

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

MODELLI STOCASTICI
PER LA VALUTAZIONE DI UN
TOTAL RETURN SWAP

Tesi di Laurea Magistrale

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giacomo Bormetti

Presentata da:
Elia Saltarelli

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Introduzione	3
1 Nozioni matematiche preliminari	5
1.1 Equazioni differenziali stocastiche	5
1.1.1 Soluzioni forti: esistenza e unicità	6
1.1.2 Equazioni stocastiche lineari	14
1.2 Teoria di non arbitraggio	16
1.2.1 Modello di Mercato	16
1.2.2 Misura martingala e teoremi fondamentali	20
2 Nozioni finanziarie preliminari	29
2.1 Tassi d'interesse spot	29
2.2 Tassi d'interesse forward	32
2.3 Introduzione agli Swaps	35
2.4 Total Return Swap: definizione e modalità di copertura	35
3 Modellistica per l'evoluzione dei tassi	38
3.1 One-factor short-rate models	38
3.1.1 Modello di Vasicek	39
3.1.2 Modello di Dothan	40
3.1.3 Modello di Vasicek Esponenziale	40
3.2 Two-factor short-rate models	42
3.2.1 Modello G2++ a due fattori	43
3.2.2 Heath-Jarrow-Morton framework (HJM)	44
3.3 Probabilità di default	45
3.3.1 Processo di Poisson omogeneo nel tempo	46
3.3.2 Processo di Poisson non omogeneo nel tempo	48
4 Valutazione di un Total Return Swap	50
4.1 Formula per la valutazione del TRS	51
4.2 Modalità di valutazione: NPV o Accrual	56

5	Analisi del pricing di due TRS	58
5.1	Framework e Dataset	58
5.2	Analisi e Risultanze	62
	Conclusioni	68
	Bibliografia	69

Introduzione

L'obiettivo del presente lavoro di tesi è quello di derivare la valutazione di un Total Return Swap (TRS) utilizzando la modellistica stocastica che sta alla base dello studio del pricing di derivati finanziari.

I contratti di tipo swap, la cui origine è collocata intorno agli anni '70, prevedono lo scambio di flussi tra due parti, definiti sulla base del sottostante. In particolare, un Total Return Swap è un derivato finanziario che prevede lo scambio periodico di pagamenti definiti rispetto alla gamba di performance del sottostante e alla gamba di interesse. Nello specifico, la gamba di performance del derivato in oggetto dipende dal sottostante al TRS, che può essere un'azione, un indice o più generalmente un paniere (*basket*) di questi. La scadenza di questi contratti è generalmente sul breve o medio periodo, con una durata media che non supera l'anno. Le finalità di un contratto Total Return Swap possono essere, da una parte, l'esposizione sul sottostante senza prevederne direttamente l'acquisto, e dall'altra, la ricezione di pagamenti sulla base di un tasso d'interesse.

L'elaborato è composto da un'introduzione alle nozioni matematiche preliminari alla costruzione di un modello di mercato utile a derivare il pricing di un derivato (i.e. Teoria di non arbitraggio, esistenza di una misura martingala e le condizioni sotto le quali questa è unica). Nel secondo capitolo, vengono presentate le definizioni finanziarie necessarie alla descrizione di tali prodotti (e.g. Tassi d'interesse spot e Tassi forward). Nel corso della tesi viene presentata una rassegna della modellistica per l'evoluzione dei tassi descritti da dinamiche di volta in volta più complesse, e.g. Modello di Vasicek, modello di Dothan e approccio di Heath-Jarrow-Morton (HJM). In tale contesto, sono state derivate le formule di valutazione ad Accrual e a Net Present Value (NPV) per il TRS sfruttando la teoria di non arbitraggio, la cui principale differenza diviene dal considerare o meno l'attualizzazione tramite il fattore di sconto stocastico dei flussi di cassa previsti tra le due parti del contratto.

Nell'ultimo capitolo, viene presentata un'analisi delle due modalità di pricing effettuata su due TRS rispettivamente su basket di azioni e basket di indici.

In tale analisi, condotta sotto opportune ipotesi e sfruttando le formule precedentemente derivate, sono state utilizzate le applicazioni del metodo Monte Carlo alla finanza per la previsione del valore futuro delle componenti del sottostante, confrontando poi il pri-

cing ottenuto sulla base dei flussi di cassa effettivamente erogati per tutta la durata dei contratti oggetto dello studio. L'analisi effettuata pone in evidenza una valutazione a Net Present Value più agevolata per la controparte esposta al rischio delle componenti del sottostante rispetto alla valutazione ad Accrual. Viceversa la valutazione ad Accrual propone una valutazione maggiormente favorevole per la parte che riceve la gamba di tasso.

La tesi è stata svolta nel periodo di tirocinio, dal 4 Luglio 2022 all'11 Ottobre 2022, effettuato presso la sede di Milano di Deloitte Consulting S.r.l. nella divisione Operating Model Transformation FSI. Il ruolo di supervisore tecnico dell'elaborato internamente a Deloitte è stato svolto dalla Dott.ssa. Ambra Ciapica e dal manager supervisore di progetto Dott. Francesco Beretta.

Capitolo 1

Nozioni matematiche preliminari

Nel corso di questo capitolo vengono presentate le definizioni ed i risultati utili a descrivere la teoria probabilistica alla base dello studio dei modelli stocastici per la finanza, con l'obiettivo di analizzare la struttura e le modalità di valutazione di derivati finanziari come gli swaps.

Per le nozioni preliminari e generali relative ai processi stocastici (e.g. adattabilità, misurabilità, progressiva misurabilità, ecc.), regolarità e calcolo stocastico (e.g. formula di Ito) utilizzate, si rimanda ai capitoli 4 e 5 di [4].

1.1 Equazioni differenziali stocastiche

Nella presente sezione verrà introdotto il concetto di soluzione di una equazione differenziale stocastica, dimostrandone l'esistenza e l'unicità rispetto precise condizioni. Per tale sezione, si fa riferimento a [3].

Nella definizione di equazione differenziale stocastica ci sono tre ingredienti fondamentali, che sono: i coefficienti, il moto Browniano e il dato iniziale. Nello specifico, consideriamo $N, d \in \mathbb{N}$ e due funzioni misurabili:

$$b = b(t, x) : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \sigma = \sigma(t, x) : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times d},$$

dove $\mathbb{R}^{N \times d}$ rappresenta lo spazio delle matrici $(N \times d)$ -dimensionali. Preso W un moto Browniano d -dimensionale definito sullo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, P, (F_t)_{t \geq 0})$, $t_0 \geq 0$ e Z una variabile aleatoria F_{t_0} -misurabile e tale che $|Z| < +\infty$ q.c., possiamo definire la soluzione di una EDS come segue.

Definizione 1.1.1 *Soluzione dell'equazione differenziale stocastica*
 Data la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t; \\ X_{t_0} &= Z, \end{aligned} \tag{1.1}$$

di coefficienti b, σ , relativa al moto Browniano W e con dato iniziale Z al tempo t_0 , una soluzione di tale equazione è un processo $(X_t)_{t \geq 0}$ continuo e adattato sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ tale che quasi certamente valga:

$$\begin{aligned} b(\cdot, X) &\in \mathbb{L}_{loc}^1([0, +\infty[), \quad \sigma(\cdot, X) \in \mathbb{L}_{loc}^2([0, +\infty[), \\ X_t &= Z + \int_{t_0}^t b(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove, più in generale, \mathbb{L}_{loc}^p indica lo spazio dei processi progressivamente misurabili u e tali che $\int_0^T |u_t|^p dt < \infty$ q.c. per ogni $T > 0$.

Pertanto, il processo di Ito:

$$Y_t := Z + \int_{t_0}^t b(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad t \geq t_0,$$

è ben definito. Ne consegue per definizione che X e Y sono indistinguibili, ovvero:

$$\sup_{t \geq t_0} |X_t - Z - \int_{t_0}^t b(s, X_s)ds - \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s)dW_s| = 0 \text{ q.c.}$$

1.1.1 Soluzioni forti: esistenza e unicità

Per i risultati preliminari utilizzati in tale sezione (e.g. lemma di freezing, lemma di Borel-Cantelli) si fa riferimento ai capitoli 2 e 4 di [3].

Ipotesi standard: diremo che i coefficienti b, σ verificano le ipotesi standard se per $T > 0$ esistono due costanti c_1, c_2 positive tali che:

$$\begin{aligned} |b(t, x)| + |\sigma(t, x)| &\leq c_1(1 + |x|), \\ |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &\leq c_2|x - y|, \end{aligned}$$

per ogni $t \in [0, T]$ e $x, y \in \mathbb{R}^N$. Tali due condizioni riguardano rispettivamente l'ipotesi di crescita lineare e l'ipotesi di Lischitzianità globale in x .

Nel corso di questa sezione useremo frequentemente i seguenti risultati.

Lemma 1.1.1 *Gronwall*

Sia v una funzione \mathcal{B} -misurabile, limitata e non-negativa che verifica la stima integrale:

$$v(t) \leq a + b \int_0^t v(s) ds, \quad s \in [0, T],$$

con $a, b \geq 0$. Allora si ha:

$$v(t) \leq ae^{bt}, \quad s \in [0, T].$$

Lemma 1.1.2 Siano X, Y processi adattati e continui q.c., $T > 0$ e $p \geq 2$. Allora:

- se b, σ verificano la condizione di crescita lineare, esiste una costante positiva \bar{c}_1 , dipendente solo da p e c_1 , tale che

$$\begin{aligned} & E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| \int_{t_0}^t b(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dW_s \right|^p \right] \\ & \leq \bar{c}_1 (t_1 - t_0)^{\frac{p-2}{2}} \int_{t_0}^{t_1} \left(1 + E \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} |X_r|^p \right] \right) ds, \end{aligned}$$

per ogni $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$;

- se b, σ verificano la condizione di Lischitzianità globale, esiste una costante positiva \bar{c}_2 , dipendente solo da p e c_2 , tale che:

$$\begin{aligned} & E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds + \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^p \right] \\ & \leq \bar{c}_2 (t_1 - t_0)^{\frac{p-2}{2}} \int_{t_0}^{t_1} E \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} |X_r - Y_r|^p \right] ds, \end{aligned}$$

per ogni $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$.

Dimostrazione.

Ricordiamo la disuguaglianza elementare:

$$|x_1 + \dots + x_n|^p \leq n^{p-1} (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^N, n \in \mathbb{N}.$$

Per la disuguaglianza di Hölder si ha:

$$E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| \int_{t_0}^t b(s, X_s) ds \right|^p \right] \leq (t_1 - t_0)^{p-1} E \left[\int_{t_0}^{t_1} |b(s, X_s)|^p ds \right]$$

Per la prima ipotesi standard:

$$\leq (t_1 - t_0)^{p-1} c_1^p \int_{t_0}^{t_1} E [(1 + |X_s|)^p] ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{p-1} (t_1 - t_0)^{p-1} c_1^p \int_{t_0}^{t_1} (1 + E[|X_s|^p]) ds \\
&\leq 2^{p-1} (t_1 - t_0)^{p-1} c_1^p \int_{t_0}^{t_1} \left(1 + E \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} |X_r|^p \right] \right) ds.
\end{aligned}$$

Analogamente, sappiamo che esiste una costante c che dipende solo da p tale che valga:

$$E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dW_s \right|^p \right] \leq c (t_1 - t_0)^{\frac{p-2}{2}} E \left[\int_{t_0}^{t_1} |\sigma(s, X_s)|^p ds \right]$$

e, procedendo come nella stima precedente:

$$\leq c (t_1 - t_0)^{\frac{p-2}{2}} 2^{p-1} c_1^p \int_{t_0}^{t_1} \left(1 + E \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} |X_r|^p \right] \right) ds.$$

Ancora per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds \right|^p \right] \leq (t_1 - t_0)^{p-1} E \left[\int_{t_0}^{t_1} |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|^p ds \right]$$

utilizzando la prima ipotesi standard:

$$\begin{aligned}
&\leq (t_1 - t_0)^{p-1} c_2^p \int_{t_0}^{t_1} E[|X_s - Y_s|^p] ds \\
&\leq (t_1 - t_0)^{p-1} c_2^p \int_{t_0}^{t_1} E \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} |X_r - Y_r|^p \right] ds.
\end{aligned}$$

Analogamente, per quanto utilizzato sopra, si ha:

$$E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^p \right] \leq c_p (t_1 - t_0)^{\frac{p-2}{2}} E \left[\int_{t_0}^{t_1} |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^p ds \right]$$

ed infine:

$$\leq c_p (t_1 - t_0)^{\frac{p-2}{2}} c_2^p \int_{t_0}^{t_1} E \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} |X_r - Y_r|^p \right] ds.$$

Questo conclude la dimostrazione.

Fissato $t_0 \geq 0$, indichiamo con:

$$\mathcal{G}_t^{W, t_0} = \sigma(W_s - W_{t_0}, t_0 \leq s \leq t), \quad t \geq t_0,$$

la σ -algebra generata dagli incrementi Browniani nell'intervallo $[t_0, t]$. È facile verificare che il processo

$$W_t^{t_0} := W_t - W_{t_0}, \quad t \geq t_0,$$

è un moto Browniano sullo spazio $\left(\Omega, F, P, \left(\mathcal{G}_t^{W,t_0}\right)_{t \geq t_0}\right)$ ed è anche un moto Browniano rispetto alla filtrazione completata.

$$\mathcal{F}_t^{W,t_0} = \sigma\left(\mathcal{G}_t^{W,t_0} \cup \mathcal{N}\right), \quad t \geq t_0,$$

che verifica le ipotesi usuali. A volte può essere comodo estendere le definizioni precedenti per $t < t_0$ ponendo:

$$\mathcal{G}_t^{W,t_0} = \mathcal{F}_t^{W,t_0} = \sigma(\mathcal{N}), \quad W_t^{t_0} = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Una fondamentale proprietà è descritta dal seguente risultato:

Lemma 1.1.3 *Sia W è un moto Browniano su $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$. Le σ -algebre \mathcal{F}_{t_0} e \mathcal{F}_t^{W,t_0} sono indipendenti.*

Teorema 1.1.4 *Esistenza*

Assumiamo che i coefficienti b, σ soddisfino le ipotesi standard e $Z \in m\mathcal{F}_{t_0}$ con $|Z| < +\infty$ q.c. Valgono i seguenti risultati:

i) esiste ed è unica la soluzione dell'EDS;

ii) sia $X^{t_0,x} = (X_t^{t_0,x})_{t \geq t_0}$ la soluzione dell'EDS con dato iniziale $X_{t_0}^{t_0,x} = x \in \mathbb{R}^N$. Per ogni $t \geq t_0$ si ha:

$$(x, \omega) \mapsto \psi_{t_0,t}(x, \omega) := X_t^{t_0,x}(\omega) \in m\left(\mathcal{B}_N \otimes \mathcal{F}_t^{W,t_0}\right);$$

iii) il processo $X^{t_0,Z} = (X_t^{t_0,Z})_{t \geq t_0}$, definito da:

$$X_t^{t_0,Z}(\omega) := \psi_{t_0,t}(Z(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

è soluzione dell'EDS. Inoltre vale la proprietà di flusso:

$$X_T^{t_0,Z} = X_T^{t, X_t^{t_0,Z}}, \quad T \geq t \geq t_0 \geq 0, \quad q.c.$$

Dimostrazione.

(1) Proviamo l'esistenza della soluzione dell'EDS su $[t_0, T]$, con T fissato, e col dato iniziale deterministico $X_{t_0} = x \in \mathbb{R}^N$. Utilizziamo il metodo delle approssimazioni successive e definiamo ricorsivamente la successione di processi di Itô

$$\begin{aligned} X_t^{(0)} &\equiv x, \\ X_t^{(n)} &= x + \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW_s, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

per $t \in [t_0, T]$. La successione è ben definita con $X^{(n)}$ è adattato e continuo q.c. per ogni n . Da un semplice argomento induttivo segue che $X_t^{(n)} = X_t^{(n)}(x, \omega) \in m \left(\mathcal{B}_N \otimes \mathcal{F}_t^{W, t_0} \right)$ per ogni $n \geq 0$ e $t \in [t_0, T]$.

Proviamo per induzione la stima:

$$E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)} \right|^2 \right] \leq \frac{c^n (t_1 - t_0)^n}{n!}, \quad t_1 \in [t_0, T], n \in \mathbb{N},$$

con c costante positiva che dipende solo da T, x e dalle costanti c_1, c_2 delle ipotesi standard sui coefficienti. Se $n = 1$ si ha:

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| X_t^{(1)} - X_t^{(0)} \right|^2 \right] &= E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| \int_{t_0}^t b(s, x) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, x) dW_s \right|^2 \right] \\ &\leq \bar{c}_1 (1 + |x|^2) (t_1 - t_0). \end{aligned}$$

Supposta vera la prima ipotesi standard per n , proviamola per $n + 1$:

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right|^2 \right] &= E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dW_s \right|^2 \right] \end{aligned}$$

per la prima implicazione del lemma:

$$\leq \bar{c}_2 \int_{t_0}^{t_1} E \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} \left| X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)} \right|^2 \right] ds$$

(per ipotesi induttiva, con $c = \bar{c}_2 \vee \bar{c}_1 (1 + |x|^2)$)

$$\leq c^{n+1} \int_{t_0}^{t_1} \frac{(s - t_0)^n}{n!} ds,$$

e questo prova la prima ipotesi standard. Combinando la disuguaglianza di Markov con quanto provato sopra otteniamo:

$$P \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)} \right| \geq \frac{1}{2^n} \right) \leq 2^{2n} E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)} \right|^2 \right] \leq \frac{(4cT)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Allora, per il Lemma di Borel-Cantelli abbiamo:

$$P \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)} \right| \geq \frac{1}{2^n} \quad \text{i.o.} \right) = 0$$

ossia, per quasi ogni $\omega \in \Omega$ esiste $n_\omega \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| X_t^{(n)}(\omega) - X_t^{(n-1)}(\omega) \right| \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \geq n_\omega.$$

Essendo

$$X_t^{(n)} = x + \sum_{k=1}^n \left(X_t^{(k)} - X_t^{(k-1)} \right)$$

si ha che, quasi certamente, $X_t^{(n)}$ converge uniformemente in $t \in [t_0, T]$ per $n \rightarrow +\infty$ ad un limite che indichiamo con X_t : per esprimere questo fatto, in simboli scriviamo $X_t^{(n)} \rightarrow X_t$ q.c. Notiamo che $X = (X_t)_{t \in [t_0, T]}$ è un processo continuo q.c. (grazie alla convergenza uniforme) e adattato: inoltre, $X_t = X_t(x, \omega) \in m(\mathcal{B}_N \otimes \mathcal{F}_t^{W, t_0})$ per ogni $t \in [t_0, T]$ perché tale proprietà di misurabilità vale per $X_t^{(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per la prima ipotesi standard ed essendo X continuo q.c. è chiaro che la seconda condizione delle ipotesi standard è soddisfatta. Per verificare che, quasi certamente, vale:

$$X_t = x + \int_{t_0}^t b(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad t \in [t_0, T],$$

è sufficiente osservare che:

* per la proprietà di Lipschitzianità di b e σ uniforme in t , si ha che $b(t, X_t^{(n)}) \rightarrow b(t, X_t)$ e $\sigma(t, X_t^{(n)}) \rightarrow \sigma(t, X_t)$ q.c. da cui:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) ds &= \int_{t_0}^t b(s, X_s) ds \quad \text{q.c.} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t |\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)|^2 ds &= 0 \quad \text{q.c.} \end{aligned}$$

* pertanto la prima ipotesi standard implica che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dW_s = \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad \text{q.c.}$$

Questo conclude la prova dell'esistenza nel caso del dato iniziale deterministico.

(2) Consideriamo ora il caso di un dato iniziale aleatorio $Z \in m\mathcal{F}_{t_0}$ tale che $|Z| < +\infty$ q.c. Sia f la funzione su $\mathbb{R}^N \times \Omega$ definita da:

$$f(x, \cdot) := \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| X_t^{t_0, x} - x - \int_{t_0}^t b(s, X_s^{t_0, x}) ds - \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s^{t_0, x}) dW_s \right|.$$

Notiamo che $f \in m\left(\mathcal{B}_N \otimes \mathcal{F}_T^{W,t_0}\right)$ poiché $X_t^{t_0, \cdot} \in m\left(\mathcal{B}_N \otimes \mathcal{F}_t^{W,t_0}\right)$ per ogni $t \in [t_0, T]$. Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha $f(x, \cdot) = 0$ q.c. e quindi anche $F(x) := E[f(x, \cdot)] \equiv 0$. Allora vale:

$$0 = F(Z) = E[f(x, \cdot)]|_{x=Z}$$

(per il Lemma di freezing), poiché $Z \in m\mathcal{F}_{t_0}$, $f \in m\left(\mathcal{B}_N \otimes \mathcal{F}_T^{W,t_0}\right)$ con \mathcal{F}_{t_0} e \mathcal{F}_T^{W,t_0} algebre indipendenti per il Lemma sulle sigma algebre:

$$= E[f(Z, \cdot) | \mathcal{F}_{t_0}].$$

Applicando il valore atteso abbiamo anche:

$$E[f(Z, \cdot)] = 0$$

e quindi, per l'arbitrarietà di T , il processo $X^{t_0, Z}$ è la soluzione dell'EDS.

(3) Per $0 \leq t_0 \leq t \leq T$, con uguaglianze che valgono quasi certamente, si ha:

$$\begin{aligned} X_T^{t_0, Z} &= Z + \int_{t_0}^T b(s, X_s^{t_0, Z}) ds + \int_{t_0}^T \sigma(s, X_s^{t_0, Z}) dW_s \\ &= Z + \int_{t_0}^t b(s, X_s^{t_0, Z}) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s^{t_0, Z}) dW_s \\ &\quad + \int_t^T b(s, X_s^{t_0, Z}) ds + \int_t^T \sigma(s, X_s^{t_0, Z}) dW_s \\ &= X_t^{t_0, Z} + \int_t^T b(s, X_s^{t_0, Z}) ds + \int_t^T \sigma(s, X_s^{t_0, Z}) dW_s, \end{aligned}$$

ossia $X^{t_0, Z}$ è soluzione dell'EDS con dato iniziale $X_t^{t_0, Z}$ al tempo t . D'altra parte, per quanto provato al punto (2), anche $X^{t, X_t^{t_0, Z}}$ è soluzione dell'EDS con dato iniziale $X_t^{t_0, Z}$ al tempo t . Dall'unicità della soluzione, la cui dimostrazione è riportata di seguito, segue la prova del teorema.

Il risultato di unicità, riportato di seguito, vale sotto l'ipotesi più debole di Lipschitzianità locale in x , come riportato nella prima ipotesi standard.

Teorema 1.1.5 *Unicità della soluzione*

Assumiamo che per ogni $T > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ esista una costante positiva κ_n , dipendente da n e T , tale che:

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \kappa_n |x - y|,$$

per ogni $t \in [0, T]$ e $x, y \in \mathbb{R}^N$ tali che $|x|, |y| \leq n$. Allora l'EDS ammette al più una soluzione, nel senso che due soluzioni di tale equazione sono processi indistinguibili.

Dimostrazione.

Siano X, Y due soluzioni dell'EDS. Fissiamo $T > t_0$ e utilizziamo un argomento di "localizzazione" (necessario per applicare il lemma di Gronwall alla funzione), poniamo:

$$\tau_n = \inf \{t \in [t_0, T] \mid |X_t| \vee |Y_t| \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

con la convenzione $\min \emptyset = T$. Si noti che $\tau_n = t_0$ su $(|Z| > n)$. Essendo per ipotesi X, Y adattati e continui q.c. e $|Z| < \infty$ q.c., τ_n è una successione crescente di tempi d'arresto a valori in $[t_0, T]$, tale che $\tau_n \nearrow T$ q.c. Poniamo:

$$b_n(t, x) = b(t, x)\mathbb{1}_{[t_0, \tau_n]}(t), \quad \sigma_n(t, x) = \sigma(t, x)\mathbb{1}_{[t_0, \tau_n]}(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

I processi $X_{t \wedge \tau_n}, Y_{t \wedge \tau_n}$ soddisfano quasi certamente l'equazione:

$$\begin{aligned} X_{t \wedge \tau_n} - Y_{t \wedge \tau_n} &= \int_{t_0}^{t \wedge \tau_n} (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds + \int_{t_0}^{t \wedge \tau_n} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \\ &= \int_{t_0}^t (b_n(s, X_{s \wedge \tau_n}) - b_n(s, Y_{s \wedge \tau_n})) ds + \int_{t_0}^t (\sigma_n(s, X_{s \wedge \tau_n}) - \sigma_n(s, Y_{s \wedge \tau_n})) dW_s. \end{aligned}$$

Inoltre si ha:

$$|b_n(s, X_{s \wedge \tau_n}) - b_n(s, Y_{s \wedge \tau_n})| = |b_n(s, X_{s \wedge \tau_n}) - b_n(s, Y_{s \wedge \tau_n})| \mathbb{1}_{(|Z| \leq n)}$$

(poichè $|X_{s \wedge \tau_n}|, |Y_{s \wedge \tau_n}| \leq n$ su $(|Z| \leq n)$ per $s \in [t_0, T]$)

$$\leq \kappa_n |X_{s \wedge \tau_n} - Y_{s \wedge \tau_n}|;$$

una stima analoga si ha con σ_n al posto di b_n . Ora poniamo

$$v_n(t) = E \left[\sup_{t_0 \leq s \leq t} |X_{s \wedge \tau_n} - Y_{s \wedge \tau_n}|^2 \right], \quad t \in [t_0, T].$$

Dalle ipotesi standard, procedendo esattamente come nella prova della stima relativa al lemma precedente con $p = 2$, otteniamo:

$$v_n(t) \leq \bar{c} \int_{t_0}^t v_n(s) ds, \quad t \in [t_0, T],$$

con \bar{c} costante positiva che dipende solo da T e κ_n . Poiché X e Y sono processi continui q.c. e adattati (e quindi progressivamente misurabili), il Teorema di Fubini assicura che v è una funzione misurabile su $[t_0, T]$, ossia $v_n \in m\mathcal{B}$. Inoltre v_n è limitata, precisamente $|v_n| \leq 4n^2$, per costruzione. Dal Lemma di Gronwall otteniamo che $v_n \equiv 0$ e quindi:

$$E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X_{t \wedge \tau_n} - Y_{t \wedge \tau_n}|^2 \right] = v_n(T) = 0.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, per il Teorema di Beppo-Levi, si ha che X e Y sono indistinguibili su $[t_0, T]$. La tesi segue dall'arbitrarietà di T .

1.1.2 Equazioni stocastiche lineari

Un caso di semplice risoluzione è quello delle equazioni differenziali stocastiche lineari. Consideriamo una EDS della seguente forma:

$$dX_t = (BX_t + b) dt + \sigma dW_t, \quad (1.3)$$

dove $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^b$, $\sigma \in \mathbb{R}^{N \times d}$ e W è un moto Browniano d -dimensionale. La (1.3) è un'EDS della forma (1.1) con i coefficienti che sono funzioni lineari e pertanto diciamo che la (1.3) è un'EDS lineare, anche se il coefficiente di diffusione è addirittura costante. I risultati generali, di esistenza e unicità garantiscono l'esistenza e unicità della soluzione anche in tale casistica.

Il teorema seguente fornisce l'espressione esplicita della soluzione.

Teorema 1.1.6 *La soluzione $X^x = (X_t^x)_{t \geq 0}$ di (1.3) con dato iniziale $X_0^x = x \in \mathbb{R}^N$ è data da*

$$X_t^x = e^{tB} \left(x + \int_0^t e^{-sB} b ds + \int_0^t e^{-sB} \sigma dW_s \right).$$

Di conseguenza, $X_t^x \sim \mathcal{N}_{m_t(x), \mathcal{C}_t}$ dove:

$$m_t(x) = e^{tB} \left(x + \int_0^t e^{-sB} b ds \right), \quad \mathcal{C}_t = \int_0^t e^{sB} \sigma \sigma^* e^{sB^*} ds.$$

Dimostrazione.

Per provare che X^x risolve la EDS è sufficiente applicare la formula di Itô, osservando che $X_t^x = e^{tB} Y_t^x$ con

$$dY_t^x = e^{-tB} b dt + e^{-tB} \sigma dW_t, \quad Y_0^x = x.$$

Ricordiamo ora che, poiché i coefficienti di Y sono funzioni deterministiche, si ha

$$Y_t^x \sim \mathcal{N}_{\mu_t(x), C_t}, \quad \mu_t(x) = x + \int_0^t e^{-sB} b ds,$$

$$C_t = \int_0^t e^{-sB} \sigma \sigma^* e^{-sB^*} ds.$$

La tesi segue facilmente poiché X^x è una trasformazione lineare di Y^x .

Osservazione: Più in generale, la soluzione $X^{t,x} = (X_T^{t,x})_{T \geq t}$ di (1.3), con condizione iniziale $X_t^{t,x} = x$, è data da

$$X_T^{t,x} = e^{(T-t)B} \left(x + \int_t^T e^{-(s-t)B} b ds + \int_t^T e^{-(s-t)B} \sigma dW_s \right) \sim \mathcal{N}_{m_{T-t}(x), \mathcal{C}_{T-t}}.$$

Se la matrice di covarianza \mathcal{C}_{T-t} è definita positiva per $T > t$ allora il processo X ha densità di transizione Gaussiana

$$\Gamma(t, x; T, y) = \frac{(2\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det \mathcal{C}_{T-t}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \langle \mathcal{C}_{T-t}^{-1} (y - m_{T-t}(x)), (y - m_{T-t}(x)) \rangle \right), \quad t < T, x, y \in \mathbb{R}^N.$$

1.2 Teoria di non arbitraggio

In tale sezione si vuole introdurre la teoria che sta alla base di un mercato privo di forme di arbitraggio, necessario per la valutazione di derivati finanziari come gli Swaps. I contenuti presenti in tale sezione fanno riferimento a [4].

1.2.1 Modello di Mercato

Consideriamo un modello di mercato discreto, costruito su uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) con Ω che ha un numero finito di elementi e in cui assumiamo che $P(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$ (i.e. gli eventi con probabilità nulla non vengono considerati in tale spazio). Fissato un intervallo temporale $[0, T]$, per ottenere un modello di mercato discreto consideriamo:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

e, per il momento, che il mercato sia composto da $d + 1$ titoli:

$$S = (S^0, S^1, \dots, S^d),$$

dove S_n^k è una variabile aleatoria reale positiva che indica il prezzo all'istante t_n del titolo k -esimo. Il k -esimo titolo è descritto dal processo stocastico $S^k = (S_n^k)_{n=0, \dots, N}$. Diciamo che S è un mercato discreto sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) .

Nel seguito supponiamo che esista almeno un titolo che assume sempre valori strettamente positivi: per semplicità sia $S_n^0 > 0$, per ogni n . Ponendo

$$\tilde{S}_n^k = \frac{S_n^k}{S_n^0},$$

definiamo S^0 come numeraire ed otteniamo il mercato normalizzato rispetto a S^0 , utile per confrontare i valori di S in istanti temporali differenti.

Pertanto, la matrice dei valori scontati dei titoli è data da:

$$\tilde{S} = (\bar{1}, \tilde{S}^1, \dots, \tilde{S}^d).$$

Prendiamo in considerazione la filtrazione (\mathcal{F}_n) definita da:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n), \quad 0 \leq n \leq N.$$

In particolare, \mathcal{F}_n rappresenta le informazioni sul mercato disponibili al tempo t_n , con

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

ossia i prezzi S_0^0, \dots, S_0^d dei titoli all'istante iniziale sono osservabili e dunque sono valori deterministici. Inoltre, possiamo assumere

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N.$$

Definizione 1.2.1 *Portafoglio/Strategia*

Un portafoglio (o strategia) è un processo stocastico in \mathbb{R}^{d+1}

$$\alpha = (\alpha_n^0, \dots, \alpha_n^d)_{n=0, \dots, N}.$$

In tale definizione α_n^k rappresenta la quantità del titolo S^k a disposizione nel portafoglio all'istante t_n . Pertanto possiamo definire il valore del portafoglio α all'istante t_n come:

$$V_n(\alpha) = \alpha_n \cdot S_n := \sum_{k=0}^d \alpha_n^k S_n^k.$$

Più in generale il valore del portafoglio $V(\alpha) := (V_n(\alpha))_{n=0, \dots, N}$ è un processo stocastico reale a tempo discreto.

Osservazione: α_n^k può assumere valori negativi, infatti sono ammessi la vendita allo scoperto di azioni o il prestito di soldi.

Definizione 1.2.2 *Strategia autofinanziante*

Un portafoglio o strategia α è autofinanziante se:

$$V_n(\alpha) = \alpha_{n+1} \cdot S_n,$$

per ogni $n = 0, \dots, N - 1$.

Per un portafoglio autofinanziante vale l'uguaglianza

$$\alpha_n \cdot S_n = \alpha_{n+1} \cdot S_n,$$

ovvero che è possibile ribilanciare il portafoglio ma finanziandosi tramite il valore della strategia al tempo n .

In particolare in un portafoglio autofinanziante il termine α_0 è superfluo poiché $V_0(\alpha) = \alpha_1 \cdot S_0$ e il valore $V(\alpha)$ è determinato solo da $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Pertanto, per convenzione, indicheremo una strategia autofinanziante semplicemente con

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N).$$

Risulta inoltre naturale assumere che α sia predicibile (i.e. α_n è \mathcal{F}_{n-1} -misurabile per ogni $n = 1, \dots, N$), poichè in una strategia autofinanziante il ribilanciamento del portafoglio dalla composizione α_n a α_{n+1} avviene al tempo n .

Osservazione: se α è autofinanziante si ha

$$V_{n+1}(\alpha) - V_n(\alpha) = \alpha_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = \sum_{k=0}^d \alpha_{n+1}^k (S_{n+1}^k - S_n^k),$$

perciò, la variazione del valore del portafoglio dal tempo t_n a t_{n+1} è dovuta solo alla variazione dei prezzi dei titoli e non al fatto che è stata introdotta o tolta liquidità.

Sommando in n possiamo definire il processo guadagno (i.e. *Gain Process*) $(g_n(\alpha))_{1 \leq n \leq N}$ della strategia α come:

$$g_n(\alpha) := V_n(\alpha) - V_0(\alpha) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot (S_j - S_{j-1}), \quad n = 1, \dots, N.$$

Pertanto, considerando una strategia autofinanziante si ha:

$$V_n(\alpha) = V_0(\alpha) + g_n(\alpha), \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.4)$$

Proposizione 1.2.1 *Una strategia α è autofinanziante se e solo vale la (1.4), ovvero se in ogni istante il valore del portafoglio è pari alla somma dell'investimento iniziale e del guadagno maturato.*

Consideriamo ora il mercato normalizzato \tilde{S} . Se α è una strategia/portafoglio autofinanziante vale:

$$\tilde{V}_n(\alpha) = \alpha_n \cdot \tilde{S}_n = \alpha_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$$

e

$$\tilde{V}_{n+1}(\alpha) - \tilde{V}_n(\alpha) = \alpha_{n+1} \cdot (\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n).$$

Sommando in n , poiché $\tilde{S}_j^0 - \tilde{S}_{j-1}^0 = 0$, otteniamo

$$\tilde{V}_n(\alpha) = \tilde{V}_0(\alpha) + G_n(\alpha^1, \dots, \alpha^d),$$

dove

$$G_n(\alpha^1, \dots, \alpha^d) := \sum_{j=1}^n \left(\alpha_j^1 (\tilde{S}_j^1 - \tilde{S}_{j-1}^1) + \dots + \alpha_j^d (\tilde{S}_j^d - \tilde{S}_{j-1}^d) \right)$$

è il guadagno normalizzato della strategia α . Ciò significa che il valore normalizzato del portafoglio è pari alla somma del capitale iniziale e del guadagno normalizzato, ottenuto investendo nei titoli $\tilde{S}^1, \dots, \tilde{S}^d$ secondo la strategia $(\alpha^1, \dots, \alpha^d)$. Ovviamente la strategia α determina $\tilde{V}_0(\alpha)$ e i processi predicibili $\alpha^1, \dots, \alpha^d$ (vale anche il viceversa).

Proposizione 1.2.2 *Fissato un valore iniziale $\tilde{V}_0 \in \mathbb{R}$ e dati d processi predicibili $\alpha^1, \dots, \alpha^d$, esiste ed è unico il processo predicibile α^0 tale che la strategia*

$$\alpha = (\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^d)$$

sia autofinanziante e valga $\tilde{V}_0(\alpha) = \tilde{V}_0$.

Dimostrazione.

Dati \tilde{V}_0 e $\alpha^1, \dots, \alpha^d$, il processo α^0 è definito dalla condizione di autofinanziamento:

$$\alpha_{n+1}^0 + \sum_{k=1}^d \alpha_{n+1}^k \tilde{S}_n^k = \tilde{V}_n(\alpha) = \tilde{V}_0 + G_n(\alpha^1, \dots, \alpha^d),$$

da cui segue anche che α_{n+1}^0 è \mathcal{F}_n -misurabile, ossia α^0 è predicibile.

Indichiamo con \mathcal{A} la famiglia dei portafogli autofinanzianti e predicibili:

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha = (\alpha_n^0, \dots, \alpha_n^d)_{n=1, \dots, N} \mid \alpha \text{ è autofinanziante e predicibile} \right\}.$$

Definizione 1.2.3 *Arbitraggio*

Diciamo che $\alpha \in \mathcal{A}$ è un portafoglio di arbitraggio (o semplicemente un arbitraggio) se il valore $V(\alpha)$ del portafoglio è tale che:

i) $V_0(\alpha) = 0$;

ed esiste n tale che:

ii) $V_n(\alpha) \geq 0$, $P - q.c.$;

iii) $P(V_n(\alpha) > 0) > 0$.

In particolare, diremo che il mercato $S = (S^0, \dots, S^d)$ è libero da arbitraggi se la famiglia \mathcal{A} non contiene portafogli d'arbitraggio.

L'assenza di arbitraggio è un'ipotesi fondamentale che ogni modello di mercato "realistico" deve soddisfare.

Definizione 1.2.4 *Strategia ammissibile*

Una strategia $\alpha \in \mathcal{A}$ si dice ammissibile se:

$$V_n(\alpha) \geq 0, \quad P - q.c.$$

per ogni $n \leq N$

Proposizione 1.2.3 *Un mercato discreto è libero da arbitraggi se e solo se non esistono strategie d'arbitraggio ammissibili.*

Dimostrazione.

Supponiamo che non esistano strategie d'arbitraggio ammissibili: dobbiamo provare che allora non esistono arbitraggi. Dimostriamo la tesi per assurdo: supponendo l'esistenza di un arbitraggio α , costruiamo un arbitraggio ammissibile β .

Per ipotesi, $V_0(\alpha) = \alpha_1 \cdot S_0 = 0$ ed esiste n (non è restrittivo supporre $n = N$) tale che $\alpha_n \cdot S_n \geq 0$ q.c. e $P(\alpha_n \cdot S_n > 0) > 0$. Se α non è ammissibile esistono $k < N$ e $F \in \mathcal{F}_k$ con $P(F) > 0$ tali che

$$\alpha_k \cdot S_k < 0 \text{ su } F, \quad \text{e} \quad \alpha_n \cdot S_n \geq 0 \text{ q.c. per } k < n \leq N.$$

Definiamo allora una nuova strategia d'arbitraggio nel modo seguente: $\beta_n \equiv 0$ su $\Omega \setminus F$ per ogni n , mentre su F

$$\beta_n = \begin{cases} 0, & n \leq k \\ \alpha_n - (\alpha_k \cdot S_k) \mathbf{e}^0, & n > k \end{cases}$$

dove $\mathbf{e}^0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{d+1}$.

1.2.2 Misura martingala e teoremi fondamentali

Questa sezione è volta a caratterizzare la proprietà di assenza d'arbitraggi in termini di esistenza di una nuova misura di probabilità equivalente a P e rispetto alla quale il processo dei prezzi scontati è una martingala.

Definizione 1.2.5 Misura martingala

Una misura martingala con numeraire S^0 è una misura di probabilità Q su (Ω, \mathcal{F}) tale che:

- i) Q è equivalente a P ;
- ii) per ogni $n = 1, \dots, N$ vale

$$E^Q \left[\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = \tilde{S}_{n-1},$$

ossia \tilde{S} è una Q -martingala.

Per la proprietà di martingala, si ha

$$E^Q \left[\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_k \right] = \tilde{S}_k, \quad 0 \leq k < n \leq N,$$

ed inoltre

$$E^Q \left[\tilde{S}_n \right] = E^Q \left[E^Q \left[\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_0 \right] \right] = \tilde{S}_0,$$

ovvero **il valore atteso dei prezzi futuri normalizzati è uguale al prezzo attuale**. Osserviamo che la definizione di misura martingala dipende dalla scelta del numeraire stesso.

Osservazione: poiché Q è equivalente a P , il mercato è libero da arbitraggi nella misura P se e solo se lo è in Q .

Teorema 1.2.4 *Primo Teorema fondamentale della valutazione*

Un mercato discreto è libero da arbitraggi se e solo se esiste almeno una misura martingala.

Di seguito vengono riportati alcuni risultati utili.

Proposizione 1.2.5 *Se Q è una misura martingala e $\alpha \in \mathcal{A}$, allora $\tilde{V}(\alpha)$ è una Q -martingala:*

$$E^Q \left[\tilde{V}_{n+1}(\alpha) \mid \mathcal{F}_n \right] = \tilde{V}_n(\alpha), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

In particolare vale la seguente formula di valutazione neutrale al rischio

$$\tilde{V}_0(\alpha) = E^Q \left[\tilde{V}_n(\alpha) \right], \quad n \leq N.$$

Viceversa, se Q è una misura equivalente a P e per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$ allora Q è una misura martingala.

Dimostrazione.

Per la condizione di autofinanziamento, si ha

$$\tilde{V}_{n+1}(\alpha) = \tilde{V}_n(\alpha) + \alpha_{n+1} \cdot (\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n)$$

e considerando l'attesa condizionata a \mathcal{F}_n , otteniamo

$$E^Q \left[\tilde{V}_{n+1}(\alpha) \mid \mathcal{F}_n \right] = \tilde{V}_n(\alpha) + E^Q \left[\alpha_{n+1} \cdot (\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n) \mid \mathcal{F}_n \right]$$

per la proprietà dell'attesa condizionata, essendo α predicibile:

$$= \tilde{V}_n(\alpha) + \alpha_{n+1} \cdot E^Q \left[\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_n \right] = \tilde{V}_n(\alpha).$$

Il viceversa vale banalmente.

Il seguente risultato esprime che se due strategie autofinanzianti e predicibili hanno lo stesso valore finale allora devono avere lo stesso valore anche in tutti i tempi precedenti.

Proposizione 1.2.6 *In un mercato libero da arbitraggi, se $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e vale*

$$V_N(\alpha) = V_N(\beta) \quad P\text{-q.c.},$$

allora

$$V_n(\alpha) = V_n(\beta) \quad P\text{-q.c.}$$

per ogni $n = 0, \dots, N$

Dimostrazione.

La tesi viene direttamente dal fatto che $\tilde{V}(\alpha), \tilde{V}(\beta)$ sono Q martingale con lo stesso valore finale. Infatti, poiché le misure sono equivalenti, vale $V_N(\alpha) = V_N(\beta)Q$ e quindi:

$$\tilde{V}_n(\alpha) = E^Q \left[\tilde{V}_N(\alpha) \mid \mathcal{F}_n \right] = E^Q \left[\tilde{V}_N(\beta) \mid \mathcal{F}_n \right] = \tilde{V}_n(\beta),$$

per ogni $n \leq N$.

Osservazione: in un mercato libero da arbitraggi, se $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e vale

$$V_N(\alpha) \geq V_N(\beta) \quad P\text{-q.c.},$$

allora

$$V_n(\alpha) \geq V_n(\beta) \quad P\text{-q.c.}$$

per ogni $n = 0, \dots, N$

Nello studio di un derivato X , sono importanti sia la valutazione, ossia la determinazione di un prezzo per il derivato che eviti di introdurre possibilità d'arbitraggio nel mercato; che la replicazione del derivato stesso, ossia la determinazione di una strategia (ammesso che esista) $\alpha \in \mathcal{A}$ che assuma a scadenza lo stesso valore del derivato:

$$V_N(\alpha) = X.$$

Se tale strategia esiste, X si dice replicabile e α è detta strategia replicante.

In un mercato libero da arbitraggi è possibile determinare il valore di un derivato in modo da conservare l'assenza d'arbitraggi. Per quanto riguarda l'esistenza di una strategia replicante, questo non è scontato. Pertanto, introduciamo le famiglie dei portafogli super e sub-replicanti X :

$$\mathcal{A}_X^+ = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid V_N(\alpha) \geq X\}, \quad \mathcal{A}_X^- = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid V_N(\alpha) \leq X\}.$$

Il valore iniziale $V_0(\alpha)$, per $\alpha \in \mathcal{A}_X^+$, rappresenta il prezzo a cui chiunque sarebbe disposto a vendere. Indichiamo con $H_0 \in \mathbb{R}$ un prezzo per X : è chiaro che necessariamente deve valere

$$H_0 \leq V_0(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_X^+.$$

Se non valesse, introducendo nel mercato l'opzione al prezzo $H_0 > V_0(\bar{\alpha})$ per una certa strategia $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}_X^+$ si creerebbe un'ovvia possibilità d'arbitraggio (i.e. vendere l'opzione e comprare la strategia $\bar{\alpha}$). Allo stesso modo deve valere che:

$$H_0 \geq V_0(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_X^-.$$

Infatti $V_0(\alpha)$, per $\alpha \in \mathcal{A}_X^-$, rappresenta il prezzo a cui chiunque sarebbe disposto a comprare.

In conclusione il prezzo iniziale di X deve soddisfare la relazione

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}_X^-} V_0(\alpha) \leq H_0 \leq \inf_{\alpha \in \mathcal{A}_X^+} V_0(\alpha).$$

Osserviamo ora che, per l'ipotesi di assenza d'arbitraggi, esiste una misura martingala Q . Rispetto a Q , i prezzi scontati dei titoli e i valori scontati di tutte le strategie in \mathcal{A} sono martingale e quindi coincidono con l'attesa condizionata del proprio valore finale. Pertanto, fissata una misura martingala Q , poniamo:

$$\tilde{H}_n^Q = \frac{H_n^Q}{S_n^0} := E^Q \left[\tilde{X} \mid \mathcal{F}_n \right], \quad n = 0, \dots, N,$$

dove $\tilde{X} = \frac{X}{S_N^0}$.

Lemma 1.2.7 *Per ogni misura martingala Q vale*

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}_X^-} \tilde{V}_n(\alpha) \leq E^Q \left[\tilde{X} \mid \mathcal{F}_n \right] \leq \inf_{\alpha \in \mathcal{A}_X^+} \tilde{V}_n(\alpha),$$

per $n = 0, \dots, N$.

Dimostrazione.

Se $\alpha \in \mathcal{A}_X^-$ allora, vale

$$\tilde{V}_n(\alpha) = E^Q \left[\tilde{V}_N(\alpha) \mid \mathcal{F}_n \right] \leq E^Q \left[\tilde{X} \mid \mathcal{F}_n \right],$$

e una stima analoga vale per $\alpha \in \mathcal{A}_X^+$.

Osservazione: la famiglia delle misure martingale è un insieme convesso, ossia se Q_1, Q_2 sono misure martingale allora per la proprietà di linearità dell'attesa condizionata anche ogni combinazione lineare del tipo

$$\lambda Q_1 + (1 - \lambda) Q_2, \quad \lambda \in [0, 1],$$

è una misura martingala.

Teorema 1.2.8 *Prezzo neutrale al rischio di un derivato replicabile*

Sia X un derivato replicabile in un mercato libero da arbitraggi. Allora per ogni strategia replicante $\alpha \in \mathcal{A}$ e per ogni misura martingala Q vale

$$E^Q \left[\tilde{X} \mid \mathcal{F}_n \right] = \tilde{V}_n(\alpha) =: \tilde{H}_n, \quad n = 0, \dots, N.$$

Il processo (\tilde{H}_n) è detto prezzo d'arbitraggio (o prezzo neutrale al rischio) scontato di X .

Dimostrazione.

Se $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ replicano X allora hanno lo stesso valore finale e hanno anche lo stesso valore in ogni istante. Inoltre se $\alpha \in \mathcal{A}$ replica X allora $\alpha \in \mathcal{A}_X^- \cap \mathcal{A}_X^+$ e vale:

$$E^Q \left[\tilde{X} \mid \mathcal{F}_n \right] = \tilde{V}_n(\alpha),$$

per ogni misura martingala Q .

Tale formula nel caso in cui il numeraire sia il titolo non rischioso (ovvero il conto corrente bancario)

$$S_n^0 = e^{rn \frac{T}{N}}.$$

Allora:

$$H_0 = e^{-rT} E^Q[X]$$

cioè il prezzo attuale è dato dalla migliore stima del payoff finale scontato al tasso di interesse privo di rischio.

Definizione 1.2.6 *Mercato completo*

Un mercato si dice completo se ogni derivato è replicabile, ovvero se per ogni X esiste alpha tale che:

$$V_N(\alpha) = X.$$

In un mercato completo ogni derivato ha un unico prezzo d'arbitraggio che coincide con il valore di una qualsiasi strategia replicante.

Osservazione: in un mercato completo esiste al più una misura martingala: infatti se Q_1, Q_2 sono misure martingale allora vale:

$$E^{Q_1}[X] = E^{Q_2}[X],$$

per ogni variabile aleatoria X , dunque è sufficiente considerare $X = \mathbb{1}_A, A \in \mathcal{F}$ per concludere che $Q_1 = Q_2$. Infatti, l'unicità della misura martingala è una proprietà che caratterizza i mercati completi.

Teorema 1.2.9 *Secondo Teorema fondamentale della valutazione*

Un mercato S libero da arbitraggi è completo se e solo se esiste un'unica misura martingala.

Di seguito riportiamo le dimostrazioni dei teoremi fondamentali:

Dimostrazione. (Primo teorema fondamentale della valutazione)

(se esiste una misura martingala allora S è libero da arbitraggi) Sia Q una misura martingala e per assurdo esista un portafoglio d'arbitraggio $\alpha \in \mathcal{A}$. Allora $V_0(\alpha) = 0$ ed esiste $n \geq 1$ tale che $P(V_n(\alpha) \geq 0) = 1$ e $P(V_n(\alpha) > 0) > 0$. Essendo $Q \sim P$, vale anche $Q(V_n(\alpha) \geq 0) = 1$ e $Q(V_n(\alpha) > 0) > 0$, e di conseguenza $E^Q[\tilde{V}_n(\alpha)] > 0$. D'altra parte si ha

$$E^Q[\tilde{V}_n(\alpha)] = \tilde{V}_0(\alpha) = 0,$$

che è assurdo.

Viceversa, assumiamo che S sia libero da arbitraggi e proviamo l'esistenza di una misura martingala Q . Ora, è sufficiente provare l'esistenza di $Q \sim P$ tale che

$$E^Q\left[\sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot (\tilde{S}_n^i - \tilde{S}_{n-1}^i)\right] = 0,$$

per ogni $i = 1, \dots, d$ e per ogni α predicibile. Indichiamo con M la cardinalità di Ω e con $\omega_1, \dots, \omega_M$ i suoi elementi. Se Y è una variabile aleatoria su Ω , poniamo $Y(\omega_j) = Y_j$ e identifichiamo Y col vettore di \mathbb{R}^M

$$(Y_1, \dots, Y_M).$$

Ad esempio, vale

$$E^Q[Y] = \sum_{j=1}^M Y_j Q(\{\omega_j\}).$$

Per ogni α , processo predicibile a valori reali, usiamo la notazione

$$G(\alpha) = \sum_{n=1}^N \alpha_n (\tilde{S}_n^i - \tilde{S}_{n-1}^i)$$

Osserviamo anzitutto che l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio si traduce nella condizione

$$G(\alpha) \notin \mathbb{R}_+^M := \{Y \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\} \mid Y_j \geq 0 \text{ per } j = 1, \dots, M\},$$

per ogni α predicibile. Infatti se esistesse α processo predicibile a valori reali tale che $G(\alpha) \in \mathbb{R}_+^M$, allora scegliendo $\tilde{V}_0 = 0$, \tilde{V} potrebbe costruire una strategia in \mathcal{A} con valore

iniziale nullo e valore finale $\tilde{V}_N = G(\alpha)$ ovvero un arbitraggio.
Di conseguenza

$$\mathcal{V} := \{G(\alpha) \mid \alpha \text{ predicibile}\},$$

è un sotto-spazio vettoriale di \mathbb{R}^M tale che

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{K} = \emptyset,$$

dove

$$\mathcal{K} := \{Y \in \mathbb{R}_+^M \mid Y_1 + \dots + Y_M = 1\},$$

è un sottoinsieme compatto e convesso di \mathbb{R}^M . Pertanto, sappiamo che esiste $\xi \in \mathbb{R}^M$ tale che:

- i) $\langle \xi, Y \rangle = 0$ per ogni $Y \in \mathcal{V}$,
- ii) $\langle \xi, Y \rangle > 0$ per ogni $Y \in \mathcal{K}$,

o equivalentemente:

- i) $\sum_{j=1}^M \xi_j G_j(\alpha) = 0$ per ogni α predicibile,
- ii) $\sum_{j=1}^M \xi_j Y_j > 0$ per ogni $Y \in \mathcal{K}$.

In particolare la ii) implica che $\xi_j > 0$ per ogni j e dunque possiamo normalizzare il vettore ξ per definire una misura di probabilità Q , equivalente a P , mediante

$$Q(\{\omega_j\}) = \xi_j \left(\sum_{i=1}^M \xi_i \right)^{-1}.$$

Allora la i) si traduce in

$$E^Q[G(\alpha)] = 0,$$

per ogni α predicibile.

Dimostriamo ora il secondo teorema fondamentale della valutazione che stabilisce il legame fra completezza del mercato e unicità della misura martingala.

Dimostrazione. (Secondo teorema fondamentale della valutazione)

Dobbiamo solo provare che se S è libero da arbitraggi ed è unica la misura martingala Q con numeraire S^0 , allora il mercato è completo. Procediamo per assurdo, supponiamo che il mercato non sia completo e costruiamo una misura martingala diversa da Q . Indichiamo con

$$\mathcal{V} = \{\tilde{V}_N(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$$

lo spazio vettoriale dei valori finali normalizzati di strategie $\alpha \in \mathcal{A}$. Come fatto nella prova del teorema precedente identifichiamo le variabili aleatorie con gli elementi di \mathbb{R}^M . Allora il fatto che S non sia completo si traduce nella condizione:

$$\mathcal{V} \subsetneq \mathbb{R}^M.$$

Definiamo il prodotto scalare su \mathbb{R}^M

$$\langle X, Y \rangle_Q = E^Q[XY] = \sum_{j=1}^M X_j Y_j Q(\{\omega_j\}).$$

Allora esiste $\xi \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ ortogonale a \mathcal{V} ossia tale che:

$$\langle \xi, X \rangle_Q = E^Q[\xi X] = 0,$$

per ogni $X = \tilde{V}_N(\alpha), \alpha \in \mathcal{A}$. In particolare, con la scelta $X = 1$ deduciamo

$$E^Q[\xi] = 0.$$

Fissato un parametro $\delta > 1$, poniamo:

$$Q_\delta(\{\omega_j\}) = \left(1 + \frac{\xi_j}{\delta \|\xi\|_\infty}\right) Q(\{\omega_j\}), \quad j = 1, \dots, M$$

dove

$$\|\xi\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq M} |\xi_j|.$$

Proviamo, che per ogni $\delta > 1$, Q_δ definisce una misura martingala (ovviamente diversa da Q poiché $\xi \neq 0$). Anzitutto $Q_\delta(\{\omega_j\}) > 0$ per ogni j poiché

$$1 + \frac{\xi_j}{\delta \|\xi\|_\infty} > 0,$$

e

$$\begin{aligned} Q_\delta(\Omega) &= \sum_{j=1}^M Q_\delta(\{\omega_j\}) = \sum_{j=1}^M \left(1 + \frac{\xi_j}{\delta \|\xi\|_\infty}\right) Q(\{\omega_j\}) \\ &= \sum_{j=1}^M Q(\{\omega_j\}) + \frac{1}{\delta \|\xi\|_\infty} \sum_{j=1}^M \xi_j Q(\{\omega_j\}) = \\ &= Q(\Omega) + \frac{1}{\delta \|\xi\|_\infty} E^Q[\xi] = 1. \end{aligned}$$

Dunque Q_δ è una misura di probabilità equivalente a Q (e quindi anche a P).

Proviamo ora che \tilde{S} è una Q_δ -martingala. In tale contesto, è sufficiente provare che

$$E^{Q_\delta} \left[\sum_{n=1}^N \alpha_n (\tilde{S}_n^i - \tilde{S}_{n-1}^i) \right] = 0,$$

per ogni $i = 1, \dots, d$ e per ogni α processo predicibile a valori reali. Fissato i , usiamo la notazione

$$G(\alpha) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \left(\tilde{S}_n^i - \tilde{S}_{n-1}^i \right).$$

Vale

$$\begin{aligned} E^{Q_\delta}[G(\alpha)] &= \sum_{j=1}^M \left(1 + \frac{\xi_j}{\delta \|\xi\|_\infty} \right) G_j(\alpha) Q(\{\omega_j\}) \\ &= \sum_{j=1}^M G_j(\alpha) Q(\{\omega_j\}) + \frac{1}{\delta \|\xi\|_\infty} \sum_{j=1}^M \xi_j G_j(\alpha) Q(\{\omega_j\}) \\ &= E^Q[G(\alpha)] + \frac{1}{\delta \|\xi\|_\infty} E^Q[\xi G(\alpha)] \\ &= E^Q[G(\alpha)] = 0, \end{aligned}$$

poiché \tilde{S} è una Q -martingala e α è predicibile.

Capitolo 2

Nozioni finanziarie preliminari

Questa sezione è volta alla descrizione di tutte le nozioni e i risultati fondamentali a carattere finanziario che stanno alla base dello studio di derivati finanziari come il Total Return Swap.

La maggior parte dei contenuti presenti in questo capitolo fanno riferimento al libro [1].

2.1 Tassi d'interesse spot

Definizione 2.1.1 *Conto corrente bancario (Money Market Account)*

Definiamo $B(t)$ come il valore del conto corrente bancario al tempo $t \geq 0$ tale che:

$$\begin{cases} dB(t) = r_t B(t) dt \\ B(0) = 1 \end{cases}$$

dove r_t è una funzione positiva del tempo t .

Ne deriva immediatamente che:

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right).$$

La definizione sopra riportata indica il valore ottenuto al tempo t se al tempo 0 è stato investito un importo dal valore unitario. In particolare, r_t (abbreviazione di $r(t)$) sta ad indicare la velocità tramite la quale il conto corrente bancario matura. Tale velocità viene solitamente chiamata *spot rate istantaneo* o *short rate*. Infatti, l'espansione del primo ordine per $B(t)$ restituisce:

$$B(t + \Delta(t)) = B(t)(1 + r(t)\Delta(t)),$$

da cui deriva:

$$\frac{B(t + \Delta(t)) - B(t)}{B(t)} = r(t)\Delta(t)$$

Tale relazione esplicita la dipendenza del conto corrente bancario dallo short rate, in particolare il conto corrente bancario matura ad ogni istante t con una velocità pari a $r(t)$.

Il conto corrente bancario $B(t)$ è fondamentale in questa costruzione in quanto utile al fine di relazionare e confrontare quantità disponibili in istanti temporali differenti.

Definizione 2.1.2 *Fattore di sconto stocastico*

Il fattore di sconto stocastico (stochastic discount factor) è definito come:

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right).$$

In particolare, $D(t, T)$ indica esattamente il valore al tempo t di 1 unità di moneta disponibile al tempo T . Infatti, se depositiamo A unità di moneta nel conto corrente bancario, queste corrispondono al tempo t a $AB(t)$ unità, al tempo T a $AB(T)$ unità. Se si vuole individuare il quantitativo di unità da depositare nel conto corrente bancario oggi al fine di disporre di 1 unità di moneta al tempo T basterà imporre:

$$AB(T) = 1,$$

cioè

$$A = \frac{1}{B(T)}.$$

Pertanto, il valore al tempo t dell'ammontare di unità A investito in modo tale da ottenere 1 unità di moneta al tempo T sarà:

$$AB(t) = \frac{B(t)}{B(T)} = D(t, T).$$

Una volta descritta la derivazione del fattore di sconto stocastico, è importante specificare che nell'assunzione $r(t)$ è una *funzione positiva del tempo* si racchiude il concetto che $B(t) < B(T)$ e di conseguenza $D(t, T) < 1$.

Un'ulteriore concetto da introdurre è quello di zero-coupon bond.

Definizione 2.1.3 *Zero-coupon bond*

Uno zero-coupon bond con scadenza T è un contratto che garantisce all'acquirente il pagamento di una unità di moneta al tempo T senza nessun pagamento intermedio tra la data di acquisto e la data di scadenza (zero-coupon).

Uno zero-coupon bond è un contratto che di fatto stabilisce a quanto ammonta il valore del contratto che restituisce 1 unità di moneta al tempo T attualizzato al tempo t , ovvero

$P(t, T)$.

Nel caso in cui r_t sia una funzione deterministica del tempo c'è una chiara relazione tra il valore di un zero coupon bond al tempo t e il fattore di sconto stocastico, in particolare $P(t, T) = D(t, T)$. Questo perché, essendo r_t deterministico, al tempo t conoscerei già l'evoluzione dello short rate.

Nel caso in cui r_t fosse stocastico, $P(t, T)$ rappresenterebbe il valore atteso di $D(t, T)$ condizionato alle informazioni disponibili al tempo t .

Nella descrizione di un Total Return Swap, uno dei concetti fondamentali fa riferimento al tasso LIBOR da applicare alla gamba di interesse. Pertanto introduciamo alcune definizioni di tassi utili alla descrizione del LIBOR.

Definizione 2.1.4 *Tasso d'interesse spot con capitalizzazione continua (Continuously compounded spot interest rate)*

Definiamo $R(t, T)$ come il tasso d'interesse spot con capitalizzazione continua al tempo t con maturità T . In particolare $R(t, T)$ corrisponde al tasso costante al quale un investimento di $P(t, T)$ unità di moneta al tempo t matura continuamente in modo tale da ottenere una unità di moneta al tempo T . Ovvero:

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{\tau(t, T)}, \quad (2.1)$$

dove $\tau(t, T)$ rappresenta la frazione di anno tra t e T , ovvero presi $t = (d_1, m_1, y_1)$ e $T = (d_2, m_2, y_2)$ con $t \leq T$ si ha $\tau(t, T) = \frac{T-t}{360}$

$R(t, T)$ è consistente con la definizione di zero-coupon bond precedentemente introdotta. Infatti:

$$e^{R(t, T)\tau(t, T)} P(t, T) = 1,$$

da cui deriva l'espressione del prezzo del zero-coupon bond in funzione del tasso d'interesse spot con capitalizzazione continua:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)\tau(t, T)}.$$

Definizione 2.1.5 *Tasso d'interesse spot semplicemente composto*

Il tasso d'interesse spot semplicemente composto al tempo t con maturità T , $L(t, T)$, è il tasso costante a cui deve essere fatto un investimento in modo tale da produrre un importo di 1 di valuta alla scadenza, a partire da $P(t, T)$ unità di valuta al tempo t . In formule:

$$L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}. \quad (2.2)$$

In particolare, come si può evincere dalla definizione la maturazione dell'investimento avviene proporzionalmente al tempo di investimento.

Il tasso LIBOR del mercato è un tasso d'interesse spot semplicemente composto. A partire dalla definizione deriva immediatamente la seguente relazione:

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\tau(t, T)) = 1.$$

Anche in tal caso, possiamo esprimere il prezzo del zero-coupon bond in funzione del tasso LIBOR:

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)}.$$

2.2 Tassi d'interesse forward

I tassi a termine (forward rate) sono tassi d'interesse fissati al tempo t per un investimento futuro, definiti sulla base della struttura del fattore di sconto stocastico. In particolare, i tassi forward possono essere descritti da contratti forward caratterizzati da tre istanti temporali:

- t , tempo in cui avviene la definizione del tasso;
- T , detta "expiry date", ovvero tempo per il quale il tasso d'interesse inizia ad essere corrisposto;
- S , detta "maturity date", scadenza del contratto forward, ovvero tempo per cui il tasso d'interesse relativo al contratto forward cessa di essere corrisposto.

Un contratto forward prevede il pagamento di un tasso di interesse per il periodo compreso tra T ed S . Alla scadenza S , il pagamento basato su un tasso fisso K è scambiato con un pagamento variabile basato sul tasso d'interesse spot $L(T, S)$. Tali tipologie di contratto sono utili al fine di bloccare al tempo t il tasso d'interesse nel periodo compreso tra T ed S al valore K , con $t \leq T \leq S$.

Definito N come il nozionale del contratto in questione, il contratto forward prevede che al tempo S si riceva un'ammontare pari a $\tau(T, S)KN$ a fronte di un pagamento pari a $\tau(T, S)L(T, S)N$.

Pertanto, il valore del contratto forward al tempo S sarà pari a:

$$\tau(T, S)N(K - L(T, S)).$$

Utilizzando la definizione del tasso spot semplicemente composto (nel nostro caso LIBOR) in (1.2) l'espressione del valore del contratto diventa:

$$N[\tau(T, S)K - \frac{1}{P(T, S)} + 1].$$

Al fine di ottenere il tasso K per tale contratto, è necessario derivare il valore del contratto al tempo t . In particolare, il tasso forward K sarà il tasso per il quale il valore

del contratto al tempo t è uguale a 0, in modo tale da non creare possibili arbitraggi. Il termine $\frac{1}{P(T,S)}$, interpretabile come un'ammontare di moneta disponibile al tempo S , può essere attualizzato al tempo T semplicemente moltiplicando per il prezzo del zero-coupon $P(T, S)$. Ripetendo tale ragionamento, l'ammontare di valuta al tempo t corrispondente sarà pari a:

$$P(t, T)P(T, S)\frac{1}{P(T, S)} = P(t, T).$$

Per quanto riguarda invece il termine $\tau(T, S)K + 1$, il suo valore al tempo t corrisponderà semplicemente a $P(t, S)(\tau(T, S)K + 1)$. In tal senso, si ottiene il valore del contratto "Forward Rate Agreement" al tempo t :

$$FRA(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = N[P(t, S)\tau(T, S)K - P(t, T) + P(t, S)]. \quad (2.3)$$

Il valore K si ottiene semplicemente imponendo $FRA(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = 0$.

Definizione 2.2.1 *Tasso d'interesse forward semplicemente composto*

Dati $t \leq T \leq S$, definiamo il tasso forward semplicemente composto $F(t; T, S)$ come:

$$F(t; T, S) := \frac{1}{\tau(T, S)}\left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1\right). \quad (2.4)$$

In particolare, è il valore del tasso fisso in un FRA che lo rende privo di possibili arbitraggi e può essere interpretato come una stima al tempo t del tasso spot $L(T, S)$.

Nel caso in cui la "maturity date" S coincide con la "expiry date" T si parla di tasso forward istantaneo.

Definizione 2.2.2 *Tasso forward istantaneo*

Il tasso d'interesse forward istantaneo, $f(t, T)$, è definito come segue:

$$f(t, T) := \lim_{S \rightarrow T^+} F(t; T, S).$$

Lemma 2.2.1 *Sia $T \rightarrow P(t, T)$ la funzione prezzo di un zero coupon bond, se tale funzione risulta sufficientemente regolare allora possiamo riscrivere l'espressione che descrive il tasso d'interesse forward istantaneo come:*

$$f(t, T) = -\frac{\delta \ln P(t, T)}{\delta T},$$

ed in particolare:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u)du\right).$$

Dimostrazione.

Se assumiamo che per $S \rightarrow T^+$ la frazione di anno tra T ed S può essere rappresentata da $S - T$, la dimostrazione deriva banalmente dalle nozioni di prezzo di un zero coupon bond e di tasso d'interesse forward istantaneo. Infatti:

$$\begin{aligned} f(t, T) &= \lim_{S \rightarrow T^+} F(t; T, S) \\ &= - \lim_{S \rightarrow T^+} \frac{1}{P(t, S)} \frac{P(t, S) - P(t, T)}{S - T} \\ &= - \frac{1}{P(t, T)} \frac{\delta P(t, T)}{\delta T} \\ &= - \frac{\delta \ln P(t, T)}{\delta T} \end{aligned}$$

Ne deriva l'espressione $P(t, T) = \exp(-\int_t^T f(t, u) du)$ che descrive il prezzo di un zero coupon bond in funzione del tasso d'interesse forward istantaneo.

2.3 Introduzione agli Swaps

Gli Swaps sono strumenti derivati che prevedono un accordo tra due parti per lo scambio di flussi di cassa in certe date prestabilite, in particolare sono contratti Over-The-Counter (OTC) per cui vengono stabilite le date e i metodi di calcolo dei pagamenti in carico/ a favore di entrambe le parti e le relative conseguenze in caso di insolvenza.

Il primo swap è stato negoziato negli anni '80 tra IBM e Banca Mondiale, da allora il mercato ha avuto una crescita fenomenale fino a raggiungere oggi il primato tra i derivati negoziati nei mercati OTC.

Come tutta la famiglia dei derivati finanziari, anche gli Swap vengono utilizzati per finalità di copertura o speculazione. I pagamenti in carico/ a favore di entrambe le parti possono dipendere dall'andamento di un sottostante. In particolare, nel caso di sottostante:

- * Tasso d'interesse si parla di *Interest Rate Swap*
- * Tasso di cambio tra valute si tratta di *Currency Swap*
- * Attività/ prodotto reale si parla di *Commodity Swap*
- * Investimento azionario si tratta di *Equity Swap*

Il Total Return Swap rientra in più di una delle categorie precedenti, è un contratto derivato "di scambio" in cui due parti si impegnano a scambiarsi dei flussi finanziari in certe date prestabilite sulla base dell'andamento di un sottostante come un'azione, un indice o un paniere di questi.

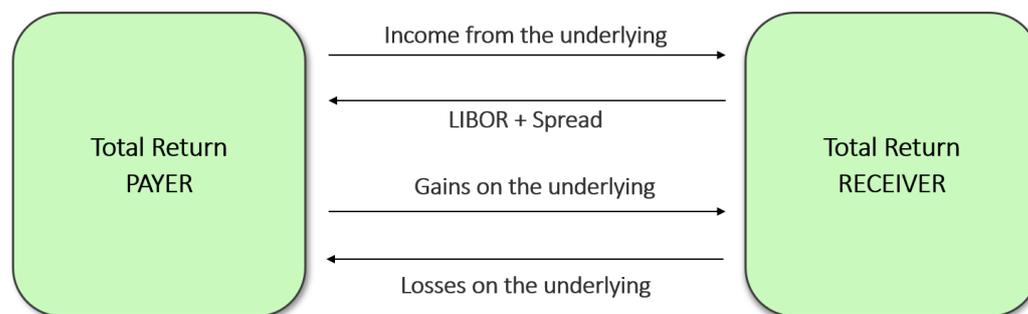
2.4 Total Return Swap: definizione e modalità di copertura

Un Total Return Swap, **TRS**, è un contratto basato sullo scambio di flussi tra due soggetti: il total return payer e il total return receiver (rispettivamente banca e investitore).

Il funzionamento di un TRS, come mostrato in figura, si basa sullo scambio delle seguenti attività:

- il total return payer (banca) effettua i pagamenti verso l'investitore in base al rendimento totale dell'attività sottostante M a fronte di un flusso di cassa (i.e. tasso variabile) in entrata;
- il total return receiver (investitore) effettua i pagamenti verso la banca in base ad un tasso variabile (LIBOR + Spread di negoziazione) concordato al momento della

negoziiazione del TRS, il quale a scadenza corrisponde ad un prestito con capitale nozionale N .



Alla scadenza T , il sottostante con valore di mercato finale $M(T)$ è scambiato con il capitale nozionale N .

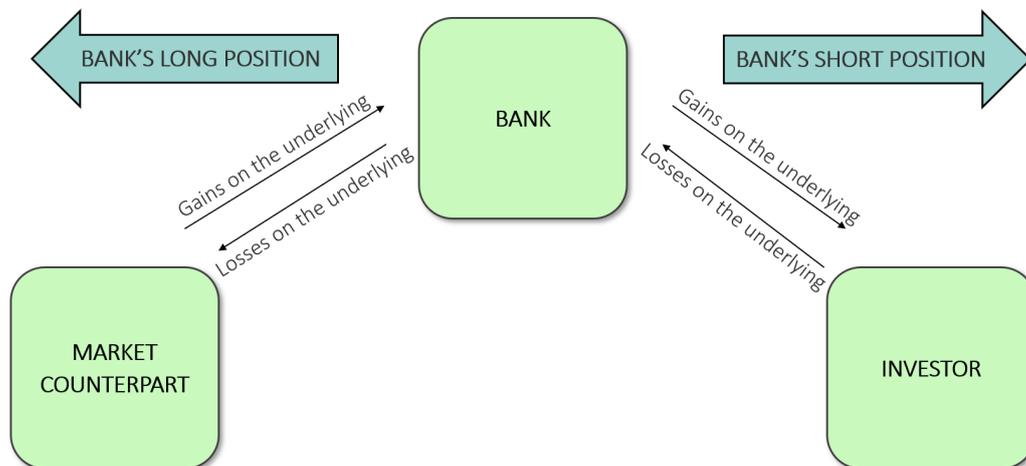
La finalità di un contratto TRS è quella di permettere al total return receiver di esporsi sul sottostante (e.g. basket di azioni/ indici) sgravandosi del carico oneroso relativo all'acquisto di tale paniere di azioni/ indici.

Il TRS può essere interpretato a sua volta in termini di vendita o acquisto di protezione; nello schema precedente il total return payer è detto protection buyer, il total return receiver è detto protection seller. Tale distinzione avviene in quanto l'investitore si fa carico del rischio derivante dall'attività sottostante e la banca si fa carico dell'onere a fronte di un flusso di cassa in ingresso.

Ciò che rende interessante e caratterizza il TRS è il fatto che il pagamento della performance include la variazione del prezzo del sottostante, in particolare vengono pagati gli apprezzamenti/ deprezzamenti del prezzo del sottostante su periodi determinati durante la negoziazione.

Nel momento in cui viene stipulato un TRS, la banca (total return payer) deve tutelarsi da potenziali perdite relative alla posizione che ha assunto (posizione corta sul sottostante). Per questo, vengono attuate procedure di hedging tra cui:

- hedging in **back-to-back**: nel momento della negoziazione del TRS viene stipulato un TRS uguale e contrario con una controparte di mercato, in modo tale che le posizioni sul sottostante siano complementari (posizione short + posizione long = posizione totale risultante sul sottostante nulla)



- hedging tramite l'**acquisto del sottostante**: nel momento della negoziazione del TRS vengono acquistati a mercato i titoli sottostanti. Tale modalità di copertura comporta un'esposizione della banca (total return payer) sul sottostante, motivo per cui vengono effettuati una serie di controlli ex-ante riguardanti il rispetto delle soglie di partecipazione in titoli italiani/ esteri, titoli oggetto di provvedimenti sanzionatori in ambito embarghi ecc.

La modalità di copertura in back-to-back, rispetto alla seconda, non prevede l'acquisizione del sottostante, motivo per cui la banca non risulta proprietaria effettiva dei titoli sottostanti ma si fa carico soltanto di effettuare i pagamenti in base alla performance.

La modalità di copertura tramite l'acquisto di titoli, in cui la banca risulta proprietaria effettiva del sottostante, comporta il rispetto di numerosi obblighi normativi (e.g. controlli ex-ante) e un notevole sborso di cassa. In tale contesto, prima di negoziare il TRS viene valutata l'appetibilità dei titoli sottostanti a mercato per poter effettuare delle operazioni di securities lending (i.e. prestito titoli) in modo tale da migliorare le condizioni di finanziamento della banca.

Capitolo 3

Modellistica per l'evoluzione dei tassi

In questo capitolo viene presentata una rassegna dei principali modelli volti alla descrizione dell'evoluzione dei tassi. Quanto riportato nel seguente capitolo fa riferimento principalmente al libro [1].

3.1 One-factor short-rate models

La teoria della modellizzazione dei tassi di interesse originariamente era basata sull'ipotesi di dinamiche unidimensionali per il processo di spot rate istantaneo r . Con tale supposizione, quantità come il prezzo di un zero-coupon bond sono prontamente definite, tramite la condizione di non arbitraggio. Infatti, posta l'esistenza della misura neutrale al rischio, il prezzo privo di arbitraggi al tempo t di un prodotto che restituisce H_T al tempo T è:

$$H_t = \mathbb{E}[D(t, T)H_T | F_t] = \mathbb{E}_t[e^{-\int_t^T r(s)ds} H_T],$$

da cui ne deriva che, il prezzo di un zero-coupon bond che paga una unità di valuta, $H_T = 1$, al tempo T è:

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t[e^{-\int_t^T r(s)ds}].$$

Da quest'ultima espressione è chiaro che ogni volta che possiamo caratterizzare $e^{-\int_t^T r(s)ds}$ in termini di scelta di una dinamica per r , siamo in grado di calcolare i prezzi delle obbligazioni $P(t, T)$ per ogni $t \leq T$.

A tal proposito, a discrezione della dinamica scelta per r possiamo derivare i principali modelli per l'evoluzione dei tassi.

I primi modelli per la descrizione dello short-rate istantaneo proposti in ambito finanziario prevedono una dinamica descritta soltanto da coefficienti costanti nel tempo, da cui deriva l'omogeneità nel tempo di questi modelli.

3.1.1 Modello di Vasicek

Per la derivazione del modello di Vasicek si è fatto riferimento a [7] e al capitolo 3 di [1].

Vasicek, nel 1977, ha ipotizzato che il tasso spot istantaneo nella misura del mondo reale evolva come un processo di Ornstein-Uhlenbeck con coefficienti costanti, ovvero

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t), \quad (3.1)$$

con $r(0) = r_0$, k , θ , σ sono costanti positive e $W(t)$ è un moto Browniano sotto \mathbb{Q} .

Integrando l'equazione che descrive l'evoluzione del tasso spot si ottiene per ogni $s \leq t$

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)}\theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)}dW(u). \quad (3.2)$$

Pertanto, $r(t)$ ha distribuzione normale condizionatamente a F_s , ciò significa che possiamo esprimere media e varianza tramite le seguenti espressioni:

$$E[r(t)|F_s] = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)});$$

$$\text{var}[r(t)|F_s] = \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)}).$$

Da ciò deriva una caratteristica fondamentale del modello di Vasicek, ovvero che il tasso $r(t)$ può assumere anche valori negativi.

In particolare, il valore θ nella formula rappresenta il limite temporale per $t \rightarrow \infty$ del valore atteso condizionato di $r(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)|F_s] = \theta.$$

Pertanto, una prima considerazione sulla dinamica in (2.1) è che il drift del processo $r(t)$ è positivo quando $r(t) \leq \theta$ e negativo quando $r(t) > \theta$. Ciò implica che, in tale dinamica, $r(t)$ è guidato dal drift al fine di essere mediamente più vicino al livello costante θ .

Utilizzando il metodo della massima verosimiglianza è possibile ottenere una stima dei parametri coinvolti in tale dinamica. A tal proposito riscriviamo per comodità la dinamica di Vasicek come

$$dr(t) = [b - ar(t)]dt + \sigma dW(t),$$

dove $a := k$ e $b = k\theta$. Tramite il metodo della massima verosimiglianza è naturale stimare il valore di tali parametri in funzione di $\beta := b/a$, $\alpha := e^{-a\delta}$ e $V^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2\alpha\delta})$, dove δ denota la frazione di tempo considerata tra due istanti temporali successivi nel

processo $r(t)$ (i.e. $\delta = 1$ giorno). Gli stimatori ottenuti seguendo il metodo della massima verosimiglianza, riportati nel capitolo 3 di [1], possono essere espressi come segue:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha} &= \frac{n \sum_{i=1}^n r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2 - (\sum_{i=1}^n r_{i-1})^2}, \\ \widehat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \widehat{\alpha} r_{i-1})}{n(1 - \widehat{\alpha})}, \\ \widehat{V}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [r_i - \widehat{\alpha} r_{i-1} - \widehat{\beta}(1 - \widehat{\alpha})]^2.\end{aligned}$$

3.1.2 Modello di Dothan

La derivazione del modello di Dothan è stata prodotta sulla base del capitolo 3 di [1] e [8].

Il modello introdotto da Dothan presenta la seguente dinamica:

$$dr(t) = ar(t)dt + \sigma r(t)dW(t), \quad (3.3)$$

dove $r(0) = r_0$, σ sono costanti positive, $a \in \mathbb{R}$.

Tale dinamica può essere agevolmente integrata ottenendo:

$$r(t) = r(s) \exp\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) + \sigma(W(t) - W(s)), \quad (3.4)$$

per ogni $s \leq t$. In particolare, rispetto al modello di Dothan, $r(t)$ condizionatamente a F_s presenta una distribuzione log-normale (ovvero il logaritmo di $r(t)$ condizionato ad F_s ha una distribuzione normale), la cui media e varianza sono espresse da:

$$\begin{aligned}E[r(t)|F_s] &= r(s)e^{a(t-s)}; \\ Var[r(t)|F_s] &= r^2(s)e^{2a(t-s)}(e^{\sigma^2(t-s)} - 1).\end{aligned}$$

La distribuzione log-normale implica che $r(t)$ è sempre positivo per ogni istante t , ciò rappresenta una netta differenza dal modello di Vasicek precedentemente sviluppato.

3.1.3 Modello di Vasicek Esponenziale

Per la derivazione del modello di Vasicek esponenziale si è fatto riferimento al capitolo 3 di [1].

Il modello di Vasicek Esponenziale è l'evoluzione del modello di Vasicek che si ottiene assumendo che il logaritmo di $r(t)$ evolve come un processo di Ornstein-Uhlenbeck sotto

la misura neutrale al rischio \mathbb{Q} . Nello specifico, se settiamo $r(t) = e^{y(t)}$ per ogni t , con $y(t)$ descritto da:

$$dy(t) = [\theta - ay(t)]dt + \sigma dW(t),$$

dove $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, θ , a e σ sono costanti positive.

Esplicitando lo short-rate $r(t)$ otteniamo la seguente dinamica:

$$dr(t) = r(t)[\theta + \frac{\sigma^2}{2} - a \ln r(t)]dt + \sigma r(t)dW(t). \quad (3.5)$$

Utilizzando l'equazione (3.2) può essere derivato il processo $r(t)$ per il modello di Vasicek Esponenziale come segue:

$$r(t) = \exp \left\{ \ln r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{\theta}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u) \right\}, \quad (3.6)$$

perciò $r(t)$ condizionatamente a F_s ha distribuzione log-normale con primo e secondo momento dati dalle seguenti espressioni:

$$E[r(t)|F_s] = \exp \left\{ \ln r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{\theta}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) + \frac{\sigma^2}{4a}[1 - e^{-2a(t-s)}] \right\};$$

$$E[r(t)|F_s] = \exp \left\{ 2 \ln r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{2\theta}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) + \frac{\sigma^2}{a}[1 - e^{-2a(t-s)}] \right\}.$$

Pertanto, diversamente dal modello proposto da Dothan, il modello Esponenziale proposto da Vasicek comporta che il valore atteso di $r(t)$ condizionatamente ad F_s ha una convergenza temporale ad un valore costante:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)|F_s] = \exp\left(\frac{\theta}{a} + \frac{\sigma^2}{4a}\right).$$

Inoltre, anche la varianza del processo $r(t)$ condizionatamente a F_s converge ad un limite finito fornito da:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var[r(t)|F_s] = \exp\left(\frac{2\theta}{a} + \frac{\sigma^2}{2a}\right)\left[\exp\left(\frac{\sigma^2}{2a}\right) - 1\right].$$

Sia il modello di Dothan che il modello di Vasicek Esponenziale, avendo una distribuzione log-normale per $r(t)$, comportano entrambi un problema di esplosione del conto corrente bancario $B(t)$. Infatti, assumendo che al tempo 0 immettiamo 1 unità di valuta nel conto corrente bancario e la manteniamo per un breve lasso temporale Δt , sappiamo che il valore atteso della posizione del conto corrente bancario al tempo Δt è dato da

$$E[B(\Delta t)] = E\left[e^{\int_0^{\Delta t} r(s)ds}\right],$$

ed essendo Δt sufficientemente piccolo, l'integrale può essere approssimato utilizzando la formula dei trapezi, così ottenendo

$$\approx E[e^{\Delta t \frac{r(0)+r(\Delta t)}{2}}].$$

Pertanto, sapendo che $r(\Delta t)$ ha distribuzione log-normale, pertanto il valore atteso sarà:

$$E[B(\Delta t)] = E[\exp(\exp(y(\Delta t)))] = \infty.$$

Ciò significa che, in un tempo arbitrariamente piccolo, possiamo generare un ammontare infinito di moneta partendo da un ammontare finito di moneta (i.e. 1 unità). Tale retroscena è una delle peculiarità che caratterizza i modelli in cui $r(t)$ ha distribuzione log-normale. A tal proposito, il problema dell'esplosione sopra riportato può essere evitato modellando i tassi con un periodo di composizione strettamente positivo che deve essere lognormale.

3.2 Two-factor short-rate models

I modelli a due fattori per la descrizione dell'evoluzione dei tassi sono stati introdotti vista la scarsa performance di alcuni aspetti dei modelli ad un fattore.

Dalla sezione precedente sappiamo che l'imposizione di una specifica dinamica per il tasso $r(t)$ consegue nella determinazione del prezzo di un qualsiasi titolo $P(t, T)$. In particolare, per ogni istante t è possibile descrivere l'andamento della curva del prezzo di un zero-coupon bond in funzione di $r(t)$, conoscendo l'evoluzione di questo.

Pertanto, scegliendo un modello povero di variabili per l'evoluzione di $r(t)$, si ricade in una curva di rendimento ("yield curve") che non capta alcuni aspetti importanti.

Per esempio, se consideriamo il modello di Vasicek descritto dalla SDE in (2.1), utilizzando la formula del prezzo di un obbligazione $P(t, T) = A(t, T)\exp(-B(t, T)r_t)$ possiamo derivare qualsiasi tasso in funzione di $r(t)$. In particolare, i tassi spot continuamente composti possono essere derivati dalla trasformazione affine

$$R(t, T) = -\frac{\ln A(t, T)}{T-t} + \frac{B(t, T)}{T-t}r_t =: a(t, T) + b(t, T)r_t.$$

Se consideriamo gli istanti temporali $T_1 = t + 1$ e $T_2 = t + 10$ in termini di anni, e prendiamo come riferimento il payoff di un prodotto finanziario dipendente dalla distribuzione congiunta di due tassi spot continuamente composti $R(t, T_1)$ e $R(t, T_2)$. Tale payoff, coinvolgendo la distribuzione congiunta dei due tassi, dipende in maniera sostanziale dalla correlazione tra i tassi $R(t, T_1)$ e $R(t, T_2)$ (poichè sappiamo che la distribuzione congiunta delle due variabili descritte sarà il prodotto delle distribuzioni nel caso in cui

la correlazione tra queste sia nulla). A tal proposito, utilizzando il modello di Vasicek otteniamo che:

$$\begin{aligned} \text{corr}(R(t, T_1), R(t, T_2)) &= \text{corr}(a(t, T_1) + b(t, T_2)r_t, a(t, T_2) + b(t, T_2)r_t) \\ &= \text{corr}(r_t, r_t) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pertanto, ad ogni istante i tassi spot considerati sono perfettamente correlati, anche se consideriamo scadenze temporali molto distanti tra loro. Ciò significa che uno shock oggi sulla curva del tasso di interesse viene trasmesso in egual misura per qualsiasi scadenza. Questo rappresenta uno dei principali motivi di introduzione dei modelli a due o più fattori.

Nel corso di questa sezione, considereremo i modelli a due fattori per la descrizione dell'evoluzione dei tassi, in cui:

$$r_t = x_t + y_t + \phi(t), \quad (3.7)$$

dove $\phi(t)$ è un valore deterministico settato in modo tale che il tasso r_t aderisca perfettamente alla "situazione attuale".

3.2.1 Modello G2++ a due fattori

Per tale derivazione si fa riferimento al capitolo 3 di [1].

Consideriamo quindi un modello di tasso di interesse in cui lo short-rate istantaneo è dato dalla somma di due fattori Gaussiani correlati tra loro più una funzione deterministica che è opportunamente scelta in modo da adattarsi esattamente alla struttura a termine corrente dei fattori di sconto. La dinamica di questo modello sotto la misura neutrale al rischio \mathbb{Q} è data da:

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t),$$

con $r(0) = r_0$ costante positiva e i processi $x(t), t \geq 0$, $y(t), t \geq 0$ soddisfano le SDE

$$\begin{aligned} dx(t) &= -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), x(0) = 0; \\ dy(t) &= -by(t)dt + \eta dW_2(t), y(0) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

dove (W_1, W_2) è un moto Browniano bi-dimensionale con correlazione data da

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt,$$

con a, b, σ, η costanti positive. La funzione deterministica $\phi(t)$ è definita nell'intervallo $[0, T^*]$, dove T^* è l'orizzonte temporale e $\phi(0)$ è settata al valore r_0 . Denotiamo con F_t

la filtrazione naturale generata dalla coppia (x, y) al tempo t .

Integrando le SDE otteniamo che:

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \phi(t).$$

Ciò significa che $r(t)$ condizionatamente a F_t ha distribuzione normale con media e varianza date da:

$$\begin{aligned} E[r(t)|F_s] &= x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \phi(t); \\ \text{Var}[r(t)|F_s] &= \frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2a(t-s)}] + \frac{\eta^2}{2b}[1 - e^{-2b(t-s)}] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b}[1 - e^{-(a+b)(t-s)}]. \end{aligned}$$

3.2.2 Heath-Jarrow-Morton framework (HJM)

Quanto riportato in tale sezione per la derivazione del modello HJM fa riferimento a [9].

La prima alternativa importante ai modelli short rate è stata proposto da Ho e Lee (1986). La loro intuizione di base è stata poi tradotta in tempo continuo da Heath, Jarrow e Morton (1992) che hanno sviluppato la modellizzazione della dinamica dei tassi di interesse. Precisamente, scegliendo come quantità di riferimento i tassi forward istantanei, è stato derivato un modello privo di arbitraggio per l'evoluzione stocastica dell'intera yield curve, dove la dinamica dei tassi forward è specificata attraverso le loro strutture di volatilità istantanea. Questa è la principale differenza dalle dinamiche di tasso short a un fattore, dove la volatilità del tasso short presa singolarmente non è sufficiente a caratterizzare il tasso di interesse del modello.

Il framework HJM assume che l'evoluzione del tasso forward sotto la misura neutrale al rischio \mathbb{Q} sia descritto dalla equazione differenziale stocastica

$$df(t, T) = \sigma^2(T - t)dt + \sigma dW_t,$$

dove $W(t)$ è un moto Browniano uni/multi-dimensionale. In tale equazione $\sigma^2(T - t)$ è il drift che guida la dinamica del tasso forward ed è determinato interamente dal coefficiente di diffusione σ . Nel momento in cui si decide di utilizzare il tasso forward per specificare la dinamica del modello, il drift del processo ne consegue poichè è completamente determinato dalla scelta del coefficiente di volatilità; ciò in quanto il modello è fondato sulla dinamica del forward rate che è una quantità derivabile dallo short-rate r . Infatti, la relazione che lega il tasso forward $f(t, T)$ allo short-rate $r(t)$ prevede un valore

atteso per definizione, motivo per cui viene eliminata una componente di "aleatorietà" nella definizione del tasso forward:

$$f(t, T) = -\frac{\delta \ln E[\exp(-\int_t^T r(s)ds|F_t)]}{\delta T}.$$

Più in generale, il framework HJM può essere descritto dall'evoluzione di un tasso forward del tipo:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t), \quad f(0, T) = f_0, \quad (3.9)$$

dove $W = (W_1, \dots, W_N)$ è un moto browniano N-dimensionale, $\sigma(t, T) = (\sigma_1(t, T), \dots, \sigma_N(t, T))$ è un vettore di processi adattati e $\alpha(t, T)$ è un processo adattato. Nella definizione $\sigma(t, T)dW(t)$ è il prodotto scalare tra i due vettori N-dimensionali.

In tale contesto, il framework HJM non è per definizione privo di arbitraggi, motivo per cui al fine di garantire esistenza e unicità della misura neutrale al rischio è necessario che $\alpha(t, T)$ dipenda dal vettore volatilità σ secondo la relazione:

$$\begin{aligned} \alpha(t, T) &= \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s)ds. \end{aligned}$$

Pertanto, la dinamica del tasso forward può essere integrata ottenendo:

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \int_0^t \sigma(u, T) \int_u^T \sigma(u, s)dsdu + \int_0^t \sigma(s, T)dW(s) \\ &= f(0, T) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(u, T) \int_u^T \sigma_i(u, s)dsdu + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(s, T)dW(s), \end{aligned}$$

ed è completamente determinata dal vettore volatilità σ .

3.3 Probabilità di default

In un derivato del tipo "Swap" le due parti si scambiano periodicamente dei flussi; in particolare, come già visto nel precedente capitolo, un Total Return Swap è costituito da scambi definiti rispettivamente dalla gamba di performance e dalla gamba di interesse. Al fine di derivare il pricing del TRS è necessario introdurre la nozione di probabilità di fallimento, ciò in quanto, nel caso di default, una delle due parti potrebbe non vedersi corrisposto l'ammontare che gli spetta.

Pertanto, nella valutazione di un derivato finanziario come il TRS va considerata anche

la probabilità di default degli emittenti coinvolti nella negoziazione di tale contratto.

Per tale sezione si fa riferimento a quanto riportato nel capitolo 22 di [1].

I processi di Poisson sono processi utili a simulare il manifestarsi degli eventi indipendenti uno dall'altro e che accadono continuamente nel tempo.

Il processo di Poisson è definito da una collezione di variabili aleatorie N_t per $t > 0$, che vengono interpretate come il numero di eventi occorsi dal tempo 0 al tempo t . Inoltre il numero di eventi tra due tempi t_1 e t_2 con $t_1 < t_2$ è dato da $N(t_2) - N(t_1)$ ed ha esattamente distribuzione di Poisson.

In particolare, i processi di Poisson possono essere omogenei/ non omogenei nel tempo.

3.3.1 Processo di Poisson omogeneo nel tempo

Definizione 3.3.1 *Processo di Poisson omogeneo nel tempo*

$M_t, t \geq 0$, processo di Poisson omogeneo nel tempo, è un processo continuo da destra, con incrementi stazionari, indipendenti, progressivi di una unità, con condizione iniziale $M_0 = 0$.

Tale definizione apparentemente generica, implica fatti importanti nella distribuzione del processo e dei "tempi di salto". Infatti, siano $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m, \dots$ i tempi ai quali avviene il primo, secondo, ..., m-esimo salto del processo M_t . Considerati tali "tempi di salto", esiste una costante positiva $\bar{\gamma}$ tale che:

$$\mathbb{Q}(M_t = 0) = \mathbb{Q}(\tau_1 > t) = e^{-\bar{\gamma}t},$$

Inoltre, in un intervallo sufficientemente piccolo la probabilità che avvengano due o più salti è pari a 0, ovvero:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{Q}(M_t \geq 2)}{t} = 0,$$

ed in particolare:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{Q}(M_t = 1)}{t} = \bar{\gamma}.$$

La costante $\bar{\gamma}$ ha inoltre la seguente proprietà:

$$\bar{\gamma} = \frac{\mathbb{E}(M_t)}{t} = \frac{\text{var}(M_t)}{t}.$$

Pertanto, la distribuzione del processo M_t è una distribuzione di Poisson descritta da:

$$\mathbb{Q}(M_t - M_s = k) = e^{-\bar{\gamma}(t-s)} (\bar{\gamma}(t-s))^k / k!,$$

ovvero, $M_t - M_s \approx Poisson_{\bar{\gamma}(t-s)}$.

$\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_m - \tau_{m-1}$, i tempi tra un salto e il suo successivo sono variabili aleatorie i.i.d con distribuzione esponenziale di paramentro $\bar{\gamma}$ e con valore atteso $\frac{1}{\bar{\gamma}}$. Pertanto, $\bar{\gamma}\tau_1$ è una variabile aleatoria esponenziale standard.

Proprio da tale distribuzione esponenziale degli incrementi nasce l'interpretazione dell'intensità del processo $\bar{\gamma}dt$ come probabilità di default in $[t, t+dt]$. Se definiamo il tempo di default come $\bar{\tau} = \tau_1$ per definizione abbiamo che:

$$\mathbb{Q}(\bar{\tau} \in [t, t+dt] | \bar{\tau} \geq t) = \bar{\gamma}dt.$$

Inoltre, possiamo notare che definendo il tempo di default come il primo salto di M_t , otteniamo $\bar{\gamma}\bar{\tau} \approx Exp(1)$. In particolare:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\bar{\tau} > t) &= \mathbb{Q}(\bar{\gamma}\bar{\tau} > \bar{\gamma}t) \\ &= \mathbb{Q}(X \sim Exp(1) > \bar{\gamma}t) = e^{-\bar{\gamma}t}. \end{aligned}$$

Perciò possiamo utilizzare tale risultato al fine di calcolare la probabilità che un emittente fallisca in un intervallo temporale sufficientemente piccolo dt considerando che non è mai stato inadempiente fino al tempo t , ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\bar{\tau} \in [t, t+dt] | \bar{\tau} \geq t) &= \frac{\mathbb{Q}(\bar{\tau} \in [t, t+dt] \cup \bar{\tau} \geq t)}{\mathbb{Q}(\bar{\tau} \geq t)} \\ &= \frac{\mathbb{Q}(\bar{\tau} \in [t, t+dt])}{\mathbb{Q}(\bar{\tau} \geq t)} \\ &= \frac{\mathbb{Q}(\bar{\tau} > t) - \mathbb{Q}(\bar{\tau} > t+dt)}{\mathbb{Q}(\bar{\tau} \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\bar{\gamma}t} - e^{-\bar{\gamma}(t+dt)}}{e^{-\bar{\gamma}t}} \approx \bar{\gamma}dt. \end{aligned}$$

Più in generale, la probabilità di default nell'intervallo $[s,t]$ è:

$$\mathbb{Q}(s < \bar{\tau} \leq t) = e^{-\bar{\gamma}s} - e^{-\bar{\gamma}t} \approx \bar{\gamma}(t-s)$$

Nello specifico, se consideriamo il limite per $s \rightarrow t$ otteniamo la probabilità di sopravvivenza al tempo t , cioè

$$\mathbb{Q}(\bar{\tau} \leq t) = e^{-\bar{\gamma}t}. \quad (3.10)$$

Tale risultato, ci fa notare una corrispondenza importante: le probabilità di sopravvivenza hanno la stessa struttura dei fattori di sconto, con l'intensità di default che gioca il ruolo del tasso di interesse. Infatti, se consideriamo un tasso di interesse costante $r(t) = r$ sappiamo che

$$P(0, t) = e^{-rt},$$

da cui ne deriva l'analogia con (3.10). Tale corrispondenza è una diretta conseguenza della distribuzione esponenziale dei tempi tra due "salti" consecutivi.

3.3.2 Processo di Poisson non omogeneo nel tempo

Per definire il processo di Poisson non omogeneo introduciamo l'intensità $\gamma(t)$ come una funzione positiva e continua a tratti e definiamo la funzione cumulativa dell'intensità come

$$\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(u) du.$$

Dato M_t un processo di Poisson standard, con intensità 1, abbiamo che un processo di Poisson non omogeneo nel tempo con intensità γ può essere definito da

$$N_t = M_{\Gamma(t)}.$$

Il processo N_t è ancora un processo di Poisson con incrementi pari a 1 unità, gli incrementi sono tuttora indipendenti ma non sono più identicamente distribuiti poichè è stata introdotta la funzione $\Gamma(t)$ detta anche "distorsione temporale".

Sapendo che M è un processo di Poisson standard per il quale il primo tempo di salto è una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale, ne consegue che:

$$\Gamma(\tau) =: \xi \approx \text{Exp}(1),$$

per cui invertendo l'espressione di cui sopra si ha:

$$\tau = \Gamma^{-1}(\xi),$$

con ξ variabile aleatoria esponenziale, e sapendo che $\Gamma(t)$ è una funzione crescente e positiva (integrale di una funzione positiva) possiamo derivarne la probabilità di default tra s e t :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(s < \tau \leq t) &= \mathbb{Q}(\Gamma(s) < \Gamma(\tau) \leq \Gamma(t)) \\ &= \mathbb{Q}(\Gamma(s) < \xi \leq \Gamma(t)) \\ &= \mathbb{Q}(\xi > \Gamma(s)) - \mathbb{Q}(\xi > \Gamma(t)) \\ &= e^{-\Gamma(s)} - e^{-\Gamma(t)}. \end{aligned}$$

In particolare, il termine $e^{-\Gamma(s)} - e^{-\Gamma(t)}$ può essere approssimato considerando un intervallo sufficientemente piccolo come:

$$e^{-\Gamma(s)} - e^{-\Gamma(t)} = e^{-\int_0^s \gamma(u) du} - e^{-\int_0^t \gamma(u) du} \approx \int_s^t \gamma(u) du. \quad (3.11)$$

La formula che descrive la probabilità di sopravvivenza al tempo t è descritta da

$$Q(\tau > t) = e^{-\Gamma(t)} = e^{-\int_0^t \gamma(u) du},$$

e presenta la stessa analogia vista nella precedente sezione per i processi di Poisson omogenei nel tempo: la probabilità di sopravvivenza trova corrispondenza nel fattore di sconto nel caso in cui abbiamo un tasso di interesse deterministico

$$P(0, t) = e^{-\int_0^t r(s) ds}.$$

In conclusione, abbiamo derivato i processi di Poisson omogenei/ non omogenei nel tempo utili alla descrizione delle probabilità di default/ sopravvivenza. Nello specifico:

- per i processi di Poisson omogenei del tempo si è utilizzata un'intensità costante pari a 1;
- per quanto riguarda i processi di Poisson non omogenei nel tempo abbiamo considerato un'evoluzione del processo di Poisson omogeneo con un'intensità variabile nel tempo;
- un ulteriore avanzamento rispetto ai processi di Poisson è rappresentata dai processi di Cox, per i quali viene utilizzata un'intensità non solo variabile nel tempo ma anche stocastica.

Capitolo 4

Valutazione di un Total Return Swap

Nel corso di questo capitolo deriveremo il pricing di un Total Return Swap, utilizzando i concetti precedentemente descritti nel corso del lavoro di tesi. Alcuni contenuti presenti in tale capitolo fanno riferimento a [2] e [5].

A tal proposito, ricordiamo che il Total Return Swap è un derivato finanziario di scambio in cui due parti si scambiano periodicamente dei flussi descritti dalla:

- * gamba di interesse: LIBOR + spread di negoziazione
- * gamba di performance: variazione in prezzo del sottostante al TRS

Sia $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità filtrato che soddisfa la condizione di non arbitraggio e di completezza. Sia $H_t = F_t \vee G_t$ la filtrazione che utilizzeremo per prezzare il TRS, dove F_t è la filtrazione che contiene le informazioni relative all'evoluzione del mercato in merito ai tassi di interesse al tempo t , G_t è la filtrazione contenente le informazioni relative al default di emittenti finanziari. Sia \mathbb{Q} la misura martingala (i.e. neutrale al rischio) definita come nel capitolo 1.

Il TRS che prenderemo in considerazione viene negoziato al tempo $t = 0$ con scadenza $t = T$, in particolare il sottostante è costituito dalle componenti S_j con $j = 1, \dots, m$. Il tasso d'interesse al tempo t sarà indicato da r_t , come usualmente.

In tale modello, utilizzeremo:

$$D(t) := e^{-\int_0^t r_s ds},$$

per definire il Discount Factor che utilizzeremo per attualizzare i flussi di cassa attesi in futuro:

$$DF(T) := P(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r_s ds} | H_0] \quad (4.1)$$

In particolare per un zero-coupon bond che restituisce 1 euro alla scadenza T , sotto l'ipotesi in cui $r(s) = r \forall s \in [t, T]$ il prezzo al tempo t è funzione del tasso di interesse come segue:

$$P(t, T) := e^{-r(T-t)}.$$

In tale contesto $P(t, T)$ rappresenta il valore di 1 euro al tempo T utilizzando le informazioni al tempo t .

Il tasso Libor, necessario per descrivere la gamba di interesse in un TRS, può essere rivisto in tale contesto considerando T_1, \dots, T_n partizione finita dell'intervallo $[0, T]$ con $T_0 = 0$ e $T_n = T$. In particolare il tasso Libor per $t \in (T_{i-1}, T_i]$ può essere definito da:

$$L(t, T_i) := \frac{1}{\delta_i} \frac{P(T_{i-1}, t) - P(t, T_i)}{P(t, T_i)},$$

dove $\delta_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{360}$. Il Libor sarà parte del flusso corrisposto dal total return receiver al total return payer.

Come descritto nel capitolo precedente, nella valutazione di un derivato finanziario come il TRS va considerata anche la probabilità di default degli emittenti coinvolti nella negoziazione di tale contratto. Utilizzando i processi di Poisson descritti nella sezione "Probabilità di fallimento" possono essere calcolate la probabilità di default (PD) e la probabilità di non default (PND) al tempo t . Quest'ultima, considerando un processo di Poisson omogeneo di intensità λ_s , può essere espressa come segue:

$$PND(t) = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}. \quad (4.2)$$

A valle della strutturazione del mercato di riferimento con le relative notazioni procediamo con la derivazione della formula di pricing per il Total Return Swap.

4.1 Formula per la valutazione del TRS

Il derivato che vogliamo prezzare è un Total Return Swap con scadenza (*maturity*) T . Considerando una partizione finita $\{T_i\}_{i=1, \dots, n}$ dell'intervallo $[0, T]$ il contratto TRS può essere visto come uno scambio di flussi (i.e. prestazione vs protezione) tra il total return payer e il total return receiver in tali istanti temporali.

Nel corso della derivazione della formula di valutazione di un TRS indicheremo con $P_{j,i}$ il prezzo del sottostante j -esimo al tempo T_i e con $Div_{j,i-1}$ la quota di dividendo staccata al tempo T_{i-1} dal sottostante j -esimo. Inoltre, è utile definire il flusso di cassa C_i ,

corrispondente al tempo T_i , come segue:

$$C_i := \sum_{j=1}^m Div_{j,i-1} + Q_j(P_{j,i} - P_{j,i-1}),$$

ovvero come la somma tra i dividendi da corrispondere e la variazione in prezzo di ogni componente del sottostante moltiplicata per la relativa quantità.

Si precisa che, qualora il valore di C_i risulti positivo il flusso sarà corrisposto da parte del total return payer al total return receiver; qualora invece il valore di C_i fosse negativo, sarà corrisposto un quantitativo pari a $|C_i|$ da parte del total return receiver al total return payer, come descritto nel capitolo 2.

Per rendere la formulazione più agevole, consideriamo una variazione temporale costante $\delta_i = \delta = T/n$. Il tasso Libor può essere riscritto come

$$L(t, T_i) := \frac{n}{T} \frac{P(T_{i-1}, t) - P(t, T_i)}{P(t, T_i)}.$$

Sia τ il tempo al quale si realizza il primo default, la funzione indicatrice $\mathbb{1}(\tau > T_i)$ realizza la condizione di non default entro il tempo T_i .

Per la gamba di interesse (detta anche gamba di protezione), il flusso di cassa corrisposto nel periodo $(T_{i-1}, T_i]$ al total return payer è costituito da due componenti:

1. in caso di non default entro il tempo T_i verrà corrisposta la combinazione del tasso Libor $L(T_{i-1}, T_i)$ e di un tasso r_{TRS} stabilito al momento della negoziazione. Questi tassi vengono applicati al valore nominale corrente del TRS definito come

$$N_{i-1} = \sum_{j=1}^m Q_j P_{j,i-1},$$

ovvero la somma pesata del valore al tempo T_{i-1} del sottostante, dove Q_j rappresenta le quote detenute come sottostante del TRS per la componente j-esima (i.e. S_j).

2. in caso di default prima del tempo T_i verrà corrisposto un "ammontare di recupero" $r_{rec} N_{rec}$ dove r_{rec} è il tasso di recupero (*recovery rate*), P_j^r è il prezzo di riferimento del sottostante per il calcolo dell'ammontare di recupero, entrambi definiti al momento della negoziazione tra il total return receiver e il total return payer e N_{rec} (i.e. *Nozionale di recupero*) ottenuto da:

$$N_{rec} := \sum_{j=1}^m Q_j P_j^r$$

Il valore scontato del flusso di cassa corrispondente alla gamba di interesse vale:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^Q[FC_{int}] &= \mathbb{E}^Q\left[\sum_{i=1}^n D(T_i)\delta N_{i-1}(L(T_{i-1}, T_i) + r_{TRS})\mathbb{1}(\tau > T_i)\right] + \\ &+ \mathbb{E}^Q[D(\tau)N_{rec}r_{rec}\mathbb{1}(\tau < T)].\end{aligned}$$

D'altra parte abbiamo i flussi di cassa al tempo T_i corrisposti secondo la performance (variazioni nel prezzo e dividendi) del sottostante, C_i . Tali flussi, vengono erogati sotto la condizione di non default.

Per la gamba di performance FC_{perf} il valore scontato relativo al pagamento delle variazioni di prezzo e ai dividendi del sottostante risulta:

$$\mathbb{E}^Q[FC_{perf}] = \mathbb{E}^Q\left[\sum_{i=1}^n D(T_i)C_i\mathbb{1}(\tau > T_i)\right].$$

Per i derivati del tipo Swap, ovvero derivati di scambio, derivare il prezzo di non arbitraggio del derivato stesso consiste nel garantire che entrambe le parti non incorrano in possibilità di arbitraggio.

Il mercato in cui stiamo valutando il TRS soddisfa la condizione di non arbitraggio, motivo per cui la gamba di interesse e la gamba di performance devono garantire che:

$$\mathbb{E}^Q[FC_{int}] = \mathbb{E}^Q[FC_{perf}], \quad (4.3)$$

ovvero:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^Q\left[\sum_{i=1}^n D(T_i)C_i\mathbb{1}(\tau > T_i)\right] &= \mathbb{E}^Q\left[\sum_{i=1}^n D(T_i)\delta N_{i-1}(L(T_{i-1}, T_i) + r_{TRS})\mathbb{1}(\tau > T_i)\right] + \\ &+ \mathbb{E}^Q[D(\tau)N_{rec}r_{rec}\mathbb{1}(\tau < T)].\end{aligned}$$

Risolvere la condizione di non arbitraggio equivale a valutare il TRS ed in particolare ad individuare il tasso r_{TRS} ottenuto come segue:

$$\begin{aligned}r_{TRS} &= \frac{\overbrace{\mathbb{E}^Q\left[\sum_{i=1}^n D(T_i)\mathbb{1}(\tau > T_i)(C_i - \delta N_{i-1}L(T_{i-1}, T_i))\right]}^{N_1}}{\mathbb{E}^Q\left[\sum_{i=1}^n D(T_i)\delta N_{i-1}\mathbb{1}(\tau > T_i)\right]} + \\ &\quad - \frac{\overbrace{\mathbb{E}^Q[D(\tau)N_{rec}r_{rec}\mathbb{1}(\tau < T)]}^{N_2}}{\underbrace{\mathbb{E}^Q\left[\sum_{i=1}^n D(T_i)\delta N_{i-1}\mathbb{1}(\tau > T_i)\right]}_{D_{1,2}}}.\end{aligned}$$

Alla luce del precedente risultato, sotto le seguenti ipotesi:

- * il processo di fallimento (e quindi τ primo tempo di default) e il processo tasso d'interesse siano indipendenti;
- * si dispone di una stima dei flussi di cassa futuri in termini di variazione della performance di ciascun sottostante e valore nominale del TRS;

esplicitiamo le componenti di ogni membro:

$$\begin{aligned} N_1 &= \mathbb{E}^Q \left[\sum_{i=1}^n D(T_i) \mathbb{1}(\tau > T_i) (C_i - \delta N_{i-1} L(T_{i-1}, T_i)) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (C_i - \delta N_{i-1} L(T_{i-1}, T_i)) \mathbb{E}^Q [D(T_i)] \mathbb{E}^Q [\mathbb{1}(\tau > T_i)] \end{aligned}$$

ricordando che $\mathbb{E}^Q [D(T_i)] = DF(T_i)$ e $\mathbb{E}^Q [\mathbb{1}(\tau > T_i)] = \mathbb{Q}(N(T_i) = 0) = PND(T_i)$, perciò:

$$= \sum_{i=1}^n (C_i - \delta N_{i-1} L(T_{i-1}, T_i)) DF(T_i) PND(T_i).$$

Per il denominatore, allo stesso modo, vale:

$$\begin{aligned} D_{1,2} &= \mathbb{E}^Q \left[\sum_{i=1}^n D(T_i) \delta N_{i-1} \mathbb{1}(\tau > T_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \delta N_{i-1} DF(T_i) PND(T_i). \end{aligned}$$

Infine:

$$\begin{aligned} N_2 &= \mathbb{E}^Q [D(\tau) N_{rec} r_{rec} \mathbb{1}(\tau < T)] \\ &= N_{rec} r_{rec} \mathbb{E}^Q [D(\tau) \mathbb{1}(\tau < T)] \end{aligned}$$

dalla regola delle attese iterate

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q [D(\tau) \mathbb{1}(\tau < T)] &= \mathbb{E}^Q [\mathbb{E}^Q [D(\tau) \mathbb{1}(\tau < T) | H_T]] \\ &= \mathbb{E}^Q [\mathbb{E}^Q [D(\tau) | H_T] \mathbb{1}(\tau < T)] = \mathbb{E}^Q [DF(\tau) \mathbb{1}(\tau < T)]. \end{aligned}$$

Inserendo il tutto nel calcolo di N_2

$$\begin{aligned} &= N_{rec} r_{rec} \mathbb{E}^Q [DF(\tau) \mathbb{1}(\tau < T)] \\ &= N_{rec} r_{rec} \int_0^T DF(s) d\mathbb{Q}(\tau < s) \end{aligned}$$

utilizzando $\mathbb{Q}(\tau < s) = PD(s) = 1 - PND(s)$ e sapendo che $dPND(s) = -\lambda_s PND(s) ds$ otteniamo:

$$\begin{aligned} &= -N_{rec} r_{rec} \int_0^T DF(s) dPND(s) \\ &= N_{rec} r_{rec} \int_0^T DF(s) PND(s) \lambda_s ds. \end{aligned}$$

Alla luce delle precedenti computazioni, il tasso che caratterizza il TRS r_{TRS} può essere riscritto come

$$r_{TRS} = \frac{\sum_{i=1}^n (C_i - \delta N_{i-1} L(T_{i-1}, T_i)) DF(T_i) PND(T_i)}{\sum_{i=1}^n \delta N_{i-1} DF(T_i) PND(T_i)} - \frac{N_{rec} r_{rec} \int_0^T DF(s) PND(s) \lambda_s ds}{\sum_{i=1}^n \delta N_{i-1} DF(T_i) PND(T_i)}. \quad (4.4)$$

Riflettere su questo risultato può aiutarci a comprendere meglio la formula. Il tasso r_{TRS} corrisposto assieme al Libor dal total return receiver al total return payer è una competizione/ combinazione tra due fattori:

1. l'ammontare della performance rispetto al tasso Libor corrisposto, in particolare se ci sono variazioni negative nel prezzo del sottostante questa componente può assumere un valore positivo vicino a zero oppure negativo in modo tale da concorrere insieme al secondo fattore per produrre un tasso r_{TRS} negativo;
2. l'ammontare di recupero che dovrà essere corrisposto nel caso di default dell'emittente. Il valore assoluto di tale componente aumenta all'aumentare della probabilità di non default, in modo da contrastare il primo fattore in caso di ottima performance (ottima performance \rightarrow aumento dei pagamenti per la gamba di performance (primo fattore) \rightarrow aumento della probabilità di non default \rightarrow aumento del secondo fattore in contrasto al primo).

Nel caso in cui non venga considerata la probabilità di default e quindi nella formula non venisse considerato l'ammontare di recupero da corrispondere, la formula può essere rivista come:

$$r_{TRS} = \frac{\sum_{i=1}^n (C_i - \delta N_{i-1} L(T_{i-1}, T_i)) DF(T_i) PND(T_i)}{\sum_{i=1}^n \delta N_{i-1} DF(T_i) PND(T_i)}. \quad (4.5)$$

In tal caso, la formula riportata in (4.5) può essere banalmente interpretata come una competizione tra:

- il flusso di cassa che il total return payer prospetta di dover contribuire al total return receiver, composto quindi dal fattore C_i ;
- il Libor che il total return receiver deve corrispondere al total return payer sulla base del nozionale del TRS.

4.2 Modalità di valutazione: NPV o Accrual

Per questo tipo di derivati finanziari vengono considerate le presenti modalità di valutazione: NPV o ad Accrual.

Per quanto riguarda la prima modalità, **Net Present Value** (valore attuale netto), vale la derivazione fatta nella sezione precedente. In particolare, tale modalità verte a considerare tutti i flussi di cassa attesi attualizzati tramite l'utilizzo del fattore di sconto nel periodo di interesse. In particolare la formula del NPV è data da:

$$NPV = \sum_{i=1}^n -C_i DF(T_i) PND(T_i) + \sum_{i=1}^n \delta N_{i-1} (L(T_{i-1}, T_i) + r_{TRS}) DF(T_i) PND(T_i) + N_{rec} r_{rec} \int_0^T DF(s) PND(s) \lambda_s ds \quad (4.6)$$

Per quanto concerne la seconda modalità, ad **Accrual**, valgono le seguenti considerazioni in quanto non vengono considerati i flussi passati e quelli attesi in futuro, motivo per cui nella valutazione del TRS ad Accrual non si considerano i dividendi erogati/ da erogare. Il Pricing del TRS in tale contesto assume la seguente formulazione:

$$\sum_{j=1}^m Q_j (P_{j,t} - P_{j,0}) = N_t r_{ACC} \frac{t}{360}$$

dove t indicano i giorni trascorsi dalla negoziazione del TRS, N_t è il valore nominale del TRS al tempo t . Dalla formula è possibile capire che la modalità di pricing ad Accrual considera soltanto le variazioni nel prezzo al tempo t . Il tasso da applicare al total return receiver sarà funzione della variazione totale in prezzo come segue:

$$r_{ACC} = \frac{360}{t N_t} \sum_{j=1}^m Q_j (P_{j,t} - P_{j,0}) \quad (4.7)$$

Nel caso in cui si decida di procedere con tale modalità di pricing, non considerando i dividendi relativi al sottostante, la banca sostituirà i titoli sottostanti in una data antecedente a quella di stacco dividendi.

La valutazione del TRS ad Accrual è la più semplice applicabile in quanto i parametri coinvolti sono una numerosità ridotta e non vengono considerati fattori di sconto per attualizzare valori futuri.

Capitolo 5

Analisi del pricing di due TRS

A seguito della derivazione delle metodologie di pricing presenti nel capitolo precedente, nel corso del presente capitolo verranno applicate tali modalità di valutazione al fine di:

- derivare il tasso associato alla gamba di interesse per due TRS rispettivamente su basket di azioni e basket di indici;
- analizzare i risultati ottenuti confrontando le metodologie utilizzate e portando alla luce gli aspetti a favore di ognuna di queste.

Si precisa che la metodologia di pricing utilizzata da parte della Banca non dipende esplicitamente dalla volontà del trading stesso ma deriva da una negoziazione con la controparte secondo quanto stabilito dalla normativa ISDA SIMM (i.e. International Swaps and Derivatives Association - Standard Initial Margin Model).

5.1 Framework e Dataset

I due casi di TRS analizzati a titolo di esempio sono costituiti rispettivamente da un basket di single stock (i.e. TRS_1) e un basket di indici (i.e. TRS_2). Nello specifico, i TRS considerati hanno maturity pari a 3 mesi e la composizione del sottostante dei TRS in termini di singole componenti è riportata nelle seguenti tabelle.

Sottostante	Valuta	Quote
Stellantis	USD	746268,6567
AXP	USD	65789,47368
Coca-Cola	USD	162048,293

Tabella 5.1: composizione del sottostante relativo al TRS_1

Sottostante	Valuta	Quote
NASDAQ	USD	846,2957495
S&P 500	USD	2528,445006
Dow Jones	USD	317,3552376

Tabella 5.2: composizione del sottostante relativo al TRS_2

A partire da tale composizione, l'obiettivo dell'analisi è stato quello di confrontare le modalità di pricing proposte (i.e. Accrual/ NPV) per entrambi i TRS. Le assunzioni effettuate per sviluppare l'analisi riportata nella sezione successiva sono le seguenti:

- Il mercato è privo di arbitraggio, ovvero esiste una misura neutrale al rischio utile a derivare il pricing di un derivato finanziario;
- Data la breve durata dei contratti oggetto dell'analisi (i.e. 3 mesi) la probabilità di non default degli emittenti può essere considerata pari a 1;
- L'underlying dei TRS analizzati sia costituito da sottostanti quotati per i quali è disponibile la serie storica dei prezzi;
- Le componenti del sottostante non prevedano lo stacco dei dividendi nell'intervallo temporale tra la *trading date* e la *maturity date* e/o i titoli sottostanti vengano sostituiti in una data antecedente a quella di stacco dividendi;
- i rendimenti mensili (i.e. monthly returns) dei sottostanti sono distribuiti secondo una distribuzione normale.

In tale contesto, per rendere più agevoli le derivazioni del pricing dei casi di studio considerati, verrà supposto che la gamba di interesse preveda soltanto flussi ottenuti da un tasso d'interesse fisso, non considerando quindi in tale derivazione il LIBOR da corrispondere.

Definiamo quindi t_i gli istanti temporali corrispondenti ai flussi di cassa dal total return payer al total return receiver e viceversa nei contratti TRS oggetto di studio. Nello specifico, per TRS_1 e TRS_2 sono state considerate le seguenti date:

$$t_0 \leftrightarrow 01/08/2022, \quad t_1 \leftrightarrow 01/09/2022, \quad t_2 \leftrightarrow 03/10/2022, \quad t_3 \leftrightarrow 03/11/2022,$$

dove t_0 rappresenta il giorno in cui è stata tradata l'operazione e t_3 la maturity dell'operazione stessa.

Pertanto, rispetto alle formule descritte nel precedente capitolo possiamo considerare le indicizzazioni $i = 0, 1, \dots, 3$ come istanti temporali ed $s = 1, 2, 3$ come riferimento per i

sottostanti.

Dalle precedenti assunzioni può essere derivato il pricing dei prodotti finanziari oggetto dell'analisi in maniera piuttosto semplificata. Ciò in quanto, le formule precedentemente ricavate per la descrizione dei tassi r_{ACC} e r_{NPV} possono essere riviste alla luce delle ipotesi fatte come segue:

$$r_{ACC} = \sum_{s=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{360}{t_i N_i} Q_s (P_{s,t_i} - P_{s,t_{i-1}}), \quad (5.1)$$

$$r_{NPV} = \frac{\sum_{s=1}^3 \sum_{i=1}^3 DF(t_i) Q_s (P_{s,t_i} - P_{s,t_{i-1}})}{\sum_{s=1}^3 \sum_{i=1}^3 \delta N_{i-1} DF(t_i)}. \quad (5.2)$$

Le prime informazioni reperibili dal mercato, utili a calcolare la gamba tasso del prodotto, sono il tasso d'interesse e il valore del tasso LIBOR a tre mesi (che utilizzeremo soltanto per confrontare la valutazione del TRS con i dati storici nel periodo di interesse).

Data	Tasso	Valore
01/08/2022	LIBOR 3M	0,105982435
01/09/2022	LIBOR 3M	0,185073971
03/10/2022	LIBOR 3M	0,375703170
03/11/2022	LIBOR 3M	0,569916745

Tabella 5.3: tassi LIBOR a tre mesi nelle date di scambio flussi

Per quanto riguarda il tasso d'interesse, nel corso delle successive derivazioni, il suo valore annuale verrà considerato costante e settato a $r = 0,022557$. Pertanto, possono essere ricavati i valori relativi al discount factor dei singoli periodi considerati come segue:

$$DF(t_i) = e^{-\int_{t_{i-1}}^{t_i} r du} \quad i = 1, 2, 3.$$

Per poter applicare le formule sopra riportate in (5.1) e (5.2), a partire dai dati storici sui prezzi quotati dei sottostanti, devono essere ricavate le previsioni future relativamente ai prezzi dei sottostanti nelle date di scambio flussi tra total return receiver e total return payer.

Pertanto, al fine di ipotizzare i prezzi dei sottostanti nelle date t_1 , t_2 e t_3 , sono state utilizzate le quotazioni di mercato mensili relative al prezzo dei sottostanti negli ultimi 5 anni, scaricabili direttamente da *Yahoo Finance* tramite l'url in [10]. A titolo di esempio di seguito è riportata la tabella di riferimento per il sottostante *Stellantis*, per la quale sono stati calcolati i rendimenti mensili (i.e. Monthly R) utilizzando la formula $\ln \frac{P_k}{P_{k-1}}$.

Date	Price	Monthly R				
01/07/2017	12,090	-		01/03/2020	7,190	-0,548225916
01/08/2017	15,130	0,224300863		01/04/2020	8,610	0,180233147
01/09/2017	17,910	0,168679688		01/05/2020	8,840	0,026362558
01/10/2017	17,350	-0,031766710		01/06/2020	10,240	0,147014743
01/11/2017	17,100	-0,014514043		01/07/2020	10,150	-0,008827914
01/12/2017	17,840	0,042364664		01/08/2020	11,030	0,083145128
01/01/2018	24,170	0,303669068		01/09/2020	12,220	0,102455120
01/02/2018	21,190	-0,131582775		01/10/2020	12,290	0,005711970
01/03/2018	20,520	-0,032129399		01/11/2020	15,500	0,232054100
01/04/2018	21,830	0,061885150		01/12/2020	18,090	0,154519275
01/05/2018	23,230	0,062159376		01/01/2021	15,230	-0,172092133
01/06/2018	18,890	-0,206811918		01/02/2021	16,380	0,072793850
01/07/2018	16,980	-0,106596448		01/03/2021	17,790	0,082575541
01/08/2018	17,110	0,007626965		01/04/2021	16,570	-0,071042726
01/09/2018	17,510	0,023109000		01/05/2021	19,570	0,166403950
01/10/2018	15,110	-0,147415370		01/06/2021	19,710	0,007128289
01/11/2018	16,590	0,093443328		01/07/2021	19,170	-0,027779513
01/12/2018	14,460	-0,137413887		01/08/2021	20,020	0,043385217
01/01/2019	17,210	0,174104335		01/09/2021	19,100	-0,047043439
01/02/2019	14,730	-0,155604322		01/10/2021	19,940	0,043039480
01/03/2019	14,850	0,008113635		01/11/2021	17,130	-0,151896561
01/04/2019	15,410	0,037016784		01/12/2021	18,760	0,090895690
01/05/2019	12,620	-0,199733792		01/01/2022	19,290	0,027859935
01/06/2019	13,820	0,090833961		01/02/2022	18,280	-0,053779258
01/07/2019	13,190	-0,046657852		01/03/2022	16,270	-0,116484699
01/08/2019	13,140	-0,003797954		01/04/2022	13,370	-0,196309530
01/09/2019	12,950	-0,014565225		01/05/2022	15,100	0,121681353
01/10/2019	15,320	0,168063376		01/06/2022	12,360	-0,200229292
01/11/2019	14,750	-0,037916082		01/07/2022	14,380	0,151372900
01/12/2019	14,690	-0,004076093		01/08/2022	13,400	-0,070583645
01/01/2020	13,020	-0,120680353		01/09/2022	11,840	-0,123771078
01/02/2020	12,440	-0,045569549		03/10/2022	13,520	0,132686441
				03/11/2022	14,930	0,099202541

5.2 Analisi e Risultanze

L'obiettivo dell'analisi effettuata è quello di derivare il pricing dei TRS individuati secondo le metodologie ad Accrual e NPV, al fine di confrontare i risultati ottenuti rispetto al reale andamento del mercato e quindi dei flussi di cassa corrisposti dal total return receiver al total return payer e viceversa.

A partire da framework individuato e dataset importato, in tale sezione sono riportate le analisi effettuate e le relative risultanze.

L'analisi verrà effettuata utilizzando le informazioni disponibili al tempo $t_0 \leftrightarrow 01/08/2022$ (i.e. trading date del TRS). I contratti analizzati prevedono 3 flussi di cassa mensili in t_1, t_2, t_3 (i.e. maturity TRS) scambiati sulla base della performance del sottostante e il tasso individuato tramite il pricing.

Al fine di derivare i tassi r_{ACC} e r_{NPV} per entrambi i TRS oggetto dell'analisi, è stato utilizzato il metodo Monte Carlo per ottenere una simulazione del movimento dei prezzi nelle date future t_1, t_2, t_3 . Per ulteriori informazioni in merito alle applicazioni del metodo Monte Carlo alla finanza si rimanda a [6].

Come anticipato nella precedente sezione, sono state utilizzate le serie storiche relative ai prezzi delle singole componenti del sottostante per effettuare una simulazione Monte Carlo sulle oscillazioni del prezzo delle stesse. Tale metodologia prevede, tramite l'utilizzo di un calcolatore come Microsoft Excel:

1. il calcolo dei rendimenti mensili (i.e. monthly return) mediante la formula $\ln \frac{P_k}{P_{k-1}}$;
2. il calcolo della media, varianza, deviazione standard e drift dei rendimenti mensili;
3. la generazione di valori casuali utilizzando la funzione predisposta `RAND()`;
4. il calcolo del rendimento atteso futuro tramite l'utilizzo della funzione `NORMSINV()`.

Per quanto riguarda l'ultimo step descritto, la funzione `NORMSINV(p)` predefinita in Excel permette di calcolare il valore z tale per cui una distribuzione standard normale restituisce con probabilità p valori che siano $\leq z$.

Definiamo A l'insieme delle date mensili considerate tra il 01/07/2017 e il 01/08/2022 (cfr. tabella sopra riportata) ed indichiamo con $|A|$ la cardinalità dell'insieme, ovvero il numero di prezzi considerati per comporre il dataset.

L'indicizzazione $s = 1, 2, 3$ sta ad indicare i sottostanti relativi al TRS su basket di single stock (i.e. TRS_1), $s = 4, 5, 6$ indica i sottostanti al TRS su basket di indici azionari

(i.e. TRS_2).

Quindi, una volta recuperati i dati relativi ai rendimenti mensili (i.e. $R_{s,k}$) per ciascun sottostante sulla base del dataset disponibile, sono stati ricavate la media, la varianza, la deviazione standard e il drift relativi a tali rendimenti, utilizzando le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
 media(R_s) &= \frac{1}{|A|} \sum_{k \in A} R_{s,k}; \\
 var(R_s) &= \frac{1}{|A| - 1} \sum_{k \in A} (R_{s,k} - media(R_s))^2; \\
 \sigma(R_s) &= \sqrt{var(R_s)}; \\
 drift(R_s) &= media(R_s) - \frac{var(R_s)}{2}.
 \end{aligned}$$

Di seguito si riporta una tabella riassuntiva di quanto ottenuto relativamente ai rendimenti mensili di ciascun sottostante.

Sottostante	Media	Varianza	Deviazione Standard	Drift
Stellantis	0,000374352	0,019496268	0,139629038	-0,009373782
AXP	0,008243777	0,006495270	0,080593239	0,004996142
Coca-Cola	0,005365221	0,002820708	0,053110334	0,003954868

Tabella 5.4: dati ottenuti per il case study TRS_1

Sottostante	Media	Varianza	Deviazione Standard	Drift
NASDAQ	0,009361795	0,003289030	0,057350064	0,007717280
S&P 500	0,007234011	0,002460463	0,049603058	0,006003780
Dow Jones	0,005773484	0,002354865	0,048526949	0,004596052

Tabella 5.5: dati ottenuti per il case study TRS_2

A partire da tali risultati è possibile ricavare una stima del rendimento atteso nei mesi futuri utilizzando la seguente formula:

$$R_s^{t_i} = drift + \sigma(R_s) * NORMSINV(RAND()) \quad i = 1, 2, 3.$$

In analogia con quanto descritto sopra indichiamo il prezzo del sottostante s alla trading date con P_{s,t_0} . La stima del prezzo relativo ai sottostanti $s = 1, 2, \dots, 6$ in t_1, t_2, t_3 può

essere ricavata da:

$$P_{s,t_i} = P_{s,t_{i-1}} * R_s^{t_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

La tabella di cui sotto riporta quanto ottenuto rispetto alle stime sui prezzi attesi.

Prezzi	Stellantins	AXP	Coca-Cola
P_{s,t_0}	13,4000	152,0000	61,7100
P_{s,t_1}	11,8400	134,9100	56,0200
P_{s,t_2}	13,5200	148,4500	59,8500
P_{s,t_3}	14,9300	152,5000	61,1400

Tabella 5.6: stime dei prezzi futuri delle componenti del basket sottostante a TRS_1

Prezzi	NASDAQ	S&P 500	Dow Jones
P_{s,t_0}	11816,2002	3955,0000	31510,4300
P_{s,t_1}	10575,6201	3585,6200	28725,5100
P_{s,t_2}	10988,1504	3871,9800	32732,9500
P_{s,t_3}	11146,0596	3965,3400	33745,6900

Tabella 5.7: stime dei prezzi futuri delle componenti del basket sottostante a TRS_2

Pertanto, grazie al metodo Monte Carlo è stato possibile derivare una stima sull'andamento del prezzo dei sottostanti nelle date di scambio flussi tra il total return payer e il total return receiver.

A questo punto, al fine di derivare il pricing del prodotto, non rimane altro che applicare le formule riportate in (5.1) e (5.2) per derivare i tassi r_{ACC} e r_{NPV} relativi ad entrambi i TRS considerati.

Per poter considerare le formule sopra citate è necessario calcolare il valore nominale di entrambi i TRS negli istanti temporali t_1 , t_2 , t_3 . Considerando un nominale iniziale pari a $N_0 = 30.000.000$, possiamo derivare il valore nominale in tutti gli istanti temporali successivi, oer TRS_1 utilizzando la formula:

$$N_i = \sum_{s=1}^3 Q_s * P_{s,t_i} \quad i = 1, 2, 3;$$

Per TRS_2:

$$N_i = \sum_{s=4}^6 Q_s * P_{s,t_i} \quad i = 1, 2, 3;$$

dove P_{s,t_i} sono le stime dei prezzi delle singole componenti dei sottostanti.

In particolare, direttamente sotto una tabella riepilogativa di quanto ottenuto per il nominale di entrambi i TRS.

Data	TRS_1	TRS_2
N_0	30000000,00	30000000,00
N_1	28072203,98	30426664,49
N_2	29977416,21	30583358,57
N_3	31237138,67	30981333,61

Tabella 5.8: valore nominale dei TRS in t_0, t_1, t_2, t_3

Utilizzando quindi le formule in (5.1) e (5.2), sulla base dei dati ottenuti, possiamo derivare i pricing ad Accrual e NPV di entrambi i TRS, i quali sono riportati nella tabella sottostante.

Pricing	TRS_1	TRS_2
Accrual	0,670091245	0,175340760
NPV	0,256958667	0,064536241

Tabella 5.9: tassi ottenuti per il pricing dei TRS

Il motivo per il quale l'analisi condotta è stata effettuata su due TRS con trading date al 01/08/2022 deriva dalla necessità di confrontare i tassi ottenuti utilizzando le stime fornite dal metodo Monte Carlo sulla base dei flussi realmente scambiati sulla base della performance del sottostante. In tal senso, disponiamo delle serie storiche dei prezzi fino al 03/11/2022 e possiamo procedere al calcolo dei flussi scambiati realmente tra il total return payer e il total return receiver.

Pertanto, al fine di valutare se i tassi ottenuti sono performanti rispetto ai flussi realmente scambiati tra il total return payer e il total return receiver nel lasso temporale tra la *trading date* e la *maturity date*, è possibile derivare lo spread tra i valori finali della gamba di performance e della gamba di interesse come segue:

$$\text{spread} = \text{valore della gamba di interesse} - \text{valore della gamba di performance},$$

ovvero:

- nel caso in cui la valutazione sia ad Accrual, la differenza tra il tasso r_{ACC} sommato al LIBOR e la performance (i.e. variazioni in prezzo del sottostante);
- nel caso in cui la valutazione sia ad NPV, la differenza tra il tasso r_{NPV} sommato al LIBOR e la performance (i.e. variazioni in prezzo del sottostante).

A tal proposito, di seguito viene riportata una tabella che riassume quanto ottenuto per i case study TRS_1 e TRS_2 .

Case Study	Spread Accrual	Spread NPV
TRS_1	5342649,984	2370022,896
TRS_2	2703444,025	1903715,886

Tabella 5.10: spread tra la gamba di tasso e la gamba di performance

Risultano evidenti alcune prime considerazioni sui risultati ottenuti:

1. entrambi i tassi propongono una valutazione dei TRS a favore del Total Return Payer (i.e. Banca) e quindi non opportunamente convenienti per la controparte, per tale motivo esiste un periodo antecedente alla trading date di negoziazione con la controparte del pricing fornito dalla Banca;
2. il tasso r_{ACC} risulta in entrambi i casi di gran lunga maggiore rispetto al tasso r_{NPV} , ciò deriva dalla presenza nella formula per la valutazione del TRS a NPV del fattore di sconto;
3. confrontando i valori ottenuti per i case study è evidente che per il TRS con sottostante basket di single stock (i.e. TRS_1) i tassi r_{ACC} e r_{NPV} sono maggiori dei rispettivi ricavati per il TRS con sottostante basket di indici (i.e. TRS_2).

Per quanto concerne quanto riportato nell'ultimo punto evidenziato, ciò potrebbe derivare dal fatto che il caso oggetto dell'analisi TRS_1 prevede una volatilità maggiore nel campione utilizzato (vedi tabelle 5.4 e 5.5) e comporta quindi un incremento della probabilità che il metodo Monte Carlo generi una successione di ritorni mensili che si discosti più dalla media degli stessi (nel nostro caso un discostamento positivo dalla media).

Infatti, va specificato che, il metodo Monte Carlo utilizzato per ottenere la stima dei rendimenti mensili del sottostante nelle date future al flusso considerato risulta una delle modalità più semplici tramite le quali predire il valore futuro di un sottostante.

In conclusione, un'ulteriore osservazione da portare all'attenzione per poter interpretare al meglio le risultanze dell'analisi, è data dal fatto che il pricing del prodotto avviene tramite negoziazione con la controparte, motivo per cui, oltre alle previsioni sui movimenti del sottostante, devono essere valutati i seguenti fattori:

- la specificità della transazione (e.g. presenza o meno di diritti di sostituzione del sottostante);

- nel caso in cui la copertura del TRS avvenga tramite l'acquisto dei titoli sottostanti al TRS da parte della Banca, può essere offerto un pricing agevolato dovuto alla possibilità di effettuare operazioni di prestito titoli sul sottostante per tutta la durata del TRS; in tal senso si ridurrebbe il tasso da imporre alla gamma di interesse e di conseguenza (nel nostro caso) diminuirebbe lo spread tra la gamma di interesse e performance;
- nell'eventualità in cui l'hedging del TRS avvenga tramite back-to-back (i.e. stipulando un TRS uguale e contrario con una controparte di mercato) il pricing del prodotto può dipendere dal pricing imposto dalla controparte di mercato.

Conclusioni

L'analisi effettuata, come riportato nel precedente capitolo, pone in evidenza un pricing a NPV più agevolato per la controparte che vuole assumere una posizione lunga sulle componenti del sottostante rispetto alla valutazione ad Accrual. Viceversa la valutazione ad Accrual propone un pricing maggiormente favorevole per la parte che riceve la gamba di tasso (i.e. Protection Buyer).

Come descritto nel lavoro di tesi, non c'è discrezionalità nella scelta della modalità di pricing da parte del trader.

Pertanto, le formule derivate nel capitolo 4 vengono applicate sulla base della negoziazione con la controparte e delle caratteristiche dell'operazione, come descritto dalla normativa ISDA SIMM.

Risulta comunque utile confrontare le modalità di pricing anche al fine di delineare le caratteristiche della transazione sulla base della volontà di valutare il TRS ad Accrual o NPV. Ad esempio, nel caso in cui il contratto preveda delle clausole di *Early Termination* la valutazione del TRS ad Accrual consegue automaticamente dalla presenza della possibilità di recedere dal contratto in una data antecedente alla scadenza del Total Return Swap.

Bibliografia

- [1] Brigo, D., Mercurio, F. (2001). *Interest Rate Models – Theory and Practice*. Springer Finance.
- [2] Maziere, L. (2020). *Migration plan of Risky Total Return Swap to Bond Return Swap*. Available from: <https://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1415888dswid=-2369>.
- [3] Pascucci, A. (2020). *Teoria della probabilità*. Springer-Verlag Milano.
- [4] Pascucci, A. (2007). *Calcolo stocastico per la finanza*. Springer-Verlag Milano.
- [5] Wujiang, L. (2018). *Pricing Total Return Swap*. DOI: 10.13140/RG.2.2.20367.84646.
- [6] Kroese, Dirk. Rubinestein, Reuven Y. P. (2012). *Monte Carlo methods*. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics.
- [7] Vasicek, O. (1977). *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics, 5(2), 177-188.
- [8] Pintoux, C., Privault, N. (2011). *The Dothan pricing model revisited*. Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics, 21(2), 355-363.
- [9] Heath, D., Jarrow, R., Morton, A. (1992). *Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation*. Econometrica, 77-105.
- [10] *Yahoo Finance*. <https://finance.yahoo.com/recent-quotes>.