

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

## Studio di un modello cosmologico di quintessenza con accoppiamento

Relatore:  
Prof. Marco Baldi

Presentata da:  
Matteo Santini

Anno Accademico 2021/2022

# Abstract

Il modello  $\Lambda$ CDM è l'attuale modello standard della cosmologia e descrive la presenza dell'energia oscura attraverso una costante cosmologica  $\Lambda$ . Nonostante i buoni fit con le osservazioni a livello di background, il modello non risulta essere simultaneamente consistente nella stima della costante di Hubble con le osservazioni ad alto redshift e quelle a basso redshift. Si presenta un modello cosmologico di quintessenza con accoppiamento, in cui si utilizza come vincolo una funzione di Hubble identica a quella del modello standard e in cui si studiano i principali parametri di interesse cosmologico per diversi possibili accoppiamenti costanti, risolvendo numericamente le equazioni del campo scalare di energia oscura e delle perturbazioni lineari del modello. Si introducono poi due possibili estensioni del modello, utilizzando come vincolo una funzione di Hubble che differisce da quella classica per una piccola deviazione nei valori a basso redshift e risolvendone il background, infine studiando nuovamente il modello con il background di  $\Lambda$ CDM in cui però si introduce un accoppiamento che varia nel tempo, in accordo con i vincoli derivanti dai dati della CMB.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Il modello cosmologico <math>\Lambda</math>CDM</b>	<b>5</b>
1.1 La relatività generale . . . . .	6
1.2 I principi di simmetria . . . . .	7
1.3 Il problema della energia oscura . . . . .	8
<b>2 Il modello di quintessenza con accoppiamento</b>	<b>9</b>
2.1 Cosmologia di Background . . . . .	9
2.2 Introduzione delle perturbazioni lineari . . . . .	13
2.3 Correzioni alla funzione di Hubble . . . . .	15
2.4 Accoppiamento variabile . . . . .	17
<b>3 Analisi numerica e presentazione dei risultati</b>	<b>18</b>
3.1 Evoluzione delle quantità di background al variare di $\beta$ . . . . .	19
3.1.1 Andamento dei parametri di densità . . . . .	19
3.1.2 Evoluzione del campo scalare $\phi$ , del potenziale e delle masse . . . . .	21
3.2 Analisi delle perturbazioni . . . . .	23
3.3 Background con accoppiamento dipendente dal tempo . . . . .	24
3.3.1 Evoluzione dei parametri di densità . . . . .	25
3.3.2 Altre quantità di background . . . . .	27
<b>Conclusioni</b>	<b>30</b>
<b>A Correzione alla funzione di Hubble</b>	<b>32</b>
<b>B Il codice C</b>	<b>35</b>

# Introduzione

Uno dei problemi scientifici più misteriosi dell'attuale fisica è quello della accelerazione dell'espansione cosmica [6]. Il modello  $\Lambda$ CDM è un primo modello che riesce a dare una giustificazione all'espansione accelerata dell'universo attraverso l'impiego di una costante cosmologica  $\Lambda$ , che descrive la presenza dell'energia oscura [8]. Il punto forte di questo modello risiede nel riuscire a essere abbastanza consistente con i dati osservativi nonostante la sua semplicità, tuttavia presenta alcuni problemi di carattere teorico per il fatto che si basa sull'esistenza della materia oscura e dell'energia oscura di cui però non si conosce affatto la natura [14], [12]. Inoltre, alcune osservazioni degli ultimi anni hanno messo in evidenza delle deviazioni di  $2-3\sigma$  dalle previsioni del modello.

È ben noto il problema relativo al divario tra il valore della costante di Hubble  $H_0$  ottenuto ad alto redshift ( $z$ ) attraverso lo studio della CMB (*Cosmic Microwave Background*) e quello ottenuto da osservazioni a basso redshift delle supernovae di tipo Ia. In particolare le osservazioni a basso redshift prevedono valori di  $H(z)$  più grandi rispetto alle previsioni del modello  $\Lambda$ CDM, assumendo i parametri di *best-fit* ottenuti dalle osservazioni ad alto redshift [20]. Un altro problema noto del modello  $\Lambda$ CDM è la tensione sul parametro  $\sigma_8$ ; in particolare esso quantifica un alto livello di ammassamento se ottenuto dalla CMB mentre, dalle osservazioni su larga scala dell'universo, si ottiene un ammassamento più piccolo. Per queste ragioni, ha senso cercare delle alternative al modello  $\Lambda$ CDM, allo scopo di migliorarne la predittività. Si propone quindi un modello di quintessenza con accoppiamento, in cui viene introdotta l'energia oscura sotto forma di un campo scalare che si accoppia con la materia, cercando però di riprodurre lo stesso background cosmologico del modello  $\Lambda$ CDM in modo da risolvere il problema della tensione su  $\sigma_8$  [19]. Si presentano inoltre due possibili estensioni del modello, che consistono nell'applicazione di una correzione alla funzione di Hubble, nel tentativo di spiegare la tensione su  $H_0$  e nell'introduzione di un accoppiamento variabile nel tempo, in accordo con i recenti studi in [22].

Nel primo capitolo si presentano le caratteristiche principali del modello  $\Lambda$ CDM, illustrandone alcune sue carenze. Nel secondo capitolo si introducono i modelli ad energia oscura basati su campo scalare e si mostra lo sviluppo del modello di quintessenza accoppiato, ricavando l'equazione differenziale del campo scalare e introducendo delle perturbazioni lineari nel modello. Si introducono inoltre anche le modifiche al modello

descritte precedentemente. Infine, nel terzo capitolo, si effettua la risoluzione numerica delle equazioni risultanti dal modello di quintessenza senza correzione, mostrandone i principali risultati e confrontandoli con quanto ottenuto dalle modifiche applicate al modello.

# Capitolo 1

## Il modello cosmologico $\Lambda$ CDM

La cosmologia è la scienza che si occupa di studiare l'origine e l'evoluzione dell'universo, cercando di risalire alla storia che si cela dietro la formazione delle strutture cosmiche e di predirne lo sviluppo futuro attraverso l'utilizzo di modelli. Nell'ultimo secolo sono stati proposti diversi modelli cosmologici nel tentativo di spiegare la distribuzione della materia nelle strutture. Il primo modello standard della cosmologia fu quello di Einstein-De Sitter, sviluppato nel 1917, che prevede un universo spazialmente piatto il cui contenuto energetico è interamente dovuto al contributo della materia, senza considerare quindi la presenza di una costante cosmologica. Questo modello fu successivamente abbandonato per fare spazio ad altri modelli. Il modello cosmologico che negli ultimi quarant'anni circa si è rivelato essere il più predittivo è il modello  $\Lambda$ CDM, dove  $\Lambda$  è la costante cosmologica e CDM è l'acronimo di *Cold Dark Matter*. Si presuppone quindi che l'universo sia dominato dalla presenza di materia oscura [17] (circa il 25% della densità media dell'universo), ossia materia non ordinaria che interagisce solo gravitazionalmente e la caratteristica di essere fredda equivale alla richiesta di disaccoppiamento dall'equilibrio termico, che era presente nell'universo primordiale, a regime non relativistico. Lo studio della materia oscura fredda non può quindi avvenire in maniera diretta in quanto essa non emette radiazione, ma la sua presenza è deducibile indirettamente. Una prima evidenza dell'esistenza della materia oscura viene dall'osservazione della velocità di dispersione degli ammassi di galassie [1], altre evidenze mostrano invece come è possibile mappare la distribuzione degli aloni di materia oscura nelle galassie, studiando l'andamento delle curve di rotazione nelle galassie a spirale [2] o osservando gli effetti del lensing gravitazionale delle galassie ellittiche [11]. La materia ordinaria (barionica) invece resta in secondo piano in quanto comprende solo il 5% circa della densità media dell'universo [17]. Gli ingredienti fondamentali per la costruzione del modello standard sono la relatività generale di Einstein e il Principio Cosmologico. Nelle prossime righe si andranno a studiare più a fondo le loro relazioni con le proprietà di questo modello.

## 1.1 La relatività generale

Il modello standard assume la validità della relatività generale di Einstein, che è la teoria guida per la costruzione di una metrica, cioè della nozione di distanza. È possibile costruire una metrica in accordo con il Principio Cosmologico e il Principio Copernicano assumendo l'esistenza di vettori di Killing, cioè dei particolari vettori che sono associati ad una invarianza di metrica. Esistono tre vettori di Killing *space-like* che descrivono le traslazioni spaziali, e che definiscono matematicamente il principio di omogeneità, e tre vettori di Killing *space-like* che descrivono le rotazioni, esprimendo matematicamente il concetto di isotropia. Si è così in grado di introdurre una metrica univocamente definita: la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Espressa in coordinate polari, la metrica assume la forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right] \quad (1.1)$$

in cui

- $ds$  rappresenta l'elemento di lunghezza, in altre parole la nozione di distanza nello spazio-tempo
- $(r, \theta, \phi)$  è il set di coordinate comoventi spaziali
- $t$  è il tempo proprio, ovvero il tempo misurato da un osservatore solidale con il sistema di riferimento delle coordinate comoventi. È anche detto tempo cosmico.
- $a(t)$  è fattore di scala (o fattore di espansione)
- $K$  è il parametro di curvatura, che può assumere solo 3 possibili valori (-1, 0, +1) e descrive la geometria dell'universo.

Il parametro di densità  $\Omega$  è definito come il rapporto tra la densità osservata  $\rho$  e la densità critica  $\rho_{crit} = 3H_0^2/8\pi G$ . Questa relazione determina la geometria dell'universo e, in particolare, esso risulta piatto se  $\rho = \rho_{crit}$ . Da studi derivanti dalla CMB [17] [10], cioè la radiazione fossile di ultima diffusione dell'universo primordiale, è stato confermato che attualmente la geometria dell'universo è euclidea e quindi  $\Omega_{tot}=1$ . La richiesta di una geometria piana sembrerebbe apparentemente incompatibile con i valori di densità della materia, poichè l'insieme di materia barionica, CDM e radiazione coprirebbe solo il 30% della densità di energia dell'universo[17] (cioè  $\Omega = 0.3$ ). Per questa ragione è necessario introdurre una nuova specie di energia, ossia l'energia oscura, che è presente nella formulazione del 1917 della relatività generale sotto forma della costante cosmologica  $\Lambda$  che compare nelle equazioni di campo

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (1.2)$$

dove  $T_{ij}$  è il tensore energia-impulso,  $R_{ij}$  è il tensore di Levi-Civita e  $g_{ij}$  è il tensore metrico. Le equazioni di campo mostrano come le proprietà geometriche dello spazio sono legate al suo contenuto di energia, rimanendo in accordo con il Principio Cosmologico. Dalla componente  $(00)$  e dalla traccia dell'equazione di campo si ricavano le due equazioni di Friedmann, che governano l'espansione dello spazio

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.3)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} \quad (1.4)$$

Il modello  $\Lambda$ CDM prevede quindi la presenza di quattro specie di fluidi (radiazione, materia barionica, materia oscura fredda ed energia oscura) e la prevalenza di una specie sulle altre ha distinto le tre ere dell'universo. La prima era è quella dominata dalla presenza di radiazione ( $\rho_r \sim a^{-4}$ ) e si concluse circa  $10^3$  anni dopo il Big Bang (redshift di equivalenza). Nella seconda era si ha una dominanza di materia ( $\rho_m \sim a^{-3}$ ), intesa come insieme di materia oscura e di materia barionica. Circa 5 milioni di anni fa, la densità di energia oscura  $\rho_\Lambda$  ha superato la densità di materia  $\rho_m$  dando vita all'ultima era dell'universo, dominata dall'energia oscura [9].

## 1.2 I principi di simmetria

In ambito cosmologico, i principi di simmetria costituiscono la base per molti modelli in quanto sono in grado di ridurre i gradi di libertà di un sistema, facilitandone la modellizzazione. Il modello  $\Lambda$ CDM descrive un universo isotropo, ossia un universo che è lo stesso in tutte le direzioni di osservazione. Questa richiesta è direttamente collegata con il Principio Copernicano il quale afferma che non esiste un luogo privilegiato da cui osservare l'universo: ciò significa che ogni osservatore vedrà sempre le stesse caratteristiche medie dell'universo, indipendentemente da dove si punti lo sguardo. L'isotropia è una constatazione osservativa e, in combinazione al Principio Copernicano, garantisce l'omogeneità dell'universo, la quale afferma che le proprietà strutturali dell'universo sono le stesse in ogni luogo. Queste sono le basi su cui poggia il Principio Cosmologico, che afferma l'omogeneità e l'isotropia dell'universo.

Risulta evidente che queste richieste non sono sempre valide: basti osservare il cielo o prendere per esempio il nostro Sistema Solare per accorgersi del fatto che l'universo appare tutt'altro che omogeneo e isotropo. In realtà omogeneità e isotropia si realizzano solo in media nello spazio e, in generale, sono valide solo per scale maggiori di  $\sim 100$ Mpc. Questi principi sono confermati da evidenze osservative provenienti dalla struttura di larga scala dell'universo e da studi della *Cosmic Microwave Background*.

### 1.3 Il problema della energia oscura

La costante cosmologica  $\Lambda$  inizialmente inserita da Einstein nella sua equazione nel 1917, ricopriva un ruolo di stabilizzatore dell'universo: secondo l'equazione di campo, l'universo è in uno stato dinamico di continua espansione o contrazione e la costante cosmologica ha il ruolo di rendere statico l'universo, in particolare contrastando la contrazione dovuta alla gravità. Essendo l'universo in espansione accelerata, ci si aspetta quindi la presenza di una costante cosmologica positiva che ricopra il ruolo di energia oscura. Come già anticipato, però, il modello  $\Lambda$ CDM presenta il problema di non essere simultaneamente consistente con la stima dei valori della costante di Hubble  $H_0$  per valori di basso redshift e di alto redshift [20]. In altre parole, se si suppone l'esistenza della costante cosmologica, il modello standard della cosmologia fallisce nel descrivere come l'universo si espande. Risulta quindi ragionevole pensare che l'energia oscura non sia presente sotto forma di costante cosmologica, ma che abbia una qualche altra natura.

La quintessenza è un'ipotetica forma di energia che spiega la presenza della energia oscura interpretandola come un campo scalare dinamico ( $\phi$ ) che interagisce con la materia. Questa interpretazione si differenzia da quella del modello standard principalmente per il fatto che il campo scalare ha densità che varia sia nello spazio che nel tempo, mentre nel modello  $\Lambda$ CDM si ha una costante cosmologica che è statica. Nei modelli di quintessenza il campo è soggetto ad un potenziale  $V(\phi)$  che ne governa la dinamica. Introducendo degli accoppiamenti tra il campo e la materia e analizzando la dinamica del campo scalare, è possibile studiare come evolvono i fluidi cosmici nell'universo. Alcuni modelli di quintessenza assumono quindi degli accoppiamenti con la materia e la massa di questa varia dipendentemente dal campo. In particolare, nella *matter dominated era*, questi modelli hanno una densità di energia del campo scalare quasi costante: questo fatto è responsabile di una serie di differenze con i modelli di quintessenza senza accoppiamento [7].

# Capitolo 2

## Il modello di quintessenza con accoppiamento

Un'alternativa alla cosmologia standard fu proposta da Wetterich [4] nel 1988 (insieme a Ratra e Peebles [3]) in cui si propone una forma dinamica di energia oscura: l'espansione dell'universo era dovuta alla presenza di un campo scalare. I modelli di questo tipo prendono il nome di modelli di quintessenza e negli anni ne sono state proposte diverse versioni. Tra queste, ci sono i modelli con accoppiamento (introdotti per la prima volta da Wetterich nel 1995 [5]) in cui si considera un volume di universo molto grande dove le stelle, le galassie e gli ammassi sono considerati come oggetti puntiformi in modo da poter considerare l'intero universo come una miscela di fluidi continui.

Il modello di quintessenza in esame è quello proposto da Barros et al. in [19] e considera un campo scalare che interagisce con la materia attraverso una funzione di accoppiamento. Siccome tutti i modelli di quintessenza presenti in letteratura sono estremamente vicini al modello  $\Lambda$ CDM a livello di background a causa dei vincoli con i dati osservativi, il modello di quintessenza con accoppiamento in esame, per costruzione, viene adattato per mimare la funzione di Hubble di  $\Lambda$ CDM per buona parte della espansione cosmica.

### 2.1 Cosmologia di Background

Si considera la metrica di FLRW introdotta in sezione 1.1 in geometria piana e la si esprime nella forma

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

dove gli indici in alto rappresentano coordinate controvarianti mentre quelli in basso sono covarianti. L'Universo è composto da una miscela di quattro fluidi perfetti descritti dal seguente tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu}^{(i)} = (\rho_i + p_i) u_\mu^{(i)} u_\nu^{(j)} - p_i g_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

dove  $i = 1,2,3,4$  rappresenta le quattro specie di fluidi considerate,  $\rho_i$  è la densità di energia del fluido  $i$ -esimo,  $p_i$  la sua pressione e  $u_\mu^{(i)}$  il suo quadrivettore velocità.

I quattro fluidi considerati interagiscono diversamente tra di loro. In particolare, si assume che la materia barionica non sia interagente con l'energia oscura in modo da evitare l'utilizzo di meccanismi di schermatura della gravità e, allo stesso modo, si assume che anche la radiazione (gas di fotoni e neutrini relativistici) non sia interagente con l'energia oscura, a causa della simmetria conforme. Pertanto la radiazione e la materia barionica si conservano separatamente. Siccome anche il campo scalare è un fluido perfetto [13], si usa l'identità di Bianchi per esprimere la conservazione del tensore energia-impulso richiedendo l'annullamento della divergenza:

$$\nabla_\mu \sum_i^4 T^{(i)\mu}_\nu = 0, \quad (2.3)$$

$$T^\nu_\mu = \sum_i T^{(i)\mu}_\nu. \quad (2.4)$$

L'equazione 2.3 non esprime necessariamente la conservazione delle singole specie di fluido, solo la materia barionica e la radiazione sono conservate separatamente:

$$\nabla_\mu T^{(b)\mu}_\nu = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla_\mu T^{(r)\mu}_\nu = 0. \quad (2.6)$$

Per quanto riguarda la materia oscura ( $c$ ) e il campo scalare di energia oscura ( $\phi$ ) si inserisce una forma di interazione nella equazione di conservazione, utilizzando degli accoppiamenti  $C_\nu^{(i)}$ :

$$\nabla_\mu T^{(r)\mu}_\nu = C_\nu^{(c)}, \quad (2.7)$$

$$\nabla_\mu T^{(c)\mu}_\nu = C_\nu^{(\phi)}. \quad (2.8)$$

Risulta quindi chiaro che, per fare in modo che l'equazione di conservazione 2.3 sia soddisfatta, utilizzando le equazioni 2.5 e 2.6 si ha che  $C_\nu^{(c)} = -C_\nu^{(\phi)}$ . Si considerino gli accoppiamenti nella forma  $C_\nu^{(\phi)} = -\kappa\beta\rho_c\nabla_\nu\phi$  [7],[16], con  $\kappa^2 = 8\pi G$  dove  $\beta$  è l'intensità dell'accoppiamento e  $G$  è la costante di gravitazione universale.

Si può finalmente scrivere l'espressione della densità di lagrangiana per il campo scalare

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi), \quad (2.9)$$

dove  $V(\phi)$  è il potenziale del campo scalare. Dalla equazione della densità di lagrangiana, unita al tensore energia-impulso, si definiscono la densità e la pressione del campo  $\phi$

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.10)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.11)$$

Si è ora in grado di costruire le equazioni che descrivono l'evoluzione dei fluidi. Considerando la componente temporale ( $\nu = 0$ ) del tensore energia-impulso, dall'equazione di conservazione 2.7 si ottiene

$$\dot{\rho}_c + \dot{p}_c - \dot{p} = C_0^{(c)}.$$

Poichè la materia oscura è fredda, si impone la condizione  $p_c = 0$  e utilizzando la seconda equazione di Friedmann 1.4 ( $c=1$  nella trattazione) si ricava l'equazione di evoluzione della matetria barionica

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c = -k\beta\dot{\phi}\rho_c.$$

Similmente si ricavano le equazioni di evoluzione nella metrica di FLRW per tutti i fluidi cosmici e si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = \kappa\beta\rho_c, \\ \dot{\rho}_c + 3H\rho_c = -\kappa\beta\dot{\phi}\rho_c, \\ \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \\ \dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

dove  $V_{,\phi} := \partial V / \partial \phi$  e  $H := \dot{a}/a$  è la funzione di Hubble soggetta al vincolo di Friedmann

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_c + \rho_r + \rho_\phi + \rho_b). \quad (2.13)$$

Si noti che le relazioni di evoluzione appena ottenute potevano essere ricavate anche attraverso la minimizzazione del funzionale di azione [15]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L}_\phi + \sum_i \mathcal{L}_m^i(\chi_i, \phi) \right] \quad (2.14)$$

con  $g := \det(g_{\mu\nu})$ ,  $R$  lo scalare di Ricci e  $\mathcal{L}_m^i$  le densità materiali di lagrangiana dei campi  $\chi_i$ .

Per risolvere questo sistema di equazioni sono necessarie delle condizioni al contorno aggiuntive. Come precedentemente accennato, il comportamento della funzione di Hubble nel modello di Barros et al. è vincolato da quello del modello  $\Lambda$ CDM. Questo viene fatto per mantenere la consistenza delle osservazioni con il modello. Quindi possiamo vincolare la funzione di Hubble del modello di quintessenza 2.13 con quella del modello  $\Lambda$ CDM, imponendo

$$H^2 = H_{\Lambda CDM}^2, \quad (2.15)$$

con

$$H_{\Lambda CDM}^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_{cdm} + \rho_r + \rho_\Lambda + \rho_b). \quad (2.16)$$

Nella Eq.2.15 si impone il vincolo di Friedmann

$$\frac{\kappa^2}{3}(\rho_c + \rho_r + \rho_\phi + \rho_b) = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_{cdm} + \rho_r + \rho_\Lambda + \rho_b),$$

e si elidono i termini  $\rho_r$  e  $\rho_b$  ottenendo l'equazione

$$\rho_\phi - \rho_\Lambda = \rho_{cdm} - \rho_c. \quad (2.17)$$

Si effettua la derivata rispetto al tempo dell'equazione 2.15

$$\frac{d\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{\dot{a}_{\Lambda CDM}}{a_{\Lambda CDM}}\right)}{dt},$$

da cui

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\ddot{a}_{\Lambda CDM}}{a_{\Lambda CDM}}.$$

Utilizzando la seconda equazione di Friedmann 1.4 si ottiene la relazione

$$\rho + 3p = \rho_{\Lambda CDM} + 3p_{\Lambda CDM}.$$

Ricordando che  $p_c = p_{cdm} = 0$  e che  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ , sviluppando i termini di densità e di pressione e inserendo l'equazione 2.17 si ottiene:

$$p_\phi = p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (2.18)$$

Richiamando le espressioni della densità 2.10 e della pressione 2.11 del campo scalare  $\phi$ , si può esprimere  $\dot{\phi}^2$  come somma di densità  $\rho_\phi$  e pressione  $p_\phi$ . Confrontando quindi le due equazioni ottenute 2.17 e 2.18 si ricava una condizione per il campo scalare

$$\dot{\phi}^2 = \rho_{cdm} - \rho_c \quad (2.19)$$

e si possono derivare rispetto al tempo entrambi i membri dell'equazione 2.19 per ottenere la seguente espressione:

$$2\ddot{\phi}\dot{\phi} = \dot{\rho}_{cdm} - \dot{\rho}_c. \quad (2.20)$$

Ora è possibile sostituire l'equazione di conservazione della materia oscura fredda di 2.12 all'interno di 2.20 per ottenere l'espressione del campo scalare

$$2\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - k\beta\rho_c = 0, \quad (2.21)$$

che può essere comodamente riespressa in termini del parametro di abbondanza delle specie  $i$ -esime  $\Omega_i = \rho_i \kappa^2 / 3H^2$  e in termini del parametro  $N := \ln a$  (ossia il numero di *e-folds*) come

$$2\phi'' + \phi'(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + \kappa\beta\phi') - \frac{3}{\kappa}\beta\Omega_{\text{cdm}} = 0. \quad (2.22)$$

Questa è l'equazione del campo scalare di background che verrà utilizzata per calcolare le deviazioni del modello di quintessenza rispetto al modello standard a livello perturbativo [19].

Si procede ora con la risoluzione delle equazioni del sistema 2.12. Per separazione di variabili si risolvono facilmente le equazioni di evoluzione della radiazione e della materia barionica in 2.12, ottenendo

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0)a^{-4}(t), \quad (2.23)$$

$$\rho_b(t) = \rho_b(t_0)a^{-3}(t), \quad (2.24)$$

analogamente a quanto accade per il modello  $\Lambda$ CDM. Per l'equazione di evoluzione della materia oscura in 2.12 si procede per separazione di variabili integrando

$$\int_{\rho_c t_0}^{\rho_c(t)} \frac{d\rho_c}{\rho_c} = \int_{t_0}^t (-\kappa\beta\dot{\phi} - 3H)dt,$$

da cui si ottiene, ponendo  $\Delta_\phi = \phi(t) - \phi(t_0)$ , la soluzione

$$\rho_c(t) = \rho_c(t_0)e^{-\kappa\beta\Delta_\phi + 3N}. \quad (2.25)$$

Risulta quindi chiaro che quando  $\beta\dot{\phi} > 0$  è possibile interpretare l'accoppiamento come un trasferimento di energia dalla materia oscura al campo scalare, mentre per  $\beta\dot{\phi} < 0$  vale il trasferimento di energia opposto.

## 2.2 Introduzione delle perturbazioni lineari

La formazione e la evoluzione delle strutture avviene in maniera gerarchica poichè è governata dalla gravità e dalla materia oscura fredda. La presenza di perturbazioni di densità e la loro crescita è necessaria per fare in modo che il collasso gravitazionale possa avvenire. La loro esistenza è dimostrata dalle fluttuazioni in temperatura della CMB che sono dell'ordine di  $\delta T/T \sim 10^{-5}$  a  $z \sim 1100$ . La giustificazione di questo fatto è dovuta al principio di indeterminazione, infatti la meccanica quantistica consente fluttuazioni di materia nei limiti della relazione  $\Delta m \Delta t \geq \hbar/2$ . Si considerano quindi delle perturbazioni scalari della metrica di FLRW nel gauge Newtoniano:

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a(t)^2(1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (2.26)$$

dove  $\Psi$  e  $\Phi$  sono i potenziali standard di Bardeen. Si procede con la perturbazione nel regime lineare ( $\delta\rho/\rho \ll 1$ ) per le quattro specie di fluidi considerate

$$\phi_i(\vec{x}, t) = \bar{\phi}_i(\vec{x}, t) + \delta\phi_i(\vec{x}, t), \quad (2.27)$$

$$\rho_i(\vec{x}, t) = \bar{\rho}_i(\vec{x}, t) + \delta\rho_i(\vec{x}, t), \quad (2.28)$$

$$p_i(\vec{x}, t) = \bar{p}_i(\vec{x}, t) + \delta p_i(\vec{x}, t), \quad (2.29)$$

e si definisce il contrasto di densità  $\delta_i = \delta\rho_i/\rho_i$ . Perturbando la metrica e considerando le equazioni di Einstein 1.2 nella versione perturbata, si ottiene l'equazione del moto per il contrasto di densità di materia oscura

$$\ddot{\delta}_c - 3\ddot{\Phi} + \kappa\beta\delta\ddot{\phi} + a^{-2}(\kappa\beta\nabla^2\delta\phi - \nabla^2\Psi) + (\dot{\delta}_c - 3\dot{\Phi} + \kappa\beta\delta\dot{\phi})(2H - \kappa\beta\dot{\phi}) = 0. \quad (2.30)$$

Ci si mette ora nello spazio di Fourier e si effettua la sostituzione  $\nabla^2 \rightarrow k^2$ , con  $k$  numero d'onda, analizzando il limite newtoniano  $(k/a)^2 \ll H^2$ . Sotto queste ipotesi, l'equazione 2.30 diventa

$$\ddot{\delta}_c + \dot{\delta}_c(2H - \kappa\beta\dot{\phi}) - \frac{k^2}{2}\rho_c\delta_c(2\beta^2) - \frac{k^2}{2}\rho_b\delta_b = 0. \quad (2.31)$$

Riesprimendo l'equazione in termini della variabile  $N$  si ottiene che

$$\delta_c'' + \delta_c' \left( 2 + \frac{H'}{H} \right) - \frac{3}{2}\delta_c \left( \Omega_{cdm} - \frac{\kappa^2}{3}\phi'^2 \right) (1 + 2\beta^2) - \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b = 0 \quad (2.32)$$

e che i barioni, invece, evolvono secondo l'equazione

$$\delta_b'' + \delta_b' \left( 2 + \frac{H'}{H} \right) - \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b - \frac{3}{2} \left( \Omega_{cdm} - \frac{\kappa^2}{3}\phi'^2 \right) \delta_c = 0. \quad (2.33)$$

Si noti che le perturbazioni di energia oscura 2.30 del modello  $\Lambda$ CDM sono riprodotte fissando  $\beta = 0$  e  $\phi' = 0$ , quindi il modello di quintessenza con accoppiamento si distingue dal modello standard per i termini di interazione con il campo scalare nonostante il vincolo sul background cosmologico lascerebbe intendere una completa analogia con  $\Lambda$ CDM. Per descrivere l'evoluzione delle perturbazioni di materia è utile introdurre la funzione di crescita  $g(t)$  definita come

$$\delta(\vec{x}, t) = g(t)\delta(\vec{x}, 0) \rightarrow g \equiv \frac{\delta}{\delta_0}, \quad (2.34)$$

e il tasso di crescita

$$f \equiv \frac{d \ln \delta}{d \ln a} = \frac{d \delta}{d N} \frac{1}{\delta} \equiv \frac{\delta'}{\delta}. \quad (2.35)$$

I dati osservativi sulla crescita delle strutture cosmiche si utilizzano come vincolo sui parametri

$$f\sigma_8(N) = f\sigma_8(0) = \sigma_8(0) \frac{\delta'}{\delta}, \quad (2.36)$$

dove  $\sigma_8$  rappresenta l'ampiezza presente dello spettro di potenza di materia alla scala di  $8h^{-1}Mpc$ . Si definisce infine il contrasto di densità totale nel seguente modo.

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho_b + \delta\rho_c}{\bar{\rho}_b + \bar{\rho}_c}, \quad (2.37)$$

in cui compaiono solo i termini di materia barionica e materia oscura in quanto entrambe formano strutture cosmiche.

## 2.3 Correzioni alla funzione di Hubble

Come anticipato precedentemente, il modello  $\Lambda$ CDM presenta alcune discrepanze tra i valori della costante di Hubble  $H_0$  dedotti dalle osservazioni a basso redshift delle supernovae di tipo  $I_a$  e quelli teorici previsti dal modello. Per ottenere un modello più consistente con i dati è quindi possibile applicare una correzione al vincolo sul background cosmologico del modello di quintessenza con accoppiamento. Questa correzione è di carattere puramente fenomenologico, cioè che serve unicamente a riprodurre quanto osservato dai dati. Si costruisce una funzione di correzione nella forma  $(1 + \alpha)$ , dove  $\alpha$  è il termine correttivo di cui si stimerà il valore attraverso un fit con dati osservativi, e si osserva che il vincolo 2.15 diventa

$$H^2 = H_{\Lambda CDM}^2(1 + \alpha)^2. \quad (2.38)$$

Finora il modello è stato sviluppato sotto l'ipotesi che la somma dei parametri di densità delle varie componenti fosse uguale a 1, equivalente alla richiesta che l'universo fosse piatto. L'introduzione della correzione va però a modificare i singoli valori dei parametri di densità

$$\Omega_i = \frac{8\pi G\rho_i}{3H^2} \rightarrow \Omega_i = \frac{8\pi G\rho_i}{3H^2(1 + \alpha)^2} \quad (2.39)$$

e questo rende l'universo non più piatto ( $\sum_i \Omega_i \neq 1$ ). È necessario quindi riefettuare i calcoli delle equazioni presentate in Sez.2.1 e verificare come e se ottenere un'espressione consistente con l'Eq.2.21 per il campo scalare (per il procedimento in dettaglio si rimanda all'Appendice A). Si propongono due possibili candidati per la correzione  $\alpha$ . Una possibile correzione è quella con un termine esponenziale e l'Eq.2.38 diventa

$$H^2 = H_{\Lambda CDM}^2(1 + Ke^{-Az})^2 \quad \text{con } K, A \in \mathbb{R}, \quad (2.40)$$

mentre l'altra correzione considerata è quella con una legge a potenza

$$H^2 = H_{\Lambda CDM}^2(1 + Ma^N)^2 \quad \text{con } M, N \in \mathbb{R}. \quad (2.41)$$

Il fit con i dati osservativi di Riess et al. (2019) [20], BOSS DR12, DR14 QUASARS e DR14 Ly- $\alpha$  ha prodotto i risultati mostrati nella seguente tabella

Correzioni alla funzione di Hubble			
$\alpha = Ma^N$		$\alpha = Ke^{-Az}$	
M	$(0.11 \pm 0.02)$	K	$(0.11 \pm 0.01)$
N	$(3.63 \pm 1.92)$	A	$(2.93 \pm 1.67)$
$\chi^2$	3.18	$\chi^2$	3.36
Ndof	4	Ndof	4

che stima i parametri di fit dell'espressione di correzione  $(1+\alpha)$ . La rappresentazione grafica delle funzioni di fit è stata riportata in figura 2.1.

### Correzioni della funzione di Hubble

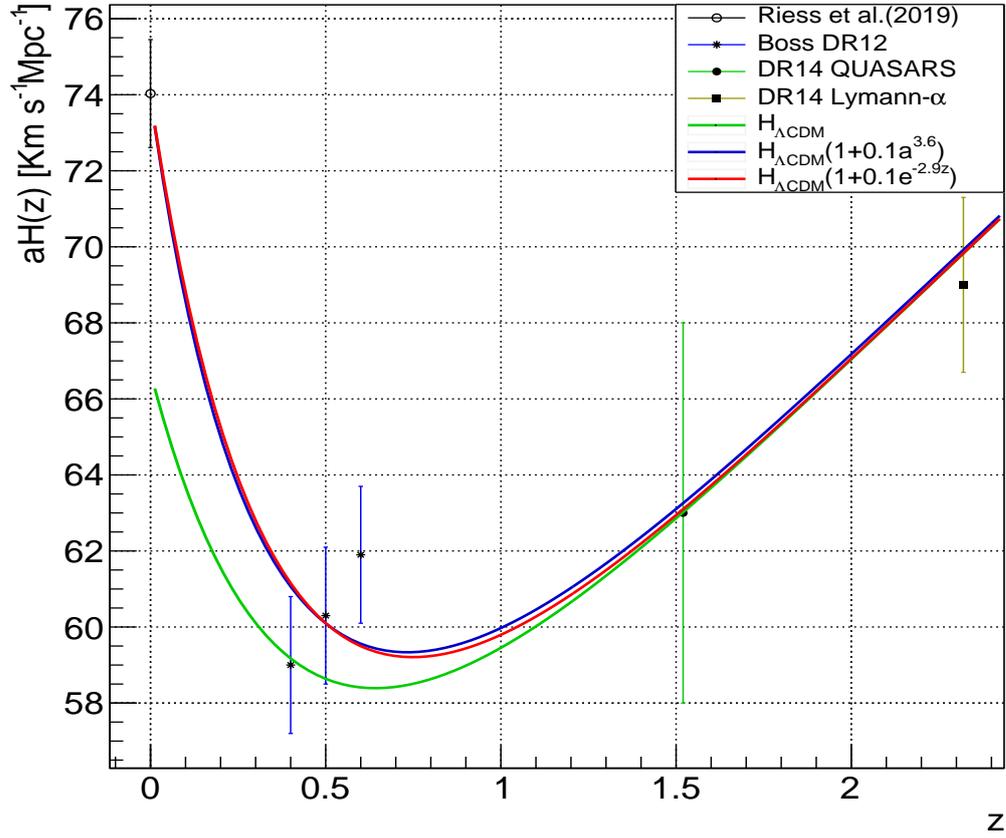


Figura 2.1: Grafico rappresentante la funzione di Hubble moltiplicata per il parametro  $a=1/(z+1)$  in funzione del redshift. Le funzioni in blu e in rosso rappresentano i fit con la legge potenza e la legge esponenziale, i cui parametri sono stati stimati dal confronto con i dati di Riess et al. (2019), BOSS DR12, DR14 QUASARS e DR14 Ly- $\alpha$ .

Come atteso, le correzioni applicano una deviazione minore del 10% rispetto ai valori di  $H_{\Lambda CDM}$ , agiscono solo nell'universo locale (bassi valori di redshift) e tendono quindi quasi ad annullarsi già per  $z \sim 1.5$ , facendo praticamente coincidere le funzioni di Hubble corrette con quella del modello  $\Lambda CDM$ .

Dall'equazione 2.41 si ricava quindi una nuova espressione del campo scalare

$$2\ddot{\phi}\dot{\phi} = \alpha \left[ \dot{\rho}_{\Lambda CDM} \left( 1 - \frac{2N(\alpha + 1)}{3} \right) + \dot{p}_{\Lambda CDM} \right] + \dot{\rho}_{cdm} - \dot{\rho}_c \quad (2.42)$$

$$+ \alpha N H_{\Lambda CDM} \left( p + \rho + \frac{N}{3} \rho \right),$$

che descrive l'evoluzione del campo di energia oscura per il modello con correzione a potenza. Questa equazione sembra differire dall'equazione 2.21: ciò significa che la correzione applicata "a mano" al vincolo di background del modello risulta inconsistente con le equazioni del modello di Barros et al.. L'integrazione numerica di questa equazione non è stata svolta nel presente elaborato.

## 2.4 Accoppiamento variabile

Finora è stato descritto il modello di Barros et al. [19] supponendo che l'accoppiamento  $\beta$  fosse costante durante l'evoluzione, cioè che  $\beta(z) = \beta_0$ . Bisogna però evidenziare il fatto che il modello  $\Lambda CDM$ , che si ritrova quando  $\beta = 0$ , è compatibile con i dati provenienti dallo studio della CMB (alto redshift) [22]. Ciò significa che un possibile accoppiamento del modello di quintessenza deve poter essere trascurabile ad alto redshift e deve aumentare a basso  $z$ , in modo da risultare consistente con i dati. Per questa ragione si propone un'estensione al modello presentato finora, introducendo un nuovo accoppiamento nella forma

$$\beta = \beta_0 \cdot a^{\beta_1}$$

dove  $a$  è il fattore di scala e  $\beta_0, \beta_1$  sono costanti reali.

Si noti che l'utilizzo di un accoppiamento variabile nel tempo non influenza in alcun modo l'espressione dell'equazione di Klein-Gordon 2.21, che risulta quindi del tutto generale.

## Capitolo 3

# Analisi numerica e presentazione dei risultati

Si procede con la risoluzione numerica dell'equazione del campo scalare 2.22 e delle equazioni che descrivono l'evoluzione delle perturbazioni lineari della materia 2.32, 2.33. A questo scopo, è stato preso un codice già funzionante che risolveva le equazioni di background e delle perturbazioni lineari del modello di Barros et al. ed è stato modificato nelle parti inerenti alle estensioni introdotte nelle sezioni 2.3 e 2.4. Si è utilizzato il codice in C riportato in Appendice B che utilizza la libreria scientifica *GSL (Gnu Scientific Library)* per risolvere il seguente problema di Cauchy dato da un sistema di sei equazioni differenziali al primo ordine

$$\begin{cases} \phi' = x \\ x' = \frac{3\beta}{2\kappa}\Omega_{cdm} - \frac{x}{2}(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + \kappa\beta x) \\ \delta'_b = \theta_b \\ \theta'_b = -\theta_b \left(2 + \frac{H'}{H}\right) + \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b + \frac{3}{2}\left(\Omega_{cdm} - \frac{\kappa^2}{3}x^2\right)\delta_c \\ \delta'_c = \theta_c \\ \theta'_c = -\theta_c \left(2 + \frac{H'}{H}\right) + \frac{3}{2}\delta_c \left(\Omega_{cdm} + \frac{\kappa^2}{3}x^2\right)(1 + 2\beta^2) + \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b, \end{cases} \quad (3.1)$$

dove i valori per le condizioni iniziali sono fissati all'inizio della simulazione. Si costruisce un oggetto del tipo `gsl_odeiv_system` [24] che definisce un generico sistema di equazioni differenziali ordinarie e si utilizza `gsl_odeiv_step_alloc()` per ritornare un puntatore ad una nuova istanza allocata della funzione di step. Questa funzione implementa un metodo numerico del tipo Runge-Kutta al quarto ordine che localizza i valori ad un dato istante  $N$ , mentre l'evoluzione temporale del sistema è realizzata da `gsl_odeiv_evolve_alloc()`, che evolve il sistema dall'istante  $N$  all'istante immediatamente successivo  $N + h$ . La funzione `gsl_odeiv_control_y_new()` crea un oggetto che

tiene sotto controllo gli errori risultanti dalla risoluzione numerica delle equazioni, in modo da non superare un valore prefissato (nel codice è stato scelto  $10^{-15}$ ). La funzione di controllo agisce in maniera adattiva, cioè determinando automaticamente la lunghezza degli step ottimali in relazione all'errore che è stato scelto. Queste funzioni vengono utilizzate in un ciclo che parte da  $N = -16$  e che, alla fine di ogni iterazione, restituisce i valori dei parametri di interesse e infine libera la memoria allocata.

### 3.1 Evoluzione delle quantità di background al variare di $\beta$

Il parametro  $\beta$  è una costante che quantifica l'intensità dell'interazione tra campo scalare di energia oscura e la materia, come si osserva anche nelle equazioni 2.12. Dal momento che le equazioni in esame mantengono la simmetria per  $\beta \rightarrow -\beta$ , si scelgono valori  $\beta > 0$ , ossia si analizza il caso in cui il trasferimento di energia tra la materia oscura e il campo scalare  $\phi$  ha segno unicamente determinato da  $\dot{\phi}$ . Si studiano quindi gli andamenti di alcune quantità di background per il modello di Barros e per il modello con la correzione a potenza, assegnando a  $\beta$  tre valori rappresentativi:  $\beta = 0.03$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$ .

#### 3.1.1 Andamento dei parametri di densità

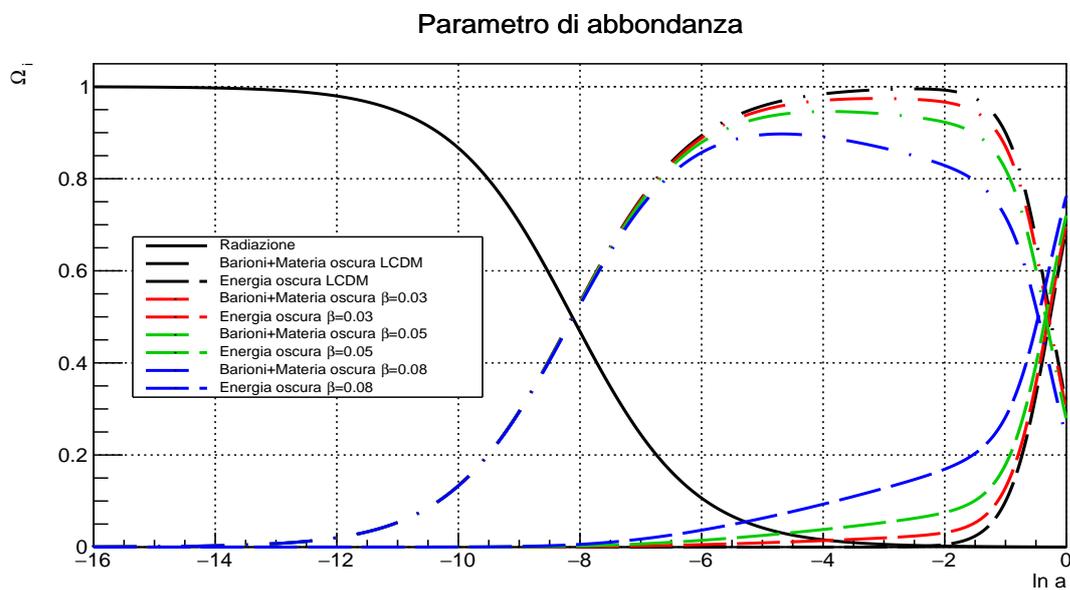


Figura 3.1: *Evoluzione dei parametri di densità  $\Omega_i$  di radiazione (linea continua), materia (linea tratto-punto) ed energia oscura (linea tratteggiata). In nero sono rappresentati i valori per il modello  $\Lambda$ CDM corrispondenti a  $\beta=0$ , in rosso i valori del modello con accoppiamento per  $\beta = 0.03$ , in verde per  $\beta = 0.05$  e in blu per  $\beta = 0.08$ .*

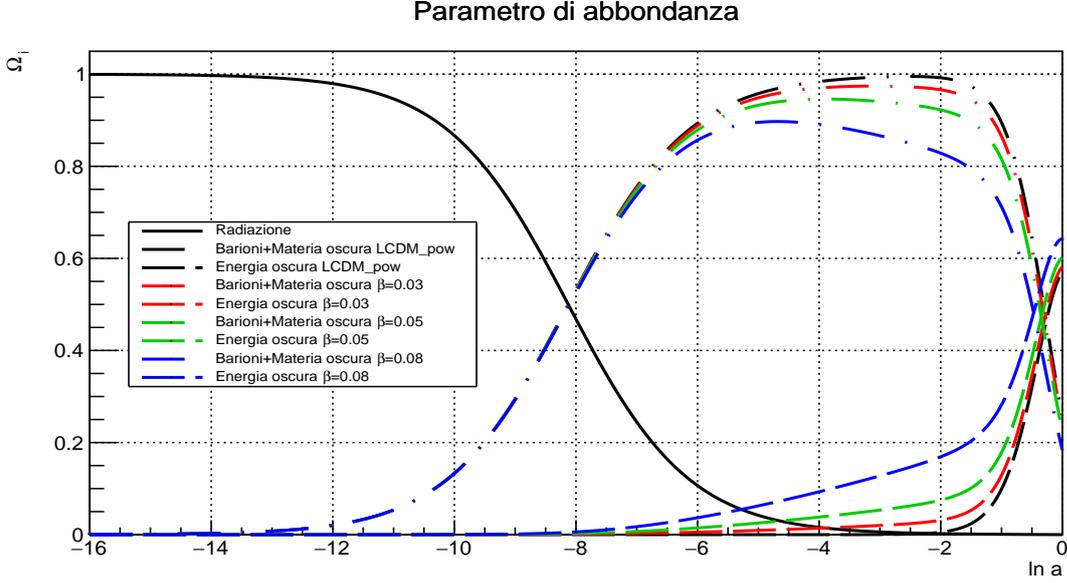


Figura 3.2: *Evoluzione dei parametri di densità  $\Omega_i$  di radiazione (linea continua), materia (linea tratto-punto) ed energia oscura (linea tratteggiata) nel modello con correzione a potenza. In nero sono rappresentati i valori per il modello  $\Lambda$ CDM\_POW corrispondenti a  $\beta=0$ , in rosso i valori del modello con accoppiamento per  $\beta = 0.03$ , in verde per  $\beta = 0.05$  e in blu per  $\beta = 0.08$ .*

In Figura 3.1 si mostrano gli andamenti nel modello di Barros et al. [19] dei parametri di densità per le specie considerate (radiazione, materia oscura + materia barionica, energia oscura) al variare del logaritmo del fattore scala  $a$  e per diversi valori del *coupling*  $\beta$ . I valori di abbondanza iniziali sono  $\Omega_{cdm}^0 = 0.2589$ ,  $\Omega_b^0 = 0.0486$ ,  $\Omega_r^0 \cdot h^2 = 4.1 \cdot 10^{-5}$  e  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{cdm} - \Omega_b - \Omega_r$  in accordo con [17]. Come si nota dal grafico, l'aumento dell'intensità di accoppiamento corrisponde ad una diminuzione del parametro di densità  $\Omega_{c+b}$  apprezzabile a partire da  $z \sim 1100$  (*matter dominated era*), con il conseguente aumento di  $\Omega_\phi$ . Il parametro di densità della radiazione rimane invece invariato in quanto non è affetto da interazioni con il campo di energia oscura.

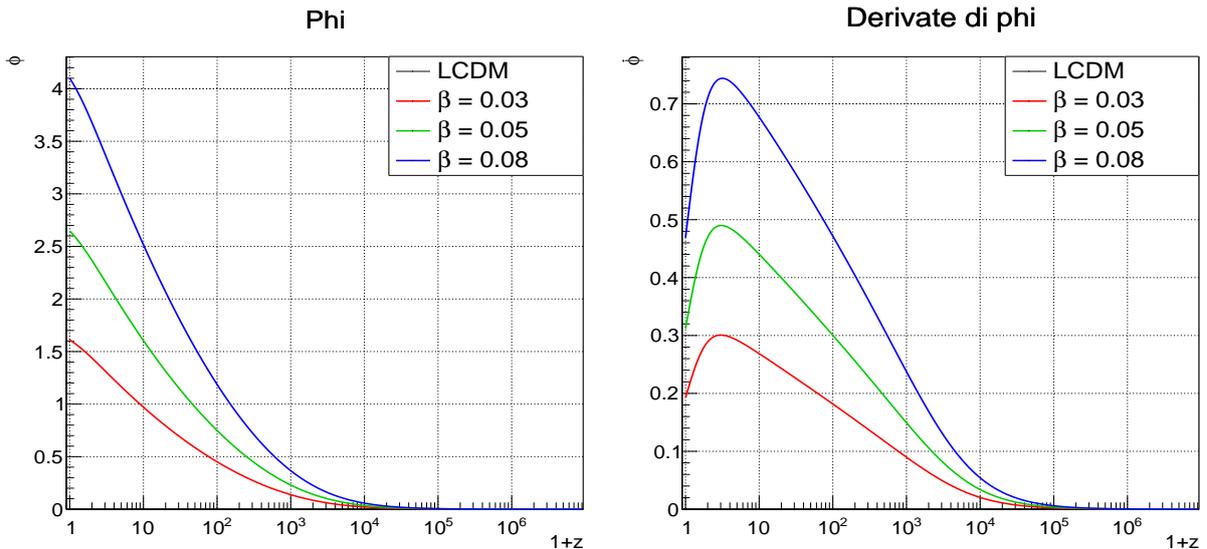
Come ci si aspettava, nel modello con la correzione a potenza gli andamenti in Figura 3.2 sono molto simili a quelli del modello senza correzione ma ci sono alcune differenze apprezzabili nell'universo locale. Infatti, per valori di redshift attorno a  $z=1$ , l'effetto della correzione nella funzione di Hubble diminuisce i valori di  $\Omega_{c+b}$  e di  $\Omega_\phi$  rispetto a quanto osservato in 3.1: si assiste quindi ad una rottura della simmetria rispetto all'asse  $\Omega_i = 0.5$  che corrispondeva alla richiesta di un universo piatto ( $\sum \Omega_i = 1$ ).

Questa inconsistenza deriva dal fatto che si è utilizzata una  $H(z)$  modificata con la correzione 2.38 all'interno dell'equazione di Klein-Gordon del modello di Barros et al. invece di utilizzare l'equazione ottenuta in Sez.2.3.

### 3.1.2 Evoluzione del campo scalare $\phi$ , del potenziale e delle masse

In Figura 3.4 sono rappresentate alcune quantità ricavate dalla risoluzione dell'equazione di campo 2.21. I quattro grafici ottenuti rispecchiano quelli mostrati in Figura 2 di [21] e risultano consistenti con essi. Nel riquadro in alto a sinistra è mostrata l'evoluzione di  $\phi$  in funzione del redshift per tre valori di  $\beta$  rappresentativi. Si osserva come il campo si comporti in maniera statica per redshift alti e, verso valori di  $z$  più piccoli, aumenti di intensità proporzionalmente al valore del *coupling*. Questo comportamento è ancora più evidente osservando il grafico di  $\dot{\phi}$  in alto a destra, dove la derivata del campo è nulla a redshift alti e aumenta progressivamente diminuendo il redshift. Questi risultati sono coerenti con quanto ottenuto in [19] e [21]. Si noti la presenza di un massimo attorno a  $z \sim 3$ : ciò indica la transizione tra la *matter dominated era* e la *dark energy dominated era*, l'attuale era in cui si trova il nostro universo.

Nel riquadro in basso a sinistra sono invece rappresentati gli andamenti della massa della materia oscura per diversi valori di  $\beta$ . Si nota che per il modello  $\Lambda$ CDM, il rapporto di massa delle particelle è costante a 1 e che l'introduzione del *coupling* va a cambiarne il valore. È inoltre evidente la progressiva diminuzione del valore del rapporto delle masse, che varia da 0.73 a 1 per  $\beta = 0.08$ , con l'aumentare del redshift. Infine, in basso a destra è rappresentato l'andamento del potenziale in funzione del campo di energia oscura. Si nota che il potenziale ha un andamento che ricorda quello di una funzione esponenziale dipendente da  $\phi$  e, in particolare, esso viene ben approssimato durante l'era dominata dalla materia da una funzione proporzionale a  $\exp\left[\frac{-\phi}{3\beta}\right]$  [21].



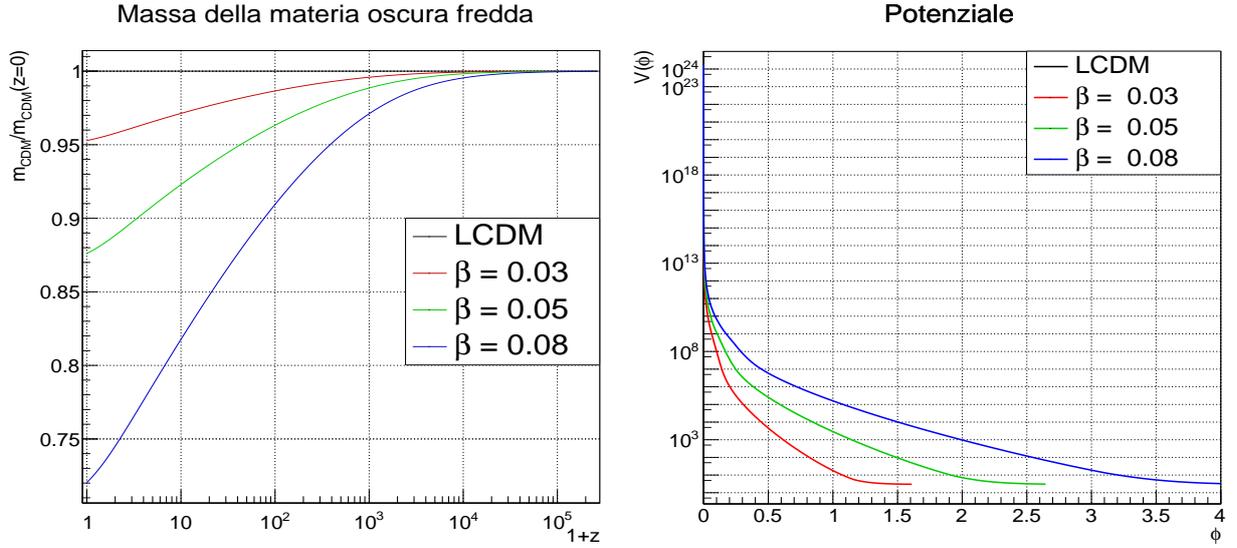


Figura 3.4: Grafici di alcune quantità di background del modello di Barros et al. per diversi valori di  $\beta$ . In alto a sinistra è rappresentato il campo scalare  $\phi$  in funzione del redshift, in alto a destra è rappresentata la derivata rispetto al tempo del campo scalare in funzione del redshift. In basso a sinistra è rappresentato l'andamento della massa delle particelle di materia oscura in funzione del redshift, in basso a destra è descritto l'andamento del potenziale in funzione del campo scalare  $\phi$ .

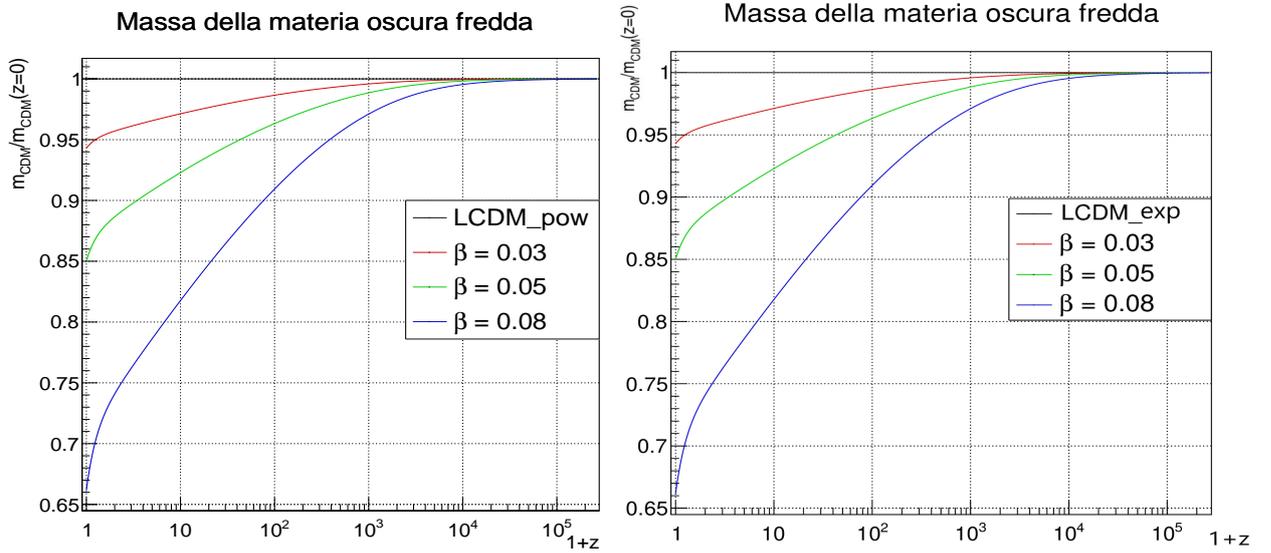


Figura 3.5: Andamento della massa delle particelle di materia oscura in funzione del redshift nel modello con la correzione a potenza (sulla sinistra) e con la correzione esponenziale (sulla destra).

Per quanto riguarda lo studio delle quantità di background nel modello con le correzioni, come atteso, i grafici del campo scalare  $\phi$ , della sua derivata e del potenziale sono sostanzialmente identici a quelli presentati in figura 3.4 in quanto le differenze dovute alla correzione del parametro di Hubble non sono apprezzabili. Si osservano invece delle differenze nel grafico delle masse in Fig.3.5 per valori di redshift vicini allo zero, cioè dove la correzione è più grande. In particolare l'effetto della correzione consiste nell'aumentare il valore iniziale delle masse nei modelli con  $\beta \neq 0$  proporzionalmente all'intensità dell'accoppiamento: prendendo come riferimento  $\beta = 0.08$ , all'aumentare del redshift si assiste ad una diminuzione del  $\sim 35\%$  della massa che è maggiore rispetto al  $\sim 30\%$  del modello senza correzione (consistentemente con quanto osservato in Figura 3.2 nell'universo locale).

## 3.2 Analisi delle perturbazioni

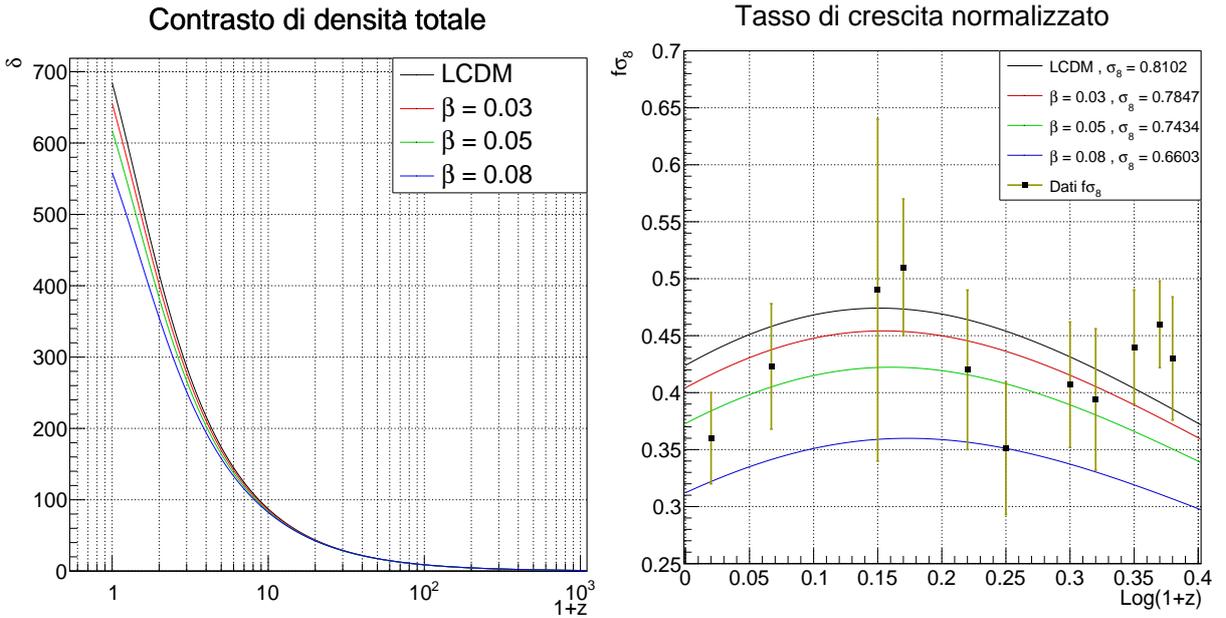


Figura 3.6: Grafici rappresentanti i parametri principali per lo studio delle perturbazioni nel modello di quintessenza accoppiato. A sinistra è rappresentata l'evoluzione del contrasto di densità totale  $\delta$  in funzione del redshift, in scala semilogaritmica sulle  $x$ , al variare del parametro  $\beta$ . I valori sono normalizzati al redshift della CMB ( $z \sim 1100$ ). A destra è mostrato l'andamento del tasso di crescita delle perturbazioni lineari in funzione del redshift, assieme ai dati di [18] in Tabella 2 con le relative barre di errore. Per ogni valore di  $\beta$  è stato utilizzato un opportuno valore di  $\sigma_8$  [21], come scritto in legenda.

Le perturbazioni sono le principali responsabili del collasso gravitazionale e quindi della formazione delle strutture cosmiche. La crescita delle perturbazioni regola dunque la rapidità dell'accrescimento di queste strutture e quindi la distribuzione della materia. Lo studio delle fluttuazioni di densità, assieme a quello dell'espansione cosmica, è lo strumento chiave per testare i modelli cosmologici in quanto ha un riscontro diretto con le osservazioni dell'universo a grande scala.

L'analisi delle perturbazioni lineari nel modello di Barros et.al è stata svolta risolvendo numericamente le equazioni 2.32 e 2.33, fissate le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{cases} \delta'_b = 3 \cdot 10^{-6}, \\ \delta'_c = 10^{-4}, \\ \theta'_b = 0, \\ \theta'_c = 0. \end{cases}$$

In Figura 3.6 a sinistra si trovano rappresentati i valori delle fluttuazioni di densità totali di materia  $\delta$  in funzione del redshift, normalizzati al redshift della CMB (cioè che tutte le curve valgono 1 per  $z=1100$ ). Come si può osservare, all'aumentare di  $\beta$  corrisponde una diminuzione del contrasto di densità per redshift bassi e questo risultato è consistente con quanto osservato nel grafico delle masse in Fig.3.4. Infatti, la diminuzione della crescita delle perturbazioni è collegata alla diminuzione della massa delle particelle di materia oscura fredda nel tempo.

A destra si osserva invece l'evoluzione del tasso di crescita delle perturbazioni  $f\sigma_8(0)$  in funzione di  $z$  e sono stati rappresentati anche i dati provenienti da diverse missioni che sono riportate in [18]. Anche qui, si nota che all'aumentare dell'intensità dell'accoppiamento si ottengono valori minori di  $f\sigma_8$  e quindi un rallentamento dell'evoluzione delle fluttuazioni di materia oscura. Ciò si traduce in un accrescimento delle strutture cosmiche più lento rispetto a quanto predetto dal modello  $\Lambda$ CDM, pertanto sembra possibile distinguere a livello perturbativo il modello di quintessenza con accoppiamento dal modello standard [19]. Questo fatto era già deducibile osservando il termine  $(\Omega_{cdm} - \frac{\kappa^2}{3}\phi'^2)$  che moltiplica le perturbazioni  $\delta_c$  nelle equazioni 2.32 e 2.33, in cui risulta evidente che se  $\phi' = 0$  (ossia per  $\Lambda$ CDM) allora il termine delle fluttuazioni di materia oscura risulta meno soppresso.

### 3.3 Background con accoppiamento dipendente dal tempo

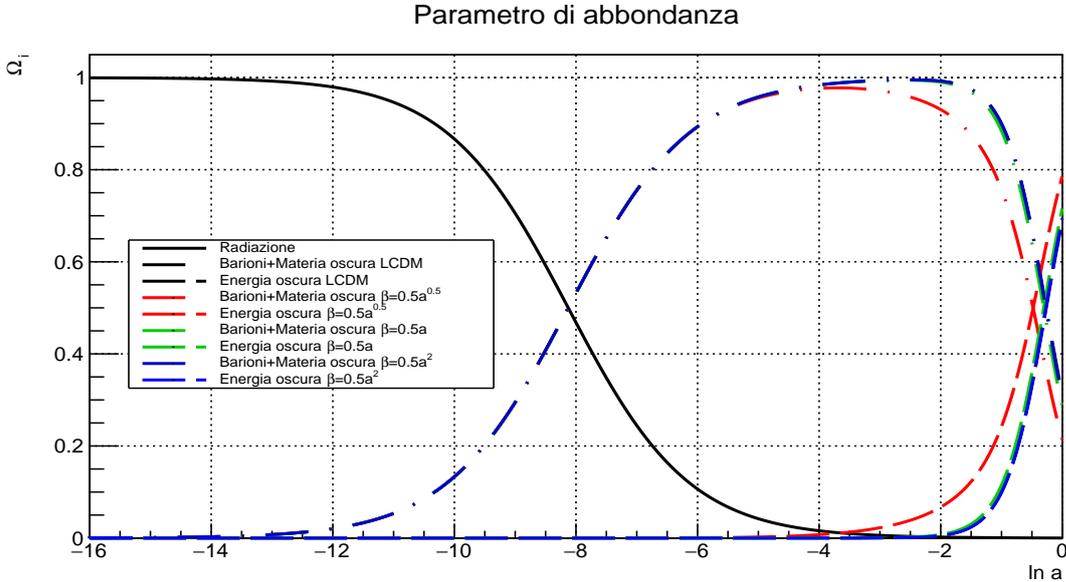
L'accoppiamento  $\beta$  costante nel tempo non è il solo possibile. In Sez.2.4 è stato proposto infatti un accoppiamento dipendente dal tempo nella forma  $\beta = \beta_0 \cdot a^{\beta_1}$ , giustificato dal fatto che in [22] si sono introdotti alcuni vincoli sulla forma del *coupling* quali la richiesta

di annullamento di quest'ultimo a redshift alti. Si ripropone l'analisi effettuata in Sez.3.1 per il nuovo accoppiamento, scegliendo alcuni valori rappresentativi per  $\beta_0$  e, fissato  $\beta_0$ , facendo variare  $\beta_1$  secondo il set di valori seguente:

$$\begin{cases} \beta_0 = 0.5 & \rightarrow \beta_1 = 0.5, \quad \beta_1 = 1.0, \quad \beta_1 = 2.0, \\ \beta_0 = 0.75 & \rightarrow \beta_1 = 0.5, \quad \beta_1 = 1.0, \quad \beta_1 = 2.0, \\ \beta_0 = 1 & \rightarrow \beta_1 = 0.5, \quad \beta_1 = 1.0, \quad \beta_1 = 2.0. \end{cases}$$

### 3.3.1 Evoluzione dei parametri di densità

In Figura 3.7 sono rappresentati gli andamenti dei parametri di densità  $\Omega_i$  in funzione del redshift per  $\beta_0$  e  $\beta_1$  variabili. Sono evidenti alcune differenze con i grafici della Sezione 2.4, in particolare si notano gli effetti del coupling variabile che iniziano ad essere apprezzabili solo da  $N=-4$  per l'accoppiamento con  $\beta_0 = 0.5$  e da  $N=-6$  per  $\beta_0 = 1$ . Il momento in cui l'accoppiamento entra in gioco è quindi ritardato dal fattore di scala  $a$ , che risulta piccolo per buona parte dell'evoluzione a causa della sua proporzionalità inversa con il redshift  $z$ . I valori  $\beta_1=1$  e  $\beta_1=2$  applicano una deviazione piuttosto piccola da  $\Lambda$ CDM, apprezzabile solo a redshift piuttosto bassi ( $N=-2$ ). Questo è dovuto al fatto che il termine  $a^{\beta_1}$  smorza l'accoppiamento per  $\beta_1 \geq 1$ . Invece, gli accoppiamenti con  $\beta_1 = 0.5$  si differenziano notevolmente dal modello con accoppiamento costante per quanto riguarda la forma delle curve (in rosso), che risultano più simmetriche e più lontane da  $\Lambda$ CDM per via della maggior intensità dell'accoppiamento per redshift piccoli.



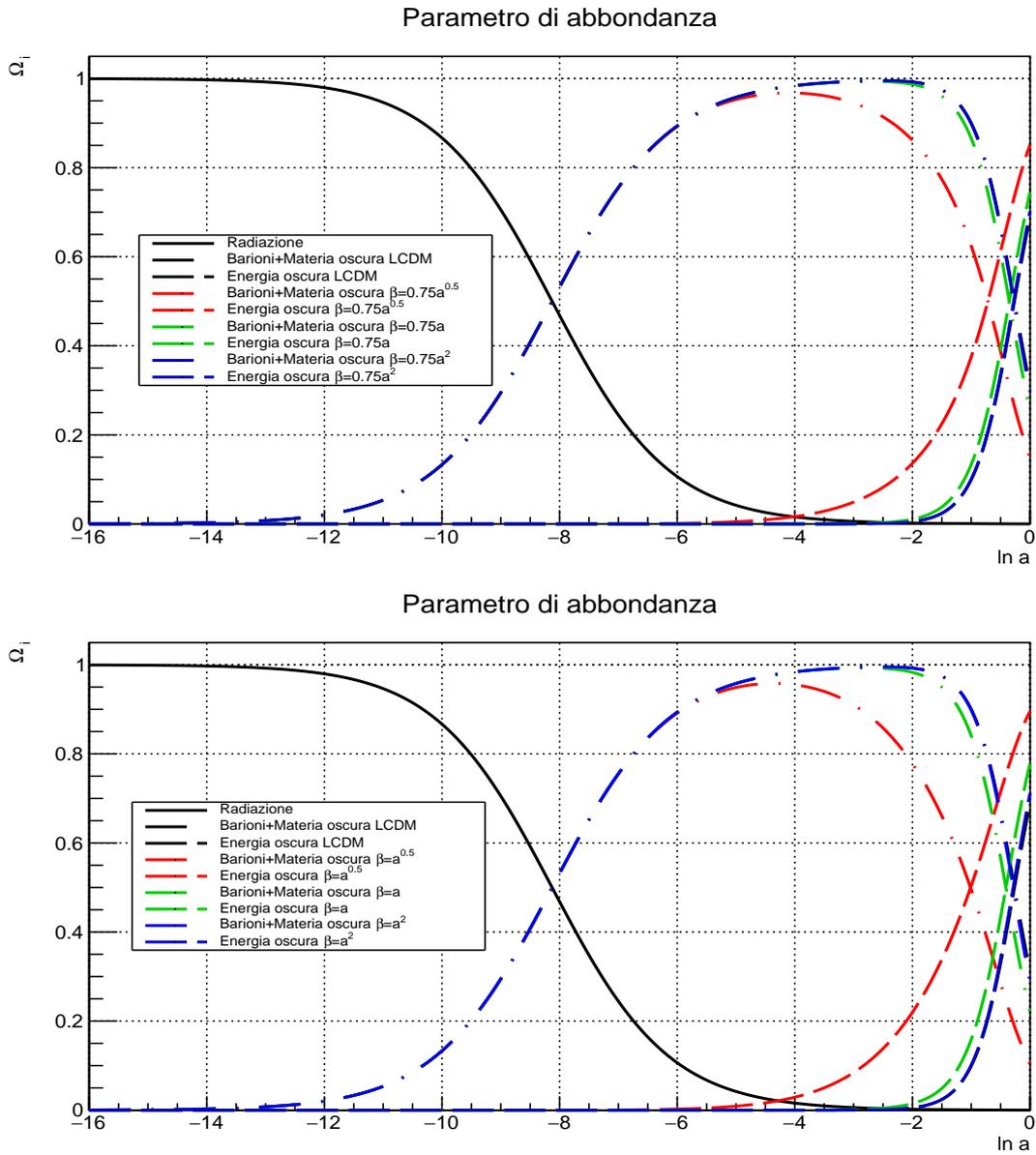
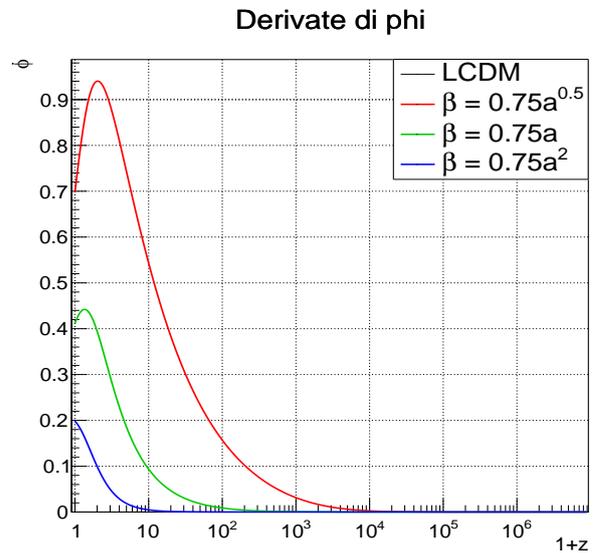
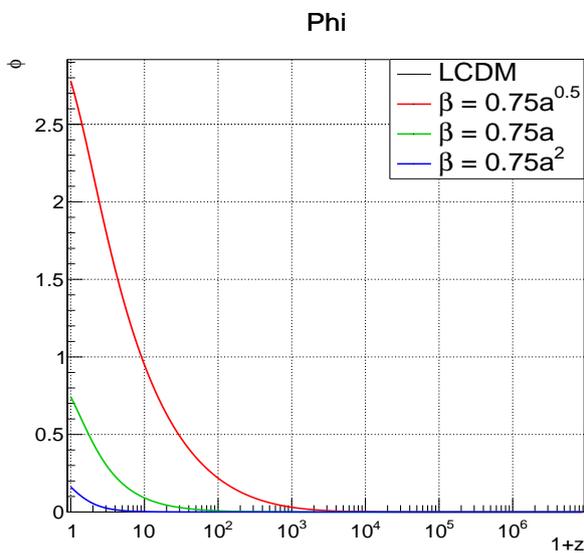
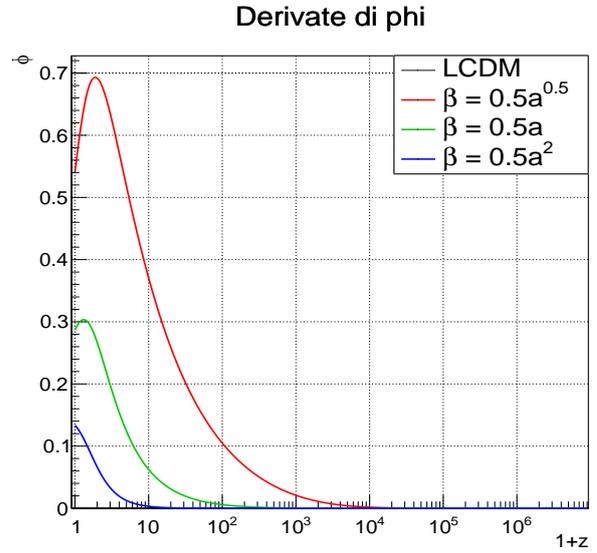
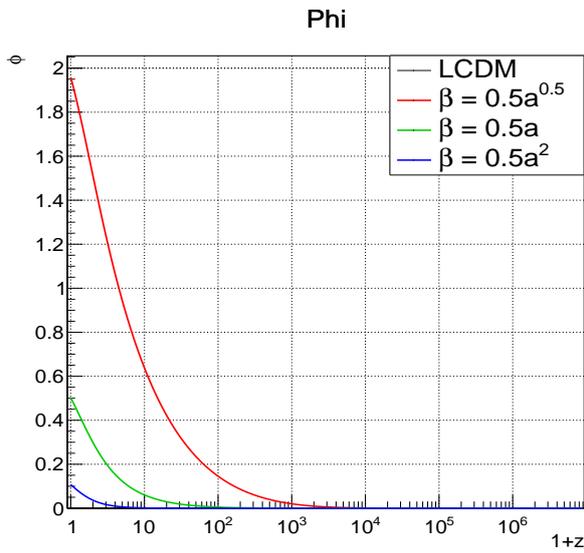


Figura 3.7: *Evoluzione dei parametri di densità  $\Omega_i$  di radiazione (linea continua), materia (linea tratto-punto) ed energia oscura (linea tratteggiata) nel modello di Barros et al. con accoppiamento variabile per tre diversi valori di  $\beta_0$ . In nero sono rappresentati i valori per il modello  $\Lambda$ CDM corrispondenti a  $\beta=0$ , in rosso i valori del modello con accoppiamento per  $\beta_1 = 0.5$ , in verde per  $\beta_1 = 1$  e in blu per  $\beta_1 = 2$ .*

### 3.3.2 Altre quantità di background



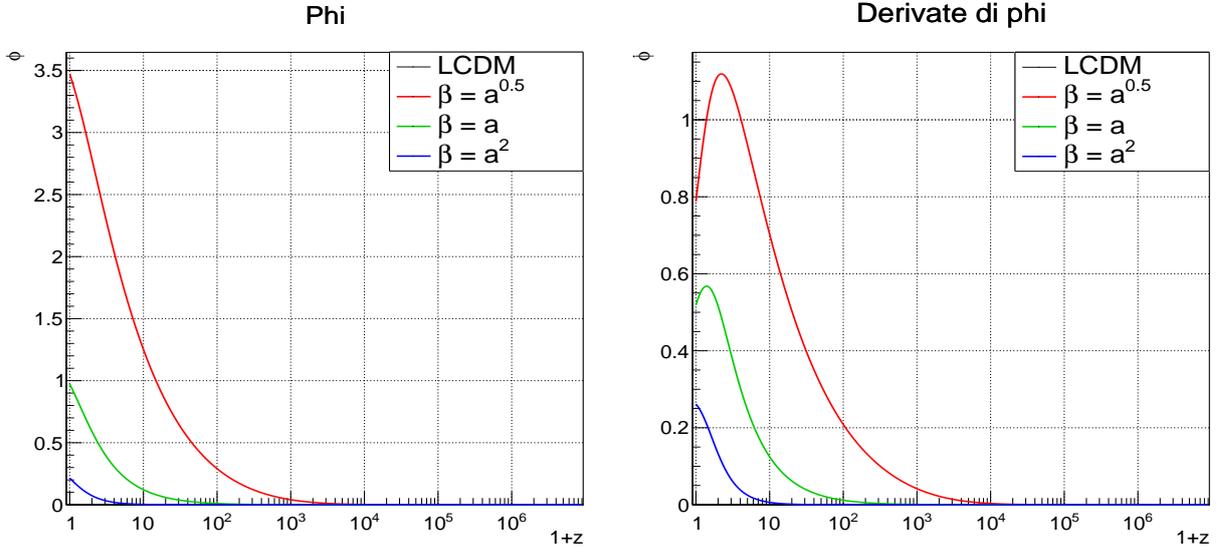


Figura 3.9: Nella prima colonna è rappresentato l'andamento del campo scalare  $\phi$  in funzione del redshift per diversi valori di  $\beta(a)$ , nella seconda colonna la sua derivata temporale.

In Figura 3.9 è mostrata l'evoluzione del campo scalare  $\phi$  e della sua derivata per diversi valori del coupling. Similmente a quanto accade in Figura 3.4, salta subito all'occhio che, sia per  $\phi$  che per la sua derivata, l'accoppiamento scelto rende le curve molto piccate tra  $z=0$  e  $z=2$  e tendono ad annullarsi più rapidamente di quanto accade per il modello a coupling costante. Inoltre, in Fig.3.4 le curve tendono tutte ad annullarsi attorno agli stessi valori di redshift (ordine di grandezza di  $z = 10^4$ ) mentre nei grafici in Fig.3.9 questo non accade, data la forte dipendenza del coupling dal fattore scala. È da notare che il massimo si sposta verso redshift più bassi all'aumentare di  $\beta_1$ . Il significato fisico del massimo è quello della transizione tra la *matter dominated era* e la *dark energy dominated era*, pertanto più piccoli sono i valori di  $\beta_1$  e maggiore è il redshift a cui l'energia oscura ha iniziato a dominare l'universo. Per  $\beta_1$  molto grandi invece l'intensità di accoppiamento è molto debole e il modello tende a  $\Lambda$ CDM.

In Figura 3.10 si trovano i rapporti tra i parametri di abbondanza della materia oscura del modello  $\Lambda$ CDM e di quello con accoppiamento variabile nel tempo. Consistentemente con quanto accade anche nel modello a coupling costante (si veda Fig.3.4), l'aumento del redshift tende a normalizzare a 1 il valore dei rapporti  $\Omega_c/\Omega_{cdm}$  con rapidità dipendente dall'intensità degli accoppiamenti.

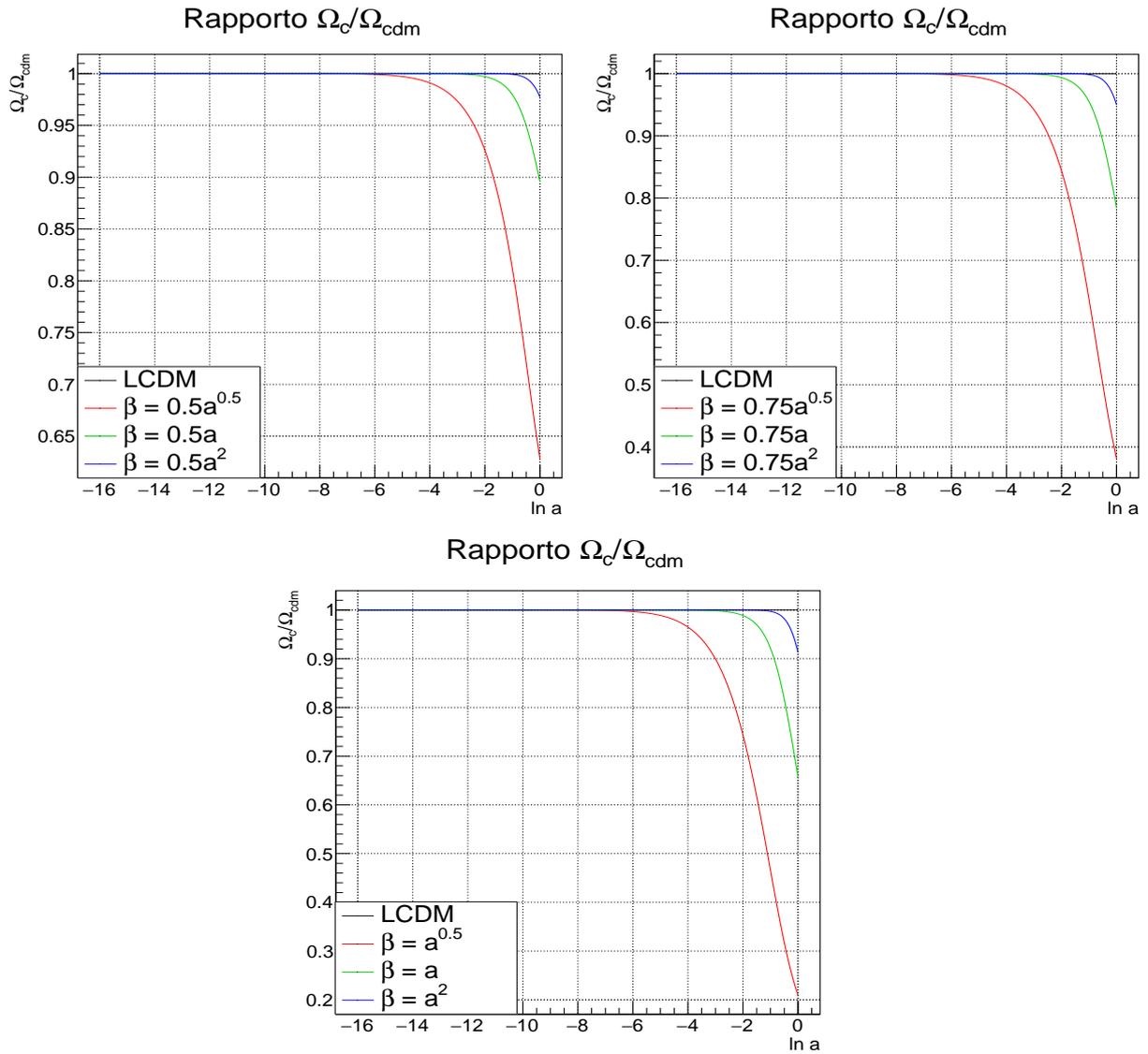


Figura 3.10: *Evoluzione del rapporto  $\Omega_c/\Omega_{\text{cdm}}$  per diversi coupling  $\beta(a)$  in funzione di  $N := \ln a$ .*

# Conclusioni

Si è proposto un modello di quintessenza caratterizzato da un campo scalare di energia oscura che si accoppia con la materia oscura e barionica, ne sono state poi studiate le caratteristiche principali e sono stati analizzati gli andamenti delle quantità di background di maggior interesse al variare dell'intensità dell'accoppiamento, mostrando come il modello è in grado di alleviare le tensioni di  $\sigma_8$ , come già noto in [19]. Le considerazioni risultanti dalla soluzione numerica delle equazioni del campo scalare e delle fluttuazioni di densità, fissato il background cosmologico di  $\Lambda$ CDM, hanno mostrato che in questo modello la formazione delle strutture è soppressa dall'azione dell'energia oscura consistentemente con i risultati già noti in [21]. Inoltre, l'applicazione di correzioni sul vincolo del background cosmologico ha rivelato un cambiamento nella geometria dell'universo (come confermato dall'analisi dei parametri di densità  $\Omega$ ) che ha portato ad un'ulteriore rallentamento della formazione delle strutture cosmiche. Tuttavia è stato mostrato come questo approccio puramente fenomenologico adottato per ridurre le tensioni sulla costante di Hubble debba essere studiato più a fondo in quanto potrebbe non essere consistente con le equazioni del modello in esame. Si è poi considerato un coupling dipendente dal tempo nella forma  $\beta(a) = \beta_0 \cdot a^{\beta_1}$  e si è studiato il background del modello così ottenuto. I nuovi risultati ottenuti sembrano essere consistenti con quanto atteso e in particolare mostrano che gli effetti dell'accoppiamento si fanno evidenti a redshift più bassi di quanto accade per gli accoppiamenti costanti, come è ben chiaro dai grafici in Sezione 3.3 osservando i grafici degli  $\Omega$ . I grafici riguardanti l'analisi del campo scalare hanno mostrato come alla diminuzione  $\beta_1$  corrisponde un campo scalare più intenso attorno a  $z=0$  e  $z=2$ . Infine, i grafici sull'evoluzione del rapporto  $\Omega_c/\Omega_{cdm}$  per diversi coupling  $\beta(a)$  hanno confermato che il valore del rapporto tende a 1 con rapidità dipendente dall'intensità del coupling. I recenti studi in [22] hanno mostrato come un accoppiamento variabile nel tempo che si annulli a redshift alti sembra essere una risposta consistente con le osservazioni, tuttavia il coupling considerato è solo uno dei tanti possibili a soddisfare questo vincolo. Sarebbe interessante anche studiare come evolvono le perturbazioni se si scelgono coupling variabili nel tempo, vista l'importanza che esse hanno nel procurare un riscontro del modello con la realtà osservata.

I modelli con accoppiamento (e in particolare quello di Barros et al.) sembrano essere delle valide alternative al modello  $\Lambda$ CDM, tuttavia anch'essi lasciano degli interrogativi

ancora aperti. L'energia oscura e la materia oscura sono alcuni degli ingredienti fondamentali per la costruzione di questi modelli, ma la loro esatta natura rimane ignota. La forma degli accoppiamenti è introdotta "a mano" all'interno di questi modelli allo scopo di ottenere dei parametri che riproducano bene i dati osservativi, tuttavia questo approccio non ha un significato fisico vero e proprio e i problemi teorici che stanno alla base dell'energia oscura sono ancora molti. L'energia associata alla quintessenza, così come quella della costante cosmologica, è estremamente bassa ( $m_\phi < 10^{-33} eV$ ) [23] e se, per la spiegazione di questo fatto, ci fosse sotto una nuova fisica delle basse energie, allora la si dovrebbe osservare anche in altri esperimenti. Risulta quindi difficile capire quale sia la vera natura della quintessenza e i numerosi tentativi di capirne l'entità che, utilizzando i dati osservativi come vincolo, sono volti a spiegare il grande mistero dell'attuale accelerazione dell'espansione cosmica sono ancora lontani dal dare una risposta definitiva.

# Appendice A

## Correzione alla funzione di Hubble

Sia  $\alpha$  il termine correttivo. L'equazione 2.15 assume quindi la seguente forma:

$$H^2 = H_{\Lambda CDM}^2(1 + \alpha)^2 \quad (\text{A.1})$$

Esplicitando il parametro di Hubble e sviluppando i termini di densità e pressione delle varie specie si ottiene

$$\rho_\phi + \rho_c + \rho_r + \rho_b = (1 + \alpha)^2(\rho_\Lambda + \rho_{cdm} + \rho_r + \rho_b)$$

in cui si svolge il quadrato del termine moltiplicativo al secondo membro e si eliminano i termini di densità di radiazione e barioni

$$\rho_\phi + \rho_c - \rho_\Lambda - \rho_{cdm} = \alpha(\alpha + 2)(\rho_{\Lambda CDM}). \quad (\text{A.2})$$

In analogia con quanto fatto per il modello di Barros, si procede con la derivata rispetto al tempo dell'Eq.A.1:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = \left( \frac{\ddot{a}_{\Lambda CDM}}{a_{\Lambda CDM}} - H_{\Lambda CDM}^2 \right) (1 + \alpha) + \dot{\alpha} H_{\Lambda CDM}.$$

Usando la precedente equazione di Friedmann, si riscrivono i membri dell'equazione

$$\rho + p = (\rho_{\Lambda CDM} + p_{\Lambda CDM})(1 + \alpha) - \frac{\dot{\alpha} H_{\Lambda CDM}}{4\pi G}$$

$$\rho_\phi + \rho_c + \rho_r + \rho_b + p = \rho_\Lambda + \rho_{cdm} + \rho_r + \rho_b + \alpha\rho_{\Lambda CDM} + p_{\Lambda CDM}(1 + \alpha) - \frac{\dot{\alpha} H_{\Lambda CDM}}{4\pi G}.$$

Si sostituiscono le condizioni  $p_c = 0$  e  $p_{cdm} = 0$  e si elidono i termini relativi a radiazione e barioni:

$$\rho_\phi + \rho_c - \rho_\Lambda - \rho_{cdm} = \alpha(\rho_{\Lambda CDM} + p_{\Lambda CDM}) + p_\Lambda - p_\phi - \frac{\dot{\alpha} H_{\Lambda CDM}}{4\pi G}. \quad (\text{A.3})$$

Si riconosce al primo membro dell'equazione l'espressione di Eq.A.2:

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha + 2)\rho_{\Lambda CDM} &= \alpha(\rho_{\Lambda CDM} + p_{\Lambda CDM}) + p_{\Lambda} - p_{\phi} - \frac{\dot{\alpha}H_{\Lambda CDM}}{4\pi G} \\ \alpha^2\rho_{\Lambda CDM} + 2\alpha\rho_{\Lambda CDM} &= \alpha\rho_{\Lambda CDM} + \alpha p_{\Lambda CDM} - p_{\phi} + p_{\Lambda} - \frac{\dot{\alpha}H_{\Lambda CDM}}{4\pi G} \\ \alpha(\alpha + 1)\rho_{\Lambda CDM} &= \alpha p_{\Lambda CDM} - p_{\phi} + p_{\Lambda} - \frac{\dot{\alpha}H_{\Lambda CDM}}{4\pi G}.\end{aligned}$$

Si aggiunge la quantità  $\rho_{\phi}$  in entrambi i membri dell'equazione e si riconosce l'espressione di  $\dot{\phi}^2$ . Ricordando che  $\rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda}$ :

$$\dot{\phi}^2 = \alpha[p_{\Lambda CDM} - \rho_{\Lambda CDM}(\alpha + 1)] + \rho_{\phi} - \rho_{\Lambda} - \frac{\dot{\alpha}H_{\Lambda CDM}}{4\pi G}.$$

Riutilizzando l'Eq.A.2,

$$\dot{\phi}^2 = \alpha p_{\Lambda CDM} - \alpha(\alpha + 1)\rho_{\Lambda CDM} + \alpha(\alpha + 2)\rho_{\Lambda CDM} + \rho_{\Lambda} + \rho_{cdm} - \rho_c - \rho_{\Lambda} - \frac{\dot{\alpha}H_{\Lambda CDM}}{4\pi G}$$

da cui

$$\dot{\phi}^2 = \alpha(p_{\Lambda CDM} + \rho_{\Lambda CDM}) + \rho_{cdm} - \rho_c - \frac{\dot{\alpha}H_{\Lambda CDM}}{4\pi G}. \quad (\text{A.4})$$

Si esplicita il termine correttivo: la correzione in esame è una legge a potenza nella forma  $\alpha = Ma(t)^N$  con  $M, N \in \mathbb{R}$  costanti stimate dal fit con i dati osservativi. Si ricerca la forma esplicita per la derivata temporale della correzione:

$$\dot{\alpha} = NMa^N \frac{\dot{a}}{a} = NH\alpha = NH_{\Lambda CDM}(1 + \alpha), \quad (\text{A.5})$$

da cui si ricava anche l'espressione per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= N(\dot{H}\alpha + \dot{\alpha}H) = N \left[ \alpha \left( \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \right) + H\dot{\alpha} \right] \\ &= N\alpha \left[ \frac{\ddot{a}}{a} - H^2(1 - N) \right].\end{aligned}$$

Recuperando l'equazione di Friedmann, l'equazione della derivata seconda diventa

$$\ddot{\alpha} = N\alpha [-4\pi G(\rho + p) + NH^2]. \quad (\text{A.6})$$

Si calcola ora la derivata temporale dell'ultimo termine dell'Eq.A.4:

$$\frac{1}{4\pi G} \left( \ddot{\alpha}H_{\Lambda CDM} + \dot{\alpha}\dot{H}_{\Lambda CDM} \right) = \frac{1}{4\pi G} \left[ \ddot{\alpha}H_{\Lambda CDM} + \dot{\alpha} \left( \frac{\ddot{a}_{\Lambda CDM}}{a_{\Lambda CDM}} - H_{\Lambda CDM}^2 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha NH(p_{\Lambda CDM} + \rho_{\Lambda CDM}) - \alpha NH_{\Lambda CDM} \left( p + \rho + \frac{NH^2}{4\pi G} \right) \\
&= -\alpha N \left[ H(p_{\Lambda CDM} + \rho_{\Lambda CDM}) + H_{\Lambda CDM} \left( p + \rho + \frac{N}{3}\rho \right) \right]
\end{aligned}$$

Si calcola infine la derivata temporale dell'equazione A.4

$$\begin{aligned}
2\ddot{\phi}\dot{\phi} &= NH\alpha(p_{\Lambda CDM} + \rho_{\Lambda CDM}) + \alpha(\dot{p}_{\Lambda CDM} + \dot{\rho}_{\Lambda CDM}) \\
&+ \dot{\rho}_{cdm} - \dot{\rho}_c + \alpha N \left[ H(p_{\Lambda CDM} + \rho_{\Lambda CDM}) + H_{\Lambda CDM} \left( p + \rho + \frac{N}{3}\rho \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.7}$$

da cui

$$\begin{aligned}
2\ddot{\phi}\dot{\phi} &= 2NH\alpha(p_{\Lambda CDM} + \rho_{\Lambda CDM}) + \alpha(\dot{p}_{\Lambda CDM} + \dot{\rho}_{\Lambda CDM}) \\
&+ \dot{\rho}_{cdm} - \dot{\rho}_c + \alpha NH_{\Lambda CDM} \left( p + \rho + \frac{N}{3}\rho \right).
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Sapendo che dall'equazione di continuità  $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$ , si estrae  $\dot{\rho}_{\Lambda CDM}$  dal primo termine dell'equazione e si ottiene

$$\begin{aligned}
2\ddot{\phi}\dot{\phi} &= \alpha \left[ \dot{\rho}_{\Lambda CDM} \left( 1 - \frac{2N(\alpha + 1)}{3} \right) + \dot{p}_{\Lambda CDM} \right] + \dot{\rho}_{cdm} - \dot{\rho}_c \\
&+ \alpha NH_{\Lambda CDM} \left( p + \rho + \frac{N}{3}\rho \right).
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Questa è la nuova equazione di Klein-Gordon per una funzione di Hubble corretta con il termine  $\alpha = Ma(t)^N$ .

# Appendice B

## Il codice C

Di seguito è riportato il codice, scritto in C, utilizzato per eseguire la risoluzione delle equazioni del modello di quintessenza con correzione a potenza.[19]

```
#include <stdio.h>
#include <gsl/gsl_errno.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#include <gsl/gsl_odeiv.h>
#include <math.h>

#include "model.txt"
#include "parameters.txt"

extern double x_0, H_0, phi_0;

int func (double t, const double y[], double f[], void *params /*puntatore a parametri arbitrari*/) {

    double y0 = *(double *)params;
    double x_0, H_0, phi_0; //initialized in initial_condition.c
    double E, Einv, Omega_CDM, Omc, Omb, Omr, Omde;

    Omega_CDM = 1.-Omega_b-Omega_r-Omega_DE;
    E = Omega_b*exp(-3.*t) + Omega_CDM*exp(-3.*t) + Omega_r*exp(-4.*t) + Omega_DE;
    Einv = 1./E;
    Omc = Omega_CDM * exp(-3.*t) / E;
    Omb = Omega_b * exp(-3.*t) / E;
    Omr = Omega_r * exp(-4.0*t) / E;
    Omde = Omega_DE / E;

    // BACKGROUND

    // f == equazione vettoriale ricercata

    f[0] = -0.5*y[0]*(3.0*Omega_DE/(Omega_b*exp(-3.*t) + Omega_CDM*exp(-3.*t) + Omega_r*exp(-4.*t)
    + Omega_DE) - Omega_r*exp(-4.*t)/(Omega_b*exp(-3.*t) + Omega_CDM*exp(-3.*t)
    + Omega_r*exp(-4.*t) + Omega_DE) + beta_c*y[0]) +
    1.5*beta_c*Omega_CDM*exp(-3.*t)/(Omega_b*exp(-3.*t) + Omega_CDM*exp(-3.*t) +
    Omega_r*exp(-4.*t) + Omega_DE); // Eq. for x

    f[1] = y[0]; //Eq. for phi
```

```

// PERTURBATIONS

f[2] = +y[3] - 2.0*bc_prime* lambda*lambda * (beta_c*(Omc-y[0]*y[0]/3.))/(1.0+
lambda*lambda*(m2_phi+m2_beta))*y[2];

f[3] = -(2.0 - 0.5 * (-3.0*Omde + Omr + 3.0) - 2.0 * beta_c * y[0])*y[3] + 1.5*( Omb*y[4] +
(Omc-(y[0]*y[0]/3.))*(1.0+4.0*beta_c*beta_c/3.0)
*(1.0/(1.0+lambda*lambda*(m2_phi+m2_beta)))*y[2] );

f[4] = +y[5]; // Theta_b

f[5] = -(2.0 - 0.5 * (-3.0*Omde + Omr + 3.0))*y[5] + 1.5*(Omb*y[4] +
(Omc-(y[0]*y[0]/3.))*(1.0+4.0*beta_b*beta_c/3.0)*(1.0/(1.0+lambda*lambda*(m2_phi+m2_beta)))*y[2]);

return GSL_SUCCESS;
}

int main (void) {

double abserr = 0.0;
double relerr = 1.0e-15;
FILE *FoutDM;
FILE *Foutbar;
FILE *Foutall;
FILE *Fcheck;
FILE *Fdelta;
FILE *Fout;
FILE *Fsigma;

double x_0, y_0, z_0, v_0, H_0, phi_0;
double delta_c_0, delta_b_0, Theta_c_0, Theta_b_0;
double t, t1, h, t_start;
double Omc, Omb, Omr, Omde, dmc, dmb;
double dOmb;
double dOmc;
double dinv;

/* Set up the initial conditions for the integration */

t_start=-16.;
t1 = 0.0;
h = 1.0e-15;
t=t_start;

/* set by hand for LCDM */
double H_new;
double Omega_CDM;
Omega_CDM = 1.-Omega_DE-Omega_b-Omega_r;
H_0 = sqrt((Omega_CDM+Omega_b)*exp(-3.0*t) + Omega_r*exp(-4.0*t) + Omega_DE);
x_0 = 0.0;
phi_0= 1.e-12;
delta_c_0 = Theta_c_0 = 1e-04;
delta_b_0 = Theta_b_0 = 0.03*delta_c_0;

/* Allocating GSL variables ... */
const gsl_odeiv_step_type * T = gsl_odeiv_step_rk4;

gsl_odeiv_step * s = gsl_odeiv_step_alloc (T, 6);
gsl_odeiv_control * c = gsl_odeiv_control_y_new (abserr, relerr);
gsl_odeiv_evolve * e = gsl_odeiv_evolve_alloc (6);

```

```

double y0 = x_0;

int *p;
p = 0;

gsl_odeiv_system sys = {func, p, 6, &y0}; //definisce un sistema di equazioni
//ODE con parametri arbitrari

double y[6] = { x_0, phi_0, delta_c_0, Theta_c_0, delta_b_0, Theta_b_0};

/*writing different files for different couplings*/

if(beta_0==0.00){
Fcheck = fopen(bufcheck, "w");
}
////////////////////////////////////
/*beta_0 = 0.5 for not constant coupling analysis*/
else if (beta_0==0.03) {

    if (beta_1 == 0.5) {

        Fcheck = fopen(bufcheck3a3, "w");

    } else if (beta_1 == 1){

        Fcheck = fopen(bufcheck3a5, "w");

    } else if (beta_1 == 2){

        Fcheck = fopen(bufcheck3a8, "w");

    } else if (beta_1 == 0){

        Fcheck = fopen(bufcheck3, "w");

    }

}
////////////////////////////////////
/*beta_0 = 0.75 for not constant coupling analysis*/
else if (beta_0==0.05) {

    if (beta_1 == 0.5) {

        Fcheck = fopen(bufcheck5a3, "w");

    } else if (beta_1 == 1){

        Fcheck = fopen(bufcheck5a5, "w");

    } else if (beta_1 == 2){

        Fcheck = fopen(bufcheck5a8, "w");

    } else if (beta_1 == 0){

        Fcheck = fopen(bufcheck5, "w");

    }

}
////////////////////////////////////
/*beta_0 = 1 for not constant coupling analysis*/

```

```

else if (beta_0==0.08) {
    if (beta_1 == 0.5) {
        Fcheck = fopen(bufcheck8a3,"w");
    } else if (beta_1 == 1){
        Fcheck = fopen(bufcheck8a5,"w");
    } else if (beta_1 == 2){
        Fcheck = fopen(bufcheck8a8,"w");
    } else if (beta_1 == 0){
        Fcheck = fopen(bufcheck8,"w");
    }
}
////////////////////////////////////
while (t < t1) { /* Integrate the system */
    int status = gsl_odeiv_evolve_apply (e, c, s, &sys, &t, t1, &h, y);
    if (status != GSL_SUCCESS) {
        printf("GSL_FAIL!\n");
        break;
    }

    H_new=sqrt((Omega_CDM+Omega_b)*exp(-3.0*t) + Omega_r*exp(-4.0*t) + Omega_DE)
    *(1+ Module_power*pow((exp(t)),Phase_power) );

    Omc = Omega_CDM * exp(-3.*t) / (H_new*H_new);
    Omb = Omega_b * exp(-3.*t) / (H_new*H_new);
    Omr = Omega_r * exp(-4.*t) / (H_new*H_new);
    Omde = Omega_DE / (H_new*H_new);

    if(1./exp(t) > 1100) { /* The initial conditions for perturbations are at
    Last Scattering, z=1100 */
        y[2] = delta_c_0;
        y[3] = Theta_c_0;
        y[4] = delta_b_0;
        y[5] = Theta_b_0;
    }

    fprintf(Fcheck, "%5e-%5e-%5e-%5e-%5e-%5e-%5e-%5e-\n",
        t, H_new, Omc, Omb, Omr, Omde, y[0], y[1]);
}

fclose(Fcheck);
double dc_0 = y[2];
double db_0 = y[4];

/*writing different files for different couplings*/

////////////////////////////////////
if(beta_0==0.00){
FoutDM = fopen(bufDM,"w");
Foutbar = fopen(bufbar,"w");
Foutall = fopen(bufall,"w");
}

```

```

Fdelta = fopen(bufdelta, "w");
Fout = fopen(bufout, "w");
Fsigma = fopen(bufsigma, "w");
}
////////////////////////////////////
/*beta_0 == 0.5 for not constant coupling analysis*/
else if (beta_0 == 0.03) {

    if (beta_1==0.5) {

        FoutDM = fopen(bufDM3a3, "w");
        Foutbar = fopen(bufbar3a3, "w");
        Foutall = fopen(bufall3a3, "w");
        Fdelta = fopen(bufdelta3a3, "w");
        Fout = fopen(bufout3a3, "w");
        Fsigma = fopen(bufsigma3a3, "w");

    } else if (beta_1 == 1){

        FoutDM = fopen(bufDM3a5, "w");
        Foutbar = fopen(bufbar3a5, "w");
        Foutall = fopen(bufall3a5, "w");
        Fdelta = fopen(bufdelta3a5, "w");
        Fout = fopen(bufout3a5, "w");
        Fsigma = fopen(bufsigma3a5, "w");

    } else if (beta_1 == 2){

        FoutDM = fopen(bufDM3a8, "w");
        Foutbar = fopen(bufbar3a8, "w");
        Foutall = fopen(bufall3a8, "w");
        Fdelta = fopen(bufdelta3a8, "w");
        Fout = fopen(bufout3a8, "w");
        Fsigma = fopen(bufsigma3a8, "w");

    } else if (beta_1 == 0) {

        FoutDM = fopen(bufDM3, "w");
        Foutbar = fopen(bufbar3, "w");
        Foutall = fopen(bufall3, "w");
        Fdelta = fopen(bufdelta3, "w");
        Fout = fopen(bufout3, "w");
        Fsigma = fopen(bufsigma3, "w");

    }
}
////////////////////////////////////
/*beta_0 == 0.75 for not constant coupling analysis*/
else if (beta_0 == 0.05) {

    if (beta_1 == 0.5) {

        FoutDM = fopen(bufDM5a3, "w");
        Foutbar = fopen(bufbar5a3, "w");
        Foutall = fopen(bufall5a3, "w");
        Fdelta = fopen(bufdelta5a3, "w");
        Fout = fopen(bufout5a3, "w");
        Fsigma = fopen(bufsigma5a3, "w");

    } else if (beta_1==1){

        FoutDM = fopen(bufDM5a5, "w");
        Foutbar = fopen(bufbar5a5, "w");

```

```

Foutall = fopen(bufall5a5, "w");
Fdelta = fopen(bufdelta5a5, "w");
Fout = fopen(bufout5a5, "w");
Fsigma = fopen(bufsigma5a5, "w");

} else if (beta_1==2){

FoutDM = fopen(bufDM5a8, "w");
Foutbar = fopen(bufbar5a8, "w");
Foutall = fopen(bufall5a8, "w");
Fdelta = fopen(bufdelta5a8, "w");
Fout = fopen(bufout5a8, "w");
Fsigma = fopen(bufsigma5a8, "w");

} else if (beta_1 == 0) {

    FoutDM = fopen(bufDM5, "w");
    Foutbar = fopen(bufbar5, "w");
    Foutall = fopen(bufall5, "w");
    Fdelta = fopen(bufdelta5, "w");
    Fout = fopen(bufout5, "w");
    Fsigma = fopen(bufsigma5, "w");
}
}

////////////////////////////////////
/*beta_0 == 1 for not constant coupling analysis*/
else if (beta_0==0.08) {

    if (beta_1 == 0.5) {

        FoutDM = fopen(bufDM8a3, "w");
        Foutbar = fopen(bufbar8a3, "w");
        Foutall = fopen(bufall8a3, "w");
        Fdelta = fopen(bufdelta8a3, "w");
        Fout = fopen(bufout8a3, "w");
        Fsigma = fopen(bufsigma8a3, "w");

    } else if (beta_1 == 1){

        FoutDM = fopen(bufDM8a5, "w");
        Foutbar = fopen(bufbar8a5, "w");
        Foutall = fopen(bufall8a5, "w");
        Fdelta = fopen(bufdelta8a5, "w");
        Fout = fopen(bufout8a5, "w");
        Fsigma = fopen(bufsigma8a5, "w");

    } else if (beta_1 == 2){

        FoutDM = fopen(bufDM8a8, "w");
        Foutbar = fopen(bufbar8a8, "w");
        Foutall = fopen(bufall8a8, "w");
        Fdelta = fopen(bufdelta8a8, "w");
        Fout = fopen(bufout8a8, "w");
        Fsigma = fopen(bufsigma8a8, "w");

    } else if (beta_1 == 0) {

        FoutDM = fopen(bufDM8, "w");
        Foutbar = fopen(bufbar8, "w");
        Foutall = fopen(bufall8, "w");
        Fdelta = fopen(bufdelta8, "w");
    }
}

```

```

        Fout = fopen(bufout8, "w");
        Fsigma = fopen(bufsigma8, "w");
    }
}

////////////////////////////////////

int iout;
double deltat=0.005;
double fbar, fDM;

for(iout=2000;iout>=0;iout--) { /* We choose the frequency of the output */

    t1=iout*deltat;

    printf("Running until t1=%g\n",t1);

    if(iout == 0) {t1 = 0.0;}
    /* Reset the initial conditions for the final integrations */

    y[0] = x_0;
    y[1] = phi_0;
    y[2] = delta_c_0;
    y[3] = Theta_c_0; //dovrebbe essere la derivata(?)
    y[4] = delta_b_0;
    y[5] = Theta_b_0;

    t = t_start;
    h = 1.0e-15;

    while (t < t1) { /* Integrate the system */

        int status = gsl_odeiv_evolve_apply (e, c, s, &sys, &t, t1, &h, y); //evolve the
        //system using the step function starting from y at time t and giving
        // the new y and the new t from the next step

        if (status != GSL_SUCCESS) {break;}

        H_new=sqrt((Omega_CDM+Omega_b)*exp(-3.0*t) + Omega_r*exp(-4.0*t) + Omega_DE)
        *(1+ Module_power*pow((exp(t)), Phase_power) );
        Omc = Omega_CDM * exp(-3.*t) / (H_new*H_new);
        Omb = Omega_b * exp(-3.*t) / (H_new*H_new);
        Omr = Omega_r * exp(-4.0*t) / (H_new*H_new);
        Omde = Omega_DE / (H_new*H_new);

        if(1./exp(t) > 1100) { /* The initial conditions for cdm mass in function of redshift
        perturbations are at Last Scattering, z=1100 */

            y[2] = delta_c_0;
            y[3] = Theta_c_0;
            y[4] = delta_b_0; //y[2]; //*0.747828; //CIDE008
            y[5] = Theta_b_0; //y[3]; //*0.747828; //CIDE008
        }

    }

    fbar =Omb/(Omb+Omc-y[0]*y[0]/3.);
    fDM = (Omc-y[0]*y[0]/3.)/(Omb+Omc-y[0]*y[0]/3.);

    if(1./exp(t) <= 1200) {

```

```

    fprintf(FoutDM, "%.10e_%.10e_%.10e\n", 1.0/(exp(t)), y[2]/dc_0/exp(t), H_new);
    fprintf(Foutbar, "%.10e_%.10e_%.10e\n", 1.0/(exp(t)), y[4]/db_0/exp(t), H_new);
    fprintf(Foutall, "%.7e_%.7e_%.7e\n", 1.0/(exp(t)), (y[2]/dc_0/exp(t)) * fDM +
        (y[4]/db_0/exp(t)) * fbar, H_new);
    fprintf(Fdelta, "%.7e_%.7e\n", 1.0/exp(t), (y[2]/dc_0) * fDM + (y[4]/db_0) * fbar);
    fprintf(Fsigma, "%.10e_%.10e_%.10e\n", 1.0/(exp(t)), (Omc*y[2]+Omb*y[4])/(Omc+Omb),
        (y[3]/dc_0) * fDM + (y[5]/db_0) * fbar );
}

if (1./exp(t) <= z_table_max) {
    dmc=(Omc-y[0]*y[0]/3.)/Omc;
    dmb=1.0;
    printf("%5e\n", t);
    fprintf(Fout, "%.5e_%.5e_%.5e_%.5e_%.5e_%.5e_%.5e_%.5e_%.5e\n", 1./exp(t),
        1.0, 1.0, 1.0, 0.1*H_new, beta_b, beta_c, dmc, dmb, y[0]);
}

}

fclose(FoutDM);
fclose(Foutbar);
fclose(Foutall);
fclose(Fdelta);
fclose(Fsigma);
fclose(Fout);

gsl_odeiv_evolve_free (e); /* Free the GSL functions */
gsl_odeiv_control_free (c); // libera la memoria associata alla funzione di controllo c
gsl_odeiv_step_free (s); // libera la memoria associata alla funzione di step s

printf(" All_Done_.\n");

return 0;

}

```

# Bibliografia

- [1] F. Zwicky. “Nebulae as Gravitational Lenses”. In: *Phys. Rev.* 51 (4 1937), pp. 290–290. DOI: 10.1103/PhysRev.51.290. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.290>.
- [2] T. S. van Albada et al. “Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198.” In: *Astrophysical Journal* 295 (ago. 1985), pp. 305–313. DOI: 10.1086/163375.
- [3] Bharat Ratra e P. J. E. Peebles. “Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field”. In: *Phys. Rev. D* 37 (12 1988), pp. 3406–3427. DOI: 10.1103/PhysRevD.37.3406. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.37.3406>.
- [4] C. Wetterich. “Cosmology and the fate of dilatation symmetry”. In: *Nuclear Physics B* 302.4 (1988), pp. 668–696. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(88\)90193-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90193-9). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321388901939>.
- [5] Christoph Wetterich. “The cosmon model for an asymptotically vanishing time-dependent cosmological “constant””. In: (1994). DOI: 10.48550/ARXIV.HEP-TH/9408025. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/9408025>.
- [6] Adam G. Riess et al. “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”. In: *The Astronomical Journal* 116.3 (1998), p. 1009. DOI: 10.1086/300499. URL: <https://dx.doi.org/10.1086/300499>.
- [7] Luca Amendola. “Coupled quintessence”. In: *Phys. Rev. D* 62 (4 2000), p. 043511. DOI: 10.1103/PhysRevD.62.043511. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.043511>.
- [8] P. J. E. Peebles e Bharat Ratra. “The cosmological constant and dark energy”. In: *Reviews of Modern Physics* 75.2 (2003), pp. 559–606. DOI: 10.1103/revmodphys.75.559. URL: <https://doi.org/10.1103/revmodphys.75.559>.

- [9] José Carlos N. de Araujo. “The dark energy–dominated Universe”. In: *Astroparticle Physics* 23.2 (2005), pp. 279–286. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2004.12.004. URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.astropartphys.2004.12.004>.
- [10] et al. (WMAP Collaboration) D. N. Spergel. In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 170 (2007), pp. 377–408. DOI: 10.1103/physrevd.62.043511. URL: [https://www.scirp.org/\(S\(351jmbntvnsjt1aadkposzje\)\)/reference/referencespapers.aspx?referenceid=915415](https://www.scirp.org/(S(351jmbntvnsjt1aadkposzje))/reference/referencespapers.aspx?referenceid=915415).
- [11] Tommaso Treu. “Strong Lensing by Galaxies”. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 48.1 (2010), pp. 87–125. DOI: 10.1146/annurev-astro-081309-130924. URL: <https://doi.org/10.1146%2Fannurev-astro-081309-130924>.
- [12] Ruth Durrer. “What do we really know about dark energy?” In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 369.1957 (2011), pp. 5102–5114. DOI: 10.1098/rsta.2011.0285. URL: <https://doi.org/10.1098%2Frsta.2011.0285>.
- [13] Valerio Faraoni. “Correspondence between a scalar field and an effective perfect fluid”. In: *Phys. Rev. D* 85 (2 2012), p. 024040. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.024040. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.024040>.
- [14] Annika H. G. Peter. *Dark Matter: A Brief Review*. 2012. DOI: 10.48550/ARXIV.1201.3942. URL: <https://arxiv.org/abs/1201.3942>.
- [15] Ewan R. M. Tarrant et al. “Coupled quintessence and the halo mass function”. In: *Physical Review D* 85.2 (2012). DOI: 10.1103/physrevd.85.023503. URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.85.023503>.
- [16] Luca Amendola, Tiago Barreiro e Nelson J. Nunes. “Multifield coupled quintessence”. In: *Phys. Rev. D* 90 (8 2014), p. 083508. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.083508. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.083508>.
- [17] Planck Collaboration et al. “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters”. In: (2015). DOI: 10.48550/ARXIV.1502.01589. URL: <https://arxiv.org/abs/1502.01589>.
- [18] Imanol Albarran, Mariam Bouhmadi-López e João Morais. “Cosmological perturbations in an effective and genuinely phantom dark energy Universe”. In: *Physics of the Dark Universe* 16 (2017), pp. 94–108. DOI: 10.1016/j.dark.2017.04.002. URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.dark.2017.04.002>.
- [19] Bruno J. Barros et al. “Coupled quintessence with a  $\Lambda$ CDM background: removing the  $\sigma_8$  tension”. In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2019.01 (2019), pp. 007–007. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/01/007. URL: <https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2019%2F01%2F007>.

- [20] Adam G. Riess et al. “Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond  $\Lambda_{CDM}$ ”. In: *The Astrophysical Journal* 876.1 (2019), p. 85. DOI: 10.3847/1538-4357/ab1422. URL: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab1422>.
- [21] Marco Baldi. *The CIDER simulations: Nonlinear structure formation in the Constrained Interacting Dark Energy Scenario*. 2022. DOI: 10.48550/ARXIV.2207.11258. URL: <https://arxiv.org/abs/2207.11258>.
- [22] Bruno J. Barros et al. *Is there evidence for CIDER in the Universe?* 2022. DOI: 10.48550/ARXIV.2209.04468. URL: <https://arxiv.org/abs/2209.04468>.
- [23] Hiromasa Nakatsuka, Toshiya Namikawa e Eiichiro Komatsu. “Is cosmic birefringence due to dark energy or dark matter? A tomographic approach”. In: *Physical Review D* 105.12 (2022). DOI: 10.1103/physrevd.105.123509. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevd.105.123509>.
- [24] *GNU Scientific Library - Reference Manual - Ordinary Differential Equations*. URL: [https://www.csse.uwa.edu.au/programming/gsl-1.0/gsl-ref\\_24.html](https://www.csse.uwa.edu.au/programming/gsl-1.0/gsl-ref_24.html).