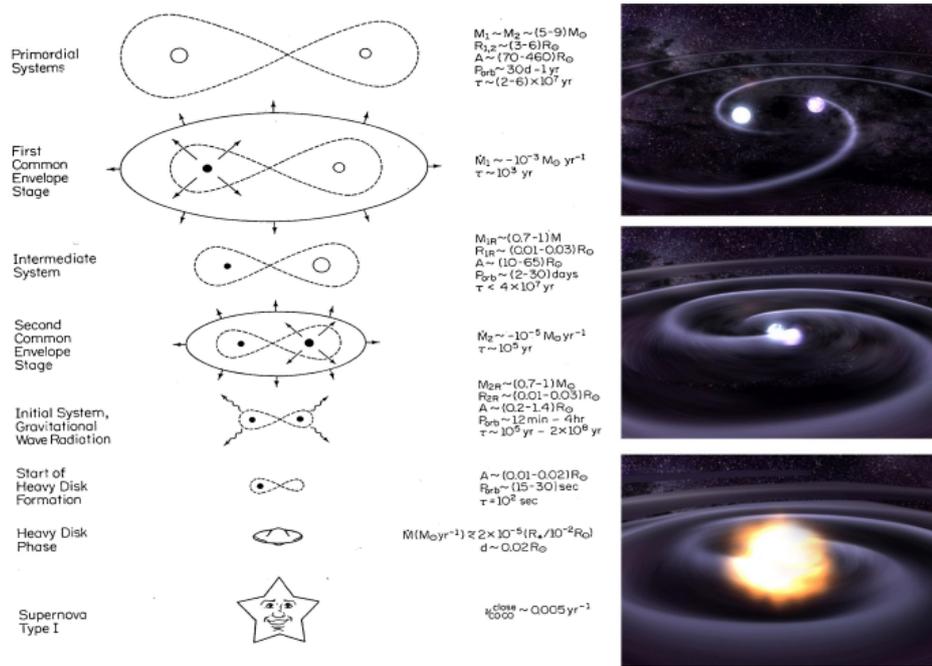


Figura A.1: Illustrazione del processo in cui gli envelope delle due stelle del sistema binario sono fisicamente a contatto tra loro, fino alla formazione della "fase di disco pesante" [5]; la rappresentazione artistica a destra mostra il *merging* del sistema binario di WDs per perdita di momento angolare da emissione di onde gravitazionali, con conseguente collasso e accensione del Carbonio in ambiente degenere. [5]

A.2 Single-Degenerate Scenario

Il cosiddetto *Single-Degenerate Scenario* (SDS) è un modello alternativo di sistema binario formato da una C-O WD degenere e da una stella compagna "normale". La **Fig. A.2** mostra in maniera esaustiva il suo funzionamento: una delle delle due stelle, alla fine della sua evoluzione, diventa una Nana Bianca degenere poco massiva ($M < 1M_\odot$); quest'ultima accrescerà successivamente la propria massa prendendola da quella della compagna e raggiungerà e **supererà** il limite di Chandrasekhar, premendo così il grilletto dell'accensione del Carbonio e facendosi essenzialmente esplodere sempre in una SNIa Termonucleare (A sinistra: [5] ; a destra: [12]).

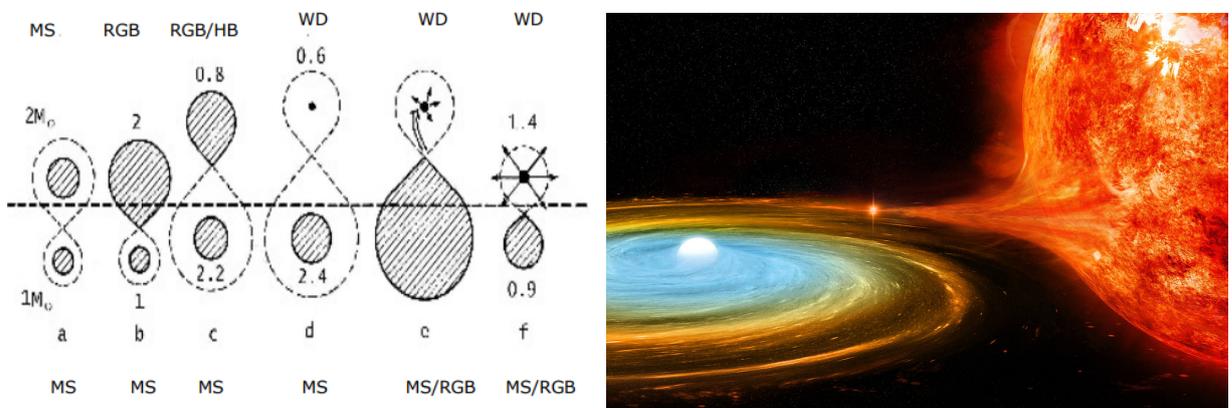


Figura A.2: Single-Degenerate Scenario

Bibliografia

- [1] A. Burrows. “Neutron Stars”. In: *Princeton University* (2017).
- [2] A. Burrows. “WHITE DWARFS (DEGENERATE DWARFS)”. In: *Princeton University* (2017).
- [3] C. Chiosi. *Struttura ed Evoluzione delle Stelle*. Università degli Studi di Padova.
- [4] F. R. Ferraro. *Astrofisica Stellare, Dispense*. Università di Bologna, 2021.
- [5] F. R. Ferraro. *Stellar Evolution, Dispense*. Università di Bologna, 2021.
- [6] G. N. Di Gesu. “Nane Bianche e Limite di Chandrasekhar”. In: (2020).
- [7] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. 1995.
- [8] M. P. Kennet. *Essential Statistical Physics*. 2020.
- [9] NASA/JPL-Caltech. *Bose-Einstein Condensate Graph*. URL: <https://www.jpl.nasa.gov/images/pia22561-bose-einstein-condensate-graph>.
- [10] L. Pasquini. *Struttura della Materia, Dispense*. Università di Bologna, 2021.
- [11] F. Ravanini. *Meccanica Quantistica per il corso di Istituzioni di Fisica Teorica, Dispense*. Università di Bologna, 2021.
- [12] NASA website. *Double Trouble: A White Dwarf Surprises Astronomers*. URL: https://www.nasa.gov/mission_pages/chandra/images/double-trouble-a-white-dwarf-surprises-astronomers.html.